Лабораторная работа № 14.

Тема. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков.

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения в символьном виде с помощью подпакета **Simbolic Math** системы **MATLAB**; ознакомиться с использованием решателей обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и возможностями представления решений в графическом виде.

Теоретический минимум

Уравнение

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* n*-го порядка, где* x – независимая переменная, y – искомая функция. Функция, которая является определенной и дифференцированной на отрезке, называется *решением дифференциального уравнения -го порядка*, если она превращает уравнение (1) в тождественность [51].

Задача Коши в случае дифференциального уравнения n-го порядка ставится таким образом: найти такое решение дифференциального уравнения, чтобы он и его производные, включительно к порядку $(n-1)$ при фиксированном значении аргумента, принимали заданные значения. Другими словами, решение должно удовлетворять условиям, которые называются *начальными условиями*:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0,\ ..., y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0,$$

где x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ – заданные значения.

Решение уравнения (1) включает в себя произвольных постоянных и может быть представлен в виде:

$$f(x, C_1, C_2, C_3, ..., C_n) = 0.$$

Упражнение 1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка по схеме снижения порядка.

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (1.1)$$

решается путем n – кратного интегрирования. Дифференциальное уравнение

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0, \qquad (1.2)$$

что не содержит искомую функцию y и производные, развязывается с помощью подстановки

$$y^{(k)} = u, \qquad (1.3)$$

где $y^{(k)}$ – наименьшая за порядком производная. Тогда исходное дифференциальное уравнение сводится к дифференциальному уравнению

$$F(x, u, u', u'',..., u^{(n-k)}) = 0, \qquad (1.4)$$

порядок которого равняется $n-k$.

Дифференциальное уравнение

$$F(y, y',...y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1.5)$$

что не содержит независимую переменную, также допускает реализацию процедуры снижения порядка с помощью подстановки $y' = p$.

Пример 1. Решить уравнение $y''' = 2x$ при начальных условиях $y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$ и построить интегральную кривую.

Уравнение вида (1.1), в левой части которого находится третья производная искомой функции, в правой – функция только от x, производную третьего порядка можем представить в виде $y''' = \frac{dy''}{dx}$, тогда $\frac{dy''}{dx} = 2x$ или $dy'' = 2xdx$. После интегрирования имеем:

$$y'' = \int 2xdx = \frac{2x^2}{2} + C_1 = x^2 + C_1.$$

Подобным образом выписываем представление для второй производной, то есть $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$. Тогда:

$$\frac{dy'}{dx} = x^2 + C_1 \text{ или } dy' = (x^2 + C_1)dx .$$

После интегрирования получаем:

$$y' = \int (x^2 + C_1)dx = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 \text{ или}$$

$$dy = \left(\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2\right)dx .$$

Интегрирование этого уравнения позволяет найти общее решение исходного дифференциального уравнения $y''' = 2x$:

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Для нахождения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 при заданных начальных условиях $y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$ выпишем две первые производные общего решения:

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3,\ y' = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2,\ y'' = x^2 + C_1$$

и подставим в уравнение соответствующие начальные условия. Из полученной системы $\begin{cases} 1 = C_3 \\ 1 = C_2 \\ 1 = C_1 \end{cases}$ уравнений находим соответствующие стали: $C_1 = C_2 = C_3 = 1$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

Решение дифференциального уравнения $y''' = 2x$ в среде системы **MATLAB** с помощью подсистемы **Simbolic Math** выполняется командой **dsolve** [44]:

```
>> dsolve('D3y=2*x','x')
ans =
1/12*x^4+1/2*C1*x^2+C2*x+C3
```

Для решения задачи Коши (дифференциального уравнения с заданными начальными условиями) используем следующую структуру обращения к команде **dsolve**:

```
>> dsolve('D3y=2*x','D2y(0)=1','Dy(0)=1','y(0)=1','x')
ans =
1/12*x^4+1/2*x^2+x+1
```

Заметим, что исходное дифференциальное уравнение третьего порядка может быть приведено к системе дифференциальных уравнений первого порядка, если ввести новые переменные:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = 2x \end{cases}$$

Рассмотрим эту систему дифференциальных уравнений первого порядка. Решение дифференциального уравнения происходит на основе использования приближенного метода и предусматривает задание информации о задаче Коши (то есть задать дифференциальное уравнение и начальные условия), а также определении интервала, в котором будет представлен результат решения.

Заметим, что при решении дифференциальных уравнений по умолчанию внутренней переменной в системе **MATLAB** считается переменная **t.**

Создаем **m–файл** с целью описания правых частей дифференциальных уравнений системы дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала формируем нулевой вектор **DR**. Вектор **DR** будет состоять из компонентов y', u', v'. Введем обозначения, благодаря которым производная y' будет отвечать элементу $y(1)$, производная y'' будет отвечать элементу $y(2)$, производная y''' будет отвечать элементу $y(3)$. Эти элементы будут составлять правые части системы уравнений в **m**-файле, который формируется соответствующим образом с помощью следующих команд:

```
function DR=prur1(t,y)
```

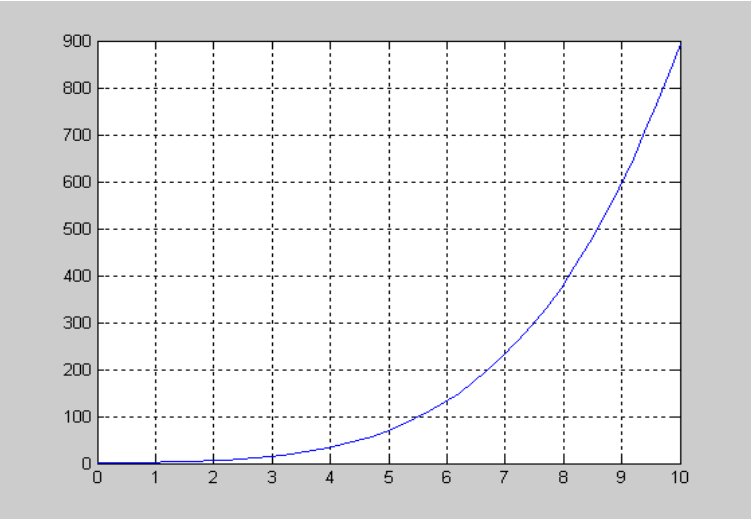
```
DR=zeros(3,1);
DR(1)=y(2);
DR(2)=y(3);
DR(3)=2*t;
```

Зададим начальные условия **y0** (вектор начальных условий), интервал (**tspan**), в котором будет представлен результат, и отыскиваем решение исходного дифференциального уравнения:

```
>> y0=[1 1 1];tspan=[0 10];>> [t,y]=ode45('prur1',tspan,y0);
```

График решения (интегральная кривая) строится после применения следующих команд (см. рис. 14.1):

```
>> plot(t,y(:,1));grid on
```



Мал.14.1 – График решения дифференциального уравнения на отрезке

Пример 2. Решить уравнение $xy^{(IV)}+y'''=0$ при начальных условиях $y(1)=1, y'(1)=1, y''(1)=1, y'''(1)=1$ и построить интегральную кривую.

Это дифференциальное уравнение вида (1.2), для которого $n=4$. Принимая низшую производную y''' за новую неизвестную функцию, выполнимо подстановку (1.3):

$$y'''=u,$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение можно записать в виде:

$$y^{(IV)}=\frac{du}{dx}$$

И представить его в виде дифференциального уравнения первого порядка относительно u:

$$xu'+u=0.$$

После разделения переменных получаем:

$$\frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрирование уравнения дает:

$$u=\frac{C_1}{x}.$$

Это выражение представляет собой дифференциальное уравнение типа (1.1). Последовательное тройное интегрирование приводит к следующему результату:

$$y''=\int\frac{C_1}{x}dx=C_1\ln x+C_2;$$

$$y'=C_1(x\ln x-x)+C_2x+C_3;$$

$$y=C_1\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4.$$

Можно искомое решение записать в виде:

$$y=K_1x^2\ln x+K_2x^2+C_3x+C_4,$$

Если ввести новые обозначения для постоянных:

$$K_1=\frac{C_1}{2},\; K_2=\frac{C_2}{2}-\frac{3}{4}C_1.$$

В результате подстановки начальных условий в соответствующие уравнения, получаем:

$$\begin{cases} y=K_1x^2\ln x+K_2x^2+C_3x+C_4 \\ y'=C_1(x\ln x-x)+C_2x+C_3 \\ y''=C_1\ln x+C_2 \\ y'''=\dfrac{C_1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=K_2+C_3+C_4 \\ 1=C_1-C_2+C_3 \\ 1=C_2 \\ 1=C_1 \end{cases}.$$

При решении указанной системы находим значения произвольных постоянных:

$$C_1 = 1,\ C_2 = 1,\ C_3 = 1,\ C_4 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, частичное решение исходного уравнения $xy^{(IV)} + y''' = 0$ имеет вид:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

Найдем решение исходного уравнения в среде системы **MATLAB** с помощью подсистемы **Simbolic Math**:

```
>> dsolve('D4y*t+D3y=0')
ans =
C1+C2*t+C3*t^2+C4*t^2*log(t)
```

Решаем задачу Коши для дифференциального уравнения $xy^{(IV)} + y''' = 0$ при заданной последовательности начальных условий: $y(1) = 1, y'(1) = 1, y''(1) = 1, y'''(1) = 1$:

```
>> dsolve('D4y*t+D3y=0','D3y(1)=1','D2y(1)=1','Dy(1)=1','y(1)=1')
ans =
1/4+t–1/4*t^2+1/2*t^2*log(t)
```

Рекомендуем сравнить решения задачи, которые получены аналитическим методом и с помощью средств подсистемы **Simbolic Math** системы **MATLAB.**

Заметим, что исходное дифференциальное уравнение четвертого порядка может быть представлено в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, если ввести новые переменные:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = w \\ w' = -\dfrac{v'}{x} \end{cases}.$$

Для решения этих уравнений можно использовать приближенный метод. Для этого необходимо задать информацию об исходной задаче Коши (то есть задать дифференциальное уравнение и начальные условия), а также определить интервал, в котором будет представлен результат решения.

Заметим, что по умолчаниювнутренней переменной в системе **MATLAB** считается переменная **t.**

Создаем **m–файл** с целью описания правых частей дифференциальных уравнений системы дифференциальных уравнений первого порядка. В правой части одного из приведенных уравнений системы появляется выражение $-\frac{v'}{x}$. Для избежания деления на 0, что может привести к остановке выполнение алгоритма решения, добавляем к переменной **t** относительно малую величину 0,0000001 (рассчитываем на то, что такое изменение не будет влиять на результат численного решения).

Сначала сформируем нулевой вектор **DR**. При этом вектор **DR** состоит из компонентов y', u', v', w', а y(1), y(2), y(3), y(4) образуют правые части системы уравнений у **m-файлу.** Определим, что переменная y будет отвечать элементу в $y(1)$, производная y' будет отвечать элементу $y(2)$, производная y'' будет отвечать элементу $y(3)$, а производная y''' будет отвечать элементу $y(4)$. Таким образом, для формирования **m-файла** используем следующие операции:

```
function DR =prur2(t,y)
DR =zeros(4,1);DR (1)=y(2);DR (2)=y(3);
DR (3)=y(4);DR (4)= -y(4)./(t+.0000001);
```

Задаем начальные условия **y0** (вектор начальных условий) и интервал (**tspan**), в котором будет представлен результат, и с помощью решателя формируем команду решения исходного дифференциального уравнения:

```
>> y0=[1 1 1 1]; tspan=[0 20];
>> [t,y]=ode45('prur2',tspan,y0);
>> plot(t,y(:,1));grid on
```

Упражнение 2. Решение линейных дифференциальных однородных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.

Дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\,, \qquad (2.1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ – постоянные величины, называется *линейным однородным уравнением* n*-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Общее решение уравнения (2.1) представляется в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n\,, \qquad (2.2)$$

где $y_1, \ldots, y_n$ – его линейно независимые частичные решения, которые находятся в результате решения так называемого характеристического уравнения [23]

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0\,. \qquad (2.3)$$

Если характеристическое уравнение имеет n действительных разных корней, то каждому из них отвечает частичное решение

$$y_m = e^{r_m x}\,, \qquad (2.4)$$

а общее решение уравнения (2.1) приобретает вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}\,. \qquad (2.5)$$

Если уравнение (2.3) имеет k действительных ровных корней $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$ (то есть, корень r_1 имеет кратность k), то частичные решения имеют вид:

$$y_1 = x e^{r_1 x},\; y_2 = e^{r_1 x}, \ldots,\; y_k = x^{k-1} e^{r_1 x}, \qquad (2.6)$$

В случае комплексно связанных корней $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ соответствующие частичные развязки записываются в форме:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\; y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (2.7)$$

Комплексно связанным корням законченной кратности отвечают следующие частичные развязки:

$$\begin{array}{l} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\; y_2 = x e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, y_k = x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x; \\ y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\; y_{k+2} = x e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array} \qquad (2.8)$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Для данного уравнения с постоянными коэффициентами составляем характеристическое уравнение (при этом нужно сохранить соответствующие коэффициенты характеристического уравнения: вместо y поставить 1, вместо производной -того порядка поставить функцию степени) r^k r^k :

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0\,.$$

Перепишем левую часть в виде:

$$r^2(r-2) - (r-2)\,,$$

тогда получаем:

$$(r-2)(r^2-1) = 0\,,$$

откуда

$$r_1 = -1,\; r_2 = 1,\; r_3 = 2\,.$$

В соответствии с представлением (2.5) получаем общее решение в виде:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}.$$

Найдем частичное решение исходного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях $y''(0) = 1,\; y'(0) = 1,\; y(0) = 1$. Путем подстановки величин начальных условий в соответствующие уравнения получаем соответствующую систему уравнений, из которой определяются величины постоянные:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + C_3 \\ 1 = -C_1 + C_2 + 2C_3 \\ 1 = C_1 + C_2 + 4C_3 \end{cases} \Rightarrow\; C_1 = -\frac{1}{6},\; C_2 = \frac{3}{2},\; C_3 = -\frac{1}{3}\,.$$

Таким образом, частичное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = -\frac{1}{6}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{x} - \frac{1}{3}e^{2x}$$

или, после упрощения данного представления, получаем, что:

$$y = e^{x}\,.$$

Для нахождения решения исходного уравнения в среде системы **MATLAB** с помощью подсистемы **Simbolic Math** используем команду **dsolve**:

```
>> dsolve('D3y–2*D2y–Dy+2*y=0')
ans =
C1*exp(t)+C2*exp(2*t)+C3*exp(–t)
```

Решение задачи Коши с заданными начальными условиями выполняется с помощью расширенной структуры команды **dsolve**:

```
>> dsolve('D3y–2*D2y–
.Dy+2*y=0','D2y(0)=1','Dy(0)=1','y(0)=1','x')
ans =
exp(x)
```

Заметим, что исходное дифференциальное уравнение третьего порядка может быть сведено к системе дифференциальных уравнений первого порядка, если ввести новые переменные:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = 2v + u - 2y \end{cases}.$$

Эти уравнения можно решить на основе использования приближенного метода. Для этого необходимо задать информацию о задаче Коши (то есть задать дифференциальное уравнение и начальные условия), а также определить интервал, в котором будет представлен результат решения.

Заметим, что по умолчанию внутренней переменной в системе **MATLAB** считается переменная **t.**

Создаем **m–файл** с целью описания правых частей дифференциальных уравнений системы дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала формируем нулевой вектор **DR**. При этом вектор **DR** состоит из компонентов, а элементы в(1), в(2), в(3) образуют правые части системы уравнений у **m-файлу.** Определим, что переменная y будет отвечать элементу в(1), производная y' будет отвечать элементу в(2), производная y'' будет отвечать элементу в(3). Таким образом, **m-файл** записывается с помощью следующих команд:

```
function DR =prur4(t,y);
DR =zeros(3,1);DR (1)=y(2);DR (2)=y(3);
DR (3)=2*y(3)+y(2)–2*y(1);
```

Задаем начальные условия **y0** (вектор начальных условий) и интервал (**tspan**), в котором будет представлен результат, и отыскиваем решение с помощью решателя ЗДР и формируем команду для построения графику (интегральной кривой) решения:

```
>> y0=[1 1 1 ]; tspan=[0 20];
>> [t,y]=ode45('prur4',tspan,y0); plot(t,y)
```

Пример 2. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{2},\ y''(0) = 0$.

Составляем характеристическое уравнение

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0,$$

один из корней которого $r_1 = 1$ можно найти методом проб. После выделения множителя $(r-1)$ из левой части исходного характеристического уравнения, получаем:

$$(r^3 - 7r^2 + 15r - 9) : (r-1) = r^2 - 6r + 9,$$

$$(r-1)(r^2 - 6r + 9) = 0.$$

Легко находятся еще два коренные характеристического уравнения: $r_2 = r_3 = 3$. Таким образом, характеристическое уравнение имеет один простой (однократный $r_1 = 1$) корень и двукратный корень $r_2 = 3\ (k = 2)$.

В соответствии с формулами (2.6) и (2.2) получаем общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}.$$

Найдем частичное решение исходного дифференциального уравнения при заданных початковтх условиях $y''(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2},\ y(0) = 2$.

После подстановки величин начальных условий в соответствующие уравнения получаем систему уравнений, из которой находятся произвольные стали:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 3C_2 + C_3 = \frac{1}{2} \\ C_1 + 9C_2 + 6C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ C_1 = \frac{15}{4},\ C_2 = -\frac{7}{4},\ C_3 = 2.$$

Искомое частичное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

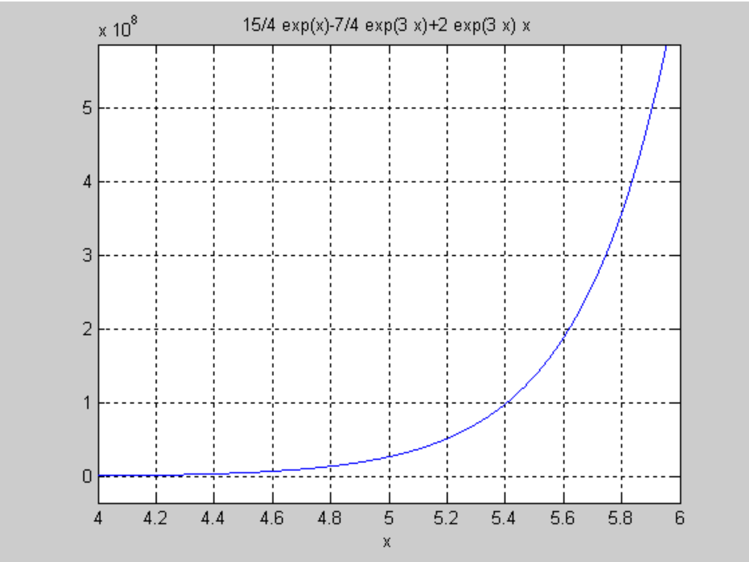
$$y = \frac{15}{4} e^x - \frac{7}{4} e^{3x} + 2e^{3x}.$$

Для нахождения решения исходного уравнения с помощью подсистемы **Simbolic Math** в среде **MATLAB** применяем команду **dsolve**:

```
>> dsolve('D3y(7*D2y+15*Dy(9*y=0','x')
ans =
C1*exp(x)+C2*exp(3*x)+C3*exp(3*x)*x
```

Решение задачи Коши (дифференциального уравнения с известными начальными условиями) предусматривает использование расширенной структуры команды **dsolve** (график решения см. на рис. 14.2):

```
>> dsolve('D3y(7*D2y+15*Dy(9*y=0','y(0)=2','Dy(0)=1/2','D2y(0)=0','x')
    ans =
    15/4*exp(x)–7/4*exp(3*x)+2*exp(3*x)*x
```



Мал.14.2 – График решения дифференциального уравнения
$y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$ на отрезке

Очевидно, результат совпадает с точностью до названия переменной с предварительно полученным решением.

Заметим, что исходное дифференциальное уравнение третьего порядка может быть свядено к системе дифференциальных уравнений первого порядка, если ввести новые переменные:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = 7v - 15u + 9y \end{cases}.$$

Эти уравнения системы можно решить на основе использования приближенного метода. Для этого необходимо задать информацию о задаче Коши (то есть задать дифференциальное уравнение и начальные условия), а также определить интервал, в котором будет представлен результат.

Заметим, что по умолчанию внутренней переменной в системе **MATLAB** считается переменная **t.**

Создаем **m–файл** с целью описания правых частей дифференциальных уравнений системы дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала формируем нулевой вектор **DR**. При этом вектор **DR** состоит из компонентов, а элементы в(1), в(2), в(3) образуют правые части системы уравнений у **m-файлу.** Определим, что переменная y будет отвечать элементу $y(1)$, производная y' будет отвечать элементу $y(2)$, производная y'' будет отвечать элементу $y(3)$. Таким образом, **m-файл** формируется в результате применения следующих команд:

```
function DR=prur5(t,y);
DR =zeros(3,1);
DR (1)=y(2);
DR (2)=y(3);
DR (3)=7*y(3)–15*y(2)+9*y(1);
```

Зададим интервал интегрирования, начальные условия и решение:

```
>> y0=[2 0.5 0]; tspan=[0 10];
>> [t,y]=ode45('prur5',tspan,y0); plot(t,y)
```

Упражнение 3. Решение линейных дифференциальных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Дифференциальное уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad 3.1)$$

называется *линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами*

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 .$$

Если, то уравнение (3.1) становится однородным:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 . \qquad (3.2)$$

Общее решение уравнения (3.1) определяется формулой

$$y = y_0 + \bar{y} , \qquad (3.3)$$

где – общее решение соответствующего однородного уравнения (3.2), а – частичное решение данного неоднородного уравнения.

Напомним, что в простых случаях частичное решение, если не является корнем характеристического уравнения соответствующего уравнению (3.2), может быть найдено с помощью метода неопределенных коэффициентов.

В случае, когда правая часть уравнения (3.1)

$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) , \qquad (3.4)$$

где $P_m(x)$ – многочлен m-й степени, то частичное решение, отыскивают в виде:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} M_m(x) , \qquad (3.5)$$

где $M_m(x)$ – многочлен той же степени, что и многочлен, но с неопределенными коэффициентами, и в случае, когда α имеет кратность, в виде:

$$\bar{y} = x^k e^{\alpha x} M_m(x) . \qquad (3.6)$$

В частности, при $f(x) = P_m(x)$. Если $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то существует частичное решение, если $\alpha = 0$ – корень характеристического уравнения кратности, то $\bar{y} = x^k M_m(x)$.

В случае, когда

$$f(x) = e^{ax}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x], \qquad (3.7)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, наибольшая степень которых, то частичное решение, когда $\alpha + i\beta$ не являются корнем характеристического уравнения, отыскивают в виде:

$$\bar{y} = e^{ax}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x] . \qquad (3.8)$$

и, если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности, в виде

$$\bar{y} = x^k e^{ax}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x], \qquad (3.9)$$

где $M(x)$ и $N(x)$ – многочлены степени.

В случае, когда

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \qquad (3.10)$$

где, $f_3(x)$ – функции вида (3.4) и (3.7), то существует частичное решение

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3, \qquad (3.11)$$

Где соответствующие розв’язкі $\bar{y}_1, \bar{y}, \bar{y}_3$ определятся согласно указанным выше правилам.

В общем случае частичное решение уравнения (3.1) может быть найдено с помощью метода вариации произвольных постоянных (методу Лагранжа). Предположим, что

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

является общим решением однородного уравнения (3.2). Тогда общее решение неоднородного уравнения (3.1) можно отыскать

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n . \qquad (3.12)$$

Искомые функции $C_1(x)y_1, C_2(x)y_2, \ldots C_n(x)y_n$ находят из системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{llll}
C_1' y_1 & + C_2' y_2 & + \ldots + C_n' y_n & = 0; \\
C_1' y_1' & + C_2' y_2' & + \ldots + C_n' y_n' & = 0; \\
\ldots\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots & \ldots \\
C_1' y_1^{(n-2)} & + C_2' y_2^{(n-2)} & + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} & = 0; \\
C_1' y_1^{(n-1)} & + C_2' y_2^{(n-1)} & + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} & = f(x).
\end{array}\right\}$$

(3.13)

Пример 1. Решить уравнение $y''' + y' = e^x$. Найти решение, которое удовлетворяет начальным условиям: $y''(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(0) = 0$.

Это линейное неоднородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами, правая часть которого является функцией вида (3.4), где $\alpha = 1,\ m = 0,$ то есть $m = 2$.

Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''' + y = 0.$$

Поскольку характеристическое уравнение $r^3 + r = 0$ имеет корни, то общее решение однородного уравнения определяется формулой

$$y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

В соответствии с формулой (3.5) частное решение исходного уравнения отыщем в виде

$$y_ч = Ae^x,$$

Выписываем производные от функции :

$$y'_ч = y''_ч = y'''_ч = Ae^x.$$

После подстановки выражений для и в исходное уравнение и сокращение на, получим тождественность

$$A + A = 1, \text{ откуда } A = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения получает вид

$$\bar{y} = y_0 + \bar{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{2}e^x.$$

После подстановки величин начальных условий $y''(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(0) = 0$ в соответствующие уравнения получаем систему уравнений, из которой находятся величины постоянные:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ C_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -1,\ C_2 = \frac{1}{2},\ C_3 = -\frac{1}{2}.$$

Ясно, что искомое частное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{2}e^x - 1 + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

Для нахождения решения исходного уравнения с помощью подсистемы **Simbolic Math** в среде **MATLAB** применяем команду **dsolve**:

```
>> dsolve('D3y+Dy=exp(x) ','x')
ans =
1/2*exp(x)+C1+C2*sin(x)+C3*cos(x)
```

Решение задачи Коши (дифференциального уравнения с известными начальными условиями) предусматривает использование расширенной структуры команды **dsolve**:

```
>> dsolve('D3y+Dy=exp(x) ','D2y(0)=0','Dy(0)=0','y(0)=0','x')
ans =
1/2*exp(x)(1(1/2*sin(x)+1/2*cos(x)
```

Нетрудно убедиться, что результат совпадает с точностью до названия переменной с предварительно полученным решением.

Заметим, что исходное дифференциальное уравнение третьего порядка может быть возведено к системе дифференциальных уравнений первого порядка, если ввести новые переменные:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = e^t - u \end{cases}.$$

Решаем уравнение на основе использования приближенного метода и построим график результата (интегральную кривую). Для этого необходимо задать информацию о задаче Коши (то есть задать дифференциальное уравнение и начальные условия), а также определить интервал, в котором будет представлен результат.

Заметим, что по умолчанию внутренней переменной в системе **MATLAB** считается переменная **t.**

Создаем **m–файл** с целью описания правых частей дифференциальных уравнений системы дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала формируем нулевой вектор **DR**. При этом вектор **DR** состоит из компонентов, а элементы в(1), в(2), в(3) образуют правые части системы уравнений у **m-файлу.** Определим, что переменная y будет отвечать элементу $y(1)$, производная y' будет отвечать элементу $y(2)$, производная y'' будет отвечать элементу в(3). Таким образом, **m-файл** формируется в результате применения следующих команд:

```
function DR=prur9(t,y);
DR=zeros(3,1);DR(1)=y(2);DR(2)=y(3);
DR(3)=(в(1)+(exp(2*t))*(t.^2+t+1);
```

Зададим интервал интегрирования, начальные условия и проводим поиск решения:

```
>> y0=[0 0 0]; tspan=[–4 4];
>> [t,y]=ode45('prur9',tspan,y0); plot(t,y(:,1))
```

Пример 2. Решить уравнение $y''' + y = x^4$.

Правая часть уравнения является функцией вида (3.4), для которой $m = 4$. Характеристическое уравнение

$$r^3 + r = 0 \text{ или}$$

имеет корни, потому общее решение однородного уравнения $y''' + y' = 0$ определяется формулой

$$y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x .$$

Поскольку число является простым корнем характеристического уравнения, то частичное решение отыскивается в виде

$$\bar{y} = xe^{0\cdot x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)$$

или

$$\bar{y} = (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex) .$$

Находим первые производные функции

$$\bar{y}' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + Dx + E ;$$

$$\bar{y}'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D ;$$

$$\bar{y}''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C .$$

После подстановки выражений для $\bar{y}', \bar{y}'''$ в исходное уравнение, получим тождественность

$$60Ax^2 + 24Bx + 6C + 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + Dx + E = x^4 ,$$

откуда

$$5A = 1,\ 4B = 0,\ 60A + 3C = 0,\ 24B + 2D = 0,\ 6C + E = 0 ,$$

то есть

$$A = \frac{1}{5},\ B = 0,\ C = -4,\ D = 0,\ E = 24.$$

Таким образом

$$\bar{y} = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x ,\ y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x$$

Подстановки величин начальных условий $y''(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(0) = 0$ в соответствующие уравнения позволяют получить систему уравнений, из которой находятся величины постоянные:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_3 + 24 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ C_3 = -24 .$$

Таким образом, искомое частичное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = -24\sin x + \frac{1}{5}x^4 - 4x^3 + 24x$$

Для нахождения решения исходного уравнения с помощью подсистемы **Simbolic Math** в среде **MATLAB** используем команду **dsolve**:

```
>> dsolve('D3y+Dy=x^4','x')
ans =
1/5*x^5–4*x^3+24*x+C1+C2*sin(x)+C3*cos(x)
```

Решение задачи Коши (дифференциального уравнения с известными начальными условиями) предусматривает использование расширенной структуры команды **dsolve**:

```
> dsolve('D3y+Dy=x^4','D2y(0)=0','Dy(0)=0','y(0)=0','x')
```

ans =
1/5*x^5–4*x^3+24*x–24*sin(x)

Убедитесь, что результат совпадает с точностью до названия переменной с предварительно полученным решением.

Заметим, что исходное дифференциальное уравнение третьего порядка может быть возведено к системе дифференциальных уравнений первого порядка, если ввести новые переменные:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = t^4 - y \end{cases}.$$

Эти уравнения решаем на основе использования приближенного метода. Для этого необходимо задать информацию о задаче Коши (то есть задать дифференциальное уравнение и начальные условия), а также определить интервал, в котором будет представлен результат.

Заметим, что по умолчанию внутренней переменной в системе **MATLAB** считается переменная **t.**

Создаем **m–файл** с целью описания правых частей дифференциальных уравнений системы дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала формируем нулевой вектор **DR**. При этом вектор **DR** состоит из компонентов, а элементы в(1), в(2), в(3) образуют правые части системы уравнений у **m-файлу.** Определим, что переменная y будет отвечать элементу $y(1)$, производная y' будет отвечать элементу $y(2)$, производная y'' будет отвечать элементу $y(3)$. Таким образом, **m-файл** формируется в результате применения следующих команд:

```
function DR=prur10(t,y);
DR=zeros(3,1);DR(1)=y(2);DR(2)=y(3);
DR(3)=–y(2)+(t.^4);
```

Зададим интервал интегрирования, начальные условия и осуществим поиск решения, на основе следующих команд:

```
>> y0=[0 0 0]; tspan=[–4 4];
>> [t,y]=ode45('prur10',tspan,y0); plot(t,y(:,1))
```

Как известно, с помощью дифференциальных уравнений описываются различные физические процессы. Рассмотрим, например, движение материальной точки.

Пример 5. Решить дифференциальное рівння, которое описывает движение материальной точки в гравитационном поле Земли (константа $g = 9.8\ м/с^2$). Начальные значения: начальная координата, начальная скорость $y'(0) = 10\ м/с$.

Обозначим, что позволяет заменить исходное дифференциальное уравнение системой:

$$\begin{cases} u_1' = y_2 \\ u_2' = -9.8 \end{cases}.$$

Сформируем вектор начальных значений:

```
>> y0=[0;10];
```

и вектор значений аргумента, в которых будет определяться решение задачи:

```
>> tspan=0:.2:2;
```

Функцию вычисления правых частей системы уравнений можно записать в выгляди **m-файлу. М-файл** будет состоять из вспомогательной нулевой матрицы, элементы которой состоят из выражений правых частей исходной системы:

```
function U=difs1(t,y)
U=zeros(2,1);U(1)= в(2);U(2)= –9.8;
```

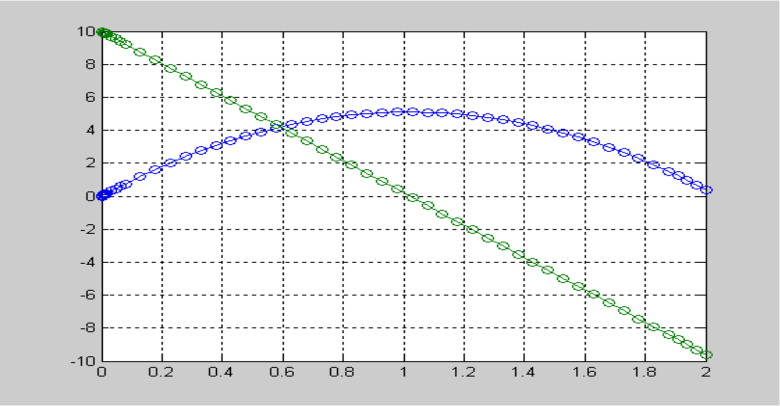
Для выполнения численного решения системы уравнений обращаемся к решателю ЗДР **ode45**:

```
>> [t,y]=ode45('difs1',tspan,y0)
t =
      0
   0.2000
   0.4000
   0.6000
   0.8000
   1.0000
   1.2000
   1.4000
   1.6000
   1.8000
   2.0000
y =
```

0	10.0000
1.8040	8.0400
3.2160	6.0800
4.2360	4.1200
4.8640	2.1600
5.1000	0.2000
4.9440	–1.7600
4.3960	–3.7200
3.4560	–5.6800
2.1240	–7.6400

Для получения графиков решений $y(t)$ и $y'(t)$ (см. рис. 14.3) исходного дифференциального уравнения $y'' = -g$ следует использовать решатель ОДН **ode45** в следующем виде:

```
>> ode45('difs1'[0 2][0 10]); grid
```



Мал.14.3 – График решения дифференциального уравнения

Заметим, что зеленым маркером обозначен график $y(t)$, а синим маркером определяется изменение скорости по времени $y'(t)$.

Практические задания лабораторной работы № 14.

Выполнить следующие задания :

Задание 1. Предоставлено линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$y''(t) + Py'(t) + Qy(t) = f_i(t)$$

Решить задачу Коши и построить интегральную кривую средствами подсистемы **Simbolic Math** и с помощью решателей дифференциальных уравнений **ode****(варианты заданий приведены в табл. 14.1).

Таблица 14.1 – Варианты к заданию №1

№ п/п	Коэффициенты		Правые части уравнения		Начальные условия	
	P	Q	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$y(0)$	$y'(0)$
1	–5	6	$2e^{4t}$	$4e^{2t}$	0	1
	–4	4	$3e^{5t}$	e^{2t}	1	0
2	0	9	$4e^{-2t}$	$2\sin 3t$	0	2
	1	–12	$2e^{-2t}$	$5e^{3t}$	1	0
3	6	9	$5e^{-4t}$	$2e^{-3t}$	0	1
	0	16	$4e^{-3t}$	$3\sin 4t$	1	0
4	3	–10	$2e^{3t}$	$4e^{2t}$	0	1
	–10	25	$4e^{2t}$	$2e^{5t}$	2	0
5	0	25	$2e^{3t}$	$4\cos 5t$	0	2

	3	–4	$2e^{5t}$	$3e^{-4t}$	1	0
6	12	36	$3e^{-2t}$	n	0	2
	0	36	$5e^{4t}$	$3\cos 6t$	1	0
7	–1	–6	$2e^{-3t}$	$3e^{-2t}$	0	1
	4	4	$3e^{4t}$	$5e^{-2t}$	2	0
8	0	64	$4e^{-5t}$	$3\cos 8t$	0	1
	1	–6	$2e^{5t}$	$4e^{-3t}$	1	0
9	–18	81	$5e^{4t}$	$6e^{9t}$	0	2
	0	9/4	$3e^{-2t}$	$5\cos\frac{3}{2}t$	1	0
10	–1	–12	k	t	0	1
	2	1	$4e^{-3t}$	$4e^{-t}$	2	0
11	0	16/9	$3e^{-2t}$	$\cos\frac{4}{3}t$	0	1
	–3	–10	$4e^{3t}$	$3e^{-2t}$	1	0
12	4	4	$5e^{-4t}$	$4e^{-2t}$	0	2
	0	25/4	$2e^{3t}$	$\sin\frac{5}{2}t$	2	0
13	–3	–4	$5e^{-2t}$	$2e^{4t}$	0	1
	6	9	$6e^{2t}$	$4e^{-3t}$	1	0
14	0	49/4	$4e^{-3t}$	$3\cos\frac{7}{2}t$	0	2
	1	–6	$2e^{-5t}$	$5e^{2t}$	1	0
15	8	16	$2e^{6t}$	$3e^{-4t}$	0	1
	0	25/9	$4e^{-2t}$	$2\sin\frac{5}{3}t$	0	2

Задание 2. Для защиты от вибрации приборный блок установлен на специальные упругие опоры (амортизаторы). Его движение на амортизаторах при отсутствии боковых и крутильных колебаний описывается дифференциальным уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0,$$

где x – отклонение блока от начального положения, t – время, m – масса блока, $\frac{d^2x}{dt^2}$ – ускорение, β – коэффициент трения (в амортизаторах), $\frac{dx}{dt}$ – скорость движению при колебаниях блока, kx – слагаемое, которое отвечает за сопротивление упругих элементов (пружин), k – коэффициент жесткости амортизаторов.

Суммарная жесткость пружин зависит от деформации и определяется коэффициентом: $k=k_0(1+ax^2)$.

Решить уравнение при следующих данных: $\beta=0{,}5$ кг/с, начальные данные: $x=1$ см, $\frac{dx}{dt}=0$ при $t=0$. Другие параметры предоставлены в таблице 14.2.

Таблица 14.2 – Варианты к заданию №2

№ п/п	Значение параметров		
	m, кг	k, Н/м	a, 1/м2
1	11	1	3
2	12	0.5	1
3	5	1	–0.5
4	7	1.5	2

5	9.5	1	2
6	15	2	3
7	4	2	–0.5
8	6	0.5	3
9	10	1	1
10	5	2	2
11	11	1.5	–0.5
12	7	1	2
13	12	1	3
14	8	2	1

Получите решения, которые охватывают не менее чем четыре периода колебаний и постройте по ним соответствующую зависимость $x(t)$.

Задание 3. Вертикальные колебания механической системы (см. задание 2) под действием последовательности полусинусоидальных импульсов описывается дифференциальным уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=\left|F_m\cos(\omega t)\right|,$$

где x – отклонение системы от начального положения, t – время, m – масса блока, β – коэффициент трения, k – коэффициент жесткости амортизаторов, F_m *і* ω – параметры силы, которая вынуждает.

Нужно решить дифференциальное уравнение для следующих данных: масса $m=3$ кг; коеффіціент трение $\beta=1$ кг/с, коэффициент жесткости $k=4$ Н/м. Начальные условия: $x=0$, $\frac{dx}{dt}=0$ при $t=0$. Другие параметры предоставлены в таблице 14.3.

Таблица 14.3 – Варианты к заданию №3

№ п/п	Значение параметров		
	m, кг	F_m, Н	ω, советов/с
1	11	1020	5
2	2	150	0.1
3	3	1960	2
4	1.5	980	2
5	14	720	0.2
6	2.5	250	12.5
7	3	170	0.3
8	8	1000	1
9	7	600	1,5
10	10	750	10
11	5	200	2
12	4	340	3
13	3	470	2,5
14	9	900	0,3

Получите решение, на котором устанавливаются стойкие колебания в системе. Постройте зависимость $F(t)=F_m\cos(\omega t)$ и $x(t)$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка.
2. Как формулируется задача Коши в случае обычного дифференциального уравнения -го порядка?
3. В чем заключается метод снижения порядка?
4. Как найти общее решение дифференциального уравнения -го порядка с помощью команд подсистемы **Simbolic Math** системы **MATLAB**.
5. Объясните последовательность этапов решения задачи Коши в случае дифференциального уравнения -го порядка средствами системы **MATLAB**.
6. Объясните запись **[t,y]=ode45('pr',tspan,y0)**.
7. Какие аргументы могут входить к параметру **OPTIONS**?