Лабораторна робота № 5.

Тема. Поліноми та алгоритми їх обчислення.

Мета роботи: ознайомитись з алгоритмами обчислення поліномів.

Теоретичний мінімум

У системі **MATLAB** існує набір команд для роботи з поліномами, який забезпечує реалізацію операцій множення, диференціювання, обчислювання коренів та інші над поліномами. Ряд команд дозволяє обробляти дрібно-раціональні вирази, чисельники та знаменники яких є поліномами. Застосовування поліномів обумовлено великими їх можливостями у представленні даних, а також їх простотою завдання і обчислювання.

Вправа 1. Команди обчислювання поліномів. Схема Горнера.

При однократному обчисленні значень полінома (многочлена) степеня n (n відносно невелике) послідовність виконання операцій не має особливого значення. Однак, для обчислення поліномів досить високого степеня при різних значеннях аргументу, послідовність виконання операцій є суттєвим чинником.

Попереднє обчислення усіх потрібних степенів аргументу x^2, x^3 зазвичай є невигідним, бо потребує досить великої кількості операцій: при обчисленні значень полінома n-го степеня для одержання степеневої функції до x^n потрібно виконати $n-1$ операцію множення. Окрім того, потрібні ще n множень на поліноміальні коефіцієнти. Загалом отримаємо $2n-1$ операцію множення та n операцій додавання.

Існують схеми обчислення поліномів, що потребують меншої кількості арифметичних операцій, наприклад, схема Горнера – n операцій множень і n операцій додавань.

Нехай даний поліном n-го степеня

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x \ + a_0 . \qquad (1)$$

Запишемо його у вигляді

$$P_n(x) = (((a_n \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + ... + a_1) \cdot x \ + a_0 . \qquad (2)$$

Обчислення значення полінома у формі (2) називають схемою Горнера. Для поліномів загального виду неможливо побудувати схему більш економну у сенсі кількості операцій.

Форми запису поліному можуть бути різними:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (3)$$

або

$$P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + ... + a_n x + a_{n+1} . \qquad (4)$$

Форма (3) використовується у системі **MATLAB** в режимі за замовчуванням у випадку, коли величина n від'ємна, а форма (4) в режимі за замовчуванням – коли величина n додатна. Поліном задається та зберігається у вигляді вектора, компонентами якого являються коефіцієнти поліному $P = [a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ a_{n+1}]$ [33, с.111]. Число компонентів цього вектора повинно бути на одиницю більше величини степені поліному та нульові коефіцієнти також повинні бути представлені компонентами векторі.

Приклад 1. Задати поліном $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 7$.

Для виконання завдання треба в командну строку ввести таку команду:

```
>> p = [3 2 0 –1 0 7];
p =
     3  2  0  –1  0  7
```

Команди операцій з поліномами надані у таблиці 5.1, де введені наступні позначення: a, b, d, p, q – поліноми, r – вектор-стовпець коренів, S – масив точок, M – квадратна матриця.

Таблиця 5.1 – Команди операцій з поліномами

Команда	Зміст операції
poly(r)	Обчислювання характеристичного поліному
polyval(p,S)	Обчислювання значення полінома p у точках S
polyvalm(p,M)	Обчислювання значень полінома p для матричного аргументу M
polyder(p)	Диференціювання полінома p
polyder(a,b)	Диференціювання добутка поліномів a та b
[d,p]=polyder(b,a)	Диференціювання дробу з чисельником b і знаменником a
conv(a,b)	Множення поліномів a на b
[q,p]=deconv(a,b)	Ділення поліномів (одержання частки і залишка) a на b
[r,s,k]=residue(b,a)	Розкладання дробу з чисельником b та знаменником a на прості дроби (r – залишок, s – полюс, k – частка)
roots(p)	Знаходження коренів поліному p

Вправа 2. Операції множення і ділення поліному на поліном. Знаходження найбільшого загального подільника.

Для виконання операцій множення та ділення поліномів у системі **MATLAB** використовуються команди **conv** і **deconv**. Функція **conv** виповнює так звану згортку векторів – розбудову розвинутого вектора коефіцієнтів по заданим коефіцієнтам векторів коефіцієнтів поліномів-співмножників. А команда **deconv** робить зворотну згортку векторів – обчислює коефіцієнти поліномів, які являються часткою та залишком від ділення одного поліному на другий.

Коли задані поліноми a і b порядку відповідно m і n, то їх добуток буде поліномом порядку $m+n$, елемент k-го порядку якого знаходиться за формулою:

$$c(k) = \sum_{j=\max(1,k+1-n)}^{\min(k,m)} a(j)b(k+1-j).$$

Команда **conv** має наступний синтаксис **v= conv(a,b),** де **v** – вектор коефіцієнтів поліному, отриманого у результаті добутку поліномів, заданих векторами **a** і **b**.

Приклад 1. Знайти добуток поліномів $P_1(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 9$ і $P_2(x) = 2x^3 + 4x + 6$.

Спочатку формуємо вектори, які описують вихідні поліноми, а потім здійснюємо операцію множення:

```
>> a=[1 3 5 7 9]; b=[2 0 4 6]; v=conv(a,b)
v =
    2    6    14    32    56    58    78    54
```

Розглянемо команду ділення. Синтаксис команди: **[q,p]=deconv(a,b)**, де **q** – вектор коефіцієнтів поліному-результату (частка), **p** – вектор коефіцієнтів поліному-залишку.

Приклад 2. Розділити поліном $P_1(1) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 9$ на поліном $P_2(x) = 2x^3 + 4x + 6$ з визначення частки та без визначення її.

Розподіл поліному на поліном виконуємо послідовністю команд:

```
>>a=[1 3 5 7 9];
>> b=[2 0 4 6];
>> [q,p]=deconv(a,b)
q =
   0.5000    1.5000
p =
    0    0    3    -2    0
```

Для обчислення тільки частки треба застосувати команду **deconv** у наступному вигляді: **q=deconv(a,b).** Для вихідної задачі:

```
>> a=[1 3 5 7 9];
>> b=[2 0 4 6];
>> q=deconv(a,b)
q =
   0.5000    1.5000
```

Вправа 3. Обчислення коренів та коефіцієнтів полінома при заданій змінній**.**

Визначити усі корні поліному можна за допомогою команди **roots**, що повертає вектор-стовпець, елементами якого є корені заданого поліному (у тому числі і комплексні корені).

Приклад 1. Визначити корені поліному $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 15x + 7$ та виконати зворотню операцію – знайти коефіцієнти поліному по його відомим кореням.

Застосуємо для цього наступний набір команд:

```
>> p=[3 2 –1 –15 7];
>> r=roots(p)
r =
  –1.2505 + 1.4296i
  –1.2505 – 1.4296i
   1.3581
   0.4762
```

Кількість коренів поліному повинна збігатися з порядком полінома. Визначення коренів поліному дозволяє відновити коефіцієнти так званого характеристичного поліному (тобто приведеного поліному, у якого коефіцієнт при найвищій степені дорівнює одиниці). З цією метою передбачено команда **poly**. Для нашого випадку:

```
>> p1=poly(r)
p1 =
    1.0000    0.6667   –0.3333   –5.0000    2.3333
```

Щоб одержати коефіцієнти вихідного заданого поліному, треба помножити отримане значення на коефіцієнт при найвищій степені поліному (у нашому прикладі він дорівнює 3):

```
>> p1*3
ans =
    3.0000    2.0000   –1.0000  –15.0000    7.0000
```

Вправа 4. Обчислення значення поліному при заданій величині.

Для знаходження значення поліному від заданого аргументу призначено команду **polyval**, яка має наступний синтаксис **y=polyval(p,s)**, де **p** – вектор коефіцієнтів поліному, **s** – задана величина аргументу.

Приклад 1.Обчислити значення поліному $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ при $x = 2$.

Знаходження значення поліному відбувається наступним чином:

```
>> p=[5 –7 3];
>> y=polyval(p,2)
y =
     9
```

Для обчислення значення поліному від заданого аргументу, що представляється у вигляді масиву даних, використовується команда **Y=polyval(p,S),** де **S** – одновимірний або двовимірний масив. Вказана команда знаходить значення поліному для кожного елементу масиву.

Приклад 2. Знайти значення поліному $P(X) = 5X^2 - 7X + 3$, де

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Процедура знаходження не відрізняється від звичайної процедури обчислення поліному від одного заданого аргументу – спочатку вводиться масив даних для обчислення поліному:

```
>> S=[ 1 2 3; 3 2 1; 1 3 2]
S =
    1    2    3
    3    2    1
    1    3    2
```

Потім знаходяться коефіцієнти поліному та використовується команда для обчислення значень поліному для кожного елемента вихідної матриці:

```
>> p=[5 –7 3];
>> y=polyval(p,S)
y =
    1    9   27
   27    9    1
    1   27    9
```

Вправа 5. Операції диференціювання та інтегрування поліномів.

Для знаходження похідної від заданого поліному існує команда **polyder** [33, с.113]. В залежності від того, який результат треба отримати, використовуємо декілько способів формування командного запиту:

- **q=polyder(p)**, де **p** – поліном, заданий вектором коефіцієнтів, команда **polyder** обчислює вектор **q**, елементи якого представляють собою коефіцієнти поліному-похідної від вихідного поліному **p**;
- **c=polyder(a,b)** – функція обчислює похідну від добутка двох поліномів $P(x)$ та $Q(x)$, з коефіцієнтів яких сформовані вектори, відповідно, **a** і **b**;
- **[q,d]=polyder(a,b)** – функція обчислює похідну від відношення двох поліномів $P(x)$ та $Q(x)$, з коефіцієнтів яких сформовані вектори, відповідно, **a** і **b;** результат видається у вигляді відношення векторів **q** і **d** (**q/d**), які містять коефіцієнти поліномів, що визначають результат операції.

Приклад 1. Знайти поліном-похідну від добутку двох поліномів $P(x)$ та $Q(x)$, які задані векторами коефіцієнтів **a** і **b.**

Задача розв′язується за допомогою наступних операцій:

```
>> a=[3 4 2]; b=[1 6 2];
>> c=polyder(a,b)
c =
   12    66    64    20
```

Аналогічний результат можна отримати, якщо спочатку перемножити вектори коефіцієнтів поліномів за допомогою команди **conv** і знайти похідну від цього добутку:

```
>> p=conv(a,b)
p =
    3    22    32    20     4
>> c=polyder(p)
c =
   12    66    64    20
```

Для інтегрування поліномів використовується команда **polyint**, яка має такий синтаксис: **q=polyint(p,k),** де **k** – константа інтегрування (константа первісної), яка може бути вилучина (за замовчуванням вона дорівнює нулю), **p** – вектор, компоненти якого є коефіцієнти вихідного поліному.

Вправа 6. Ознайомитись з командою розкладання раціональної функції на елементарні дроби.

Раціональною називається функція, яку можна представити у вигляді відношення двох многочленів, тобто $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-ної степені, $Q_m(x)$ – многочлен m-тої степені. Таку функцію $f(x)$ ще називають раціональним дробом.

Команда **residue** здійснює розкладання раціональної функції **b(x)/a(x)** на елементарні дроби з виділенням цілої частини. Компоненти r_i, s_i векторів $\bar{r}$ та $\bar{s}$ визначають, що $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{r_i}{x-s_i}+k(x)=\dfrac{b(x)}{a(x)}$, де n – порядок найбільшого з поліномів.

Приклад 1. Розкласти на елементарні дроби дрібно-раціональну функцію

$$\frac{9a^5+8a^4+6a^3+5a^2+3a+2}{4a^4+3a^3+5a^2+3a+1}.$$

Розв’язання задачі виконуємо за допомогою наступної послідовності команд:

```
>> a=[9 8 6 5 3 2];
>> b=[4 3 5 3 1];
>> [r,s,k]=residue(a,b)
r =
  –0.0567 + 0.1845i
  –0.0736 – 0.1727i
  –0.0725 – 0.0051i
  –0.0448 – 0.0073i
s =
  –0.0000 + 1.0000i
  –0.0000 – 1.0000i
  –0.3750 + 0.3307i
  –0.3750 – 0.3307i
k =
    2.2500    0.3125.
```

Таким чином, розкладання на елементарні дроби для даного приклада буде мати вигляд:

$$\frac{9a^5+8a^4+6a^3+5a^2+3a+2}{4a^4+3a^3+5a^2+3a+1}=\frac{0.0567+0.1845\mathrm{i}}{a-\mathrm{i}}+\frac{-0.0736-0.1727\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}+$$

$$+\frac{-0.0725-0.0051\mathrm{i}}{a+0.3750-0.3307\mathrm{i}}+\frac{-0.0448-0.0073\mathrm{i}}{a+0.3750+0.3307\mathrm{i}}+2.25a+0.3125$$

Приклад 2. Розкласти дрібно-раціональну функцію $\frac{a-3}{a^3-a+2}$.

Перелік команд, що розв′язує приклад:

```
>> q =[1 – 3];
>> p =[1 0 – 1 2];
>> [r,s,k]=residue(q,p)
r =
  – 0.7607
   0.3803 + 0.4289i
   0.3803 – 0.4289i
s =
  -1.5214
   0.7607 + 0.8579i
   0.7607 – 0.8579i
k =
     []
```

Зверніть увагу, **k=[ ]** означає, що у розкладанні відсутня ціла частина, тобто порядок чисельника дорівнює одиниці, а порядок знаменника – трьом.