Дифференциальные уравнения как математические модели. Понятия дифференциального уравнения. Виды дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференциальная модель популяции. Закон гиперболического роста численности населения Земли

Существует легенда (скорее всего, не соответствующая действительности), будто бы человек, который изобрел шахматы, доставил этим такое удовольствие своему султану, что тот пообещал исполнить любую его просьбу. Человек попросил, чтобы султан положил на первую клетку шахматной доски одно зерно пшеницы, на вторую — два, на третью — четыре и так далее. Султан, посчитав это требование ничтожным по сравнению с оказанной им услугой, попросил своего поданного придумать другую просьбу, но тот отказался. Естественно, к 64-му удвоению число зерен стало таким, что во всем мире не нашлось бы нужного количества пшеницы, чтобы удовлетворить эту просьбу. В той версии легенды, которая известна мне, султан в этот момент приказал отрубить голову изобретателю. Мораль, как я говорю моим студентам, такова: иногда не следует быть чересчур умным!

Пример с шахматной доской (как и с воображаемыми бактериями) показывает нам, что никакая популяция не может расти вечно. Рано или поздно она попросту исчерпает ресурсы — пространство, энергию, воду, что угодно. Поэтому популяции могут расти по экспоненциальному закону лишь некоторое время, и рано или поздно их рост должен замедлиться. Для этого нужно изменить уравнение так, чтобы при приближении численности популяции к максимально возможной (которая может поддерживаться внешней средой) скорость роста замедлялась. Назовем эту максимальную численность популяции K. Тогда видоизмененное уравнение будет выглядеть так:

$$dN = rN(1 - (N/K))\, dt$$

Когда N намного меньше K, членом N/K можно пренебречь, и мы возвращаемся к первоначальному уравнению обычного экспоненциального роста. Однако когда N приближается к своему максимальному значению K, значение 1 — (N/K) стремится к нулю, соответственно стремится к нулю и прирост численности популяции. Общая численность популяции в этом случае стабилизируется и остается на уровне K. Кривая, описываемая этим уравнением, а также само уравнение, имеют несколько названий — S-кривая, логистическое уравнение, уравнение Вольтерра, уравнение Лотка—Вольтерра. (Вито Вольтерра (1860–1940) — выдающийся итальянский математик и преподаватель; Альфред Лотка (1880–1949) — американский математик и страховой аналитик.) Как бы она ни называлась, это — достаточно простое выражение численности популяции, резко возрастающей экспоненциально, а затем замедляющейся при приближении к некоему пределу. И она гораздо лучше отражает рост численности реальных популяций, чем обычная экспоненциальная функция.

Для исследования сложных процессов в объектах, изменяющихся с течением времени, применяются дескриптивные (описательные) математические модели в виде дифференциальных уравнений (или систем дифференциальных уравнений).

Уравнения моделей составляются на основании физических, химических, биологических законов.

Решения таких систем дифференциальных уравнений являются функциями времени и, следовательно, могут описывать изменения во времени процессов, происходящих внутри моделируемых объектов.

Модели делятся на два основных типа:

- **с сосредоточенными параметрами – в виде обыкновенных дифференциальных уравнений: эти модели действительны для описания процессов, которые не зависят от координат (сосредоточены в точке);**
- **с распределенными параметрами – в виде дифференциальных уравнений с частными производными: их решения зависят как от времени, так и от координат области решения.**

Уравнения классифицируются по числу координат области решения на :

- **одномерные;**
- **двумерные (на плоскости);**
- **трехмерные (пространственные).**

Большинство уравнений математических моделей представляют собой весьма сложные системы уравнений, как правило, не допускающие аналитического (в виде единой функции) решения. Их решения приходится находить приближенно, путем дискретизации решений по времени и по пространственным координатам, то есть с помощью построения пространственно–временных сеток.

Деления сетки по времени обычно называют временными слоями. Координатные сетки составляются из узлов – фиксированных значений координат, в которых и вычисляются значения функций решения.

Интервал времени между временными слоями называют шагом по времени, а интервал между узлами координат – шагом по координате.

Выбор указанных выше значений шага является фундаментальной математической задачей аппроксимации (приближения) дифференциальных уравнений разностными уравнениями и подробнейшим образом обсуждается в классических работах из области математики.

Эта задача является принципиально важной по той причине, что точность получаемого решения существеннейшим образом зависит от выбора шага сетки решения. Вообще говоря, для повышения точности шаг следует уменьшать (но при этом возрастает время решения).

При выборе завышенного шага решения может также возникнуть явление, называемое потерей устойчивости решения. При этом функция решения очень быстро возрастает (или меняет знак). Выбор шага для получения устойчивого решения также подробно обсуждается в литературе.

Приведем ряд примеров различных процессов, представленных различными типами дифференциальных уравнений.

Модели динамики популяций

- Дифференциальная модель популяции;
- Простая модель"хищник–жертва" (модель Лотки–Вольтерры);
- Усовершенствованнная модель "хищник–жертва";
- Модель "хищник–жертва" в частных производных;
- Модель роста фитопланктона;
- Модель роста фитопланктона в частных производных.

Модели диффузионных процессов

- Моделирование эпидемии;
- Процессы размножения и гибели;
- Уравнение диффузии вещества;
- Одномерная модель распространения загрязняющих веществ.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчисления. Можно сказать, что необходимость решать дифференциальные уравнения для нужд механики, то есть находить траектории движений, в свою очередь, явилась толчком для создания Ньютоном нового исчисления. Законы Ньютона представляют собой математическую модель механического движения. Через обыкновенные дифференциальные уравнения шли приложения нового исчисления к задачам геометрии и механики; при этом удалось решить задачи, которые в течение долгого времени не поддавались решению. В небесной механике оказалось возможным не только получить и объяснить уже известные факты, но и сделать новые открытия (например, открытие Леверье в 1846 году планеты Нептун на основе анализа дифференциальных уравнений).

Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Соотношение между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка составляет дифференциальное уравнение. В настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой богатую, широко разветвленную теорию. Одними из основных задач этой теории являются существование у дифференциальных уравнений таких решений, которые удовлетворяют дополнительным условиям (начальные данные Коши, когда требуется определить решение, принимающее заданные значения в некоторой точке и заданные значения производных до некоторого конечного порядка, краевые условия и другие), единственность решения, его устойчивость. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях дополнительных данных задачи и функций, определяющих само уравнение. Важными для приложений являются исследование характера решения, или, как говорят, качественного поведения решения, нахождение методов численного решения уравнений. Теория должна дать в руки инженера и физика методы экономного и быстрого вычисления решения.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

где F – заданная функция трех переменных, которая определена в области G (одномерной области), x – независимая переменная из интервала, $y(x)$ – неизвестная искомая функция, $y'(x)$ – ее производная.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, которые решены относительно производной, то есть уравнения вида $y' = f(x, y)$ называют уравнениями в нормальной форме.

Функция $y = y(x)$ называется решением дифференциального уравнения на интервале (a, b), если она может быть непрерывно дифференцирована на (a, b) и при всех x из интервала (a, b) удовлетворять уравнению $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Если дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ решается, то решений можно получить бесконечное множественное число и эти решения могут быть записаны в виде, где C – произвольная константа. Выражение

$$y(x, C) \qquad (1)$$

называют *общим решением* дифференциального уравнения 1–го порядка: при всех допустимых значениях C функция $y = y(x, C)$ является решением уравнения $y'(x, C) = f(x, y(x, C))$.

Частным решением дифференциального уравнения называется такое решение, которое получается из общего решения (1) при некотором частном значении произвольной постоянной; для любого заранее заданного решения $y = \varphi(x)$ $y = \varphi(x)$ найдется такое значение константы, что $y(x, C^*) = \varphi(x)$.

Произвольная постоянная определяется из так называемых начальных условий. Если поставить задание: найти решение ОДУ, которое удовлетворяет условию, то такое дифференциальное уравнение имеет единственное решение.

Важным элементом задач, которые содержат дифференциальные уравнения, являются дополнительные условия, которые необходимы для получения количественного решения.

Относительно обыкновенных дифференциальных уравнений различают два вида задач: задача с начальными условиями (задача Коши) и задача с граничными условиями, так называемая краевая задача.

Задача об отыскании решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию, называется задачей Коши. Решение задачи Коши является частным решением.

Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной (включая случаи, когда стала следует к $\pm\infty$), называется *особенным решением* дифференциального уравнения.

Рассмотрим некоторые примеры дифференциальныч уравнений первого порядка. Они состоят из однородных

$$y' + P(x)y = 0,$$

линейных

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

уравнения Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,\ n \neq 1{,}0,$$

уравнение Рикатти

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Абеля 2–го рода

$$yy' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

и других.

Мы ограничиваемся рассматриванием определений лишь одного типа обычных дифференциальных уравнений, так называемых линейных уравнений.

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{2}$$

Функции $P(x)$ и $Q(x)$ называются коэффициентами. Если $Q(x) = 0,$ то линейное уравнение называется однородным или дифференциальным уравнением без правой части. Если $Q(x) \neq 0,$ то линейное уравнение называется *неоднородным* или с правой частью.

Для решения ОДУ типа (2) можно использовать несколько практических подходов. В частности, представить $y(x)$ в виде произведения $y = u(x) \cdot v(x)$, где считается, что $u(x)$ решением однородного линейного уравнения, то есть

$$u' + P(x)u = 0. \qquad (3)$$

Если в (3) перенести $P(x)u$ вправо, то получим уравнение с разделяющимися переменными, частное решение которого имеет вид

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}. \qquad (4)$$

После подстановки искомой функции $y = u(x) \cdot v(x)$ в уравнение (2) получим:

$$[u' + P(x)\,u]v + uv' = Q(x). \qquad (5)$$

Поскольку выражение в квадратных скобках благодаря (3) равняется нулю, то после решения имеем:

$$v' = \frac{Q(x)}{u(x)}\,; \;\; v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)} dx + C. \qquad (6)$$

После подстановки функций $u(x)$ и $v(x)$ в функцию $y = u(x) \cdot v(x)$, получим общее решение линейного уравнения

$$y_{зн}(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right]. \qquad (7)$$

Из представления (7) следует, что

а) линейное уравнение первого порядка может быть всегда выраженно через интегралы от $P(x)$ и $Q(x)$;

б) общее решение линейного неоднородного уравнения может быть представлено в виде суммы общего решения однородного уравнения и решения частого решения неоднородного уравнения :

$$y_{зн}(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x), \qquad (8)$$

$$y_{зо}(x) = C\, e^{-\int P(x)dx}, \;\; y_{чн}(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx\right].$$

При решении конкретных уравнений использования формулы (7) не является удобным, потому лучшее воспользоваться схемой решения, которая приводит к выражению (8).

Простейшая дифференциальная модель популяции

Модель отражает количественное изменение числа особей в данной популяции (размножение или вымирание) в зависимости от некоторых параметров, зависящих как от окружающей среды, так и от свойств данной популяции.

Обозначим

- **плотность особей данной популяции (на единицу площади) в данный момент времени как $N(t)$,**
- **коэффициент рождаемости особей в зависимости от плотности как a,**
- **коэффициент смертности особей в зависимости от их плотности как b.**

Коэффициенты (или параметры) модели a и b зависят от того, какой конкретно вид живых существ мы моделируем и для каждого вида должны определяться отдельно. Этот процесс называется калибровкой модели.

В дальнейшем будем полагать, что во всех моделях $a > 0$ и $b > 0$.

С учетом сказанного выше, динамика роста популяции может быть описана обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dN}{dt} = (a-b)x \qquad (1)$$

Это – линейное однородное дифференциальное уравнение и его решение легко может быть записано как

$$N(t) = N_0 e^{(a-b)t} \qquad (2)$$

Из (2) видно, что если $a > b$, то число особей со временем возрастает и стремится к бесконечности (неограниченный рост популяции). В случае, когда $a < b$ число особей стремится к нулю (вымирание популяции). Такие модели являются простейшими и не могут правильно описать множество процессов, происходящих в популяциях, хотя с точки зрения теории динамики популяций они описывают биотический потенциал популяции.

Обратите внимание, что разность $a-b$ является так называемой удельной скоростью роста. Обозначая, $r = a-b$, получаем:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \qquad (3)$$

Логарифмируя обе части равенства, получаем уравнение в форме, удобной для расчета:

$$\ln N = \ln N_0 + rt,$$

откуда

$$r = \frac{\ln N - \ln N_0}{t}.$$

Когда популяция переходит в стационарное состояние, *r* называют внутренней скоростью естественного роста – *биотическим потенциалом* и обозначают r_{max}. Экспоненциальная кривая (3) выражает биотический потенциал популяции. Разницу между биотическим потенциалом и скоростью роста в реальных условиях называют сопротивлением среды. ***Сопротивление среды* – это сумма всех лимитирующих факторов, препятствующих реализации r_{max}.**

В природе в основном наблюдается иная картина. Прежде всего, коэффициент прироста не остается постоянным, так как рождаемость и смертность меняются в зависимости от условий среды и возраста организмов, а пища и территория редко предоставлены в достаточном объеме.

Чаще всего реальный рост численности популяции выражается S–образной зависимостью, которую называют логистической кривой роста (рис. 1,б).

Рис.1. Экспоненциальная (а) и логистическая (б) кривые роста популяции. Заштрихованная площадь – сопротивление среды.

В большинстве случаев используют так называемые нелинейные модели, имеющие вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad (3)$$

где $f(x)$ – некоторая нелинейная функция от величины x, имеющая также и параметры.

Логистическое уравнение, также известное, как уравнение Ферхюльста (по имени впервые сформулировавшего его бельгийского математика), изначально появилось при рассмотрении модели роста численности населения.

Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

- скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях
- скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

Обозначая через P численность популяции (в экологии часто используется обозначение N), а время — t, модель сводится к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

где параметр r характеризует скорость роста (размножения), а K — ёмкость среды (то есть, максимально возможную численность популяции).

Константы *r* и *K* из логистического уравнения характеризуют два типа естественного отбора, которые позволяют обосновать разные *типы экологических стратегий:*

- ***r*-стратегия характерна для популяций в начальный период увеличения ее численности. Она определяется отбором в условиях, когда плотность популяции мала и соответственно слабо выражено тормозящее воздействие конкуренции. Эта стратегия характерна, например, для временных водоемов, заполняющихся водой только в период дождей. *r*-отбор направлен на высокую плодовитость, быстрое достижение половой зрелости, достижение короткого жизненного цикла, способности выживания в неблагоприятный период в виде покоящихся стадий;**

- ***K*-стратегия связана с отбором, направленным на повышение выживаемости и величины предельной плотности *K* в условиях стабилизирующейся численности популяции при сильном воздействии конкуренции. *K*-отбор направлен на оценку конкурентоспособности и предусматривает возможные пути защищенности от хищников и паразитов, и выживаемости потомства, а также совершенствования механизмов регуляции численности.**

- **r –стратегия предполагает бурное размножение и короткую продолжительность жизни особей.**
- **а K –стратегия — низкий темп размножения и долгую жизнь.**

Точным решением уравнения (где P_0 — начальная численность популяции) является логистическая функция, S–образная кривая, логистическая кривая:

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{rt}}{K + P_0\left(e^{rt} - 1\right)}$$

где

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = K$$

Пример. В южных регионах распространено растение амброзия. Она растет по свалкам, залежам и другим недавно нарушенным местообитаниям. С другой стороны, в умеренном поясе в стабильном нижнем ярусе леса обитают травянистые растения. Если сравнить эти растения по продукции семян, окажется, что амброзия продуцирует семян в 50 раз больше, чем растения леса, и тратит в 5 раз больше чистой энергии на размножение. Амброзия – пример *r*-отбора, растения лесного сообщества – *K*-отбора.

Выделение *r*- и K-стратегий в чистом виде условно. На самом деле каждый вид организмов испытывает некую комбинацию *r*- и *K*-отбора, т. е. оставляемые отбором особи должны обладать и достаточно высокой плодовитостью, и развитой способностью выживания при наличии конкуренции.

Пример нелинейного уравнения

Довольно часто в моделировании развития популяций используется сравнительно простая нелинейная модель вида

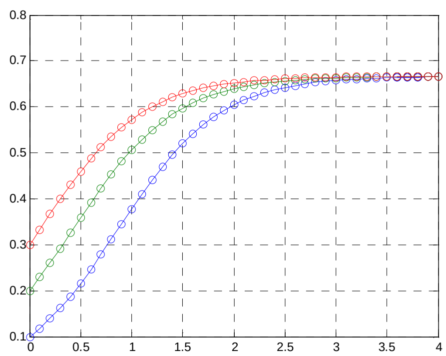
$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \qquad (4)$$

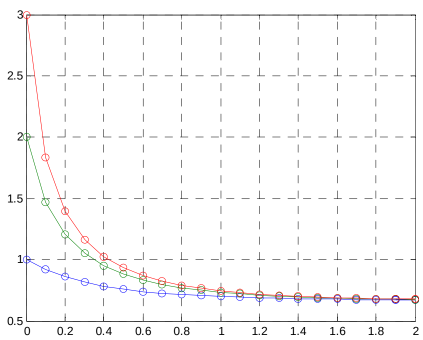
Из уравнения (4) видно, что с ростом количества особей вымирание преобладает над размножением (например, из–за нехватки пищи). Известно, что у некоторых видов живых существ этот процесс регулируется химическим путем (в среде обитания распространяется вещество, замедляющее размножение).

Поведение такой модели популяции зависит от соотношения параметров рождаемости a и смертности b, а также от начального значения плотности особей популяции $x(0)$. С ростом времени t значение плотности популяции неограниченно (асимптотически) приближается к установившемуся значению $x = a/b$.

Однако, если $x(0) > a/b$, то плотность уменьшается, стремясь к a/b сверху. В случае, когда $x(0) < a/b$, плотность популяции сначала быстро растет, а затем скорость роста начинает падать и кривая приближается к a/b снизу. Такая кривая называется логистической кривой и хорошо известна из теории динамики популяций.

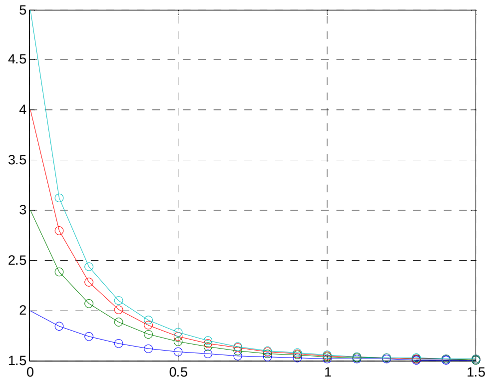
Рассмотрим случай, когда $a > b$, например, $a/b = \dfrac{2}{3}$



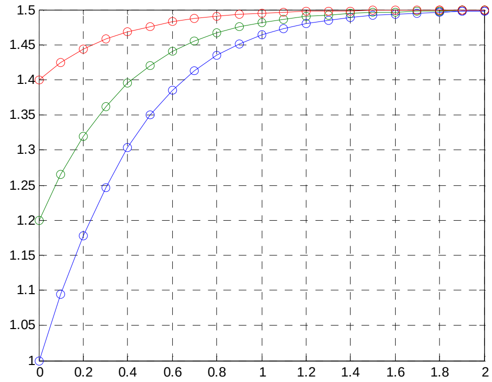


$x(0) > a/b$ $\qquad\qquad$ $x(0) < a/b$

Рассмотрим случай, когда $a < b$, например, $a/b = \dfrac{3}{2}$



$x(0) > a/b$



$x(0) < a/b$

Закон гиперболического роста численности населения Земли

Закон гиперболического роста численности населения Земли — скорость роста численности населения Земли примерно пропорциональна квадрату его численности

В работах Хайнца фон Фёрстера, С. П. Капицы, Майкла Кремера, А. В. Коротаева и других учёных показано, что рост населения Земли, в течение последних 100 тыс. лет (вплоть до 60-х–70-х годов прошлого века), следовал этому гиперболическому закону. В данный период Мир-Система развивалась в режиме с обострением.

Почему этот закон роста называется гиперболическим? Уравнение, математически описывающее гиперболу, может быть записано как:

$$y = \frac{k}{x}$$

При этом гиперболу будет описывать и такой вариант этого уравнения как:

$$y = \frac{k}{x_0 - x}$$

Переписав переменные: у как $N(t)$ (население мира в год t), k — как C, x_0 — как t_0, x — как t, получаем:

$$N(t)=\frac{C}{t_0-t},$$

здесь t_0 — момент обострения, когда население мира стало бы бесконечным, если бы продолжило бы расти в режиме с обострением и после начала 1970–х годов (2026 год, согласно расчетам фон Фёрстера).

Между тем, это гиперболическое уравнение является аналитическим решением дифференциального уравнения вида:

$$\frac{dN}{dt}=\frac{1}{C}N^2,$$

как раз и подразумевающего, что скорость роста численности населения Земли $\frac{dN}{dt}$ примерно пропорциональна квадрату его численности .

Начиная с 1960–х годов относительные темпы роста населения стали все больше замедляться, и на смену мировому гиперболическому демографическому росту пришел прямо противоположный тип роста, логистический. С 1989 г. стали снижаться и абсолютные темпы прироста численности населения мира. К 2100 году прирост может снизиться до величины менее 5 млн человек за десятилетие. По модели французского медика Жана–Ноэля Бирабена предел роста составит 10–12 млрд человек, большинство других моделей предполагает несколько менее высокий уровень стабилизации численности населения мира. Достаточно правдоподобными представляются и сценарии снижения численности населения Земли после достижения ею своего максимального значения. Окончательный сценарий динамики численности населения мира пока не ясен.