Лабораторная работа № 13.

Тема. Дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения. Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения в символьном виде в подсистеме **Simbolic Math**; ознакомиться с использованием решателей обыкновенных дифференциальных уравнений (ЗДР) и возможностями представления решений в графическом виде в среде системы **MATLAB**.

Теоретический минимум

Инженерные и научные часто связаны с дифференциальных уравнений, поскольку с помощью последних описываются физические явления. Процессы в технических устройствах описываются дифференциальными уравнениями. Природа этих процессов может быть разнообразной. При анализе, например, тепловых режимов аппаратуры вычисляются тепловые потоки, при изучении электромагнитных процессов – электрические и магнитные поля, при оценке прочности изделий вычисляются механические напряжения и деформации. К сожалению, для многих практических важных случаев , которые описываются дифференциальными уравнениями, весьма сложны, и получить их точное решение оказывается затруднительно или невозможно. Эти трудности могут быть связанные со структурой уравнения, например, с его нелинейным характером. Однако, решить подобные сложные задачи на современном уровне развития науки можно с помощью компьютерных технологий. Поэтому методы решения дифференциальных уравнений возможностей компьютера широко применяются в инженерной практике.

Дифференциальные уравнения принято распределять на две группы: обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. В данной лабораторной работе рассматриваются методы решения обычных дифференциальных уравнений [12].

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где F – заданная функция трех переменных, которая определена в области G (одномерной области), x – независимая переменная из интервала, $y(x)$ – неизвестна искомая функция, $y'(x)$ – ее производная.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, которые разрешены относительно производной, то есть уравнения вида $y' = f(x, y)$ называют уравнениями в нормальной форме.

Функция $y = y(x)$ называется решением дифференциального уравнения на интервале, если она может быть непрерывно продифференцирована на (a, b) и при всех x из интервала (a, b) удовлетворять уравнению $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* дифференциального уравнения [12].

Если дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ развязывается, то решений можно получить бесконечное множественное число и эти развязки могут быть записаны в виде, где C – произвольная константа. Выражение

$$y(x, C) \qquad (1)$$

называют *общим решением* дифференциального уравнения 1-го порядка: при всех допустимых значениях C функция $y = y(x, C)$ является решением уравнения $y'(x, C) = f(x, y(x, C))$.

Частным решением діференціального уравнения называется такое решение, которое выходит из общего решения (1) при деяком приватном значении произвольной постоянной; для любого заранее заданного решения $y = \varphi(x)$ найдется такое значение константы, что $y(x, C^*) = \varphi(x)$.

Произвольная стала определяется из так называемых начальных условий [31]. Если поставить задание: найти решение ЗДР, которое удовлетворяет условию, то такое дифференциальное уравнение имеет единственное решение.

Важным элементом задач, которые содержат дифференциальные уравнения, являются дополнительные условия, которые необходимы для получения количественного решения.

Относительно обыкновенных дифференциальных уравнений различают два вида заданий: задание с начальными условиями (задача Коши) и задание с предельными условиями.

Задание об отыскании решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию, называется задачей Коши. Решение задачи Коши является частным решением.

Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной (включая случаи, когда стала следует к $\pm\infty$), называется *особенным решением* дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка состоят из однородных, линейных, уравнение Бернулли, Клеро, Рикатти, Абеля 2-го рода и других.

В лабораторной работе мы ограничиваемся рассматриванием определений лишь одного типа обычных дифференциальных уравнений, так называемых линейных уравнений.

Уравнение первого порядка:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{2}$$

называют линейным. Функции $P(x)$ и $Q(x)$ называются коэффициентами. Если $Q(x) = 0,$ то линейное уравнение называется однородным или дифференциальным уравнением без правой части. Если $Q(x) \neq 0,$ то линейное уравнение называется *неоднородным* или с правой частью [12].

Для решения ЗДР (2) можно использовать несколько практических подходов. В частности, представить $y(x)$ в виде произведения, где считается, что $u(x)$ решением однородного линейного уравнения, то есть

$$u' + P(x)u = 0. \tag{3}$$

Если в (3) перенести $P(x)u$ вправо, то одержимо уравнение с отделяемыми переменными, частное решение которого имеет вид

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}. \tag{4}$$

После подстановки искомой функции $y = u(x) \cdot v(x)$ в уравнение (2) получим:

$$[u' + P(x)\,u]v + uv' = Q(x). \tag{5}$$

Поскольку выражение в квадратных скобках благодаря (3) равняется нулю, то после решения имеем:

$$v' = \frac{Q(x)}{u(x)}; \;\; v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)}dx + C. \tag{6}$$

После подстановки функций $u(x)$ и $v(x)$ в функцию, получим общее решение линейного уравнения

$$y_{зн}(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]. \tag{7}$$

Из представления (7) следует, что

а) линейное уравнение первого порядка может быть всегда выраженно через интегралы от $P(x)$ и $Q(x)$;

б) общее решение линейного неоднородного уравнения может быть представлено в виде суммы общего решения однородного уравнения и решения части неоднородного уравнения :

$$y_{зн}(x) = y_{зо}(x) + y_{чн}(x), \tag{8}$$

$$y_{зо}(x) = C\,e^{-\int P(x)dx}, \quad y_{чн}(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right].$$

При решении конкретных уравнений использование формулы (7) не является удобным, потому лучшее воспользоваться схемой решения, которая приводит к выражению (8).

Упражнение 1. Решение обычных дифференциальных уравнений общего вида в символьном виде. Задача Коши. Построение интегральной кривой.

Для решения обычных дифференциальных уравнений в форме Коши в системе **MATLAB** используется команда **dsolve(‘eqn1’,’eqn2’)** [44]. С помощью этой команды можно решать как одно дифференциальное уравнение, так и систему дифференциальных уравнений первого порядка. В случае наличия при задании дифференциального уравнения начальных условий, они задаются в параметрах команды **dsolve** после информации о дифференциальных уравнениях.

По умолчанию независимой переменной считается **t**. Можно использовать и другую переменную, какую розміщуємо в конце списка параметров команды **dsolve**. Для правильного представления дифференциального в параметрах команды **dsolve** используется символ **D**, который помечает производную по независимой переменной, то есть **d/dt**, при этом **D2** означает производную второго порядка **d^2/dt^2** и так далее

Задача Коши для обычного дифференциального уравнения 1-го порядка заключается в отыскании функции, которая удовлетворяет этому уравнению и начальному условию, где t и y – заданы значения.

Начальные условия задаются в виде одной из рівностей **в(a)= b** или **Dy(a)= b**, где **в –** искомая переменная, **но и b –** константы.

В случае рассматривания систем дифференциальных уравнений число начальных условий может быть меньш, чем число дифференциальных уравнений. Тогда в решении системы будут присутствовать произвольные стали **C1**, **C2** и так далее Окончательный результат решения представляется в виде массива записей. Если начальные условия не заданы, решение формируется в общем виде, который содержит произвольные стали.

Пример 1. Найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному значению $y(0)=1$.

Если сравнить исходное уравнение $y' + y = e^x$ с уравнением (2), легко установить, что $P(x)=1$. Используем вышеописанную процедуру решения линейного уравнения, то есть представление искомой функции в виде

$$y(x)=u(x)v(x).$$

Находим:

$$u(x)=\int P(x)dx=\int dx = x,$$

откуда

$$e^{-\int P(x)dx}=e^{-x}.$$

Из представления (7) получаем, что $y=e^{-x}\nu(x)$. Продиференцюемо это выражение и подставим в исходное уравнение:

$$\begin{array}{l|l} & y' = e^{-x}\nu'(x)-\nu(x)e^{-x} \\ + & \\ & y = \qquad\qquad \nu(x)e^{-x} \\ \hline & e^x = e^{-x}\nu'(x) \end{array}$$

Грустим левые и правые части функций $y=e^{-x}\nu(x)$ и, что приводит к выражению:

$$e^x=e^{-x}\nu'(x).$$

Это уравнение является уравнением из відокремлювальними змінними: $\frac{d\nu}{dx}e^{-x}=e^x$. После умножения обеих частей уравнения на, получим:

$$d\nu = e^{2x}dx.$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$\nu=\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

Окончательно, после подстановки функции $\nu(x)$ в представление, имеем:

$$y=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)e^{-x}, \text{ или } y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x.$$

Первое слагаемое в представлении искомого решения является общим решением однородного линейного уравнения, второе слагаемое – частичное решение исходного уравнения.

Для нахождения частичного решения исходного дифференциального уравнения, необходимо определить значение произвольной постоянной с помощью начального условия $y(0)=1$:

$$1=Ce^0+\frac{1}{2}e^0 \Rightarrow 1=C+\frac{1}{2} \Rightarrow C=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, частичное решение исходного дифференциального уравнения при значении постоянной $C=\frac{1}{2}$ имеет вид:

$$y = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}.$$

Для получения общего решения дифференциального уравнения в системе **MATLAB** используется команда **dsolve:**

```
>> r=dsolve('Dy+y=exp(x) ','x')
r =
1/2*exp(x)+exp(-x)*C1
```

В случае развязывания задачи Коши, необходимо во входные параметры команды **dsolve** прибавить начальное условие $y(0) = 1$:

```
>> r=dsolve('Dy+y=exp(x) ','y(0)=1','x')
r =
1/2*exp(x)+1/2*exp(-x)
```

Построим интегральную кривую, которая отвечает частичному решению (см. рис. 13.1):

```
>> ezplot(r)
```

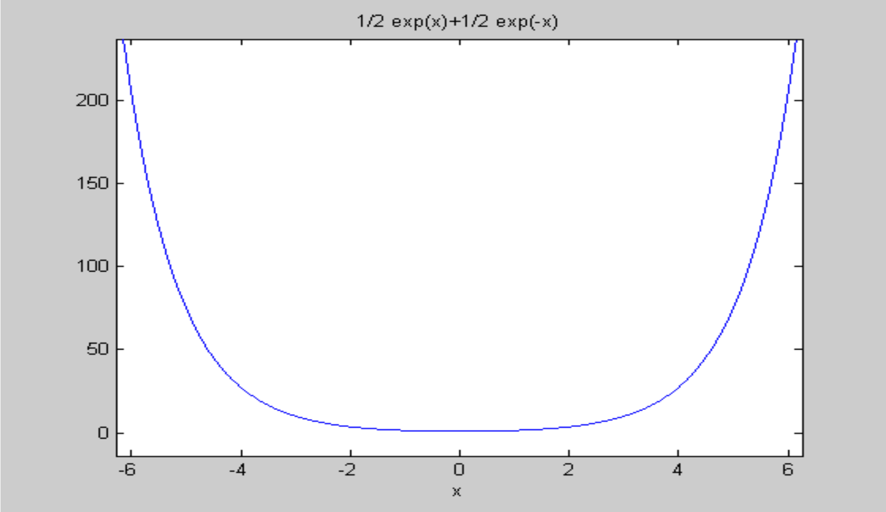

Рис. 13.1 – График решения задачи Коши для дифференциального уравнения

Пример 2. Развязать дифференциальное уравнение $xdy - (\cos x - y)dx = 0$ при начальном условии $y(0) = 1$.

Уравнение примера представлено в так называемой дифференциальной форме, перепишем его в виде:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}(\cos x - y) = 0.$$

Развяжем полученное уравнение в общем виде:

```
> r=dsolve('Dy((cos(t)(y) /t=0')
r =
(sin(t)+C1)/t
```

Построим интегральную кривую частичного решения для определенных значений постоянной ($C_1 = 1$)і $t \in [0,\ 50]$:

```
>> ezplot('(sin(t)+1)/t'[0 50])
```

Теперь розвяжемо задачу Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}(\cos x - y) = 0$ при начальном условии $y(0) = 1$:

```
>> r=dsolve('Dy–(cos(t) -y) /t=0','y(0)=1')
r =
1/t*sin(t)
>> ezplot(r[0 50])
```

Изменим начальные условия: $y(1) = 0$. Соответствующее решение задачи Коши получим завдякі использованию следующей команды:

```
>> r=dsolve('Dy–(cos(t) -y) /t=0','y(1)=0')
r =
(sin(t) –sin(1))/t
>> ezplot(r[0 50]);grid on
```

Пример 3. Развязать дифференциальное уравнение $y' + \frac{y^2}{x^2} = \frac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = 2$.

Дано дифференциальное уравнение дифференциальным уравнением первого порядка с начальным условием, которое отвечает определению задачи Коши.

Это нелинейное однородное уравнение первого порядка. При этом $x \neq 0$. Напомним процедуру решения однородного дифференциального уравнения первого порядка. Вводим

$$z = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = zx \quad \Rightarrow \quad y' = z'x + z.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$z'x + z + z^2 = z`, \quad \text{или} \qquad z'x = -z^2.$$

Исходное дифференциальное уравнение сводится к уравнению разделяющимися переменными. Разделяем переменные и получаем уравнение

$$\frac{1}{z^2}dz = -\frac{1}{x}dx.$$

Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{1}{z^2}dz = -\int \frac{dx}{x}.$$

Общий интеграл уравнения представляется в виде:

$$-\frac{1}{z} = -\ln x + C.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения получает следующий вид:

$$-\frac{x}{y} = -\ln x - C, \quad \text{или в явной форме } y = x\frac{1}{\ln x + C}.$$

Найдем произвольную постоянную, если начальное условие $y(1) = 2$. Тогда:

$$2 = \frac{1}{\ln 1 + C} \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Частичным решением исходного дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию, является:

$$y = -x\frac{1}{\ln x + \frac{1}{2}}$$

Найдем розвязок исходного уравнения в общем виде с помощью подсистемы **Simbolic Math**, для этого воспользуемся командой **dsolve:**

```
>> r=dsolve('Dy+y^2/x^2=y/x','x')
r =
x/(log(x)+C1)
```

Для розв(язання задаче Коши нужно применить команду:

```
>> r=dsolve('Dy+y^2/x^2=y/x','y(1)=2','x')
r =
x/(log(x)+1/2)
```

С помощью команды **ezplot** построим интегральную кривую, которая является графиком решения исходного уравнения (см. рис. 13.2):

```
>> ezplot(r)
```

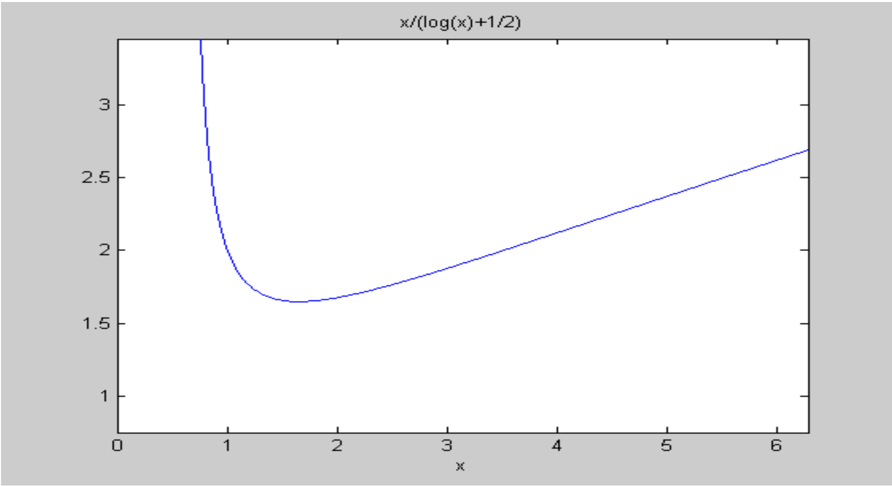

Рис. 13.2 – График решения дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию

Упражнение 2. Использование команд группы **ODE** системы **MATLAB** для развязывания обычных дифференциальных уравнений и систем обычных дифференциальных уравнений.

Наиболее распространенными методами численного интегрирования обычных дифференциальных уравнений является семейство методов Рунге-Кутта [51]. Порядок их точности определяется параметром, который входит в формулу остаточного члена. Чаще всего используются формулы Рунге-Кутта 5-го порядка:

$$k_1 = h \cdot f(t_x,\ y_k); k_2 = h \cdot f(t_x + h/2,\ y_k + k_1/2);$$

$$k_3 = h \cdot f(t_x + h/2,\ y_k + k_2/2); k_4 = h \cdot f(t_x + h,\ y_k + k_3);$$

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

Применение более сложных неявных методов решения дифференциальных уравнений, которые определяются необходимостью решения так называемых *жестких систем уравнений*, связанные с возможностью потери точности в процессе численного решения. Жесткая система обыкновенных дифференциальных уравнений — это система вида $\frac{dx}{dt} = A(x,t)X$, где матрица $A(x,t)$ имеет большие собственные значения. Сложность в разрешении жестких систем заключается в необходимости использования очень маленького шага по времени. Жесткую систему на вид распознать не всегда удается, тем более что свойство жесткости может оказываться или не оказываться в зависимости от того, на каком интервале переменной t ищется решение. На практике обычно сначала пробуют решить задачу с помощью простого явного метода, а когда оказывается, что полученное численное значение не удовлетворяет решения системы уравнений, применяют более сложный неявный метод.

Библиотека системы **MATLAB** включает несколько команд **ODE**, которые реализовывают разные численные методы решения задачи Коши для обычных дифференциальных уравнений и систем уравнений (**ODE – ordinary differential equations**) [20]. Синтаксически эти команды различаются лишь именами (точнее говоря, алфавитно-цифровыми добавками к символам **ODE**). Структура формирования этих команд одинакова. Эти команды созданы на базе использования методов Рунге-Кутта разного порядка или других специальных методов. Совокупность команд системы **MATLAB** получила название *решателей ЗДР* [44]. Используются разрешимые ЗДР, которые созданы на основе следующих методов решения систем дифференциальных уравнений:

- **ode45 –** решатель, который реализует одношаговые явные методы Рунге-Кутта 4-го и 5-го порядка. Эти классические методы рекомендуются для начального пробного решения. Во многих случаях они позволяют получить удовлетворительные результаты численного решения;
- **ode23** – решатель, который реализует одношаговые явные методы Рунге-Кутта 2-го и 4-го порядка. При умеренной жесткости системы ЗДУ и низких требованиях к точности этот метод может дать выигрыш в скорости решения;
- **ode113 –** решал, какой создан на основе многошагового метода Адамса-башворта, который может обеспечить высокую точность решения;
- **ode15s** – решатель, который реализует многошаговый метод переменного порядка (от 1-го к 5-у, по умолчанию рассматривается метод 5-го порядка), на основе использования формулы численного дифференцирования. Данный адаптивный метод стоит применять в случае, если решатель **ode45** не обеспечивает удовлетворительного решения дифференциального уравнения;
- **ode23s –** решатель, который реализует одношаговый метод на основе использования модифицированной формулы Розенброка 2-го порядка. Этот подход обеспечивает высокую скорость вычисления при низкой точности;
- **ode23tb –** решатель, который реализует неявный метод Рунге-Кутта; в случае проведения розврахункiв приобмеженiй точности этот метод может оказаться эффективнее, чем **ode15s.**

В описании обращения к командам группы **ODE** применяются такие обозначения: **ode****, где ****** – любой из приведенных выше алфавитно-цифровых суффиксов. Простое обращение к любой функции **ode**** предусматривает следующий вид: **[tout,yout] = ode**(F,tspan,y0)**, в котором:

- **F** – исходный параметр, который задает правые части виходного дифференциального уравнения (фактор, который указывает на вычисление правых частей дифференциального уравнения);
- **tspan** – исходный вектор, который содержит "контрольные значения" независимой переменной; возможен минимальный вариант **tspan=[to tfinal]** (начальное и конечное

значение независимой переменной), но могут быть заданные и промежуточные значения, тогда **tspan=[to ti ... tfinal];**

- **y0** – исходный параметр начальное значение зависимой переменной (скаляр или вектор-столбец);
- **tout** – вектор-столбец контрольных значений независимой переменной; если используется минимальный вариант для **tspan**, выдаются все значения, которые получаются в процессе численного интегрирования; если **tspan** содержит и другие значения кроме **to** и **tfinal**, то **tout=tspan**;
- **yout** – исходный параметр решение, которое представлено массивом, в котором каждая строка отвечает одному элементу столбца **tout**.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = te^{-t}$ на интервале $t \in [0,\ 0.5]$ при начальном условии $x(0) = 1$.

Осуществление процесса решения начинается с определения **m-файлу**, который описывает правую часть заданного дифференциального уравнения (заметим, что исходное дифференциальное уравнение должно быть решено относительно старшей производной), для определения **m-файлу** формируем команду:

```
function f =odu1(t,x)
f=t*exp(–t);
```

Потом применяем обращение к решателю ЗДР **ode****. Если использовать команду без указывания искомых параметров **(T, Y)**, то команда **ode**** выполняется таким образом, что сразу строится график (см. рис. 13.3), который определяется из исходных значений:

```
>> ode45 ('odu1', [0, 0.5]1)
```


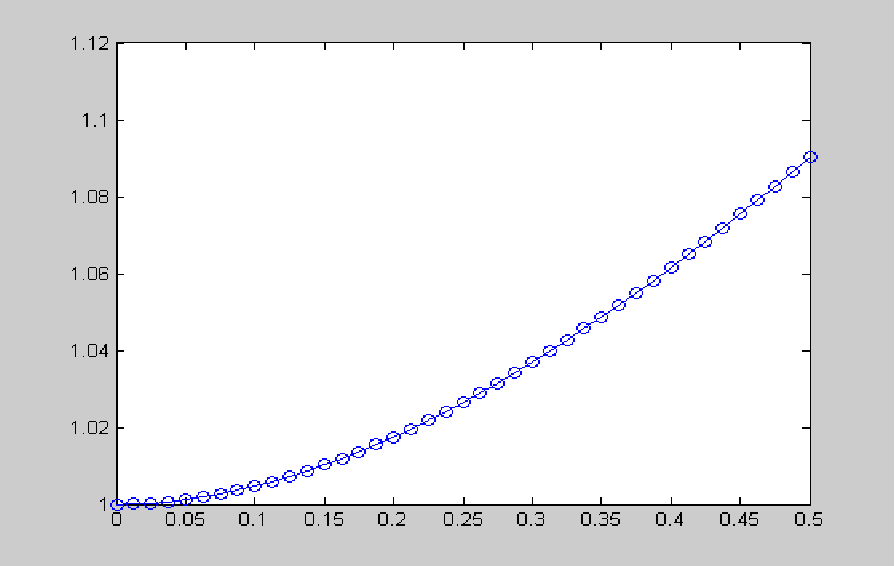

Рис. 13.3 – График решения дифференциального уравнения

Если при использовании решателя ЗДР **ode**** и указать в левой части командной строки массив виходних значений **[T,Y]**, то после вычисления появляются численные значения решения дифференциального уравнения:

```
>> [T,Y]=ode45 ('odu1', [0, 0.5]1)
>> T
 Columns 1 through 7
      0    0.0125    0.0250    0.0375    0.0500    0.0625    0.0750
 Columns 8 through 14
  0.0875    0.1000    0.1125    0.1250    0.1375    0.1500    0.1625
 Columns 15 through 21
  0.1750    0.1875    0.2000    0.2125    0.2250    0.2375    0.2500
 Columns 22 through 28
  0.2625    0.2750    0.2875    0.3000    0.3125    0.3250    0.3375
 Columns 29 through 35
  0.3500    0.3625    0.3750    0.3875    0.4000    0.4125    0.4250
 Columns 36 through 41
```

```
  0.4375    0.4500    0.4625    0.4750    0.4875    0.5000
>> Y
 Columns 1 through 7
  1.0000    1.0001    1.0003    1.0007    1.0012    1.0019    1.0027
 Columns 8 through 14
  1.0036    1.0047    1.0059    1.0072    1.0086    1.0102    1.0119
 Columns 15 through 21
  1.0136    1.0155    1.0175    1.0196    1.0218    1.0241    1.0265
 Columns 22 through 28
  1.0290    1.0315    1.0342    1.0369    1.0398    1.0427    1.0456
 Columns 29 through 35
  1.0487    1.0518    1.0550    1.0582    1.0616    1.0649    1.0684
 Columns 36 through 41
  1.0719    1.0754    1.0791    1.0827    1.0864    1.0902
```

Пример 2. Развязать задачу Коши для нелинейного уравнения $y' = \sin x - \cos y$ на отрезке [0, 1] при начальном условии $y(0) = 1$. Отобразить розв'зок в графическом окне.

Создаем сначала **m-файл**, который описывает правую часть заданного дифференциального уравнения:

```
function f =odu3(t,y)
f=sin(t) –cos(y);
```

Используем решатель ЗДР **ode45**:

```
>> ode45 ('odu3', [0, 1]1)
```

Рекомендуем проанализировать график полученного решения исходной задачи.

Пример 3. Построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = t^2 y^3 \sin(t+y)^3$ на интервале [0, 3] с шагом 0.25 и разными последовательно заданными начальными условиями:

1) $y(0) = 0$, 2) $y(0) = 0.5$, 3) $y(0) = 1$, 4) $y(0) = 1.5$, 5) $y(0) = 2$,
6) $y(0) = 2.5$, 7) $y(0) = 3$.

Создаем **m-файл**, который описывает правую часть заданного дифференциального уравнения:

```
function f =odu4(t,y)
f=t.^2.*y.^3.*sin(t+y).^3;
```

Зададим операции для построения семейства интегральных кривых, которые отвечают данным начальным условиям:

```
>> tspan=0:0.25:3;y0=0:0.5:3; ode45('odu4',tspan,y0);grid on
```

Пример 4. Развязать дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dt} = -\frac{\cos(1/x)}{x^2}$ на интервале $t \in [0.001, 1]$ при начальном условии $y(0.001) = \sin 100$ с использованием разных решателей ЗДР. Проанализировать полученные графические результаты.

Осуществление решения начинается с определения **m-файлу**, который описывает заданное дифференциальное уравнение:

```
function f =odupr(t,x)
f=–cos(1/t) /t^2;
```

Используем решателе ЗДР **ode**** и выполнимо анализ полученных результатов:

```
>> ode45('odupr', [0.001, 1]sin(100))
```

Искомый результат получается в виде графика, изображенного на рис. 13.4:

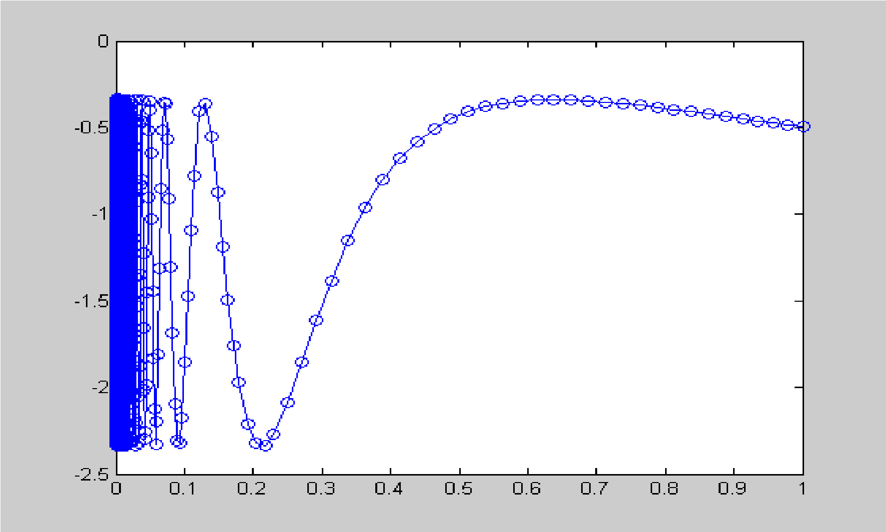

Рис. 13.4 – График решения дифференциального уравнения

Изменяем масштаб графического окна с помощью команды **axis** и используем для решения исходного дифференциального уравнения с помощью решателей **ode23, ode23s, ode23t, ode23tb**:

```
>> axis([0.0051 0.0054 -3 0]); hold on
>> ode23('odupr', [0.001, 1]sin(100))
>> ode23s('odupr', [0.001, 1]sin(100))
>> ode23tb('odupr', [0.001, 1]sin(100))
```

Результаты решения (интегральные криви) представлены на рис. 13.5.

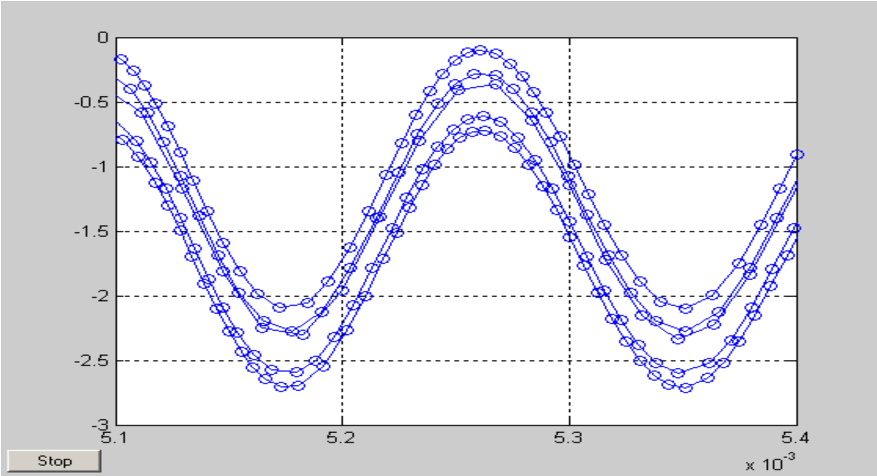

Рис. 13.5 – График решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dt} = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$ **с использованием разных решателей ЗДР**

Более распространена форма обращения к команде **ode**** имеет вид:

[tout,yout]=ode*(F,tspan,y0,OPTIONS,PARAMS),**

где **OPTIONS –** входной параметр, который содержит дополнительную информацию, которая возникает в процессе решения дифференциального уравнения**, PARAMS –** входной параметр, в котором помещаются необходимые данные (переключатели) для функционирования системы интегрирования [44].

За помощью параметру **OPTIONS** могут быть определены абсолютная (**AbsTol**) и относительная (**RelTol**) похібки, максимальный шаг інтергування (**MaxStep**), коэффициент уточнения (**Refine**), что позволяет увеличивать число выведенных точек. Начальное значение крока интегрирования (**InitialStep**), и тому подобное. Если не указывать в исходных аргументах параметр **OPTIONS,** то величины, которые к нему входят, будут задаваться в режиме за умалчиванием. Например, значение относительной похібки **RelTol** будет равняться величине **1е-3**, а значение абсолютной похібки **AbsTol – 1е-6**.

С помощью **PARAMS** можно установить такие данні:

- выведение статистики вычислительных затрат (**Stats**)
- оценку погрешности по норме решения (**NormControl**)
- наличие матрицы Якоби (**Jacobian**), которая устанавливается переключателем **on/off** и так далее.

Пример 5. Развязать дифференциальное уравнение $x' = 30 - 5x$ на промежутке $[0, 10]$ с начальным условием $x(0) = 1$. Предварительно задать величины относительной и абсолютной похібок: **RelTol =1e-4**, **AbsTol=1e-7.**

Сначала сформируем **m-файл**, который описывает заданное дифференциальное уравнение:

```
function f =odupr1(t,x)
f=30–5*x;
```

Формируем параметры относительной и абсолютной похібок. Для этого використуємо команду **odeset.** Команда-строка приобретает вид: **OPTIONS=odeset('name1',val1,'name2',val2...).** В этом случае именам **name1**, **name2 .** будут присваиваться значение соответствующих параметров **val1, val2** ..

Зададим соответствующие значения относительной и абсолютной погрешностей:

```
>> OPTIONS=odeset('RELTOL', 1e-4,'ABSTOL',1e-7)
OPTIONS =
        AbsTol: 1.0000e-007
           BDF: []
```

Events: []
InitialStep: []
Jacobian: []
MaxStep: []
NormControl: []
OutputFcn: []
OutputSel: []
Refine: []
RelTol: 1.0000e-004
Stats: []
Vectorized: []
MStateDependence: []
MvPattern: []
InitialSlope: []

Заметим, что последние параметры, как видно из листинга программы, также указываются, но с пустыми полями ([]).

Найдем решение дифереціального уравнения $x' = 30 - 5x$ на основе использования параметру **OPTIONS** и без него. Рекомендуем проанализировать полученные результаты. Последовательность команд для решения ЗДР имеет следующий вид:

```
>> ode45('odupr1', [0, 10]1,OPTIONS)
>> axis([5 6 5.9995 6.0005])
>> hold on; ode45('odupr1', [0, 10]1)
>> axis([5 6 5.997 6.0025])
```

Практические задания лабораторной работы № 13

Выполнить следующие задания :

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения с помощью команд из подпакета **Simbolic Math** системы **MATLAB** и построить график решения с учетом того, что произвольная постоянная равняется *единице* (см. табл. 13.1)

Таблица 13.1 – Варианты к заданию №1

№ п/п	Уравнение	№ п/п	Уравнение
1	$y' - y = 2xe^{x+x^2}$	8	$y' - y\frac{2}{x} = x^3 + 1.$
2	$y' + y\frac{1}{1+x^2} = \frac{arctgx}{1+x^2}$	9	$y' - y\frac{1}{\sin x} = \cos^2 x tg\frac{x}{2}$
3	$xy' - y = x^2 \cos x$	10	$xy' + y = x^2 + 3x + 2$
4	$y' - 2xy = -2x$	11	$y' \cos x + y = 1 - \sin x$
5	$y' + y \sin x = \cos x \sin x$	12	$y' - y\frac{1}{x \ln x} = x \ln x$
6	$y' + y\frac{1}{x+3} = e^{2x}(x+3)$	13	$y' - y\frac{2}{x} = x^2 \cos 2x$
7	$y' + y\frac{1}{\sin^2 x} = e^{ctgx}\frac{x}{x^2+5}$	14	$y' + \frac{y}{x}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\frac{\cos^2 x}{x\sqrt{y}}$

Задание 2. Для заданного линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

выполнить следующие действия:

- решить задачу Коши и построить семейство интегральных кривых при разных функциях $Q(x)$ (варианты заданий приведены у табл. 13.2);
- получить решение одного из вариантов уравнения с помощью решателей ЗДР **ode23, ode23s, ode23t, ode23tb** и проанализировать полученные результаты.

Таблица 13.2 – Варианты к заданию №2

№ п/п	$P(x)$	Варианты функции			Начальные условия				
		$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$y_1(0)$	$y_2(0)$	$y_3(0)$	$y_4(0)$	$y_5(0)$
1	t	$t\cos 3t$	$4e^{2t}$	$t^3\sin 3t$	1	2	3	4	5
	$\sin t$	$2t^2+1$	e^{2t}	$2t^2\cos t$	-3	-2	-1	0	1
2	t^2	te^{4t}	$2\sin 3t$	$te^{2t}\cos t$	0	0.5	1	1.5	2
	-2	$t\sin 2t$	$5e^{3t}$	t^2-5t+ $+3$	1	0	-0.5	-1	-1.5
3	$4t$	$t\cos 4t$	$e^t\sin 4t$	$\frac{3t^2}{t^4+1}$	1	2	3	4	5
	-5	te^{2t}	$e^t\cos 5t$	$t^2\sin 5t$	-3	-2	-1	0	1
4	1	t^2e^t	$e^{3t}\sin t^2$	$\frac{2t}{t^2+1}$	0	0.5	1	1.5	2
	t^3	$t\sin 4t$	$4te^{t^2}$	$\cos 4t\sin$	1	0	-0.5	-1	-1.5
5	$\sin t$	te^{-2t}	$3t\cos t^2$	$\sin t^2e^t$	1	2	3	4	5
	3	$t\cos 2t$	$t^2e^{t^3}$	$\frac{t^2}{t^2+1}$	-3	-2	-1	0	1
6	2	$t\sin 3t$	$e^{t^2}\cos 3t$	$\cos t\sin 2$	0	0.5	1	1.5	2
	$\cos t$	te^{-3t}	$t^4\cos 4t$	$\sin t^3e^{t^2}$	1	0	-0.5	-1	-1.5
7	$\sin^2 t$	t^2+2t	$t\sin t^3$	$t^{-2}e^{t^2}$	1	2	3	4	5
	-6	$t\cos 3t$	$1-\sin t$	te^{-2t^2}	-3	-2	-1	0	1

8	$\cos t^2$	te^{3t}	t^3+1	$3\sin 5t$	0	0.5	1	1.5	2
	-7	$2t\sin 4t$	$\dfrac{e^{-\cos t}}{t^2-5t+4}$	$t^4\cos t^3$	1	0	-0.5	-1	-1.5
9	e^{5t}	$3t\cos 5t$	$\ln^2 te^{5t}$	t^2+25	1	2	3	4	5
	t	$t\sin 3t$	$t^{-3}e^{t^3}$	$\dfrac{3t}{t^4+1}$	-3	-2	-1	0	1
10	t^2	$2t\cos 5t$	$e^{-\frac{5}{2}t^2}\sin^2$	$\sqrt{9-t^2}$	0	0.5	1	1.5	2
	-4	$3t\sin 4t$	$\dfrac{e^{\sin 2t}}{5t+3}$	$\cos t^2 \sin$	1	0	-0.5	-1	-1.5
11	$\cos 5t$	t^2+5t	$e^{t^2}\cos 3t$	t^3-5t^2	1	2	3	4	5
	$3t$	$5t\sin 3t$	$t^2\cos 2t$	$\dfrac{2}{3}\cos^2 t$	-3	-2	-1	0	1
12	e^{4t}	$6t\cos 4$	$\cos^2 t\, ctg$	t^2+3t+ $+2$	0	0.5	1	1.5	2
	-5	$4t\sin 2t$	$2te^{t+t^2}$	t^3+1	1	0	-0.5	-1	-1.5

Окончание таблицы 13.2

13	$5t$	$3t\cos 5t$	$\dfrac{\arccos t}{1+t^2}$	$t^2\cos t$	1	2	3	4	5
	$4e^t$	$5t\sin 4t$	$\cos^2 t$	$e^{ctgt}\dfrac{t}{t^2+5}$	-3	-2	-1	0	1
14	$-e^{3t}$	$2t\cos 3t$	$e^{2x}(x+3).$	$\cos x\sin x$	0	0.5	1	1.5	2
	6	$3t\sin 4t$	$2e^{-3t}$	$t\cos 4t$	0	-0.5	-1	-1.5	0

Контрольные вопросы

1. Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
2. На какие группы разделяются обыкновенные дифференциальные уравнения?
3. С помощью каких команд в системе **MATLAB** можно найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения?
4. Определите этапы нахождения решения задачи Коши с помощью команд подсистемы **Simbolic Math**.
5. Что такое интегральная кривая? Как выполнить построение интегральной кривой средствами системы **MATLAB?**
6. Назовите один из наиболее распространенных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Какие методы решения дифференциальных уравнений чаще применяются в системе **MATLAB?**
7. Раскройте запись: **[tout,yout] = ode***(F,tspan,y0).**