

НАЗНАЧЕНИЕ. ЦЕЛИ. ПРЕДМЕТ. ПОНЯТИЕ О МОДЕЛИ И ПРОЦЕССЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ. ЗНАЧЕНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОБЛЕМ ЭКОЛОГИИ. ПРИМЕРЫ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ СИТУАЦИИ.

Курс знайомить студентів із застосуваннями систем комп'ютерної математики (СКМ) в інженерній та науковій роботі. Надається огляд програмних засобів, корисних інженеру, фахівцю, науковцю в повсякденній роботі. Враховується специфіка роботи фахівця-еколога – розглядаються математичні моделі різних екосистем. В процесі навчання студенти повинні познайомитися з можливостями, які представляє екологу використання СКМ; завданнями, які можуть бути розв'язані за допомогою таких систем. Студенти повинні навчитися основним прийомам роботи з програмним продуктом (у нашому випадку – система MatLab), і познайомитися з принципами, які лежать в основі його функціонування. Зрозуміло, що в семестровому курсі неможливо вивчити детально систему, що розглядається в лабораторному практикумі. Цей курс повинен допомогти слухачам з'ясувати, що можна чекати від використання СКМ в роботі і дати студентам достатньо інформації для свідомого вибору програмного продукту для розв'язання конкретних . Система MatLab покликана служити, перш за все, ілюстрацією можливостей і особливостей програм такого роду. До того ж, знайомство з цією системою допоможе студентові в майбутньому швидше освоїти аналогічні за призначенням програми. Орієнтація на екологічну аудиторію зумовила відбір матеріалу і стиль викладу. Основна увага приділена засобам обробки і візуалізації експериментальних даних, а також формуванню математичних моделей екосистем та засобам розв'язання задач, які виникають при вирішенні екологічних проблем.

У практичній частині курсу, тобто у лабораторних роботах, для ознайомлення з великими можливостями систем комп'ютерної математики як предмет узятя дисципліна «Вища математика» (деякі розділи), а як інструмент – система MatLab. Дисципліна «Вища математика» обрана по двох причинах: по-перше, ця дисципліна є обов'язковою і вивчається на початкових курсах; по-друге, її основні поняття використовуються при розробці сучасних пристроїв та написанні комп'ютерних програм, які активно застосовують комп'ютерну графіку. Вибір MatLab обумовлен найбільшою популярністю цієї системи в технічних дослідженнях і наявності в її складі мови програмування 4-го покоління

Математика – наука про кількісні відношення та просторові форми оточуючого реального світу.

В человеческом развитии математика оказывала и оказывает существенное влияние. И ее проявления невозможно не оценить. Возможности применения математики всегда зависели от двух факторов: от степени развития математической мысли и математических понятий и от степени изученности объекта, который подвергается математическому исследованию.

Математические понятия в процессе своего становления и развития основываются на изучении предметов и объектов исследования с их неповторимыми свойствами во всем их многообразии. Исходя из вышесказанного

необходимо видеть и четко представлять себе взаимосвязи, возникающие между объектами. И эти отношения также должны быть отражены в математических исследованиях.

Отсюда следует, что для более точного, детального описания предметов и объектов необходимо использовать специальную методику описания, позволяющую учесть все нюансы подвергающихся исследованию предметов. Иными словами, требуется доступным языком описать объект, который будет являться моделью изучаемого объекта. Поскольку зачастую необходимо получать численные значения, то язык описания должен быть математическим. Далее математическое описание объекта используется при постановке задачи численной реализации. Непосредственно процесс математического описания взаимодействия объектов и систем получил название моделирования.

-----Небольшое отступление -----

В 1870 г. английское Адмиралтейство спустило на воду новый броненосец "Кэптен". Корабль вышел в море и перевернулся. Погиб корабль и все находящиеся на нем люди. Это было совершенно неожиданно для всех, кроме английского ученого-кораблестроителя В.Рида, который предварительно провел исследования на модели броненосца и установил, что корабль опрокинется даже при небольшом волнении. Но ученому, проделывающему, как казалось, несерьезные опыты с "игрушкой", не поверили лорды из Адмиралтейства. И случилось непоправимое...

С понятием «модель» мы сталкиваемся с детства. Игрушечный автомобиль, самолет, являющиеся моделями реальных объектов. Мы имеем образ реального объекта или явления, «заместителя» некоторого «оригинала», воспроизводящего его с некоторой достоверностью. Использование моделей является мощным орудием познания. Реальные объекты и процессы бывают столь сложны, что лучшим способом их изучения часто является построение модели, более простой. Модель может быть похожей копией объекта, выполненной из другого материала, в другом масштабе, с отсутствием ряда деталей (игрушечный кораблик, самолетик, домик из кубиков). Модель может отображать реальность более абстрактно-словесным описанием, по каким-то правилам.

Модели и моделирование используются человечеством давно. С помощью моделей и модельных отношений развились разговорные языки, письменность, графика. Наскальные изображения наших предков, затем картины и книги - это модельные, информационные формы передачи знаний об окружающем мире последующим поколениям. Модели применяются при изучении сложных явлений, процессов, конструировании новых сооружений. Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, нежели реальный объект. Более того, некоторые объекты вообще не могут быть изучены непосредственным образом: недопустимы, например, эксперименты с экономикой страны в познавательных целях; принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым или, скажем, с планетами Солнечной системы и т.п.

Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется объектом (от латинского *objectum* – предмет). Выработка методологии

направлена на упорядочение получения и обработки информации об объектах, которые существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собой и внешней средой.

В научных исследованиях большую роль играют гипотезы, то есть определенные предсказания, основывающиеся на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок. Быстрая и полная проверка гипотез может быть проведена в ходе специально поставленного эксперимента. При формулировании и проверке правильности гипотез большое значение в качестве метода суждений имеет аналогия.

Аналогией называют суждение о каком-либо частном сходстве двух объектов, причем такое сходство может быть существенным и несущественным. Необходимо отметить, что понятия существенности и несущественности сходства или различия объектов условны и относительны. Существенность сходства (различия) зависит от уровня абстрагирования и в общем случае определяется конечной целью проводимого исследования. Современная научная гипотеза создается, как правило, по аналогии с проверенными на практике научными положениями. Таким образом, аналогия связывает гипотезу с экспериментом.

Гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным для исследования логическим схемам. Такие логические схемы, упрощающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются моделями. Другими словами модель (от латинского *modus* – образец) – это условный образ (изображение, схема, описание и т.п.) какого-либо объекта (или системы объектов), это объект-заместитель объекта-оригинала.

Первоначальное значение слова было связано со строительным искусством, и почти во всех европейских языках оно употреблялось для обозначения образа или вещи, сходной в каком-то отношении с другой вещью. По мнению многих авторов модель использовалась первоначально как изоморфная теория (две теории называются изоморфными, если они обладают структурным подобием по отношению друг к другу).

С другой стороны, в таких науках о природе, как астрономия, механика, физика термин "модель" стал применяться для обозначения того, что она описывает. Доктор философских наук Виктор Александрович Штофф отмечает, что "здесь со словом "модель" связаны два близких, но несколько различных понятия" [16]. ***В.А. Штофф: «Под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его, и изучение которой дает нам информацию об изучаемом объекте»*** В широком смысле модель – мысленно или практически созданная структура, воспроизводящая часть действительности в упрощенной и наглядной форме. Таковы, в частности представления Анаксимандра о Земле как плоском цилиндре, вокруг которого вращаются наполненные огнем полые трубки с отверстиями. Модель в этом смысле выступает как некоторая идеализация, упрощение

действительности, хотя сам характер и степень упрощения, вносимые моделью, могут со временем меняться. В более узком смысле термин "модель" применяют тогда, когда хотят изобразить некоторую область явлений с помощью другой, более изученной, легче понимаемой. Так, физики XIX века пытались изобразить оптические и электрические явления посредством механических ("планетарная модель атома" – строение атома изображалось как строение солнечной системы). Таким образом, в этих двух случаях под моделью понимается либо конкретный образ изучаемого объекта, в котором отображаются реальные или предполагаемые свойства, либо другой объект, реально существующий наряду с изучаемым и сходный с ним в отношении некоторых определенных свойств или структурных особенностей. В этом смысле модель – не теория, а то, что описывается данной теорией – своеобразный предмет данной теории.

В зависимости от поставленной задачи, способа создания модели и предметной области различают множество типов моделей:

1. По области использования выделяют учебные, опытные, игровые, имитационные, научно-исследовательские модели.

2. По временному фактору выделяют статические и динамические модели.

3. По форме представления модели бывают математические, геометрические, словесные, логические, специальные (ноты, химические формулы и т.п.).

4. По способу представления модели делят на информационные (нематериальные, абстрактные) и материальные. Информационные модели, в свою очередь, делят на знаковые и вербальные, знаковые – на компьютерные и некомпьютерные.

Информационная модель – это совокупность информации, характеризующая свойства и состояние объекта, процесса или явления. Вербальная модель – информационная модель в мысленной или разговорной форме. Знаковая модель – информационная модель, выраженная специальными знаками, то есть средствами любого формального языка. Математическая модель – система математических соотношений, описывающих процесс или явление. Особенности математической модели состоят в том, что существенные черты объекта или процесса описываются языком уравнений и других математических средств. Компьютерная модель – математическая модель, выраженная средствами программной среды.

К моделям выдвигается ряд обязательных требований. Во-первых, модель должна быть адекватной объекту, т. е. как можно более полно соответствовать ему с точки зрения выбранных для изучения свойств. Во-вторых, модель должна быть полной. Это означает, что она должна давать возможность с помощью соответствующих способов и методов изучения модели исследовать и сам объект, т. е. получить некоторые утверждения относительно его свойств, принципов работы, поведения в заданных условиях.

Таким образом, модель выступает как своеобразный инструмент для познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект.

В теоретических науках (особенно в математике, физике) моделью какой-либо системы обычно называют другую систему, служащую описанием исходной системы на языке данной науки. Например, систему дифференциальных уравнений, описывающих протекание во времени какого-либо физического процесса, называют моделью этого процесса [2]. Вообще, моделью – в этом смысле – какой-либо области явлений называют научную теорию, предназначенную для изучения явлений из этой области. В этом смысле физическая модель — это модель, создаваемая путем замены объектов моделирующими устройствами, которые имитируют определенные характеристики либо свойства этих объектов. При этом моделирующее устройство имеет ту же качественную природу, что и моделируемый объект. Физические модели используют эффект масштаба в случае возможности пропорционального применения всего комплекса изучаемых свойств.

Модель позволяет научиться правильно работать с объектом, апробируя различные варианты управления на его модели. Экспериментировать в этих целях с реальным объектом в лучшем случае бывает неудобно, а зачастую просто вредно или вообще невозможно в силу ряда причин (большой продолжительности эксперимента во времени, риска привести объект в нежелательное и необратимое состояние и т. п.)

Моделирование – воспроизведение характеристик некоторого объекта на другом объекте, специально созданном для их изучения [8]. То есть моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью. Академик Иван Тимофеевич Фролов отмечал, что “*моделирование означает материальное или мысленное имитирование реально существующей системы путем специального конструирования аналогов (моделей), в которых воспроизводятся принципы организации и функционирования этой системы*”. Здесь в основе мысль, что модель есть средство познания, главный ее признак – отображение. *Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследование свойств объектов на их моделях называется теорией моделирования.*

В силу многозначности понятия «модели» в науке и технике не существует единой классификации видов моделирования: классификацию можно проводить по характеру моделей, по характеру моделируемых объектов, по сферам приложения моделирования (в технике, физических науках, кибернетике и т. д.).

Другими словами, моделирование - это процесс изучения строения и свойств оригинала с помощью модели. Приведем одну из возможных классификаций моделей.



Различают материальное и идеальное моделирование. Материальное моделирование, в свою очередь, делится на физическое и аналоговое моделирование.

Физическим принято называть моделирование, при котором реальному объекту противопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающая исследование (как правило, в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия. Примерами моделей такого рода служат: в астрономии - планетарий, в архитектуре - макеты зданий, в самолетостроении - модели летательных аппаратов и т. п.

Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими уравнениями).

От предметного моделирования принципиально отличается **идеальное моделирование**, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой. Основным типом идеального моделирования является знаковое моделирование.

Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов. **Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование**, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики. Классическим примером математического моделирования является описание и исследование законов механики Ньютона средствами математики.

Пример. *Посмотрите на следующую запись и попробуйте определить, что скрывается за этими знаками:*

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases}$$

Ответы, полученные от людей, имеющих различные специальности, будут сильно различаться. Вот некоторые из возможных вариантов.

Математик: "Это система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными, но что именно она выражает, сказать не могу".

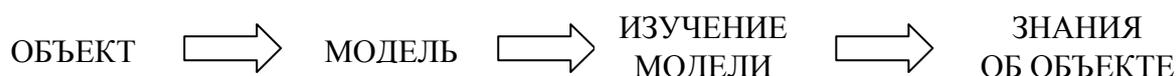
Инженер-электрик: "Это уравнения электрического напряжения или токов с активными напряжениями".

Инженер-механик: "Это уравнения равновесия сил для системы рычагов или пружин".

Инженер-строитель: "Это уравнения, связывающие силы деформации в какой-то строительной конструкции".

Какой же из ответов правильный? Не удивляйтесь, но каждый из них в некотором смысле верен. Все зависит от того, что скрывается за постоянными коэффициентами a , b , c и символами неизвестных x_1 и x_2 .

Схема процесса моделирования



Для построения моделей используют два принципа: **дедуктивный** (от общего к частному) и **индуктивный** (от частного к общему). При первом подходе рассматривается частный случай общеизвестной фундаментальной модели, которая приспособляется к условиям моделируемого объекта с учетом конкретных обстоятельств. Второй способ предполагает выдвижение гипотез, декомпозицию сложного объекта, анализ, а затем синтез. Здесь широко используется подобие, поиск аналогий, умозаключение с целью формирования каких-либо закономерностей в виде предположений о поведении системы.

Технология моделирования требует от исследователя умения корректно формулировать проблемы и задачи, прогнозировать результаты, проводить разумные оценки, выделять главные и второстепенные факторы для построения моделей, находить аналогии и выражать их на языке математики.

В современном мире все шире применяется процесс компьютерного моделирования, подразумевающий использование вычислительной техники для проведения экспериментов с моделью.

Сам процесс моделирования может быть представлен в виде цикла, в котором можно выделить пять этапов.

1. Постановка проблемы и ее анализ — выделяются важные черты и свойства объекта, исследуются взаимосвязи элементов в структуре объекта, формулируются гипотезы, объясняется поведение и развитие объекта.

2. Построение модели — выбирается тип модели, оценивается возможность ее применения для решения поставленных задач, уточняется перечень отображаемых параметров моделируемого объекта и связи между ними. Для сложных объектов определяется возможность построения нескольких моделей, отражающих различные аспекты функционирования объекта.

3. Подготовка исходной информации — осуществляется сбор данных об объекте (на основании изучения модели). Затем происходит их обработка с помощью методов теории вероятности, математической статистики и экспертных процедур.

4. Проведение расчетов и анализ результатов эксперимента — производится оценка достоверности результатов.

5. Применение результатов на практике — работа с моделируемым объектом с учетом его предполагаемых свойств, полученных при изучении моделей. При этом полагается, что эти свойства с достаточным уровнем вероятности действительно присущи данному объекту. Последнее положение должно основываться на результатах предыдущего этапа.

Если полученные на пятом этапе результаты недостаточны, изменился сам объект или его окружающая среда, то происходит возврат к первому этапу и новое прохождение цикла моделирования.

Перейдем к понятию *математического моделирования*

Работа над любой математической моделью начинается со сбора и анализа фактического материала. Определяются цели моделирования. Выделяются главные черты изучаемого объекта или явления. Вводятся формализованные характеристики. Принимаются правила работы с ними. В результате возникает математический объект, который и называется математической моделью. Разрабатываются методы математического анализа модели, которыми она исследуется. Полученные результаты математического моделирования интерпретируются в рамках исходного фактического материала, что позволяет оценить степень адекватности модели. Результаты моделирования не должны противоречить выделенным ранее ключевым экспериментальным фактам. Одновременно, модель не может объяснить все стороны изучаемого объекта или явления.

Хорошая модель, кроме объяснения известных, должна давать возможность предсказывать новые свойства. **Математическое моделирование широко используется там, где экспериментальные исследования трудоемки и дорогостоящи, или вообще невозможны (например, в изучении проблем экологии).**

Кроме задачи о прогнозе, математическое моделирование помогает классифицировать и систематизировать фактический материал, увидеть существующие связи в мозаике фактов. Это вытекает из того, что модель является специфически-ярким и выразительным языком, предназначенным для описания для описания изучаемого объекта или явления.

Предпочтение отдается более простым моделям. Отметим, что "простота" (иногда в ущерб точности) – один из принципов, о котором всегда нужно помнить при разработке математической модели.

Математические модели могут быть разделены на два класса: детерминистские и стохастические (вероятностные). В данной работе рассматриваются модели только первого типа. Математическое моделирование, использующее детерминированный подход содержит следующие этапы:

1. Физический анализ изучаемого явления и создание физической модели объекта.
2. Определение реакционных свойств среды, коэффициентов переноса и структурных параметров среды и вывод основной системы уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями.
3. Выбор метода численного или аналитического метода решения поставленной краевой задачи.

4. Получение дискретного аналога для соответствующей системы уравнений, если предполагается численное решение.
5. Выбор метода получения решения для дискретного аналога.
6. Разработка программы расчета для вычислительной машины. Тестовые проверки программы расчета. Получение численного решения системы дифференциальных уравнений.
7. Сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными, их физическая интерпретация. Параметрическое изучение исследуемого объекта.

Главное требование к математической модели – согласованность полученных результатов численного анализа с данными экспериментальных исследований. Для выполнения этого достаточного условия необходимо чтобы:

- в математической модели выполнялись фундаментальные законы сохранения массы, энергии и импульса;
- математическая модель правильно отражала сущность изучаемого явления.

Математическая экология

В экологии можно выделить три основные части:

- **Эмпирическая часть содержит фактические сведения, полученные в экспериментах и наблюдениях, а также из первичной систематизации.**
- **Теоретическая часть развивает основные концепции, позволяющие объединить и объяснить с единых позиций эмпирические закономерности и явления.**
- **Математическая часть конструирует математические модели, служащие для проверки основных теоретических концепций, дает методы обработки экспериментальных данных и планирования экспериментов и наблюдений.**

Математическое моделирование стимулирует накопление фактического материала, уточняет направление проводимых экспериментов.

Исторический обзор математических моделей экосистем

Первые исследования по применению математического моделирования в экологии относятся к двадцатым - тридцатым годам XX - го столетия. Исключение составляет работа Ферхюльста, появившаяся задолго до того, как сама экология сформировалась в виде целостной науки. Наиболее широкое использование математические модели в экологии получили с развитием электронно-вычислительной техники и методологии моделирования в конце шестидесятых годов.

Необходимым условием для построения содержательных математических моделей является наличие подробной естественнонаучной информации об устройстве и механизмах функционирования системы. Основными принципами, используемыми при построении моделей, являются универсальные законы сохранения. Уравнения должны содержать количественные выражения принятых гипотез о специфических экологических процессах (рождаемости, смертности, питания и т.д.).

Развитие математико-экологических моделей можно проследить по эволюции тех научных и прикладных вопросов, для ответа на которые эти модели создавались. Вопросы эти усложнялись по мере развития экологии и

совершенствования методики моделирования. Если вначале сами вопросы и результаты математического моделирования представляли отвлеченный теоретический интерес, то в дальнейшем они стали носить конкретный практический характер.

Первой математической моделью была модель Ферхюльста, она описывала численность популяции, ее динамику.

Классическими можно считать работы Райли, занимавшегося моделированием фитопланктона с учетом влияния освещенности и температуры на основные физиологические процессы.

Значительный вклад в методологию моделирования динамики водных растений был внесен В.В.Меншуткиным. В его монографии систематически изложены основные принципы моделирования водных экосистем с учетом пространственного распределения биогенных веществ, а также гидродинамических факторов.

Наиболее распространенным приемом построения пространственно-распределенных моделей является использование уравнений в частных производных, чаще всего уравнений турбулентной диффузии.

Значительная часть работ по моделированию природных экосистем имеет прикладной характер. Некоторые работы посвящены описанию систем, подвергаемых воздействию со стороны человека.

Математические модели открытых систем

Пространственно-временная упорядоченность, согласованность пространственных структур и динамических режимов являются фундаментальными свойствами биосистем и основой их функционирования на всех уровнях организация: от биохимического и клеточного до организменного, популяционного, биогеоценотического.

Патологические состояния в биосистемах можно интерпретировать как рассогласование системных параметров, дезорганизацию пространственно-временной структуры, проявлением чего являются аномальные осцилляции (Mager, 1980).

Процесс выздоровления, наоборот, возвращает систему к естественному режиму осцилляций ее компонент. Формирование устойчивых пространственно-временных структур сделалось в последние годы одним из основных объектов исследования биофизики и теоретической биологии.

Многочисленные примеры систем, в которых из хаотических состояний возникают высокоупорядоченные пространственные, временные или пространственно-временные структуры, известны также в физике (лазеры, кристаллизация) и в химии (реакция Белоусова-Жаботинского).

Удивительно сложные, высокоупорядоченные структуры от кристаллов до организмов биосферы конструируются без "архитекторов", измерений и чертежей. Сейчас исследователям ясно, что образование таких структур является следствием нелинейных динамических взаимодействий внутри систем на стадии формирования при наличии некоторых внешних условий, основным из которых является подвод потока энергии извне.

Пространственные структуры, возникающие в открытых системах, И. Пригожин назвал диссипативными. Развито новое научное направление, названное Г. Хакеном (1980) синергетикой (наука о явлениях кооперативности), целью которого является точное количественное описание процессов развития и самоорганизации систем.

Наряду с экспериментом одним из основных методов исследования явления формирования структур стало математическое моделирование. В математическую модель закладываются биологические представления, гипотезы о кинетических свойствах процессов (скоростях роста, размножения, гибели, интенсивностях взаимодействия). Синтезируя эту информацию, модель позволяет изучить качественно и количественно пространственно-временную структуру, формирующуюся в реальной или гипотетической системе, вскрыть причинно-следственные связи.

Исследуемое явление настолько сложно, что проанализировать его традиционными биологическими методами было бы невозможно. В свою очередь построение и исследование сложных математических моделей требует развития новых математических методов, служит импульсом развития математической теории. Так осуществляется научный *симбиоз математики и биологии*.

Берущая начало от работ А. Лотки (Lotka, 1925) и В. Вольтерры (1931) математическая экология накопила большой арсенал моделей исследования временных закономерностей, цикличностей в экосистемах. В последние годы развиваются модели и методы изучения пространственной структуры популяций и сообществ.

Основы анализа пространственно-временных структур в биохимических системах заложены в работах А. Тьюринга и И. Пригожина.

Традиционным объектом эколого-математического моделирования является фитопланктон, кинетические процессы роста которого хорошо изучены количественно, а причины наблюдаемого в природе пространственно-временного структурирования не вполне ясны. Мы будем анализировать явления "пятнистости" пространственного распределения, цикличности и некоторых других особенностей динамики планктона, а также исследовать пространственно-временную перестройку конкретного планктонного сообщества под воздействием антропогенных факторов. Впервые математическое описание колебательных процессов в биосистеме было получено на модели хищник-жертва (Lotka).

Следует отметить, что математическое моделирование не подменяет собой экспериментальные исследования, а, напротив, стимулирует накопление фактического материала, уточняет направление проводимых экспериментов.

Разработка математической модельной части науки необходима также для построения прогнозов динамики реальных объектов, для научно обоснованных количественных предсказаний последствий различных воздействий на изучаемые объекты. В некоторых случаях ответы на указанные вопросы могут быть получены путем лабораторного моделирования на физических, химических, биологических моделях; это не относится, однако, к природным экосистемам, эксперименты с которыми весьма затруднены и часто недопустимы.

Основными принципами, используемыми при построении моделей, являются универсальные законы сохранения: балансовые уравнения математико-экологических моделей основаны, как правило, на следующих законах: сохранения числа частиц (например, численности особей); сохранения вещества; сохранения энергии.

Кроме этого, уравнения содержат количественные выражения принятых гипотез о специфических экологических процессах (рождаемости, смертности, питания).

Природные экосистемы являются сложными комплексными системами. Для изучения этих систем их расчленяют на простые подсистемы посредством абстрагирования от относительно слабых взаимодействий.

Первоначально математическому моделированию подвергалась такая единица, как популяция. По мере развития методики моделирования и расширения знаний в области экологии популяций модели совершенствовались и усложнялись, становились более адекватными.

Параллельно, начиная с работ В. Вольтерры, развивались исследования по моделированию сообществ водных животных и растений. С появлением возможности реализации моделей на ЭВМ были начаты работы по описанию с помощью математических моделей динамики экосистем в целом.

Однако до недавнего времени подавляющее число работ по математической экологии не учитывало пространственной неоднородности исследуемых систем и использовало лишь кинетические уравнения. В то же время все больше исследователей признают, что пространственные явления имеют принципиальное значение в функционировании экологических систем. Холдинг отмечает, что реальный мир состоит из мозаики пространственных элементов с различными биологическими, физическими и химическими характеристиками, соединенных механизмами биологического и физического транспорта. В гетерогенных системах возможны большие флуктуации, и они менее устойчивы, чем однородные. Однако упругость этих систем выше.

Вариабельность в пространстве и времени ведет к вариабельности численности популяции, удержанию в ней генетических и поведенческих типов, способных не только к выживанию в неблагоприятных условиях, но и к использованию возможностей бурного роста. Чем ниже гетерогенность, тем более вероятны низкие колебания численности и низкая упругость. Эксплуатация рыбных ресурсов Великих озер-пример разрушения человеком чувствительной экосистемы, характеризующейся пространственной однородностью, изолированностью, демпфированием климатических воздействий.

Первая в математической экологии работа, направленная на изучение пространственной неоднородности, принадлежит Дж. Скеламу (Skellam, 1951). Им исследованы процессы распределения планктона в природных и лабораторных условиях.

Как отмечает С. Левин, пассивная диффузия редко применима к движению животных. Но диффузионная гипотеза имеет ряд преимуществ как отправная точка. Даже если движение не диффузионно, диффузионная аппроксимация часто обеспечивает приемлемое описание в больших пространственных масштабах.

Более того, небольшое ослабление предположения чистой диффузии позволяет включить эффекты адвекции, таксиса, направленную локальную диффузию. Каждая модификация порождает возрастающие математические трудности, но наиболее важные классы решений остаются теми же, что и в простейшем случае.

Классы задач и математический аппарат.

Современные математические модели в экологии можно разбить на три класса. Первый - описательные модели: регрессионные и другие эмпирически установленные количественные зависимости, не претендующие на раскрытие механизма описываемого процесса. Они применяются обычно для описания отдельных процессов и зависимостей и включаются как фрагменты в имитационные модели. Второй - модели качественные, которые строятся с целью выяснения динамического механизма изучаемого процесса, способные воспроизвести наблюдаемые динамические эффекты в поведении систем, такие, например, как колебательный характер изменения биомассы или образование неоднородной в пространстве структуры. Обычно эти модели не слишком громоздкие, поддающиеся качественному исследованию с применением аналитических и компьютерных методов. Третий класс - имитационные модели конкретных экологических и эколого-экономических систем, учитывающие всю имеющуюся информацию об объекте. Цель построения таких моделей - детальное прогнозирование поведения сложных систем или решение оптимизационной задачи их эксплуатации.

Чем лучше изучен сложная экологическая система, тем более полно может быть обоснована ее математическая модель. При условии тесной связи наблюдений, экспериментального исследования и математического моделирования математическая модель может служить необходимым промежуточным звеном между опытными данными и основанной на них теорией изучаемых процессов. Для решения практических задач можно использовать модели всех трех типов. При этом особенно важны вопросы идентифицируемости (соответствия реальной системе) и управляемости таких моделей.

Обычно при математическом моделировании задача состоит в том, чтобы получить обоснованный прогноз кинетики компонентов экологической системы. При этом делаются различные исходные предположения и преследуются соответствующие цели при изучении моделей, которые один из пионеров математической биологии А.А. Ляпунов сформировал следующим образом (Ляпунов, 1968, 1972).

А. Биологические характеристики компонентов неизменны, так же как и взаимоотношения между ними. Система считается однородной в пространстве. Изучаются изменения во времени численности (биомассы) компонентов системы.

Б. При сохранении гипотезы однородности вводится предположение о закономерном изменении системы отношений между компонентами. Это может соответствовать либо закономерному изменению внешних условий (например, сезонному), либо заданному характеру эволюций форм, образующих

систему. При этом по-прежнему изучается кинетика численности компонентов.

Аппаратом для изучения этих двух классов задач служат системы обыкновенных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений с постоянными (А) и переменными (Б) коэффициентами.

В. Объекты считаются разнородными по своим свойствам и подверженными действию отбора. Предполагается, что эволюция форм определяется условиями существования системы. В этих условиях изучается, с одной стороны, кинетика численности компонентов, с другой - дрейф характеристик популяций. При решении таких задач используют аппарат теории вероятностей. К ним относятся многие задачи популяционной генетики.

Г. Отказ от территориальной однородности и учет зависимости усредненных концентраций от координат. Здесь возникают вопросы, связанные с пространственным перераспределением живых и косных компонентов системы. Например, численность (биомасса) видов - гидробионтов меняется с изменением глубины водоема. Для описания таких систем необходимо привлечение аппарата дифференциальных уравнений в частных производных. В имитационных моделях часто вместо непрерывного пространственного описания применяют разбиение всей системы на несколько пространственных блоков.

Примеры.

1. Уравнение нормального размножения

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0$$

(в большом пруду разводят карасей, караси не мешают друг другу, корма им хватает.)

2. Логистическая модель или модель размножения. Если наш пруд с карасями невелик, или если число карасей в большом пруду сильно возросло, то конкуренция из-за пищи приводит к уменьшению скорости прироста. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент k зависит от числа карасей линейно, т.е. $k = a - bx$. Таким образом, мы приходим к уравнению размножения с учетом конкуренции или так называемому логистическому уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x$$