Анализ простейших моделей, описывающих динамику роста популяции. Моделирование динамики эпидемии. Модель войны или сражения. Простейшая модель "хищник-жертва"

1. Анализ простейших моделей, описывающих динамику роста популяции

Рассморим понятие жесткой и мягкой моделей на примере динамики популяции.

Простейшая модель роста $=kx$ предложена Мальтусом (для роста населения Земли). Она ведет, как хорошо известно, к экспоненциальному (т. е. очень быстрому) росту численностми популяции x с течением времени. Такая модель называется жесткой (коэффициент не зависит от населения). Эта жесткая модель применима (разумеется, с оговорками), например, к развитию науки в 1700-1950 годах (измеряемому, скажем, числом научных статей) (рис. 1). Продолжение экспоненциального роста науки в следующем веке быстро привело бы к исчерпанию бумаги и чернил, причем число ученых должно было бы достичь половины населения земного шара.

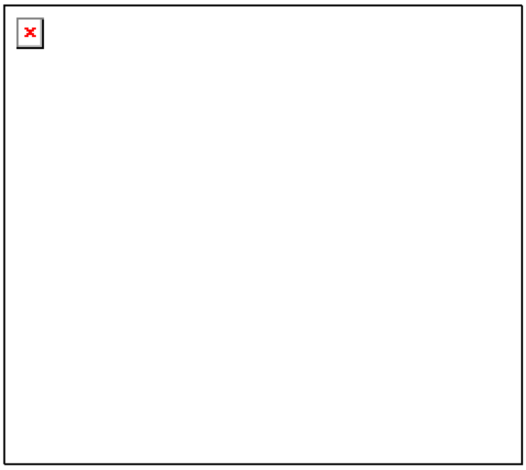

Рис. 1. Рост науки.

Ясно, что общество (во всех странах) не может этого допустить, и следовательно развитие науки должно быть подавлено (что мы и наблюдаем во многих странах; в России реформирование академической науки происходит как раз сейчас).

Аналогичные явления насыщения происходят в любой популяции (и, вероятно, вскоре произойдут с человечеством в целом): когда популяция становится слишком большим, мальтусовская жесткая модель с постоянным коэффициентом роста k перестает быть применимой. Естественно, при слишком больших x конкуренция за ресурсы (пищу, гранты и т. д.) приводит к уменьшению k, и жесткая модель Мальтуса должна быть заменена мягкой моделью

$$=k(x)x$$

с зависящим от населения коэффициентом размножения. Простейшим примером является выбор $k(x)=a-bx$, что приводит к так называемой логистической модели (рис. 5):

$$=ax-bx^2, \text{ например, } =x-x^2.$$

Выбором системы единиц x и t можно превратить коэффициенты a и b в 1. Подчеркну, однако, что выводы, которые будут сделаны ниже, остаются (с точностью до числовых значений констант) справедливыми и при любых значениях коэффициентов a и b и даже для широкого класса моделей с различными (убывающими с x) функциями $k(x)$. Иными словами, дальнейшие выводы относятся ко всей мягкой модели, а не к специальной жесткой логистической модели.

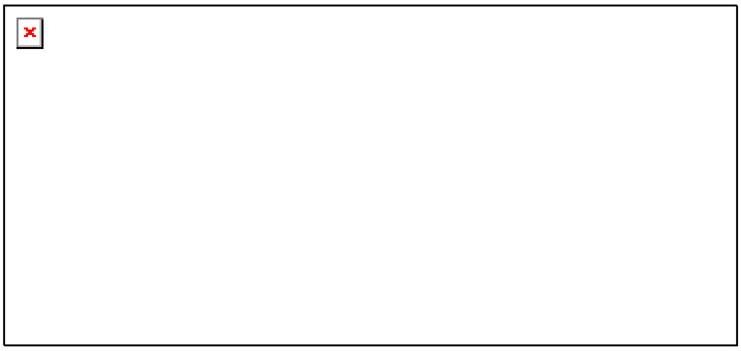

Рис. 2. Логистическая модель.

На рис. 2 слева изображен график функции $k(x)x$, положительной между точками A и B. В центре изображено векторное поле на изображающей всевозможные состояния системы оси x. Оно указывает скорость эволюции состояния. В точках A и B скорость равна нулю: это стационарные состояния. Между A и B скорость положительна (население растет), а за точкой B -- отрицательна (население убывает). Справа изображена результирующая зависимость населения от времени при разных начальных условиях.

Модель предсказывает, что с течением времени устанавливается стационарный режим B, который устойчив: большее население уменьшается, меньшее -- увеличивается.

Логистическая модель удовлетворительно описывает многочисленные явления насыщения. Вблизи A, когда население мало, она очень близка к мальтузианской модели. Но при достаточно больших x (порядка $1/2$ при нашем выборе коэффициентов) наблюдается резкое отличие от мальтузианского роста (обозначенного на рис. 2 пунктиром): вместо ухода x на бесконечность население приближается к стационарному значению B. Население Земли сейчас приближается к 6 миллиардам. Стационарное значение (по разным оценкам) 10-12 миллиардов человек.

Анализ логистической модели

Логистическая модель является обычной в экологии. Можно себе представить, например, что x -- это количество рыб в озере или в мировом океане. Посмотрим теперь, как скажется на судьбе этих рыб рыболовство с интенсивностью c:

$$=x-x^2-c.$$

Вычисления показывают, что ответ резко меняется при некотором критическом значении квоты вылова, c. Для нашей жесткой модели это критическое значение есть $c= 1/4$, но аналогичные явления имеют место и для мягкой модели

$$=x-k(x)x-c$$

(критическое значение с в этом случае максимум функции $k(x)x$).

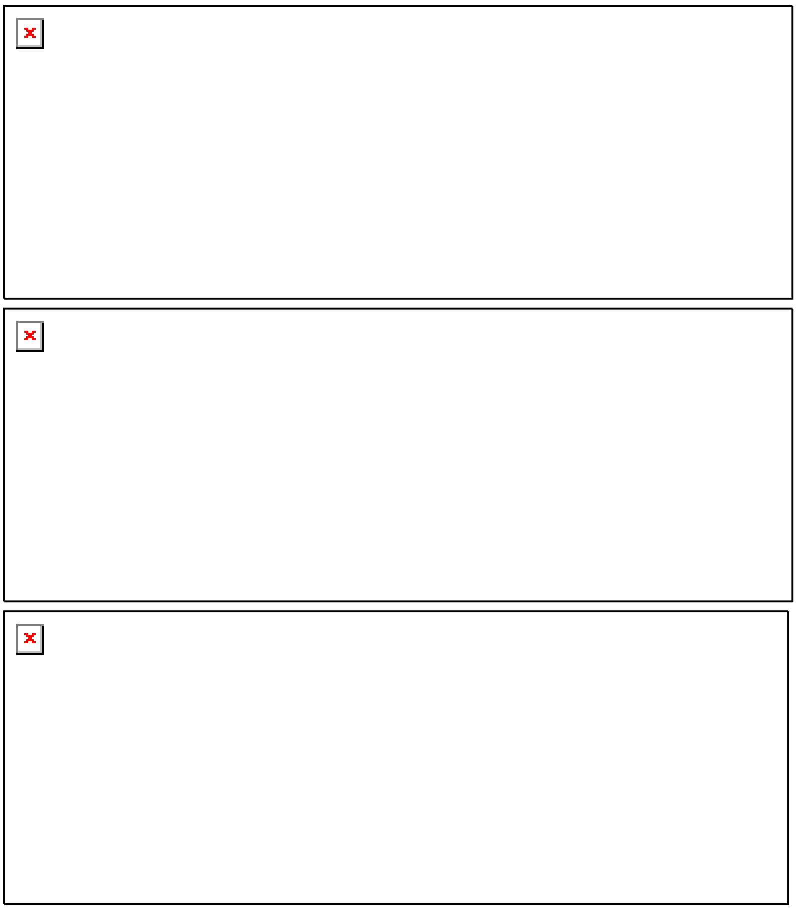

Рис. 3. Недолов (а), перелов (б) и оптимизация (в) рыболовства.

Ход эволюции числа рыб x с течением времени t изображен на рис. 3. Если квота c мала, то изменения (по сравнению со свободной популяцией, для которой $c=0$) состоят в следующем.

Система имеет два равновесных состояния, *A* и *B*. Состояние *B* устойчиво: популяция в этом случае несколько меньше, чем необлавливаемая, но она восстанавливается при малых отклонениях x от равновесного значения *B*.

Состояние *A* неустойчиво: если вследствие каких-либо причин (скажем, браконьерства или мора) размер популяции упадет хоть немного ниже уровня *A*, то в дальнейшем популяция (хотя и медленно, если отличие от *A* невелико) будет уничтожена полностью за конечное время.

По моему мнению, состояние науки в России в настоящее время описывается примерно точкой А: оно еще стационарно, но, как говорят физики, квазистационарно в том смысле, что небольшое встряхивание может легко привести к необратимому уничтожению.

При больших критической квотах вылова c популяция x уничтожается за конечное время, как бы велика она ни была в начальный момент.

Это -- судьба мамонтов, бизонов, многих китов: экологи подсчитали, сколько видов погибает *ежедневно* под влиянием деятельности человека, и эти цифры ужасают. Модели этого рода описывают также банкротство фирм, концернов и государств. Опасность уничтожения в нашей модели появляется

тогда, когда неустойчивое состояние *A* приближается к устойчивому состоянию *B*, т. е. когда величина *x* опускается примерно до половины исходной стационарной величины необлавливаемой популяции.

Население Украины, мне кажется, еще не понизилось до этого смертельно опасного уровня, но, по-видимому, движется к нему. Наука же в Украине находится в настоящее время именно в таких условиях "перелова". Например, заработная плата главного научного сотрудника раз в сто меньше зарплаты научныхработников в США (и раз в 50 меньше, чем во Франции). Понятно, что в таких условиях величина c (скорость убыли числа ученых в Украине) ограничивается в основном дискриминационными мерами, принимаемыми Западом (например, США) для охраны своих рабочих мест от наплыва лучше подготовленных иностранных аспирантов и докторантов (в основном из Китая и из России).

Из сказанного видно, что выбор значения параметра c является чрезвычайно важным моментом управления эксплуатацией популяции x. Стремясь к увеличению квоты эксплуатации c, разумная планирующая организация не должна превосходить критический уровень (в нашем случае $c?1/4$). Оптимизация приводит к выбору именно критического значения $c= 1/4$, при котором эксплуатируемая популяция еще не уничтожается, но доход от эксплуатации за единицу времени достигает максимально возможного значения $c = 1/4$ (больший доход в нашей популяции *в течение длительного времени* невозможен, так как максимальная скорость прироста даже и неэксплуатируемой популяции есть $1/4$).

Из нижней части рис. 6 мы видим, что произойдет при таком "оптимальном" выборе, $c= 1/4$. Какова бы ни была начальная популяция $x > 1/2$, с течением времени она выйдет на стационарный режим $A=B = 1/2$. Эта стационарная популяция, однако, неустойчива. Небольшое случайное уменьшение x приводит к полному уничтожению популяции за конечное время.

Следовательно, *оптимизация параметров плана может приводить* (и приводит во многих случаях, из которых наша модель -- лишь простейший пример) *к полному уничтожению планируемой системы вследствие возникающей из-за оптимизации неустойчивости.*

Наша мягкая модель, при всей своей очевидной примитивности, позволяет, однако, предъявить способ борьбы с указанным злом. Оказывается, устойчивость восстанавливается, если заменить жесткое планирование **обратной связью**. Иными словами, решение о величине эксплуатации (квоты вылова, налогового пресса и т. д.) следует принимать не директивно ($c=const$), а в зависимости от достигнутого состояния системы:

$$c=kx,$$

где параметр k ("дифференциальная квота") подлежит выбору.

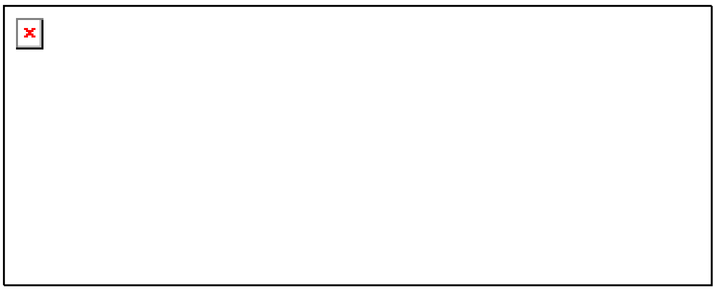

Рис. 4. Устойчивая система с обратной связью.

В этом случае модель принимает вид (рис. 4)

$$\dot{x}=x-x^2-kx.$$

При $k<1$ с течением времени устанавливается стационарное состояние В, которое устойчиво. Средний многолетний "доход" $c\ =kx$ в этом состоянии оптимален, когда прямая $y=kx$ проходит через вершину параболы $y = x-x^2$, т. е. при $k = 1/2$. При этом выборе дифференциальной квоты k средний "доход" $c= 1/4$ достигает максимального возможного в нашей системе значения. Но, в отличие от жестко планируемой системы, система с обратной связью устойчива и при оптимальном значении коэффициента k (небольшое случайное уменьшение по отношению к стационарному уровню $x=B$ приводит к автоматическом восстановлению стационарного уровня силами самой системы).

Более того, небольшое отклонение коэффициента от оптимального значения $k= 1/2$ приводит не к самоуничтожению системы (как это было при небольшом отклонении от оптимального жесткого плана c), а лишь к небольшому уменьшению "дохода".

Итак, *введение обратной связи (т. е. зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов) стабилизирует систему, которая без обратной связи разрушилась бы при оптимизации параметров.*

Все сказанное выше останется справедливым и для мягкой модели (с соответствующим пересчетом коэффициентов). Следует подчеркнуть, что именно эта независимость от деталей жесткой модели (которые, как правило, не слишком хорошо известны) делает выводы мягкого моделирования полезными.

Попытки заменить мягкое моделирование жестким обычно приводят к иерархии все более сложных и громоздких математических построений, исследование которых доставляет прекрасный материал для большого количества диссертаций, но реальная ценность которых зачастую не превосходит в сущности простых (хотя без математики и не очевидных) выводов, основанных на анализе именно простейших моделей, подобных описанной выше.

2. Динамика эпидемии

Рассмотрим математическую модель, опысывающую динамику развития эпидемии на примере.

В городе с 20 000 жителей появляются 50 инфекционных больных, что вызывает эпидемию. Предположим, что прирост больных за день пропорционален числу контактов больных и здоровых, то есть произведению числа здоровых (еще не переболевших и не приобретших иммунитет) на число больных. Коэффициент пропорциональности (он характеризует скорость распространения эпидемии) примем равным 10^{-4}.

Спрашивается: как развивается эпидемия – как изо дня в день меняется число больных? На какой день будет максимальное число заболевших?

Решение. Обозначим через x число больных, через y - число здоровых, через k - коэффициент пропорциональности.

В соответствие с условиями задачи имеем два уравнения:

$$x(n+1)=kx(n)y(n),\ k=0,0001$$
$$y(n+1)=y(n)-kx(n)y(n)\ .$$

Первое из них характеризует число заболевших в очередной $(n+1)-$й день, второе – число здоровых (еще не болевших) к $(n+1)-$му дню.

Система разностных уравнений нелинейная, из-за наличия произведения $x(n)y(n)$, это не позволяет решить их аналитически.

Воспользуемся методом численного моделирования. Мы имеем задачу с начальными условиями $x(0)=50,\ y(0)=20000$, это позволяет шаг за шагом вычислять изменение числа больных по дням, полагая $n=1,\ 2,\ 3...$

Например, при $n-1$ получаем:

$$x_1=0,0001\cdot 20000\cdot 50=100,\ y_1=20000-100=19900.$$

Программа дл моделировани этой задаче в MatLab имеет вид:

```
>> x(1)=50;y(1)=20000;
>> k=10^(-4);n=12;
>> for i=1:n
x(i+1)=k*x(i)*y(i);
y(i+1)=y(i)-k*x(i)*y(i);
end
>> bar(0:12,x);grid
```

Полученные результаты отображены столбчатой диаграммой на рис. 5.

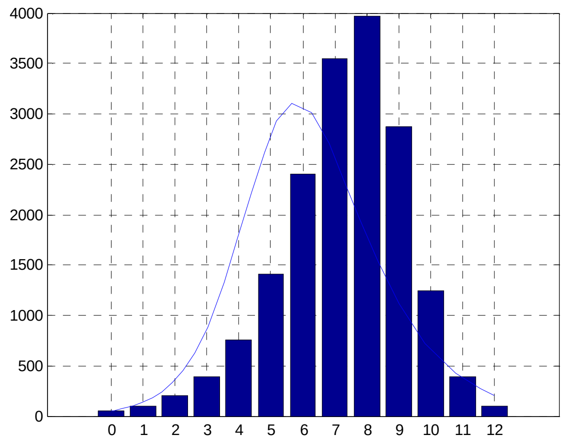

Рис. 5

Из нее видно, что критическая точка – восьмой день (3972 больных). На двенадцатый день (спад эпидемии) в городе остается 105 больных.

Для оценки качества решения выполним моделирование той же задачи в непрерывном времени. Она описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases}\dot{x}=-kxy\\ \dot{y}=kxy-y\end{cases},$$

где $x(0)=50,\ y(0)=20000,\ k=0,0001.$

Программа моделирования этой системы уравнений в пакете MatLab имеет вид:

```
>> T=[0 12];x0=[20000 50];
>> [t,x]=ode23('epid',T,x0);
>> plot(t,x(:,2));
```

```
function r=epid(t,x)
k=0.0001;
x1=-k*x(1)*x(2);
y1=k*x(1)*x(2)-x(2);
r=[x1;y1];
```

Результат моделирования эпидемии в непрерывном времени показан плавной кривой на том же графике. Здесь критическая точка – шестой день – (3119 больных), спад эпидемии – на двенадцатый день (209 больных). Сравнение графиков показывает, что погрешность результатов компьютерного моделирования составляет около 20%. Она может быть уменьшена путем корректировки дискретной математической модели.

3. Модель войны или сражения

В простейшей модели борьбы двух противников (скажем, двух армий) -- **модели Ланкастера**-- состояние системы описывается точкой *(x,y)* положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, *x* и *y* -- это численности противостоящих армий. Модель имеет вид

Здесь *a* -- мощность оружия армии *x*, а *b* -- армии *y*. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии *x* убивает за единицу времени *a* солдат армии *y* (и, соответственно, каждый солдат армии *y* убивает *b* солдат армии *x*). Точка над буквой здесь и далее означает производную по времени *t*, то есть скорость изменения обозначенной буквой величины.

Это -- жесткая модель, которая допускает точное решение

, $axdx=bydy$, $ax^2-by^2=const.$

Эволюция численностей армий *x* и *y* происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. 1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

Рис. 6. Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой . Если начальная точка лежит выше этой прямой (случай 1 на рис. 6), то гипербола выходит на ось *y*. Это значит, что в ходе войны численность армии *x* уменьшается до нуля (за конечное время). Армия *y* выигрывает, противник уничтожен.

Если начальная точка лежит ниже (случай 2), то выигрывает армия *x*. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается ко всеобщему удовлетворению истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным -- в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Ясно, однако, что наша людоедская модель сильно идеализирована и было бы опасно прямо применять ее к реальной ситуации. Возникает вопрос -- как изменится вывод, если модель будет несколько иной. Например, коэффициенты a и b могут быть не строго постоянными, а могут, скажем, зависеть от x и от y. И точный вид этой зависимости нам может быть неизвестен.

В этом случае речь идет о системе

которая уже не решается явно.

Однако в математике разработаны методы, позволяющие сделать выводы общего характера, и не зная точно явного вида функций a и b. В этой ситуации принято говорить о мягкой модели -- модели, поддающейся изменениям (за счет выбора функций a и b в нашем примере).

Общий вывод в данном случае есть утверждение о <u>структурной устойчивости</u> исходной модели: изменение функций a и b изменит описывающие ход военных действий кривые на плоскости (x, y) (которые уже не будут гиперболами и разделяющей их прямой), но это изменение не затрагивает основного качественного вывода.

Вывод этот состоял в том, что положения "x выигрывает" и "y выигрывает" разделены нейтральной линией "обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время".

Математики говорят, что <u>топологический тип</u> системы на плоскости (x,y) не меняется при изменении функций a и b: оно приводит лишь к искривлению нейтральной линии (рис. 7).

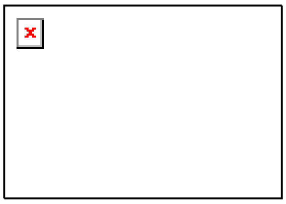

Рис. 7. Мягкая модель войны

Этот математический вывод не самоочевиден. Можно представить себе и другую ситуацию, например, изображенную на рис. 3. Математическая теория структурной устойчивости утверждает, что эта ситуация не реализуется, во всяком случае для не слишком патологических функций a и b (скажем, она не реализуется, если это -- положительные в нуле многочлены).

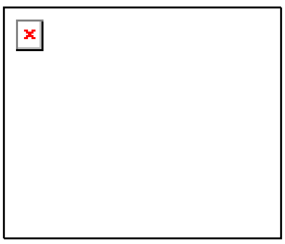

Рис. 8. Нереализуемая модель войны

Мы можем сделать вывод о качественной применимости простейшей модели войны для приближенного описания событий в целом классе моделей, причем для этого даже не нужно знать точного вида жесткой модели: выводы справедливы для мягкой модели. На самом деле простейшая модель дает даже полезное количественное предсказание: наклон разделяющей нейтральной прямой в нуле определяется формулой , где a и b -- значения коэффициентов в нуле.

То есть принцип "если противников вдвое больше, то надо иметь в четыре раза более мощное оружие" справедлив на конечном этапе взаимного истребления, в то время как на начальном этапе войны число 4 нужно, быть может, откорректировать (учитывая вид коэффициентов a и b). Для этой корректировки в математике мягких моделей тоже разработаны эффективные методы (несмотря на то, что явная формула для решения уравнений модели не только неизвестна, но и -- это строго доказано -- не существует вовсе).

Можно думать, что описанная модель отчасти объясняет как неудачи Наполеона и Гитлера, так и успех Батыя и надежды мусульманских фундаменталистов.

4. Простейшая модель "хищник-жертва"

Рассмотрим математическую модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа "хищник - жертва", называемую **моделью Вольтерра - Лотки**. Впервые она была получена А.Лоткой (1925 г.), который использовал для описания динамики взаимодействующих биологических популяций. Чуть позже и независимо от Лотки аналогичные (и более сложные) модели были разработаны итальянским математиком В. Вольтерра (1926 г.), глубокие исследования которого в области экологических проблем заложили фундамент математической теории биологических сообществ или так называемой математической экологии. Модель, которую мы рассмотрим, интересна, пожалуй, как раз тем, что с нее, по существу, и началась **математическая экология.** Пусть есть два биологических вида, которые совместно обитают в изолированной среде. Среда стационарна и обеспечивает в неограниченном количестве всем необходимым для жизни один из видов, который будем называть **жертвой**. Другой вид - **хищник** также находится в стационарных условиях, но питается лишь особями первого вида. Это могут быть караси и щуки, зайцы и волки, мыши и лисы, микробы и антитела и т. д. ... Будем для определенности называть их карасями и щуками.

Караси и щуки живут в некотором изолированном пруду. Среда предоставляет карасям питание в неограниченном количестве, а щуки питаются лишь карасями. Обозначим

- **y** - число щук,
- **x** - число карасей.

 Со временем число карасей и щук меняется, но так как рыбы в пруду много, то не будем различать 1020 карасей или 1021 и поэтому будем считать **x** и **y** *непрерывными* функциями времени **t**. Будем называть пару чисел **(x, y)** состоянием модели. Попробуем определить, как состояние меняется с течением времени. Надо сказать, что в биологии дело обстоит значительно сложнее, чем, скажем, в механике, где само понятие состояния формализовано и существуют законы Ньютона, позволяющие описать изменение состояния. В биологии этого пока нет.

Попробуем из самых простых соображений найти, как меняется состояние **(x, y)**. Рассмотрим **x'** - скорость изменения численности карасей. Если щук нет, то число карасей увеличивается и тем быстрее, чем больше карасей. Будем считать, что эта зависимость линейная : **x'** □□1 **x**, причем коэффициент □1 зависит только от условий жизни карасей, их естественной смертности и рождаемости. Скорость изменения **y'** числа щук (если нет карасей), зависит от числа щук **y**. Будем считать, что **y'**□□2 **y** . Если карасей нет, то число щук уменьшается (у них нет пищи) и они вымирают. В экосистеме скорость изменения численности каждого вида также будем считать пропорциональной его численности, но только с коэффициентом, который зависит от численности особей другого вида. Так, для карасей этот коэффициент уменьшается с увеличением числа щук, а для щук увеличивается с увеличением числа карасей. Будем считать эту зависимость также линейной. Тогда получим систему из двух дифференциальных уравнений:

x' = □1 **x** - □1 **yx**,

y' = - □2 **y** + □2**xy**.

Эта система уравнений и называется моделью Вольтерра-Лотки. Числовые коэффициенты □1, □1, □2, □2 называются **параметрами модели**. Очевидно, что характер изменения состояния **(x, y)** определяется значениями параметров.

Изменяя параметры и решая систему уравнений модели можно исследовать закономерности изменения состояния экологической системы. В качестве примера на рисунке построены кривые изменения численности карасей**x** и щук **y** в зависимости от времени **t** для некоторых типчных значений параметров.

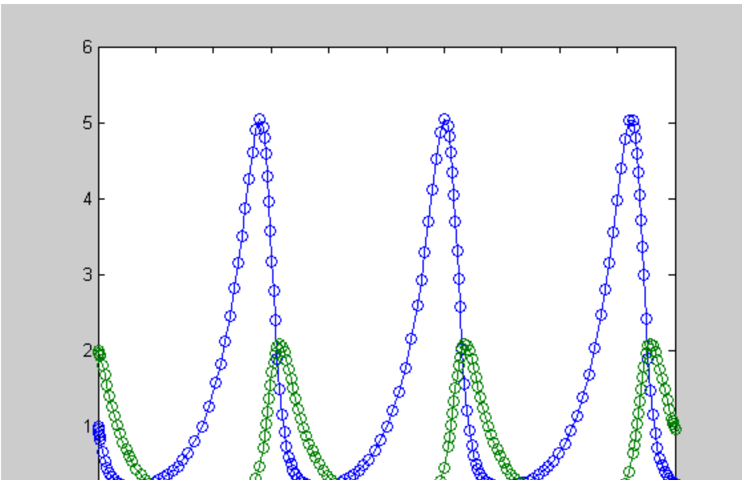

Рис. 9 - Кривые изменения численности карасей и щук

Максимумы кривых чередуются, причем максимумы щук отстают от максимума карасей. Это отставание разное для разных экосистем типа "хищник - жертва", но, как правило, много меньше периода колебаний.

Несмотря на то, что рассмотренная модель является простейшей и в действительности все происходит много сложнее, она позволила объяснить кое-что из загадочного, что есть в природе. Перестали быть загадкой счастливые для рыболовов периоды, когда в водоеме оказывается громадное количество рыбы (из рисунка видно, что продолжаются они очнь недолго).

Получила объяснение периодичность в протекании хронических заболеваний, стало отчасти ясно, почему течение болезни зависит от фазы и интенсивности проводимого лечения. Действительно, как протекает хроническое заболевание? Обострение сменяется улучшением и опять все снова повторяется. Болезнь связана с наличием "хищника" (микроб, вирус), который поедает что-то в организме "жертвы".

Обострение бывает, когда "хищника" много - верхние участки кривых на рисунке.

Улучшение самочувствия соответствует спадающим участкам - нижние участки (когда совсем хорошо).

И снова наступает ухудшение - возрастающие участки кривой.

Обострение тем сильнее, чем больше амплитуда кривой. В состоянии равновесия и около него болезнь слабо выражена. Вы больны, но обострения у вас нет. Наконец, вам надоедает такое состояние, и вы идете к врачу. Врач дает лекарство, вы его принимаете и уничтожаете почти всех "хищников". Сейчас подобные экологические модели строятся при лечении различных хронических заболеваний, в частности, при борьбе с хроническими инфекциями. Строится экологическая модель болезни с учетом всех иммунных факторов и лечение производится в соответствии с этой моделью.