Лабораторна робота № 17.

Тема. Розв’язання рівнянь в частинних похідних в системі **MATLAB**.

Мета роботи: ознайомитись з процедурами розв’язання рівнянь в частинних похідних за допомогою підсистеми **PDE** (**Partial Differential Equation**) **Toolbox** системи **MATLAB**.

Теоретичний мінімум

Як відомо, в техніці, і зокрема в автомобільному транспорті, важливе значення мають різні коливальні процеси (механічні і електромагнітні) та теплові процеси. Такі процеси відбуваються у просторі і залежать від часу. Основні закономірності таких явищ і процесів описуються диференціальними рівняннями, які одержали назву *рівнянь математичної фізики*. Функції, які описують процеси, залежат від чотирьох змінних $\omega = f(x, y, z, t)$. Але в деяких випадках задачі можна дещо спростити, а саме звести до задач для функцій двох змінних [51].

Нагадаємо, що диференціальними рівняннями в частинних похідних називаються рівняння, в яких невідома функція залежить від багатьох аргументів.

В теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних досить часто використовуються такі позначення частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \frac{\partial u}{\partial z} = u_z, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = u_{xz}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = u_{zy},$$

У багатьох випадках для опису фізичних процесів використовують рівнянь з приватними похідними до другого порядку включно. Так, наприклад, вивчення вільних коливань різної природи приводить до хвилевих рівнянь вигляду

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

де $u(x, y, z, t)$ – функція, що описує хвильовий процес, x, y, z – координати, c – швидкість розповсюдження хвилі в даному середовищі, t – час. Оператор $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ прийнято позначати значком Δ, який в цьому випадку носить назву оператора Лапласа.

Процеси розповсюдження теплової енергії описуються рівнянням теплопровідності

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = Q, \qquad (2)$$

де ρ і C – щільність і теплоємність речовини, T – температура, k – коефіцієнт теплопровідності, Q – щільність джерел тепла.

Аналіз стаціонарних станів, наприклад, статичних теплових, електричних, магнітних полів або деформацій при статичних навантаженнях проводять з використанням рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z), \qquad (3)$$

де – $u(x,y,z)$ – функція, яка описує статичне поле, $f(x,y,z)$ – розподілені джерела. Якщо $f(x,y,z)=0$, то з (3) отримуємо рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (4)$$

Не дивлячись на відмінність процесів, що описуються розглянутими рівняннями, і форм їх запису, всі вони можуть бути представлені як окремі випадки узагальненої форми диференціального рівняння другого порядку.

Розглянемо рівняння другого порядку з двома незалежними змінними x і y:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D=0, \qquad (5)$$

де A,B,C,D – деякі функції, які залежать в загальному випадку від $x,y,u,\partial u/\partial x$ і $\partial u/\partial y$, причому A,B і C одночасно не звертаються в нуль. Диференціальні рівняння, що описують фізичні поля, можуть бути нелінійними. Проте на практиці з метою спрощення опису багато завдань розглядаються в лінійному наближенні, коли рівняння з приватними похідними лінійно щодо невідомої функції u і її частинних похідних.

На підставі того, що рівнянню (5) можна поставити у відповідність квадратичну форму $A\zeta_1^2+B\zeta_1\zeta_2+C\zeta_2^2=0$, по математичній природі розрізняють наступні типи *квазілінійних рівнянь*:

1) гіперболічний, якщо $B^2-4AC>0$ – його аналогом є хвильове рівняння (1);
2) параболічний, якщо $B^2-4AC=0$ – його аналог рівняння теплопровідності (2);
3) еліптичний, якщо $B^2-4AC<0$ – аналог рівняння Пуассона (3) або Лапласа (4).

У задачах, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, важливою частиною при формуванні математичної моделі процесу крім самого рівняння є наявність додаткових умов.

Для задач з рівняннями гіперболічного або параболічного типу, що містять як незалежну змінну час t, умови по змінній t зазвичай формулюються як початкові. Вони описують початковий станпроцесу, що вивчається. По координатах x, y, z задають граничні умови. У теплових задачах вони, наприклад, описують розподіл температури на межі розрахунковій області. У завданнях з рівняннями еліптичного типу, які не утримують змінну t, використовують тільки граничні умови по координатах x, y і z, а саме завдання називають краєвим.

Якщо краєва умова задається у вигляді розподілу функції u на межі, то цю умову прийнято називати *умовою Дирихле*. Умову, яка визначає похідну $\vec{n} \cdot grad(u) = \vec{n} \cdot \nabla u$ на границі розрахункової області, називають *умовою Неймана*, $\vec{n}$ – одинична нормаль до границі. Умови, які надають собою комбінацію двух вищеназваних, називають змішаними.

Приведена класифікація дозволяє визначити загальні підходи до розв’язку диференціальних рівнянь в задачах різних по фізичній суті, але схожих з математичної точки зору. При організації чисельного алгоритму розв’язування математичної моделі, яка представлена у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних за додатковими умовами велике поширення набули метод скінчених різниць і метод скінчених елементів, основи якого будуть розглянуті у даній лабораторній роботі.

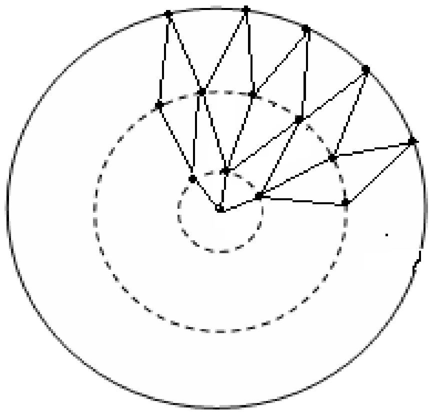
Метод скінчених елементів грунтується на тому, що будь–який безперервний розподіл фізичної змінної $u(x, y, z, t)$ в обчислювальної області, наприклад деформацію або температурне поле, можна апроксимувати наборомкусково–безперервних функцій, визначених на кінцевому числі підобластей (кінцевих елементів). Дані елементи мають загальні вузлові точки і в сукупності апроксимують форму області.

Залежно від геометрії і розмірності задачи використовують різні види скінчених елементів. Найчастіше застосовуються прості елементи – симплекси.

Кількість вузлів в симплексі на одиницю перевищує розмірність завдання. Для двомірного завдання симплекс–елементом буде прямолінійний трьохвузловий трикутник, а для тривимірних – прямолінійний чотирьохвузловий тетраедр. Широке застосування симплексу обумовлене тим, що вони дозволяють заповнювати розрахункову область довільної форми повністю без розривів, а також на них зручно задавати лінійні поліноми як апроксимуючі функції.

Зазвичай для розбиття розрахункової області на елементи використовується спеціальний алгоритм покриття, що забезпечує автоматичну генерацію вузлів (генерацію сітки).

Одна з таких процедур працює таким чином. Спочатку проводиться нанесення з деяким кроком вузлів на границю області $\partial\Omega$. Після цього усередині області будується допоміжна крива еквідистантна границі. На криву також наносяться вузли. Почергове з'єднання вузлів на першому і другому контурах дає симплекс. Далі всі операції повторюються до заповнення симплексом всієї області Ω.



$\partial\Omega$

Мал. 17.1 – Побудова сітки скінчених елементів

До достоїнств методу скінчених елементів, завдяки яким він набув широкого застосування, відносять гнучкість і різноманітність сіток, чітко формалізовані алгоритми побудови дискретних завдань для довільних областей, простота обліку природних краєвих умов.

Вправа 1. Розв′язання крайових задач параболічного типу у системі **MATLAB.**

Для розв′язання рівнянь та систем рівнянь в частинних похідних параболічного типу з однією просторовою координатою у системі **MATLAB** існує команда **pdepe**. Загальний вигляд опису процесу відносно невідомої функції $U(x,t)$ може бути представлений таким чином:

$$C\frac{\partial U}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m F\right) + S\,, \qquad (1.1)$$

де матриця C, вектори F і S залежать від змінних $x, t, U, \dfrac{\partial U}{\partial x}$. Матриця C являється діагональною і хоч би один елемент цієї матриці повинен бути ненульовим. Для рівняння теплопровідності вектор F визначає потік, а вектор S описує джерела. Введення параметру m дозволяє розв′язувати одновимірні задачі в циліндричній та полярній ($m=1$), а також сферичній ($m=2$) системах координат.

Початкові умови визначаються для вектора невідомих:

$$U(x,t_0) = h_0(x)\,,$$

крайові умови задаються у наступному вигляді:

$$P(x,t,U) + Q(x,t)F\left(x,t,U,\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0\,.$$

Звернення до команди розв′язання систем рівнянь в частинних похідних має вигляд: **SOL = pdepe(m,PDE,IC,BC,xmesh,tspan, OPTIONS)**, де параметр **m** визначає систему координат: 0 відповідає декартовій системі координат, 1 – циліндричній, 2 – сферичній. Обчислення правої частини розглянутої системи виконується у **m**–файлі **PDE**, інформацію про початкові умови вміщує **m**–файл **IC,** крайові умови задаються у **m**–файлі **BC.**

Сітка по координаті x на інтервалі $[a, b]$ повинна вміщувати не менш ніж три вузли. Ця сітка задається масивом **xmesh**, який містить вузли у порядку зростання координати.

Для інтегрування задачі по часу у команді використовуються команди для розв′язання задачі Коші (вирішувачі **ODE**) [44]. Масивом **tspan** визначається набір тимчасових проміжків, в яких будуть записані розв′язки, таких проміжків повинно бути не менш ніж три.

Деякі розрахункові параметри можна задати за допомогою додаткового вихідного параметру **OPTIONS** за допомогою команди **odeset** (див. лабораторну роботу № 13, вправа № 2, приклад № 5).

Розв′язок виводиться у тривимірний масив **SOL**, при цьому перший індекс (i) відповідає проміжку часу t_i, другий індекс (j) визначає номер вузла x_j, а третій індекс дає номер компоненти вектора розв′язків. Таким чином, елемент SOL**(i, j, k)** дає значення розв′язку $U_k(x_i, t_j)$.

Звернення до команди обчислення правих частин рівнянь має вигляд: **[C,F,S] = PDE(x,t,U,DuDx)**, де шукані параметри представлені матрицею **C** та векторами **F**, S. Початкові умови задаються у формі: U = IC(x). Ініормація про крайові умови формується командою: [P**a,Qa,Pb,Qb] = BC(a,Ua,b,Ub,t)**, де U**a** та **Ub** – вихідні параметри, що задають значення на кінцях відрізку $[a, b]$, t – час, вихідні параметри надані векторами на лівому (**Pa, Qa**) і правому (P**b,Qb**) кінцях інтервалу.

У доданок до команди **pdepe** існує команда **pdeval**, яка перераховує розв′язок у другу сітку та на виході отримує масив розв′язків просторових похідних. Звертання до цієї команди має вигляд: **[Uout,DUout] = pdeval(m,x,U,Xout)**, де U — розв′язок, який отриманий на сітці **x**, **Uout** і **Duout** – функція та її просторова похідна на новій сітці **Xout**.

Приклад 1. Розв′язати рівняння теплопровідності з джерелом (p – параметр): $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + pe^{-t}$. Початковий розподіл температури: $u(x,0) = p + \sin x$. Надані крайові умови: Дирихлє (першого роду) на лівому кінці та Неймана (другого роду) на правому кінці відрізку.

Сформуємо **m**–файл **pdeteplo**, який буде розв'язувати поставлену задачу:

```
function pdeteplo
m=0;
a=0;
b=3*pi/2;
p=1;
n=16;xx=linspace(a,b,n);
tt=0:.2:3;
sol=pdepe(m,@pdef1,@icf1,@bcf1,xx,tt,[],p);
u=sol(:,:,1);
subplot(121);
mesh(xx,tt,u);
axis([a b tt(1) tt(end)  0 1.5]);
xlabel('x');ylabel('t');
subplot(122);
plot(xx,u(end,:),'ok');
h=num2str(tt(end),3);
xlabel('x');
ylabel(strcat('u(x,','3)'));
axis tight
```

У цьому файлі також записані процедури побудови тривимірної картини теплової дифузії та графіку розподілу температури (див. мал. 17.2).

Зауважимо, що позначення параметрів не відрізняються від описаних вище параметрів, **a**, **b** – відрізок, на якому змінюється змінна **x**, **p** – параметр, **n** – число осередків на відрізку. Змінна **xx** визначає вузли сітки по **x**, змінна **tt** задає тимчасовіпроміжки.

Сформуємо допоміжні файли (**m-**файли **pdef1**, **icf1**, **bcf1**), до яких буде звертатися головний **m**–файл **pdeteplo** у процесі обчислень. **M**–файл **pdef1** утворює праві частини рівняння:

```
function [C,F,S]=pdef1(x,t,u,DuDx,p)
C=1;
F=DuDx;
S=–p*exp(–t);
```

Початкові умови задамо у **m**–файлі **icf1**:

```
function u0=icf1(x,p)
u0=p+sin(x);
```

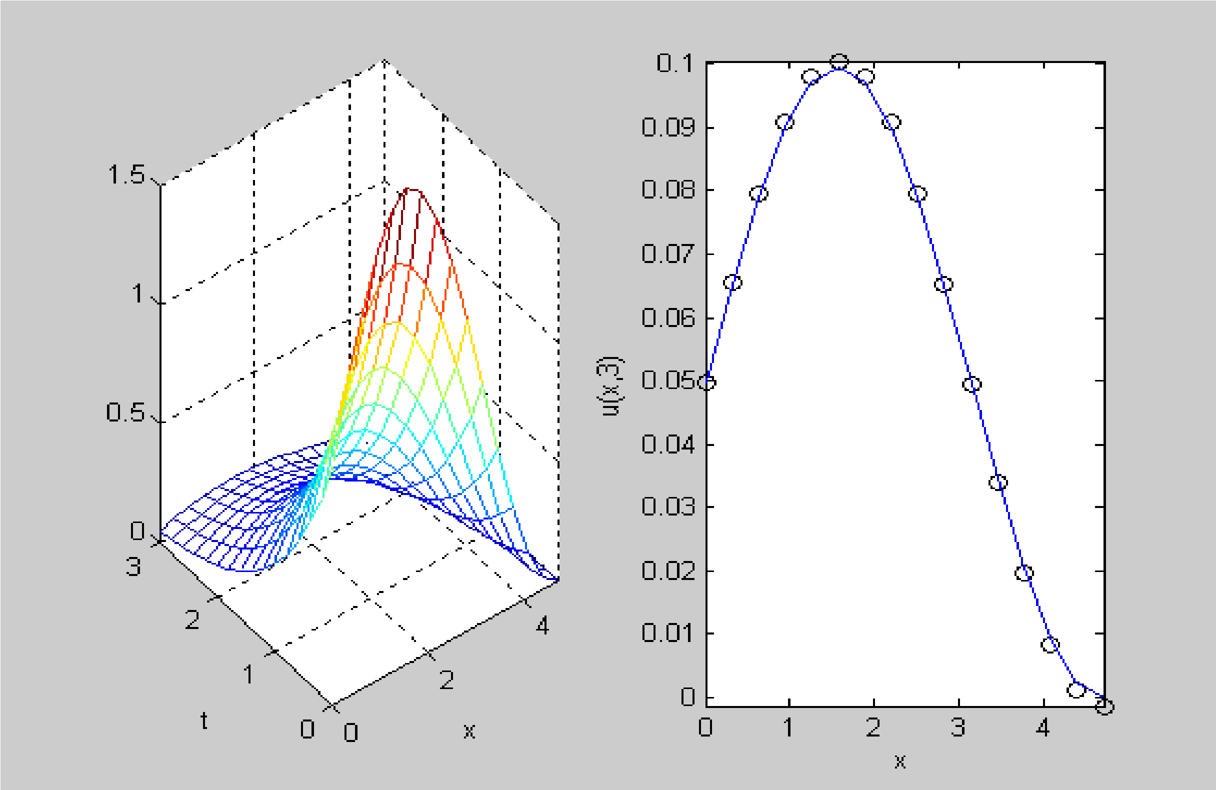
Крайові умови – у **m**–файлі **bcf1**:

```
function [Pa,Qa,Pb,Qb]=bcf1(a,ua,b,ub,t,p)
Pa=uaт–p*exp(–t);
Qa=0;Pb=0;Qb=1;
```

Для розв’язання задачі необхідно у командному рядку звернутися до **m**–файлу **pdeteplo:**

```
>> pdeteplo
```

Після виконання цієї процедури з’являється графічне вікно з двома графіками.



Мал. 17.2 Розв'язок рівняння теплопровідності $u(t)$

Вправа 2. Розв′язання диференціальних рівнянь в частинних похідних засобами підсистеми **PDE Toolbox**.

Пакет **MATLAB** містить підсистему **PDE Toolbox** (від англ. **Partial Differential Equation** – диференціальне рівняння в частинних похідних). Ця підсистема забезпечує розв'язок диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінчених елементів в двовимірній постановці [20]. Воно включає графічний інтерфейс; інструменти завдання форми рівнянь і граничних умов; процедуру автоматичної генерації сітки кінцевих елементів; засоби для візуалізації отриманого розв'язку і його анімації. Команди **PDE Toolbox** використовують проекційне формулювання методу скынчених елементів.

Кроки розв'язання **PDE** за допомогою метода скінчених елементів:

1. Визначення геометрії (режим малювання);
2. Завдання граничних умов (режим граничних умов);
3. Вибор коефіцієнтів, які визначають задачу (режим **PDE**);
4. Дискретизація скінчених елементів (режим сітки);
5. Завдання початкових умов і розв'язання **PDE** (режим розв'язання);
6. Обработка отриманого розв'язку (режим графіку).

Підсистема **PDE Toolbox** є набором спеціальних команд, написаних на мові системи **MATLAB**. Особливе місце серед всіх команд підсистеми **PDE Toolbox** займають команди **pdetool** і **pdeinit**. При виклику цих команд з робочого вікна системи **MATLAB** розгортається графічний інтерфейс, який забезпечує розв’язок задачі.

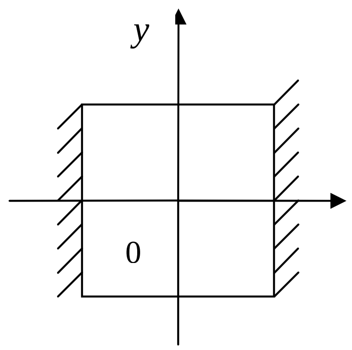
Застосування підсистеми **PDE Toolbox** підтримує розв’язок різних типів завдань, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Запуск додатку до підсистеми **PDE Toolbox** приводить до появлення на екрані вікна графічного інтерфейсу. У верхній частині інтерфейсу розташовується рядок головного меню, що включає пункти **File**, **Edit** та інші. Безпосередньо під головним меню розміщується панель, яка включає інструменти підсистеми **PDE Toolbox**, список видів завдань **Application** і покажчик значень координат **x** і **y**. Нижче розташовані вікно **Set formula** (введення формули) і власне графічне вікно для роботи із зображенням розрахункової області. Внизу з’являється інформаційний рядок **Info** і кнопка **Exit** (вихід).

Приклад. Розглянемо обчислення коливань тонкої пластини квадратної форми (мал. 17.3), які описуються узагальненим гіперболічним рівнянням вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

Вважаємо, що пластина жорстко закріплена по лівій та правій границях– $u=0$, а два інших її граничних края вільні, що відповідає умовам $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.



Мал.17.3 Область пластини та визначення границь для завдання відповідних граничних умов

Обчислення за допомогою **PDETool** проводимо в наступному порядку. Спочатку встановлюємо вид розрахунку "**Generic Scalar**" у вікні "**Application**" (зазвичай цей режим вибирається за замовченням).

На першому етапі необхідно сформувати початкову геометрію (область, в який досліджується задача) завдання в графічному вікні інтерфейсу підсистеми **PDE**. Геометрія області має втгляд прямокутника **R1**.

Зауважимо, що зображення області формуються за допомогою команд пункту **Draw** (Малювати) головного меню:

- **Draw Mode** – перемикання в режим введення (промальовування) геометрії; **Rectangle/square** –формування прямокутника або квадрата за допомогою миші починаючи від його верхньої лівої вершини;
- **Rectangle/square (centered)** –формування прямокутника або квадрата за допомогою миші починаючи від його центру;
- **Ellipse/circle** – формування еліпса або круга за допомогою миші починаючи від верхньої лівої точки;
- **Ellipse/circle** (**centered**) –формування еліпса або круга за допомогою миші починаючи від центру;
- **Polygon** – промальовування багатокутника відрізками ламаної лінії, поки вона не стане замкнутою;
- **Rotate** – поворот виділених об'єктів навколо деякої точки;
- **Export Geometry Description**, **Set Formula, Labels**. – експорт в базову робочу область системи **MATLAB** змінних (що описують геометрію).

Швидкий виклик деяких з цих команд забезпечують елементи інструментальної панелі.

Для отримання зображень довільної форми використовуємо рядок "**Set formula**", що розташований під інструментальною панеллю. У ній можна задати злиття декількох фігур або "відняти" якусь фігуру з іншої. Команди для редагування зображення і настройки графічного вікна містяться в наступних пунктах головного меню. Операція **Edit** (Правка) містить команди:

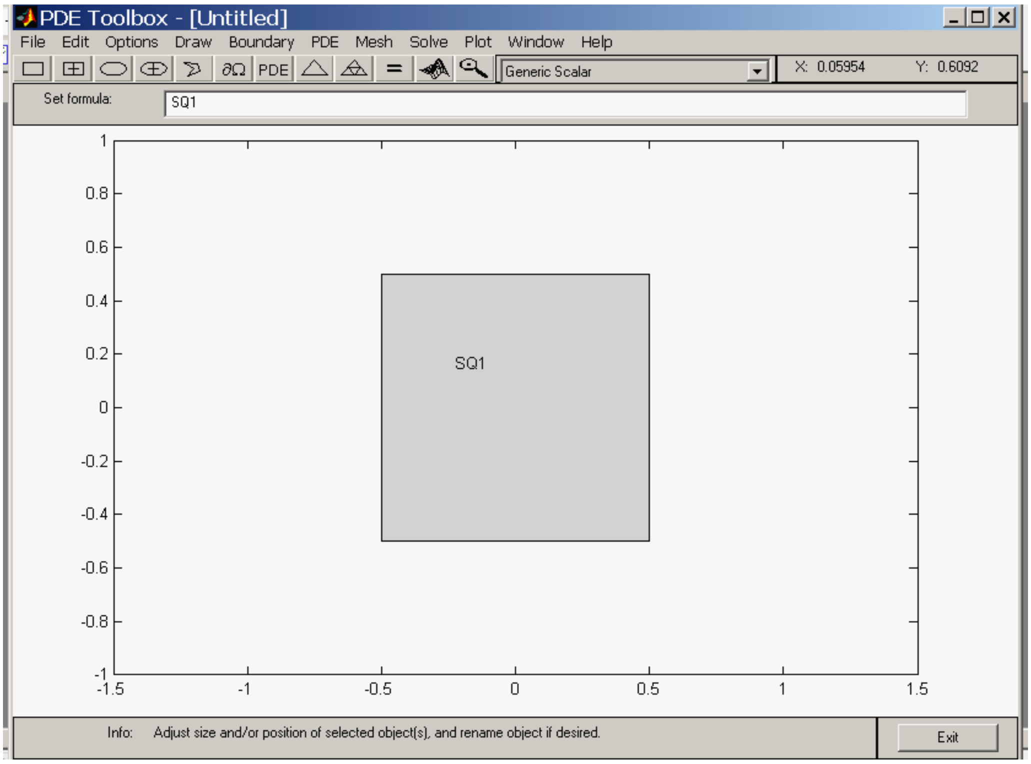
- **Undo** – відміна останньої дії;
- **Cut** – вирізування виділеного геометричного об'єкту і поміщення його в буфер;
- **Copy** – копіювання виділеного об'єкту і поміщення його в буфер;
- **Paste** – вставлення геометричного об'єкту з буфера;
- **Clear** – видалення виділеного об'єкту;
- **Select All** – виділення всіх геометричних об'єктів.

Операція **Options** (Опції) містить команди:

- **Grid** – показати / приховати координатну сітку;
- **Grid Spacing** – встановити границі і крок сітки;
- **Snap** – округлити координати покажчика миші; **Axes Limits** – встановити межі координатних осей;
- **Axes Equal** – встановити однаковий масштаб по вісях **x** і **y**;
- **Turn Off Toolbar Help** – вимкнути підказки по інструментальній панелі;

- **Zoom** – показати із збільшенням виділену частину моделі;
- **Application** – перемикнути на інший вид завдання;
- **Refresh** – відновити зображення моделі.

Накреслимо зображення пластини в графічному вікні **PDETool** так, щоб її центр співпав з початком координат ($x = 0,\ y = 0$) і сторони були рівні $a = b = 1$, де a – розмір по вісі x, b – розмір по вісі y (див. мал. 17.4).



Мал. 17.4. Зображення пластини в графічному вікні PDETool

Другий етап включає введення граничних умов на граничних сегментах області роз’язання задачі і параметрів рівняння. Визначити умову на будь–якому з сегментів можна, виділивши його подвійним клацанням лівої кнопки миші. Відповідні команди розташовуються в розділах **Boundary** і **PDE** головного меню.

Операція **Boundary** (Границі) містить команди:

- **Boundary Mode** – введення граничних умов;
- **Specify Boundary Conditions**. – введення параметрів граничних умов**;**
- **Show Edge Labels** – показ номерів граничних сегментів;
- **Show Subdomain Labels** – показ номерів зон;
- **Remove Subdomain Border** – видалити межу зон;
- **Remove All Subdomain Borders** – видалення границі зон;

- **Export Decomposed Geometry**, **Boundary Cond's**. – експорт в робочу область системи **MATLAB** змінних для опису граничних умов.

Операція **PDE** (Рівняння) містить команди:

- **PDE Mode** – перемикання в режим введення параметрів рівняння;
- **Show Subdomain Labels** – показати номери зон;
- **PDE Specification**. – введення параметрів (коефіцієнтів) рівняння;
- **Export PDE Coefficients**. – експорт в базову робочу область змінних **PDE**, що описують коефіцієнти в обчислювальній області.

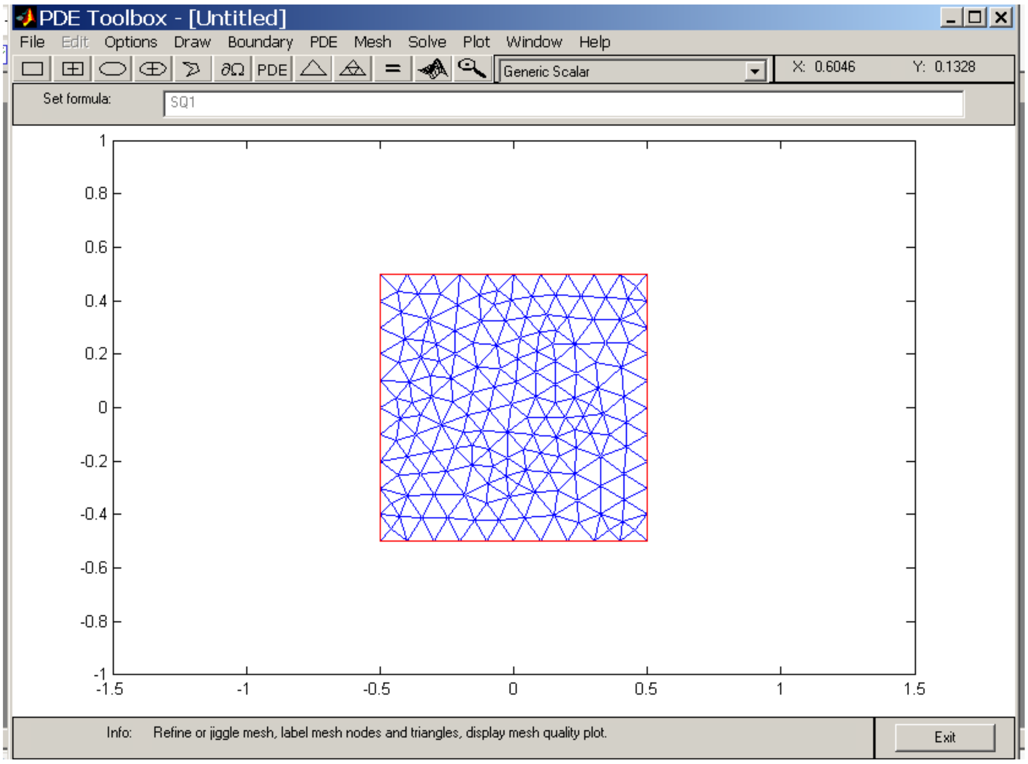
Перехід до виконання цих команд також забезпечується елементами інструментальної панелі $\partial\Omega$ – граничні умови і **PDE** – параметри рівняння.

У нашому прикладі задаватимемо граничну умову Дирихле: $u = 0$ на лівій і правій сторонах області прямокутника. На двох інших сторонах приймемо умову Неймана: $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Задамо параметри рівняння за допомогою виклику через меню або панель інструментів діалогово вікна "**PDE Specification**". Вкажемо, що завдання описується рівнянням гіперболічного типу (**Hyperbolic**), і введемо відповідні коефіцієнти $c = 1, a = 0, f = 0, d = 1$. Для введення умови на відповідному сегменті границі необхідно цей сегмент виділити і відкрити діалогове вікно операції "**Boundary Condition**". У вікні слід встановити перемикач в режим **Dirichlet** або **Neuman** і задати числові параметри.

На наступному етапі формується сітка скінчених елементів (див. мал. 17.5). Пункт **Mesh** (Сітка) головного меню включає наступні команди для роботи з сіткою: **esh Mode** – перемикання в режим побудови сітки;

- **Initialize Mesh** – генерація сітки;
- **Refine Mesh** – згущення сітки;
- **Jiggle Mesh** – регулярізація сітки в межах встановленої величини;
- **Undo Mesh Change** – відміна останню зміну сітки;
- **Display Triangle Quality** – відображення в кольорі показник регулярності кінцевих елементів;
- **Show Node Labels** – показ номерів вузлів;
- **Show Triangle Labels** – показ номерів скінчених елементів;
- **Parameters** – встановлення параметрів генератора сітки**;**
- **Export Mesh** – експорт сітки в базову робочу область.



Мал.. 17.5. Сітка скінчених елементів

Задамо параметри розв’язання і початкові умови:

$$u(x,\ y,\ t=0)=arctg\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right],\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=3\sin(\pi x)\exp\left[\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right].$$

Для цього скористаємося діалоговим вікном "**Solve Parameters**", яке можна відкрити вибравши пункти меню **Solve** – **Parameters**. Початкова деформація пластини при t = 0

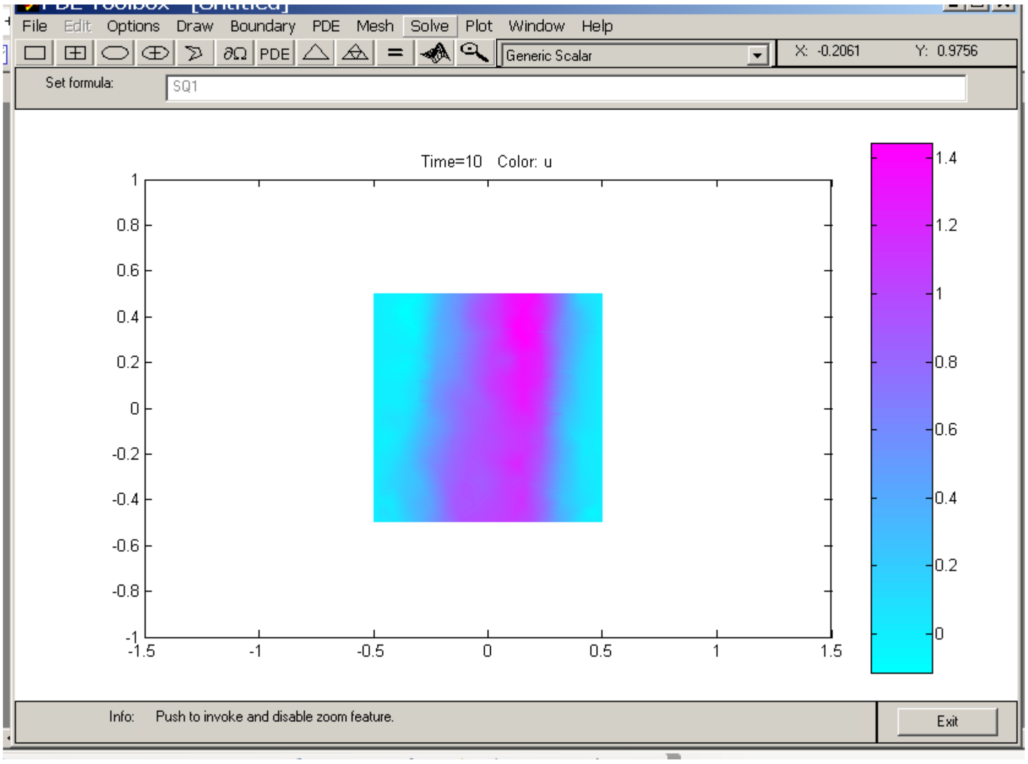
Виберaємо крок і верхню границю часу розв’язання. Для параметра **Time** вводимо рядок "0:0.1:10". Таким чином, обчислення виконуватиметься за часом в межах від $t=0$ до $t=10$ з кроком $\Delta t=0.1$.

Початкові умови також записуються з урахуванням особливостей мови пакету **MATLAB**. Початкова деформація вказується рядком **atan(cos(pi*x/2)),** а перша похідна рядком **3*sin(pi*x).*exp(sin(pi*y/2))**.

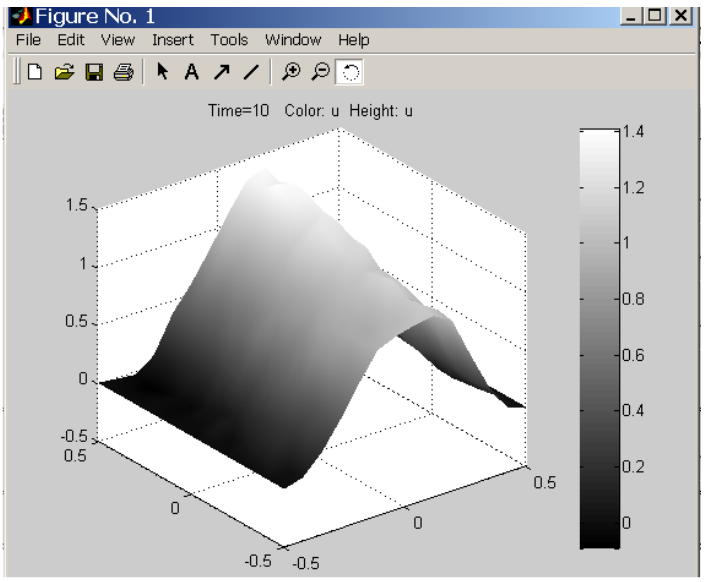
Відносну і абсолютну погрішність приймаємо рівними відповідно 0,01 і 0,001(величини цих значень встановлюються за замовчуванням).

Формуємо сітку і будуємо графічні параметри розв’язку за допомогою діалогового вікна "**Plot Selection**".

Заключний етап – запуск процедури розв’язання задачі. Після закінчення обчислень в графічному вікні інтерфейсу **PDEToolbox** відображається деформація пластини у момент часу $t=10$ (див. мал.. 17.6), а в додатковому вікні – анімація коливань пластини (фрагмент анімації див. на мал. 17.7).



Мал.. 17.6 Деформація пластини у момент часу $t = 10$

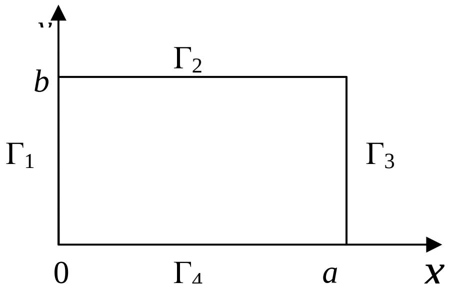


Мал.. 17.7 Зображення пластини в процесі коливання в момент часу $t = 10$

Практичні завдання лабораторної роботи № 17

Виконати наступні завдання :

Завдання 1. Визначити розподіл температури $T(x, y)$ на тонкій пластині прямокутної форми на основі розв'язання рівняння Лапласа:



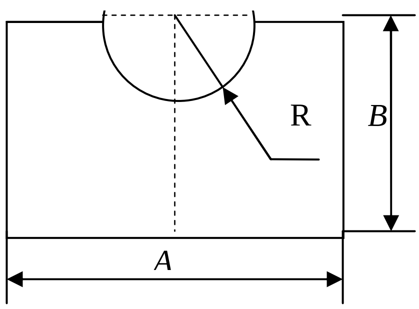
$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0.$$

Знайти можливий розподіл $T(x, y)$. Розміри a, b і граничні умови вказані в таблиці 17.1.

Таблиця 17.1 – Варіанти до завдання 1

№ п/п	Варіанти завдань розмірів геометричної області та виду граничних умов моделі						
	1	2	3	4	5	6	7
a, мм	24	25	60	30	25	24	40
b, мм	10	15	48	20	15	10	30
T(Γ$_1$), бС	20	$25+60\dfrac{y}{b}$		$15+80\dfrac{y}{b}$	$80-70\left(\dfrac{y}{b}\right)^2$		$35+30\dfrac{y}{b}$
T(Γ$_2$), бС	$20+80\dfrac{x}{a}$		$80-80\dfrac{x}{a}$			$75-75\dfrac{x}{a}$	
T(Γ$_3$), бС		$25+60\left(\dfrac{y}{b}\right)^2$		$15+80\left(\dfrac{y}{b}\right)^3$	$80-70\dfrac{y}{b}$		$35+30\left(\dfrac{y}{b}\right)^2$
T(Γ$_4$), бС	$20+80\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$		$80-80\left(\dfrac{x}{a}\right)^3$			$75-75\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$	

Завдання 2. Пластина прямокутної форми з вирізом на одній із сторін жорстко закріплена по краях і рівномірно навантажена за площею.



Мал. 17.8 Форма області

Прогин пластини визначається з рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\frac{P}{D},$$

де $D = Eh^3/\left[12(1-\nu^2)\right]$ – жорсткість вигину, E – модуль пружності, h – товщина пластини, ν – коефіцієнт Пуассона.

Треба розрахувати прогин $W(x, y)$ по даним, що приведені у таблиці: A, B – розміри пластини; R – радіус вирізу; P – навантаження. Гранична умова $W = 0$.

Таблиця 17.2 Варіанти до завдання № 1

№№ п/п	Варіанти завдань розміру та величин параметрів моделі						
	1	2	3	4	5	6	7
A, мм	180	150	200	120	180	180	160
B, мм	65	75	140	100	90	100	80
R, мм	25	15	40	45	35	30	40
h, мм	2	5	4	6	5	2	4
P, Н	$70\cdot10^9$	$55\cdot10^9$	$65\cdot10^9$	$80\cdot10^9$	$110\cdot10^9$	$70\cdot10^9$	$75\cdot10^9$
E, Н/м^2	40	70	140	50	120	60	80
ν	0,3	0,3	0,28	0,33	0,3	0,28	0,33

Контрольні питання

1. Приведіть класифікацію диференціальних рівнянь в частинних похідних залежно від їх математичної природи і фізичної сутності.
2. Якого вигляду граничні умови використовуються при формуванні математичной моделі на основі використання диференціальних рівнянь в частинних похідних?
3. Визначить особливості чисельного розв’язання ДРЧП еліптичного, гіперболічного і параболічного типу?
4. У чому полягають переваги методу скінчених елементів?
5. Поясніть структуру команди, що існує у системі **MATLAB** для розв’язання рівнянь та систем рівнянь в частинних похідних параболічного типу з однією просторовою координатою?
6. Поясніть синтаксис **SOL = pdepe (m, PDE, IC,BC, xmesh, tspan, OPTIONS)**.
7. Який метод лежить в основі розв’язання диференціальних рівнянь та систем рівнянь у частинних похідних за допомогою підсистеми **PDEToolbox**?
8. Визначте кроки розв’язання диференціальних рівнянь у підсистемі **PDEToolbox.**