1. **Числові ряди.**

Нехай маємо нескінчену послідовність елементів

$$U_1, U_2, ..., U_n, ...$$

Означення 1.1. Вираз

$$U_1 + U_2 + ... + U_n + ... \qquad (1.1)$$

називається рядом, а елементи $U_1, U_2, ... U_n$ членами ряду.

Якщо елементи $U_1, U_2, ... U_n, ...$ є числами, то ряд (1.1) називається числовим рядом.

Ряд (1.1) записують також у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \qquad (1.2)$$

де U_n - загальний член ряду як функція номера n.

Означення 1.2. Сума n перших членів ряду (1.1) або (1.2) називається n-ю частиною сумою ряду.

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

$$S_1 = U_1$$

$$S_2 = U_1 + U_2 \qquad (1.3)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n.$$

Означення 1.3. Якщо існує скінченна границя частинних сум ряду:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S, \qquad (1.4)$$

то ряд (1.1) називається збіжним, якщо не існує, то ряд (1.1) називається розбіжним.

Приклад 1.1. Знайти суму ряду:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

(як сума членів геометричної прогресії) $S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

$S=\lim\limits_{n\to}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$. Ряд збіжний.

Приклад 1.2. Знайти суму n перших членів в ряду S_n і дослідити його на збіжність:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

$$U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}=\frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$n=1,2,\ldots$

Прирівнюючи чисельники першого і останнього дробів, маємо тотожність:

$$A(2n+1)+B(2n-1)=1$$

Коефіцієнти при n ліворуч і праворуч у рівності повинні бути рівними:

$$\begin{cases}2A+2B=0; \quad 2A=1; \quad A=1/2.\\ A-B=1; \quad B=-1/2\end{cases}$$

Отже, $U_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

Враховуючи це, запишемо S_n даного ряду:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

Ряд збіжний.

Приклад 1.3.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

S_n при парному n:

$S_2 = 0; \quad S_4 = 0;$
$S_6 = 0; \quad S_{2k} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots;$

S_n при непарному n:

$S_1 = 1; \quad S_3 = 1; \quad S_5 = 1$
$S_{2k-1} = 1; \; k = 1, 2, \ldots$

Отже, границі S_n при $n \to \infty$ не існує, тому ряд розбіжний.

Зауваження. Часто обчислення частинних сум і знаходження їх границь виявляється трудомістким або недоцільним і зайвим. Іноді важливо встановити чи збіжний чи розбіжний є ряд.

Існують ознаки збіжності рядів, які дозволяють встановити факт розбіжності (збіжності) без обчислення їх сум.

Для засвоєння поняття n-го члену ряду частинних сум ряду необхідно виконати завдання 1.

Необхідна ознака збіжності ряду.

Теорема 1.1. Якщо ряд збігається, то його n-ий член прямує до нуля при необмеженому зростанні n. Якщо ця ознака не виконана, то ряд розбіжний. Але не завжди виконання необхідної ознаки збіжності ряду гарантує його збіжність.

Наприклад, гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжним, хоча $U_n = \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ прямує до нуля [1].

Існують ознаки збіжності, виконання яких забезпечує збіжність ряду. Їх називають достатніми умовами.

Для засвоєння необхідної ознаки збіжності ряду треба виконати завдання 2-го додатку.

Достатні ознаки збіжності знакосталого ряду

А. Ознака порівняння.

Нехай маємо два ряди з додатними членами:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \qquad (1.5)$$

та

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots \qquad (1.6)$$

Теорема 1.2 Якщо члени ряду (1.5) не більші за відповідні члени ряду (1.6)

$$U_n \le V_n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

і ряд (1.6) збіжний, то і ряд (1.5) також збіжний.

Теорема 1.3 Якщо члени ряду (1.5) не менші за відповідні члени ряду (1.6) $U_n \ge V_n$ і ряд (1.5) розбіжний, то і ряд (1.6) також розбіжний.

Для засвоєння ознаки порівняння необхідно виконати завдання 2 з додатку.

Б. Інтегральна ознака збіжності ряду (ознака Коші)

Теорема 1.4 Нехай члени ряду

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \tag{1.7}$$

додатні, незростаючі і такі, що $f(1) = U_1; \quad f(2) = U_2, \ldots, f(n) = U_n, \ldots$ тоді справедливе твердження:

1) якщо невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний, то ряд (1.7) теж збіжний;

2) якщо невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ розбіжний, то ряд (1.7) розбіжний.

Приклад 1.4. Дослідити збіжність гармонійного ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Виберемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$, бо $f(1) = 1; \quad f(2) = \frac{1}{2}, \ldots f(n) = \frac{1}{n}$.

Обчислимо невластивий інтеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \ln|x| \Big|_1^A = \infty$$

Отже гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний.

Для засвоєння цієї ознаки необхідно виконати завдання 6 додатку.

В. Ознака Д'Аламбера

Теорема 1.5 Якщо в ряді з додатними членами

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$$

відношення U_{n+1} члену ряду до U_n має границю l, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l,$$

то при $l = 1$ ряд збігається, при $l > 1$ - розбігається. При $l = 1$ питання про збіжність залишається відкритим (інакше кажучи, в цьому випадку ознака Д'Аламбера не працює).

Приклад 1.5 Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Запишемо n-ий і $(n+1)$-ий члени ряду:

$$U_n = \frac{n}{2^n}; \quad U_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{2} < 1$

Отже, даний ряд збігається. Для засвоєння цієї ознаки необхідно виконати завдання 4 додатку.

Г. Радикальна ознака Коші

Теорема 1.6 Якщо для ряду з додатними членами $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$ величина $\sqrt[n]{U_n}$ має скінчену границю l при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд збіжний, при $l > 1$ розбіжний.

Приклад 1.6 Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ln^n n}{4^n}$

$$U_n = \frac{ln^n n}{4^n}; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{ln^n n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln\, n}{4} = \infty$$

ряд розбіжний.

Для засвоєння цієї ознаки необхідно виконати завдання 5 додатку.

Знакозмінні ряди

Означення 1.3 Знакозмінним називається ряд, членами якого є числа довільного знаку (2, гл. 4, с. 69).

Наприклад: $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{12\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Означення 1.4 Знакопереміжним називається ряд, члени якого почергово змінюють знак з “+” на “-“ (або навпаки).

Наприклад: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 3}$

Означення 1.5 Знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається даний ряд та ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду є розбіжним. Для дослідження збіжності знакопереміжних рядів користуються теоремою Лейбниця.

Теорема 1.8 Лейбниця Якщо в знакопереміжному ряді $(U_n > 0)$

$$U_1 - U_2 + \ldots + (-1)^{n+1} U_n + \ldots \tag{1.8}$$

члени такі, що 1) $\lim_{n\to\infty} |U_n| = 0$, та 2) $|U_1| \geq |U_2| \geq \ldots \geq |U_n|$, то ряд (1.8) збігається та сума його не перевищує першого члена.

Приклад 1.7 Дослідити збіжність ряду

$$1` - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$$

за ознакою Лейбниця

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;$

2) $1 > \left|-\frac{1}{2}\right| > \left|\frac{1}{3}\right| > \left|-\frac{1}{4}\right| > \ldots$, отже ряд збіжний.

Далі складаємо ряд з абсолютних величин членів даного ряду

$$1` + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Це гармонійний ряд. Він розбіжний (дослідження його збіжності наведено в прикладі 1.4). Отже ряд, наведений в умові, є умовно збіжний.

Для засвоєння ознаки Лейбниця необхідно виконати завдання 7 додатку.