Конспект лекций. Часть 1

Метод конечных элементов

доц. Хандримайлов А. А.

ХНАДУ, кафедра “Теоретическая механика и гидравлика”

2013

Оглавление

Лекция 1

Введение в метод конечных элементов (МКЭ)

План лекции

1. Основные понятия МКЭ

МКЭ — это метод для решения задач деформации, теплопроводности, колебаний, гидрогазодинамики, электромагнетизма и других задач.

Аппроксимация — это замена исследуемого объекта его упрощенной моделью (см. рис. 1.1).

Точность аппроксимации — это степень соответствия исследуемого объекта и его упрощенной модели.

Дискретизация — это разделение модели исследуемого объекта на отдельные (более простые) части (см. рис. 1.2 и 1.3).

Конечные элементы (КЭ) — это отдельные части или подобласти, на которые разделяется модель исследуемого объекта.

Сетка (сеточная модель) — это набор взаимосвязанных конечных элементов (см. рис. 1.4).

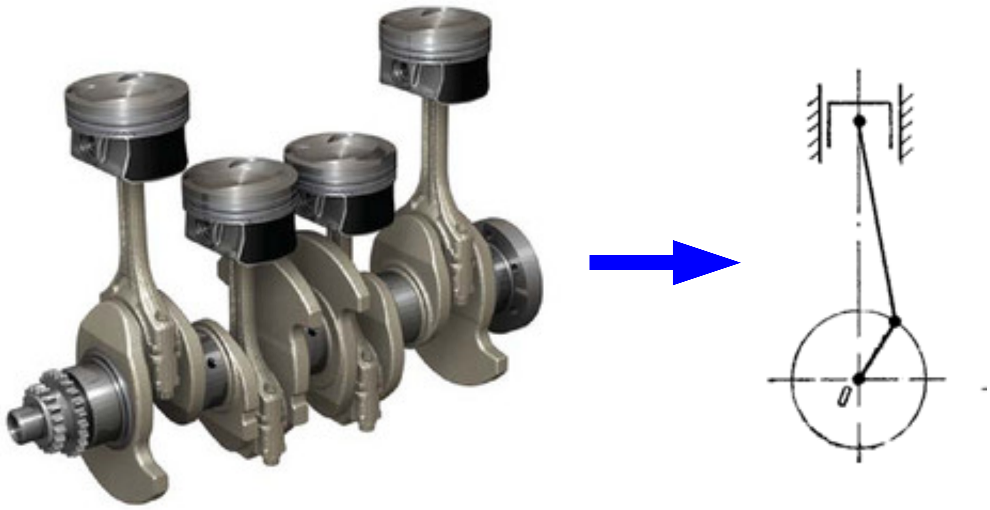

Рисунок 1.1 — Аппроксимация кривошипно-шатунного механизма

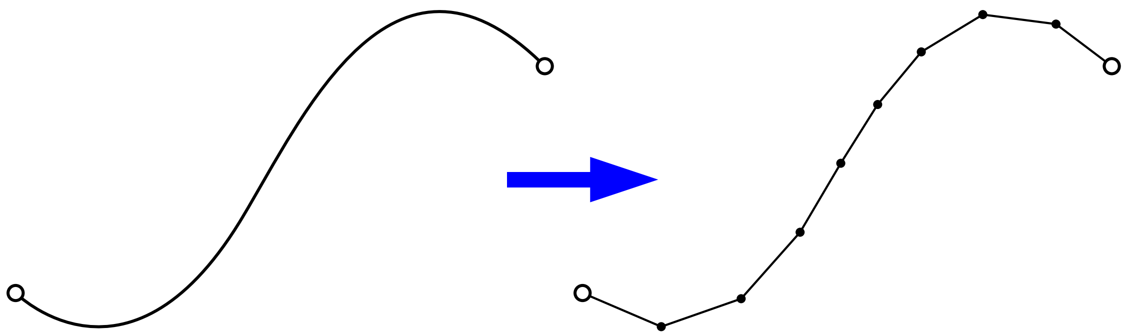

Рисунок 1.2 — Дискретизация кривой линии при помощи отрезков

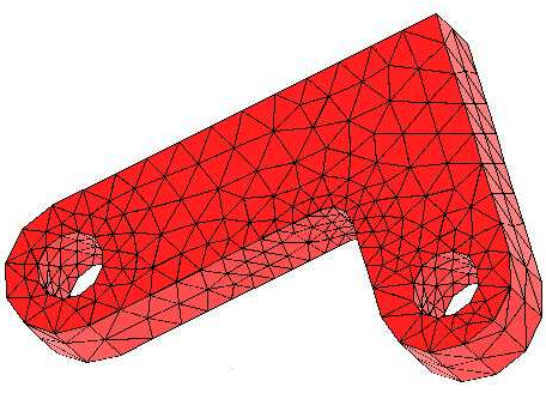

Рисунок 1.3 — Дискретизация объемной геометрической формы

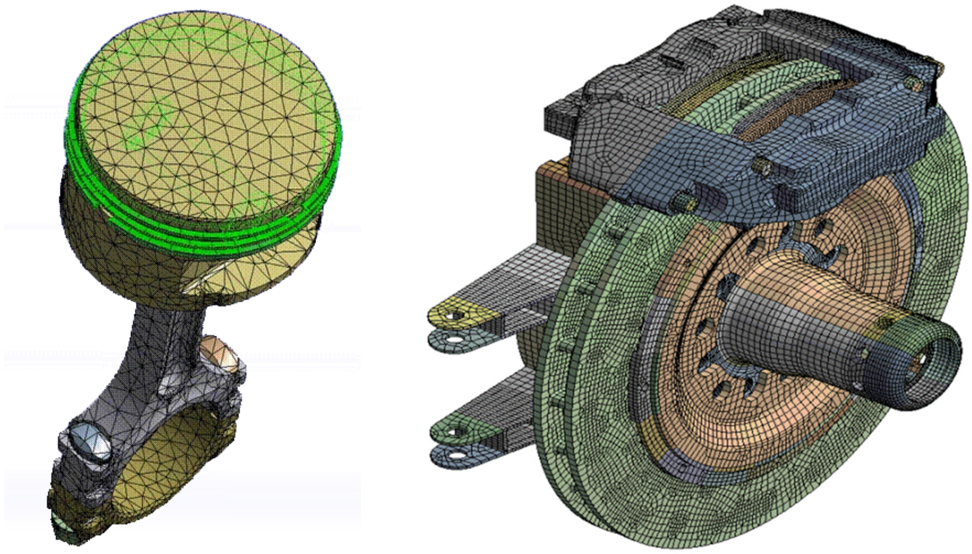

Рисунок 1.4 — Примеры сеточных моделей

2. Классификация расчетов МКЭ

Классификация по типу моделируемых процессов:

а) Расчет деформаций от механической нагрузки, теплопередачи, контактного взаимодействия или совместно.
б) Расчет течения жидкости и газа.
в) Расчет теплопроводности.
г) Расчет электромагнитных полей.
д) Расчет колебаний.
е) Расчет перемещений под действием механической нагрузки и механических связей.
ж) Связанный расчет (расчет нескольких совместных процессов).

Классификация по зависимости моделируемого процесса от времени:

а) Расчет устанавливающегося процесса (стационарный расчет) - конечное решение не меняется с течением времени.
б) Расчет периодически повторяющегося процесса (стационарно - периодический расчет) - решение повторяется в течении определенного интервала времени.
в) Расчет не устанавливающегося процесса (нестационарный расчет) - решение зависит от времени.

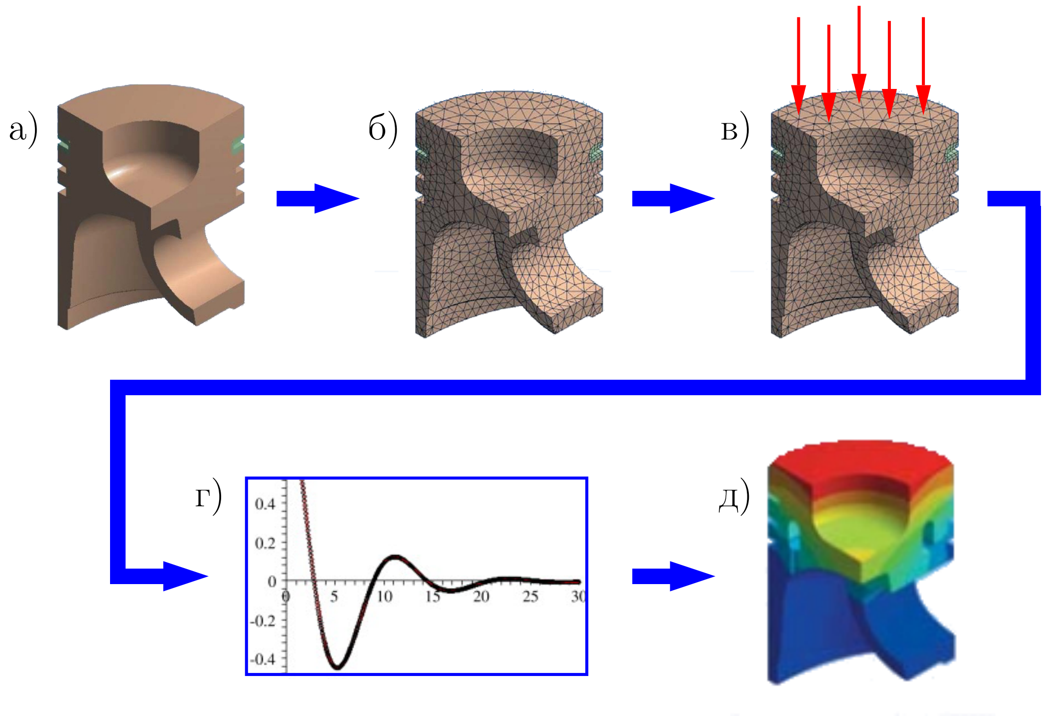

Рисунок 1.5 — Этапы решения задачи МКЭ

3. Этапы решения задачи МКЭ

а) Создание геометрической модели исследуемого объекта. На данном этапе используется CAD (Computer Aided Design) программа или модуль.
б) Создание сеточной модели. Используется генератор сетки (Mesh generator).
в) Задание начальных и граничных условий, физических свойств исследуемого объекта и параметров расчета. Используется препроцессор (Preprocessor).
г) Проведение расчета (численное решение). Используется решатель (Solver).
д) Обработка и анализ полученных результатов. Используется постпроцессор (Postprocessor) (см. рис. 1.5).

4. Программы для решения задач МКЭ

CAE (Computer Aided Engineering) программа — общее название для программ и программных пакетов, предназначенных для решения различных инженерных задач: расчета, анализа и симуляции физических процессов.

Обычно в CAE программе можно пройти все этапы решения задачи: от создания геометрической модели исследуемого объекта до обработки и анализа полученных результатов расчета. Существуют программы, специализирующихся на конкретном этапе решения задачи. Например ряд программ специализируются только на создании сеточной модели, или только на обработке результатов расчета. Многие программы позволяют обмениваться данными на различных этапах решения задачи.

Примеры наиболее известных коммерческих CAE программ:

а) Ansys (`www.ansys.com`)
б) Abaqus (`www.simulia.com`)
в) NX (Unigraphics) (`www.simens.com`)
г) SolidWorks (`www.solidworks.com`)
д) Autodesk (`www.autodesk.com`)

Примеры свободных и открытых CAE программ:

а) Code Aster (`www.code-aster.org`)
б) OpenFOAM (`www.openfoam.com`)
в) Elmer (`www.csc.fi/english/pages/elmer`)

5. Атрибуты конечных элементов (КЭ)

Атрибуты — это свойства конечных элементов.

Основными атрибутами КЭ являются:

а) *Собственная размерность* (0D, 1D, 2D, 3D) — это количество локальных пространственных координат, необходимых для описания геометрии элемента. При динамическом расчете время является дополнительной размерностью элемента.
б) *Узлы (узловые точки)* — это характерные точки, описывающие геометрию элемента и определяющие его степень свободы. Узлы могут находиться в угловых (крайних) точках, на ребрах и внутри элемента. Элементы, имеющие только угловые узлы, называются линейными. Внутренние узлы позволяют повышать точность решения, но делают расчет более затратным по компьютерным ресурсам и времени.
в) *Геометрия* — это геометрическая форма элементов, созданная его узлами (например: отрезок, треугольник, призма)
г) *Степень свободы* — это количество независимых параметров, характеризующих состояние исследуемой модели.
д) *Определяющие соотношения* — это физические законы, связывающие между собой различные параметры (например, закон Гука, связывающий напряжения и деформации).
е) *Свойства сечения* — это параметры сечения элемента (например: площадь, толщина, моменты инерции), которые необходимо задавать для элементов некоторых типов (например для элементов балочного типа или плоских элементов оболочки).

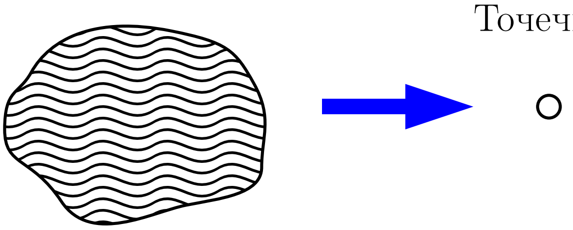

Рисунок 1.6 — Элемент — точечная масса

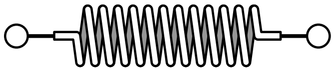

Рисунок 1.7 — Пружинный элемент

6. Основные типы КЭ

а) *Точечная масса* (см. рис. 1.6). Атрибуты: собственная размерность — 0D; 1 узел; геометрия — точка.
б) *Пружинный элемент* (см. рис. 1.7). Атрибуты: собственная размерность — 1D; 2 крайних узла; геометрия — отрезок. Используется для аппроксимации пружин при решении задач деформации под действием механической нагрузки.
в) *Стержневой элемент* (см. рис. 1.8). Атрибуты: собственная размерность — 1D; 2 крайних узла; геометрия — отрезок; в свойствах сечения задается площадь. Используется для аппроксимации стержней в конструкциях типа фермы при решении задач деформации (стержни работают только на растяжение и сжатие), теплопроводности и колебаний.
г) *Балка или труба* (см. рис. 1.9). Атрибуты: собственная размерность — 1D; 2 крайних узла; геометрия — отрезок; в свойствах сечения задаются форма, размеры и ориентация. Используются для дискретизации конструкций балочного типа при решении задач деформации (растяжение и сжатие, изгиб, кручение, сдвиг или срез), теплопроводности и колебаний.
д) Элементы для дискретизации плоских тел и оболочек (см. рис. 1.10). Атрибуты: собственная размерность — 2D. Используются при решении задач деформации, теплопроводности и колебаний плоских тел и оболочек, а также для моделирования двухмерного или осесимметричного

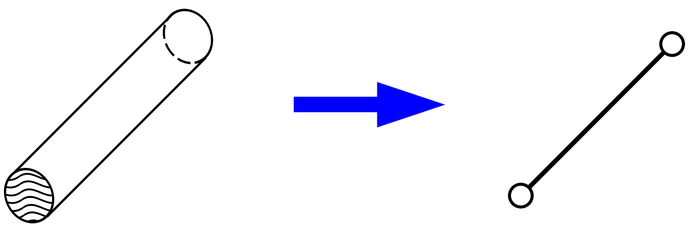

Рисунок 1.8 — Стержневой элемент

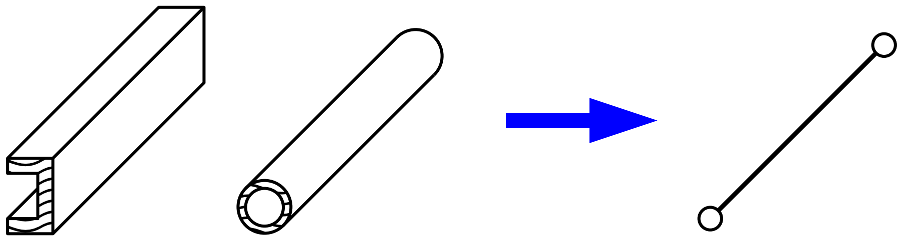

Рисунок 1.9 — Балочный элемент

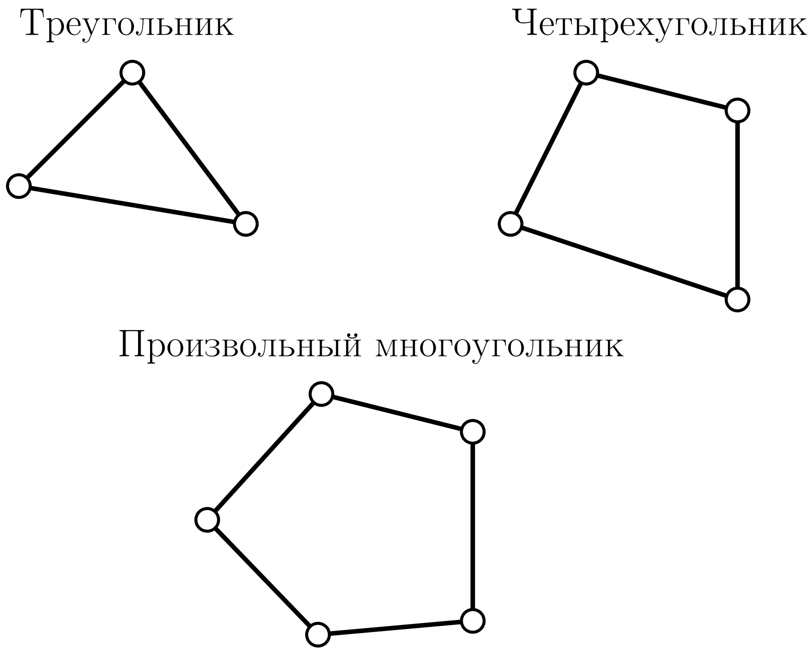

Рисунок 1.10 — Элементы для описания плоских тел и оболочек

течения жидкости или газа.

1) *Треугольник.* Атрибуты: 3 угловых узла.
2) *Четырехугольник.* Атрибуты: 4 угловых узла.
3) *Произвольный многоугольник.* Атрибуты: более 4 угловых узлов.

е) Элементы для дискретизации объемных тел (см. рис. 1.11). Атрибуты: собственная размерность — 3D. Используются при решении задач деформации, теплопроводности и колебаний объемных тел, а также для моделирования трехмерного течения жидкости и газа.

1) *Тетраэдр.* Атрибуты: 4 угловых узла.
2) *Пирамида.* Атрибуты: 5 угловых узлов.
3) *Призма или клин.* Атрибуты: 6 угловых узлов.
4) *Гексаэдр.* Атрибуты: 8 угловых узлов.
5) *Произвольный многогранник.* Атрибуты: более 8 угловых узлов.

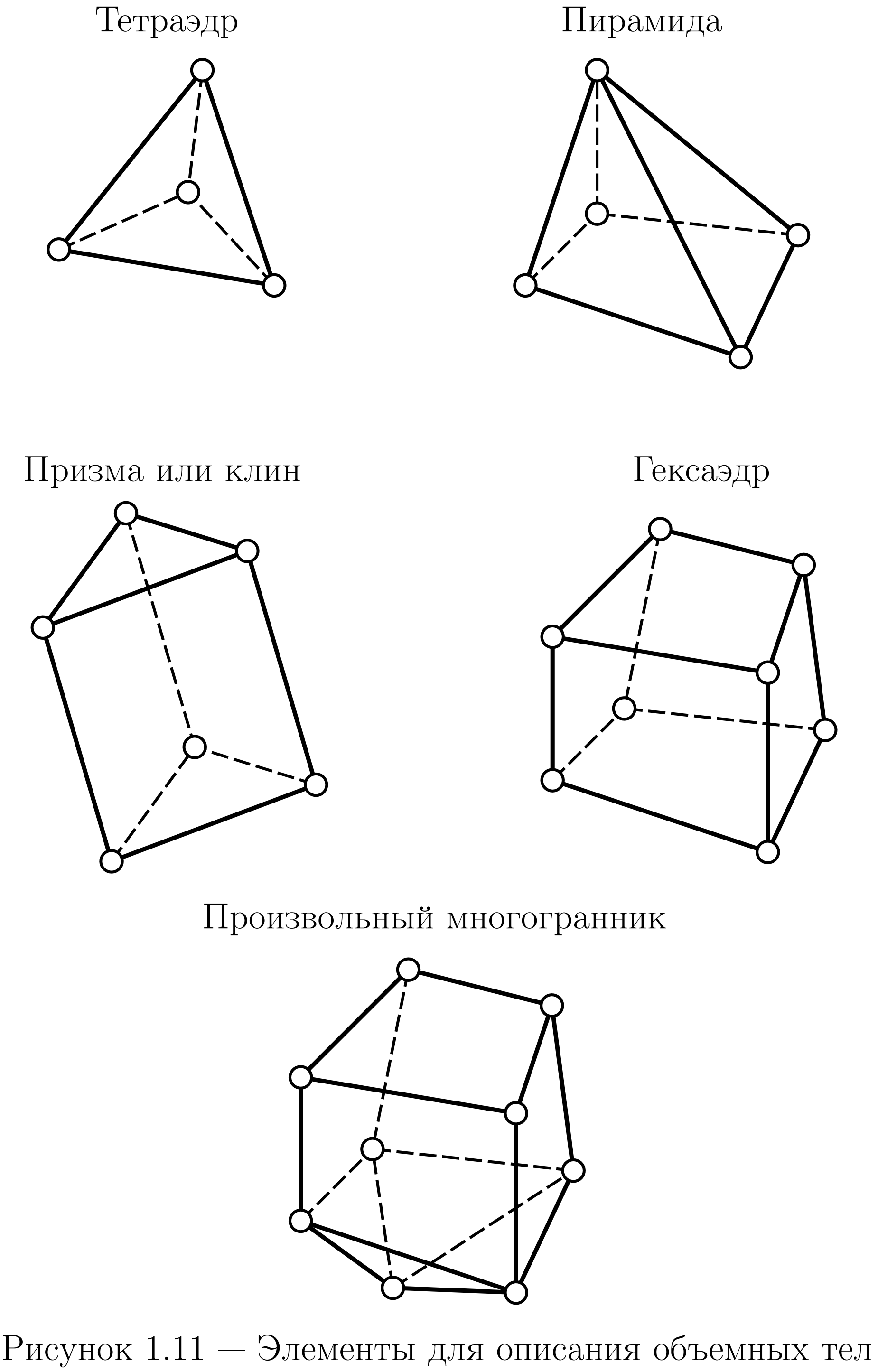

Рисунок 1.11 — Элементы для описания объемных тел

Лекция 2

Линейно упругая пружина как конечный элемент

План лекции

1. Закон Гука

Линейно упругая пружина — это механическое приспособление способное воспринимать только осевую нагрузку и спроектированное таким образом, что, в определенном рабочем диапазоне (имеется ввиду диапазон растяжения или сжатия из недеформированного состояния) подчиняется закону Гука.

Закон Гука для пружины — сила (F), необходимая для растяжения или сжатия пружины на некоторое расстояние (Δl), прямо пропорциональна этому расстоянию (см. рис. 2.1).

$$F = k \cdot \Delta l, \tag{2.1}$$

где k — коэффициент жесткости (или коэффициент упругости) пружины. Он показывает какую силу необходимо приложить, чтобы растянуть или сжать пружину на единицу длины. *Правило знаков:* сила F и расстояние Δl считаются положительными при растяжении пружины, и отрицательными при сжатии (см. рис. 2.1).

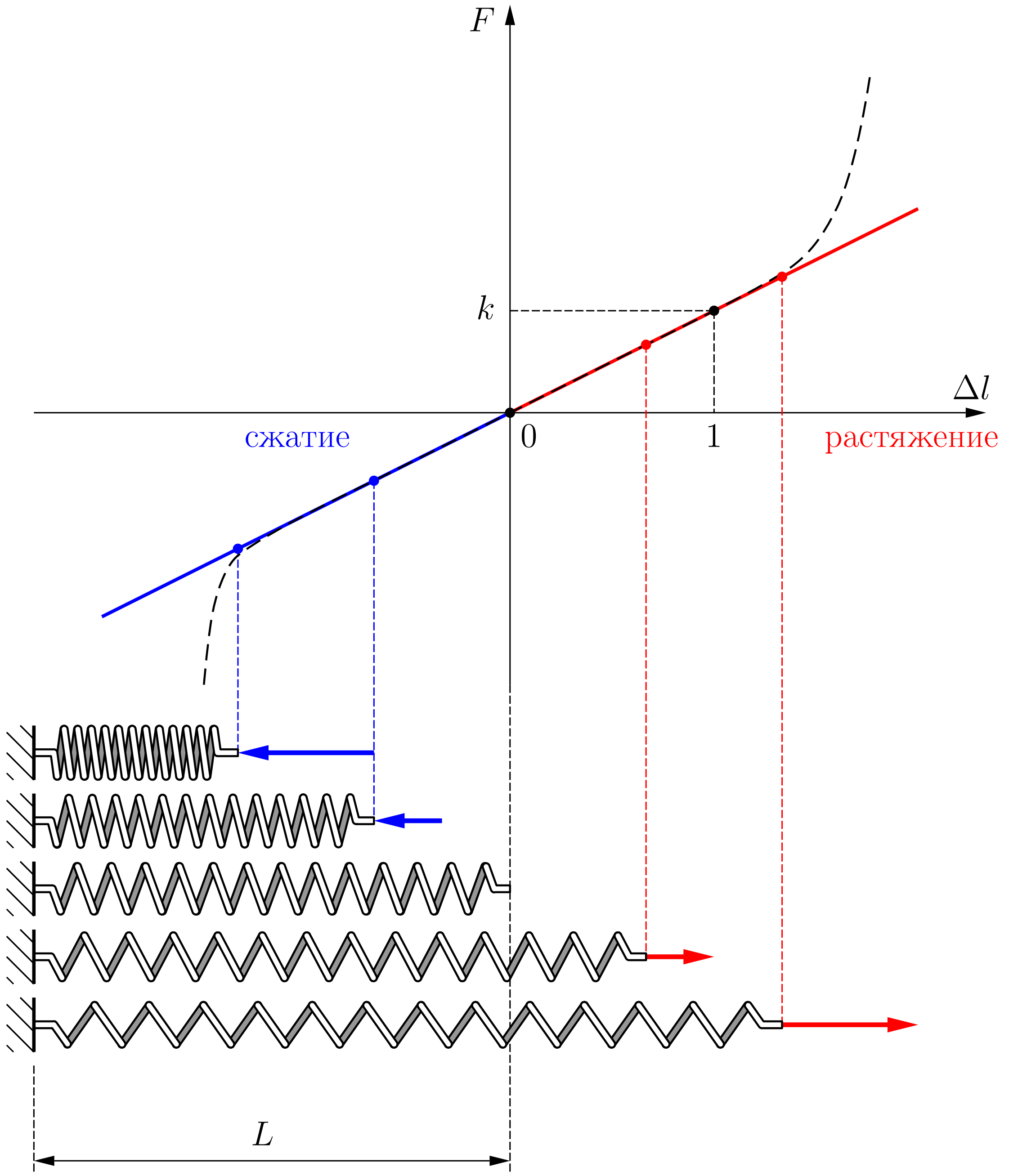

Рисунок 2.1 — Закон Гука для пружины

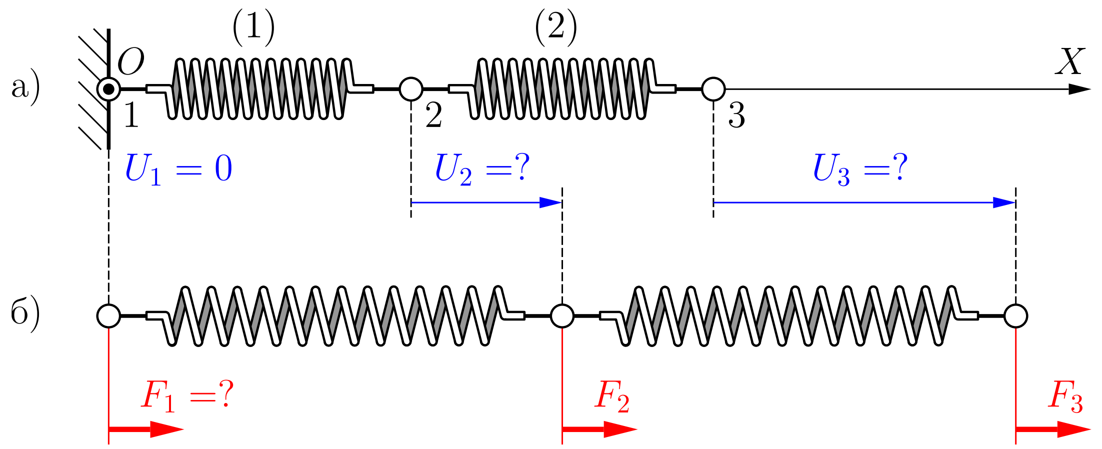

Рисунок 2.2 — Пружинная конструкция (а — до приложения нагрузки; б — после приложения нагрузки)

2. Одномерная пружинная конструкции

Рассмотрим конструкцию, состоящую из нескольких последовательно соединенных между собой пружин, расположенных вдоль одной оси (см. рис. 2.2). Крайние точки каждой пружины будем называть *узлами*. На конструкцию могут действовать внешние силы (F_i), но они должны быть приложены только в узлах и направлены только вдоль оси конструкции. Индекс i будет указывать на номер узла, в котором приложена данная сила. После приложения внешней нагрузки конструкция должна находится в состоянии покоя. При этом узлы переместятся в новое положение.

Глобальной системой координат будем называть общую для всей конструкции систему координат. Так как конструкция является одномерной, то глобальная система координат будет иметь одну ось OX, направленную вдоль оси конструкции. Перемещения узлов (U_i) по отношению к глобальной системе координат будем называть *глобальными*. Индекс i будет указывать на номер узла, соответствующего данному перемещению. Глобальные перемещения узлов определяют степени свободы конструкции, так как являются независимыми между собой параметрами, которые однозначно определяют положение конструкции в пространстве. Каждому глобальному перемещению узла можно сопоставить *глобальную силу* — это результирующая внешняя сила, которая приложена в этом же узле и действует вдоль этой же оси глобальной системы координат. Если на какой-либо узел не действует внешняя сила, то глобальная сила в данном узле считается равной нулю.

Расчет одномерной пружинной конструкции заключается в определении неизвестных глобальных сил и перемещений узлов конструкции. В качестве простого примера можно представить задачу, в которой один из крайних узлов конструкции неподвижно закреплен в опоре, то есть известно, что его перемещение равно нулю, а к другим узлам приложена заданная внешняя нагрузка (см. рис. 2.2). В такой задаче необходимо определить перемещения

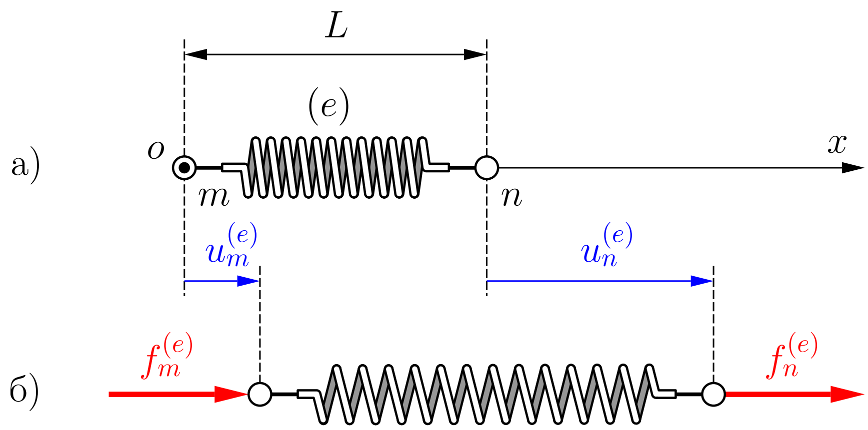

Рисунок 2.3 — Пружинный конечный элемент (а — до приложения нагрузки; б — после приложения нагрузки)

узлов (U_2 и U_3 на рис. 2.2) и реакцию опоры (глобальная сила F_1 на рис. 2.2), то есть силу, с которой опора удерживает конструкцию от движения под действием заданных внешних сил.

Правило знаков: если направление заданной внешней силы или заданного перемещения узла совпадает с положительным направлением оси OX, то их значение подставляется в решение со знаком "+", и наоборот. Неизвестные силы и перемещения узлов направляются в положительном направлении оси OX. Если в результате решения значение получится отрицательным, это будет означать, что найденные сила или перемещение направлены в противоположную сторону.

3. Пружинный конечный элемент

Для проведения расчета каждую пружину конструкции можно представить в виде конечного элемента, который назовем *пружинным конечным элементом* (см. рис. 2.3).

Атрибуты пружинного конечного элемента: собственная размерность — 1D; 2 крайних узла; геометрия — отрезок; степень свободы — в одномерной постановке 2 осевых перемещения узлов; определяющие соотношения — закон Гука.

Локальной системой координат (ox) будем называть систему координат связанную с элементом. Ее центр o обычно располагается в одном из узлов элемента, а ось x всегда направляется вдоль оси элемента. Таким образом, каждый элемент будет иметь свою локальную систему координат. Перемещения узлов ($u_m^{(e)}, u_n^{(e)}$) элемента по отношению к его локальной системе координат будем называть *локальными*. Локальные перемещения узлов определяют степени свободы элемента, так как являются независимыми между собой параметрами, которые однозначно определяют положение элемента в пространстве. *Локальными усилиями* ($f_m^{(e)}, f_n^{(e)}$) будем называть силы, приложенные в узлах элемента вдоль его оси, которые характеризуют воздействие остальной части конструкции или опоры на данный элемент. При решении задачи вместо верхнего индекса e будем записывать номер элемента, а вместо нижних индексов m и n — подставлять номера узлов.

Применим закон Гука для пружинного элемента:

$$f^{(e)} = k^{(e)} \cdot \Delta l^{(e)}, \tag{2.2}$$

где

а) $f^{(e)} = -f_m^{(e)} = f_n^{(e)}$. Согласно правилу знаков сила $f_m^{(e)}$ берется со знаком “$-$”, так как стремится сжать элемент, а сила $f_n^{(e)}$ — со знаком “$+$”, так как стремится растянуть элемент;

б) $k^{(e)}$ — коэффициент жесткости элемента, соответствующий коэффициенту жесткости пружины;

в) $\Delta l^{(e)} = u_n^{(e)} - u_m^{(e)}$. Согласно правилу знаков перемещение $u_m^{(e)}$ подставляется со знаком “$-$”, так как приводит к сжатию элемента, а перемещение $u_n^{(e)}$ — со знаком “$+$”, так как приводит к растяжению элемента.

Окончательно получим два уравнения, описывающие взаимосвязь локальных усилий и перемещений:

$$\begin{aligned} f_m^{(e)} &= -k^{(e)} \cdot (u_n^{(e)} - u_m^{(e)}); \\ f_n^{(e)} &= k^{(e)} \cdot (u_n^{(e)} - u_m^{(e)}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Данные уравнения называются *уравнениями равновесия пружинного элемента*. Для перехода к матричной форме записи перепишем уравнения 2.3 в виде

$$\begin{aligned} f_m^{(e)} &= k^{(e)} \cdot u_m^{(e)} - k^{(e)} \cdot u_n^{(e)}; \\ f_n^{(e)} &= -k^{(e)} \cdot u_m^{(e)} + k^{(e)} \cdot u_n^{(e)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

В матричной форме данные уравнения примут вид

$$\begin{Bmatrix} f_m^{(e)} \\ f_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_m^{(e)} \\ u_n^{(e)} \end{Bmatrix}, \tag{2.5}$$

или в сокращенной форме записи

$$\left\{ f^{(e)} \right\} = \left[k^{(e)} \right] \cdot \left\{ u^{(e)} \right\}, \tag{2.6}$$

где

а) $\left\{ f^{(e)} \right\}$ — вектор-столбец локальных усилий в узлах элемента;

б) $\left[k^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix}$ — матрица жесткости элемента в локальной системе координат;

в) $\left\{ u^{(e)} \right\}$ — вектор-столбец локальных перемещений узлов элемента.

Матрица жесткости является квадратной матрицей с размерностью 2×2. Размерность матрицы жесткости любого элемента всегда соответствует количеству степеней свободы этого элемента. Матрица жесткости является симметричной, то есть $k_{ij}^{(e)} = k_{ji}^{(e)}$. Это указывает на то, что локальные перемещения могут быть выражены друг через друга на основании одного и того же физического явления (величина удлинения или укорочения пружины не зависит от того, какой из узлов будет закреплен, а к какому будет приложена растягивающая или сжимающая сила).

Если в уравнении 2.6 локальные силы являются известными, то формальное решение данного уравнения относительно локальных перемещений будет иметь вид

$$\left\{u^{(e)}\right\} = \left[k^{(e)}\right]^{-1} \cdot \left\{f^{(e)}\right\}, \tag{2.7}$$

где $\left[k^{(e)}\right]^{-1}$ является обратной матрицей жесткости элемента. Однако такая матрица не существует, так как матрица жесткости элемента является вырожденной (сингулярной), то есть ее определитель равен нулю. Это означает, что не имея дополнительной информации индивидуальные перемещения узлов элемента определить невозможно. Можно определить лишь разницу этих перемещений, представляющую из себя удлинение или укорочение элемента. Таким образом, перемещения узлов можно определить только в том случае, если одно из них задано.

Лекция 3

Расчет одномерной пружинной конструкции

План лекции

1. Постановка задачи

В данной лекции на конкретном примере будут рассмотрены этапы расчета одномерной пружинной конструкции.

Рассмотрим пружинную конструкцию (см. рис. 3.1), состоящую из двух пружин с коэффициентами жесткости $k^{(1)} = 80$ (Н/м) и $k^{(2)} = 100$ (Н/м). Первым узлом конструкция прикреплена к неподвижному основанию. В узлах 2 и 3 на конструкцию начинают действовать две внешние силы $F_2 = 10$ (Н) и $F_3 = 10$ (Н). Необходимо определить на какие расстояния после установления состояния покоя переместятся узлы конструкции (глобальные перемещения U_2 и U_3), а также определить реакцию опоры в первом узле (сила F_1, уравновешивающая приложенную нагрузку).

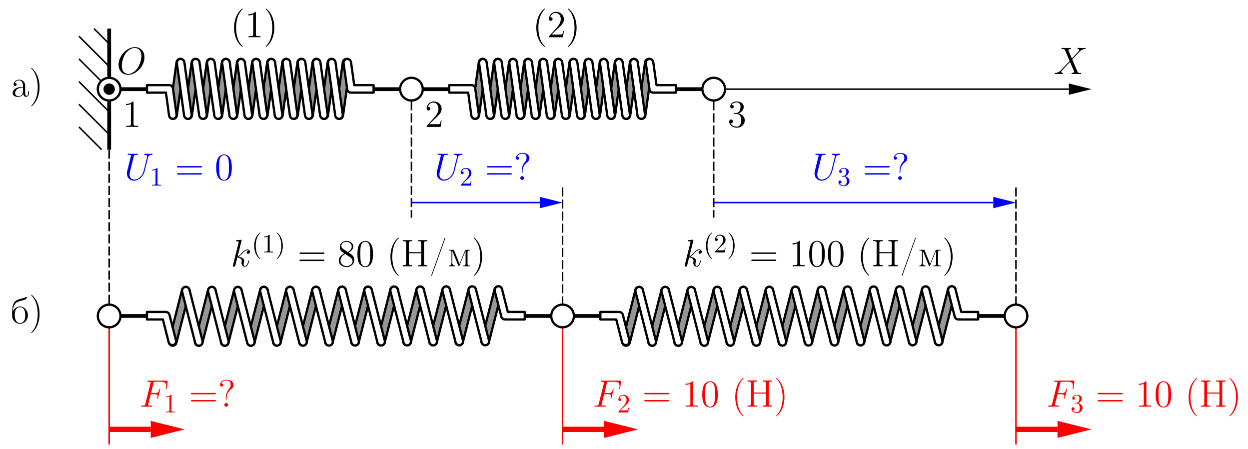

Рисунок 3.1 — Условие задачи (а — конструкция до приложения нагрузки; б — конструкция после приложения нагрузки)

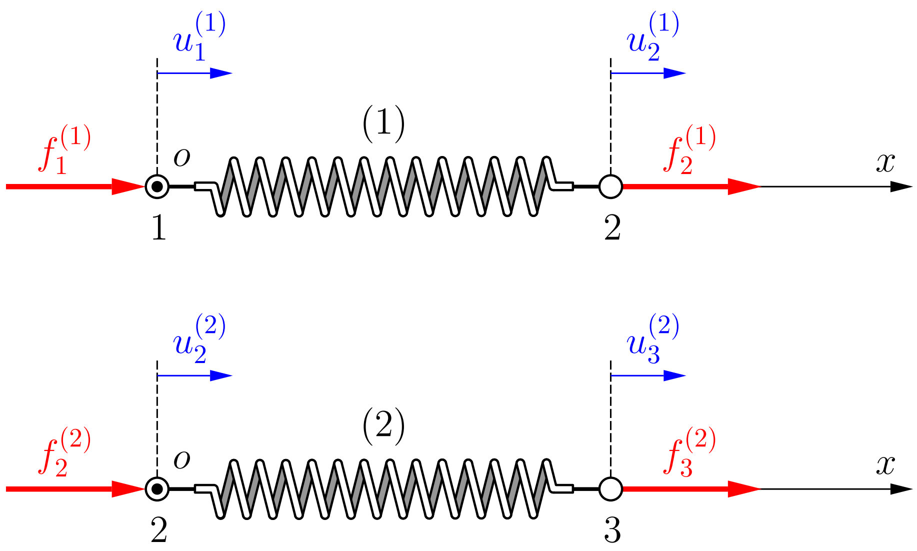

Рисунок 3.2 — Пружинные элементы

2. Составление уравнений равновесия элементов

Каждую пружину конструкции можно представить в виде одного пружинного элемента и согласно закону Гука составить для него уравнения равновесия.

Рассмотрим все пружинные элементы по отдельности. Покажем для них локальные усилия и перемещения (см. рис. 3.2). Для каждого элемента составим уравнения равновесия в матричной форме.

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{3.1a}$$

$$\begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{3.1b}$$

3. Замена локальных перемещений глобальными

Выразим локальные перемещения через глобальные

$$u_1^{(1)} = U_1 \qquad u_2^{(1)} = U_2 \qquad u_2^{(2)} = U_2 \qquad u_3^{(2)} = U_3 \tag{3.2}$$

Уравнения равновесия элементов примут вид

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \tag{3.3a}$$

$$\begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \tag{3.3b}$$

4. Сборка уравнений равновесия элементов

Для того чтобы собрать уравнения равновесия элементов в одну систему их матричную форму необходимо расширить.

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.4a}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \tag{3.4b}$$

Сложим между собой полученные уравнения.

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

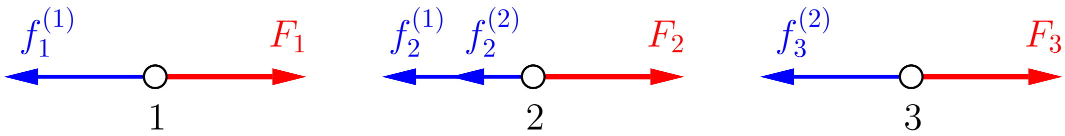

Рисунок 3.3 — Силы, действующие на узлы конструкции

5. Составление уравнений равновесия узлов

Так как вся конструкция находится в равновесии, то и каждый узел этой конструкции тоже находится в равновесии. Это означает, что все силы, действующие на отдельный узел конструкции, должны уравновесить друг друга.

На каждый узел конструкции действует внешняя сила и внутреннее усилие со стороны пружин, прикрепленных к данному узлу (см. рис. 3.3).

Каждая внешняя сила должна уравновесится внутренними усилиями со стороны пружин. Силы действующие на узлы со стороны пружин равны по модулю локальным усилиям соответствующих пружинных элементов и направлены в противоположные стороны.

$$f_1^{(1)} = F_1 \qquad f_2^{(1)} + f_2^{(2)} = F_2 \qquad f_3^{(2)} = F_3 \tag{3.6}$$

Учитывая полученные соотношения уравнение 3.5 примет вид

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

6. Подстановка данных

Подставим в полученное уравнение известные значения.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ 10 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & -80 & 0 \\ -80 & 180 & -100 \\ 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

Здесь $U_1 = 0$, так как первый узел закреплен в неподвижной опоре, а значит не будет перемещаться под действием внешней нагрузки.

7. Исключение уравнений связей

Исключим уравнения связей из полученной системы уравнений

$$F_1 = -80 \cdot U_2 \tag{3.9}$$

Оставшаяся система уравнений в матричной форме примет вид

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

8. Решение системы уравнений

Решим полученную систему уравнений.

$$\begin{cases} 10 = 180 \cdot U_2 - 100 \cdot U_3 \\ 10 = -100 \cdot U_2 + 100 \cdot U_3 \end{cases} \tag{3.11}$$

Сложив почленно левую и правую части уравнений получим

$$20 = 80 \cdot U_2,$$

откуда

$$U_2 = 20/80 = 0.25 \text{ (м)}.$$

Тогда

$$U_3 = \frac{10 + 100 \cdot U_2}{100} = \frac{10 + 100 \cdot 0.25}{100} = 0.35 \text{ (м)}.$$

9. Решение уравнений связей

Подставляя найденное значение перемещения U_2 в уравнение связи 3.9 найдем реакцию опоры

$$F_1 = -80 \cdot U_2 = -80 \cdot 0.25 = -20 \text{ (Н)}.$$

Знак “$-$” означает, что сила F_1 действует в противоположную сторону от принятого направления, то есть в сторону отрицательного направления оси OX.

10. Проверка

Для проверки решения убедимся, что согласно условию равновесия сумма всех внешних сил, действующих на конструкцию, равна нулю

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0,$$
$$-20 + 10 + 10 = 0,$$
$$0 = 0 \text{ (верно)}.$$

Лекция 4

Теория стержневого конечного элемента

План лекции

1. Закон Гука

Под стержнем будем понимать однородное тело, вытянутое вдоль некоторой прямолинейной оси (см. рис. 4.1). Длина стержня (L) должна существенно (на порядок) превышать его поперечные размеры. Поперечное сечение может иметь произвольную форму, постоянную по длине стержня, и характеризуется площадью (S). Стержень может воспринимать только осевую нагрузку.

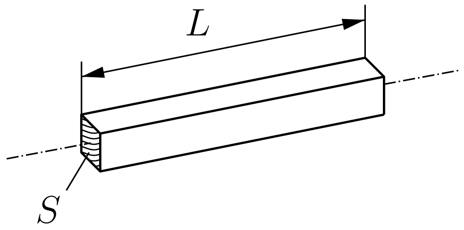

Рисунок 4.1 — Стержень

Закон Гука для стержня — сила (F), необходимая для растяжения или сжатия стержня в пределах упругих деформаций на некоторое расстояние (Δl), прямо пропорциональна этому расстоянию.

$$F = k \cdot \Delta l, \tag{4.1}$$

где k — коэффициент упругости (или коэффициент жесткости) стержня. Он показывает какую силу необходимо приложить, чтобы растянуть или сжать стержень на единицу длины. *Правило знаков:* сила F и расстояние Δl считаются положительными при растяжении стержня, и отрицательными при сжатии.

Коэффициент упругости зависит как от свойств материала, так и от размеров стержня. Если известны площадь поперечного сечения (S) и длина стержня (L), то коэффициент упругости можно определить по формуле

$$k = \frac{E \cdot S}{L}, \tag{4.2}$$

где E — модуль упругости первого рода (модуль Юнга), который характеризует свойство материала сопротивляться растяжению или сжатию при упругой деформации.

С учетом формулы 4.2 закон Гука примет вид

$$F = \frac{E \cdot S}{L} \cdot \Delta l. \tag{4.3}$$

2. Двухмерная ферма

Рассмотрим двухмерную конструкцию, состоящую из стержней, соединенных с опорами и между собой в крайних точках шарнирами (см. рис. 4.2). Будем называть такую конструкцию *двухмерной фермой.* Крайние точки каждого стержня (места расположения шарниров) будем называть *узлами.* На конструкцию могут действовать внешние силы ($\vec{P_k}$), но они должны быть приложены только в узлах конструкции. Индекс k будет указывать на порядковый номер заданной силы. После приложения внешней нагрузки конструкция должна находится в состоянии покоя. При этом узлы переместятся в новое положение.

Глобальной системой координат будем называть общую для всей конструкции систему координат. Так как конструкция является двухмерной, то глобальная система координат будет иметь две оси OX и OY. Перемещения узлов по отношению к глобальной системе координат будем называть *глобальными.* Глобальные перемещения вдоль осей OX и OY будем обозначать U_i и V_i соответственно, где индекс i будет указывать на номер узла конструкции (см. рис. 4.3).

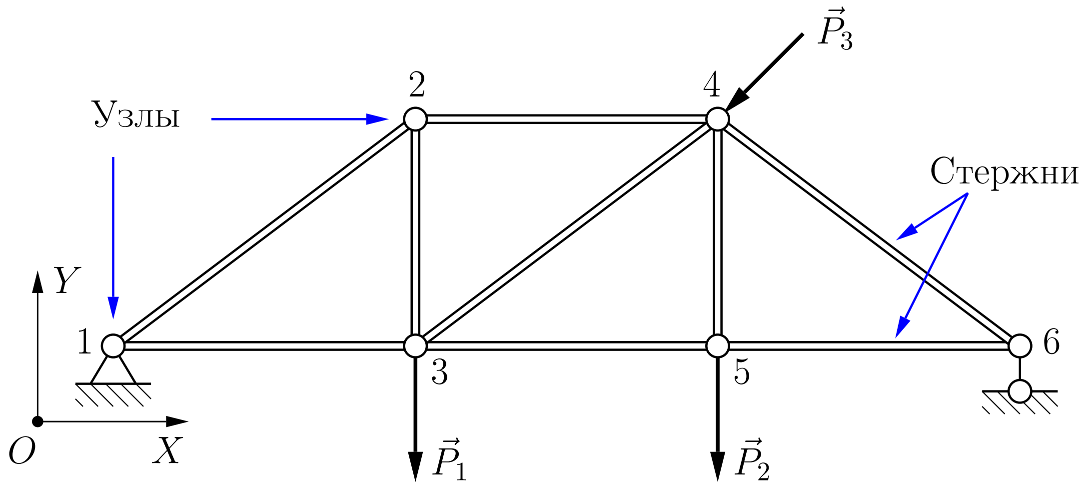

Рисунок 4.2 — Двухмерная конструкция типа фермы

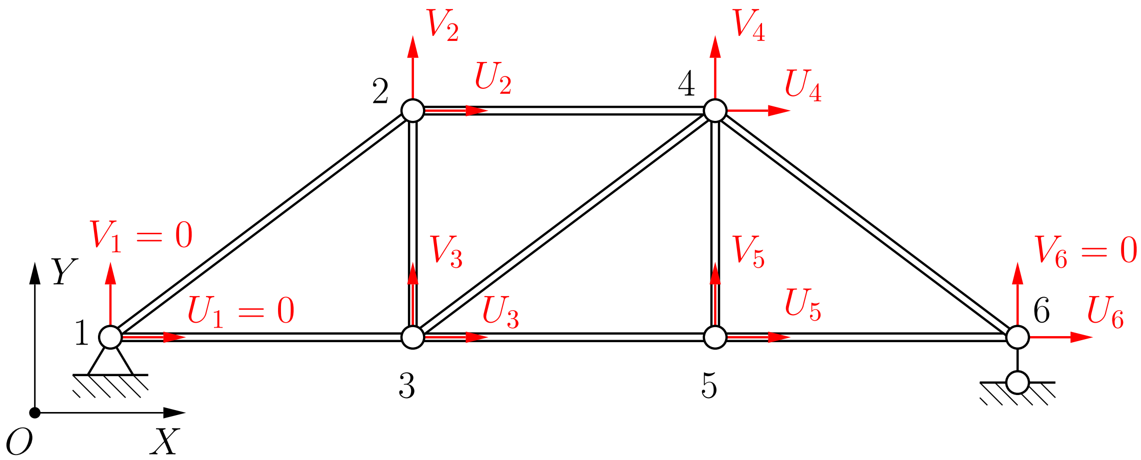

Рисунок 4.3 — Глобальные перемещения

Глобальные перемещения узлов определяют степени свободы конструкции, так как являются независимыми между собой параметрами, которые однозначно определяют положение конструкции в пространстве. На перемещения некоторых узлов могут накладываться ограничения (например, в опорных узлах в зависимости от вида опоры все или некоторые перемещения задаются равными нулю). В таком случае, число степеней свободы фермы уменьшается (см. рис. 4.3).

Каждому глобальному перемещению узла можно сопоставить *глобальную силу* — это проекция результирующей внешней силы, которая приложена в этом же узле, на соответствующую данному перемещению ось глобальной системы координат. Глобальные силы вдоль осей OX и OY будем обозначать F_{Ui} и F_{Vi} соответственно, где индекс i будет указывать на номер узла конструкции (см. рис. 4.4).

Расчет фермы заключается в определении неизвестных глобальных сил и перемещений узлов конструкции. После этого дополнительно определяются внутренние усилия, напряжения и деформации стержней.

Правило знаков: если направление известной глобальной силы или задан-

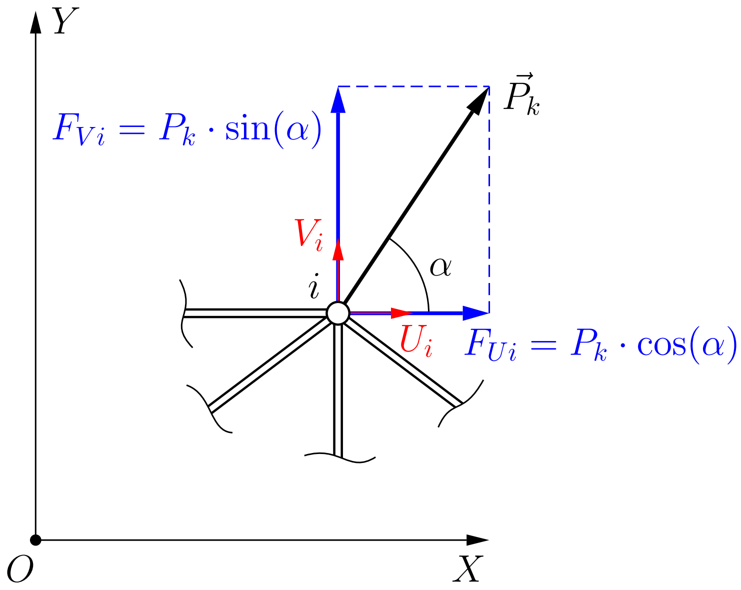

Рисунок 4.4 — Глобальные силы

ного глобального перемещения узла совпадает с положительным направлением соответствующей глобальной оси, то их значение подставляется в решение со знаком "+", и наоборот. Неизвестные глобальные силы и перемещения узлов направляются в положительном направлении соответствующей глобальной оси. Если в результате решения значение получится отрицательным, это будет означать, что найденные сила или перемещение направлены в противоположную сторону.

Ограничения и допущения при расчете фермы:

- внешняя нагрузка задается только в виде сосредоточенных сил, приложенных в узлах фермы;
- шарниры предполагаются идеальными, то есть силами трения в шарнирах пренебрегают;
- стержни работают только на растяжение и сжатие, то есть изгибом и кручением стержней пренебрегают;
- стержни являются идеально упругими;
- деформация стержней мала (на несколько порядков) по сравнению с их длиной и линейно зависит от внешней нагрузки;
- материал стержня является однородным, то есть свойства материала одинаковы по всей длине стержня;
- форма поперечного сечения стержня постоянна по всей его длине.

3. Стержневой конечный элемент

Для проведения расчета каждый стержень фермы можно представить в виде конечного элемента, который назовем *стержневым конечным элементом* (см. рис. 4.5).

Атрибуты стержневого конечного элемента: собственная размерность —

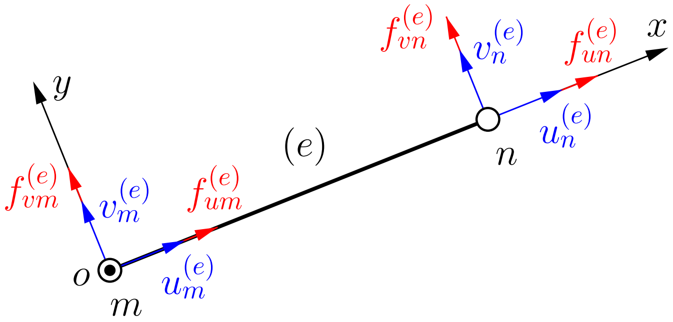

Рисунок 4.5 — Стержневой конечный элемент

1D; 2 крайних узла; геометрия — отрезок; степень свободы — в двухмерной постановке 4 перемещения двух узлов вдоль осей координат; определяющие соотношения — закон Гука.

Локальной системой координат (ox) будем называть систему координат связанную с элементом. Ее центр o обычно располагается в одном из узлов элемента, а ось x всегда направляется вдоль оси элемента. Таким образом, каждый элемент будет иметь свою локальную систему координат.

Перемещения узлов элемента по отношению к его локальной системе координат будем называть *локальными*. Локальные перемещения узлов элемента вдоль оси ox будем обозначать $u_m^{(e)}$ и $u_n^{(e)}$. Аналогично, локальные перемещения вдоль оси oy будем обозначать $v_m^{(e)}$ и $v_n^{(e)}$. Локальные перемещения узлов определяют степени свободы элемента, так как являются независимыми между собой параметрами, которые однозначно определяют положение элемента в пространстве. Таким образом в двухмерной задаче каждый стержневой элемент имеет 4 степени свободы.

При решении задачи вместо верхнего индекса e будем записывать номер элемента, а вместо нижних индексов m и n — подставлять номера узлов.

Каждому локальному перемещению можно сопоставить локальное усилие. *Локальными усилиями* будем называть силы, приложенные в узлах элемента и направленные вдоль осей локальной системы координат, которые характеризуют воздействие остальной части конструкции или опоры на данный элемент. Локальные усилия вдоль оси ox будем обозначать $f_{um}^{(e)}$ и $f_{un}^{(e)}$. Аналогично, локальные усилия вдоль оси oy будем обозначать $f_{vm}^{(e)}$ и $f_{vn}^{(e)}$.

Так как конструкция после приложения нагрузки находится в состоянии покоя, то каждый ее стержень также должен находиться в состоянии покоя. Следовательно, локальные усилия, действующие на стержневой элемент, должны быть уравновешены друг другом.

Составим уравнения равновесия для стержневого элемента:

- сумма проекций всех сил на ось ox должна равняться нулю

$$\sum F_{ix} = 0 : f_{um}^{(e)} + f_{un}^{(e)} = 0 \quad => \quad f_{um}^{(e)} = -f_{un}^{(e)}.$$

- сумма проекций всех сил на ось oy должна равняться нулю

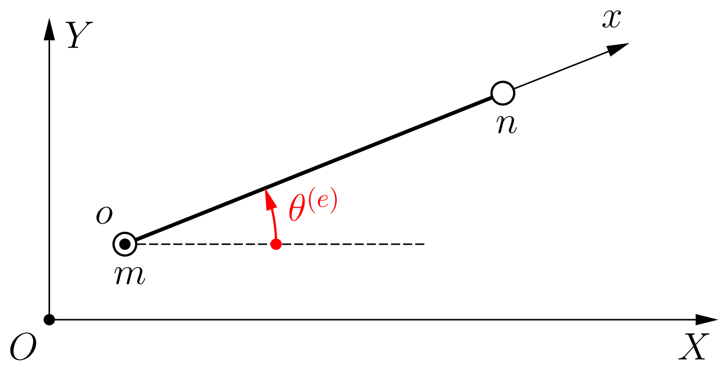

Рисунок 4.6 — Угол $\theta^{(e)}$ для преобразования перемещений

$$\sum F_{iy} = 0 : f_{vm}^{(e)} + f_{vn}^{(e)} = 0 \quad => \quad f_{vm}^{(e)} = -f_{vn}^{(e)}.$$

- сумма алгебраических моментов всех сил относительно произвольной точки (возьмем точку o) должна равняться нулю (L — длина элемента)

$$\sum M_o(F_i) = 0 : f_{vn}^{(e)} \cdot L = 0 \quad => \quad f_{vn}^{(e)} = 0; \;\; f_{vm}^{(e)} = 0.$$

Таким образом на стержневой конечный элемент действуют только два локальных усилия, одинаковых по модулю и направленных вдоль оси элемента (ось ox) в противоположные стороны.

4. Преобразование перемещений

При выполнении расчета иногда удобно переходить из локальной системы координат в глобальную и наоборот. В двухмерном случае для этого вводится угол $\theta^{(e)}$, который откладывается от положительного направлениями оси X глобальной системы координат до положительного направления оси x локальной системы координат против хода часовой стрелки (см. рис. 4.6). На рисунках 4.7 и 4.8 показаны преобразования перемещений одного из узлов элемента из глобальных в локальные. Аналогичным образом преобразуются перемещения другого узла элемента.

Таким образом, в двухмерном случае локальные перемещения двух узлов элемента можно выразить через глобальные по формулам

$$\begin{cases} u_m^{(e)} = U_m \cdot \cos\theta^{(e)} + V_m \cdot \sin\theta^{(e)} \\ v_m^{(e)} = -U_m \cdot \sin\theta^{(e)} + V_m \cdot \cos\theta^{(e)} \\ u_n^{(e)} = U_n \cdot \cos\theta^{(e)} + V_n \cdot \sin\theta^{(e)} \\ v_n^{(e)} = -U_n \cdot \sin\theta^{(e)} + V_n \cdot \cos\theta^{(e)} \end{cases} \tag{4.4}$$

Данную систему уравнений можно представить в матричной форме следующим образом

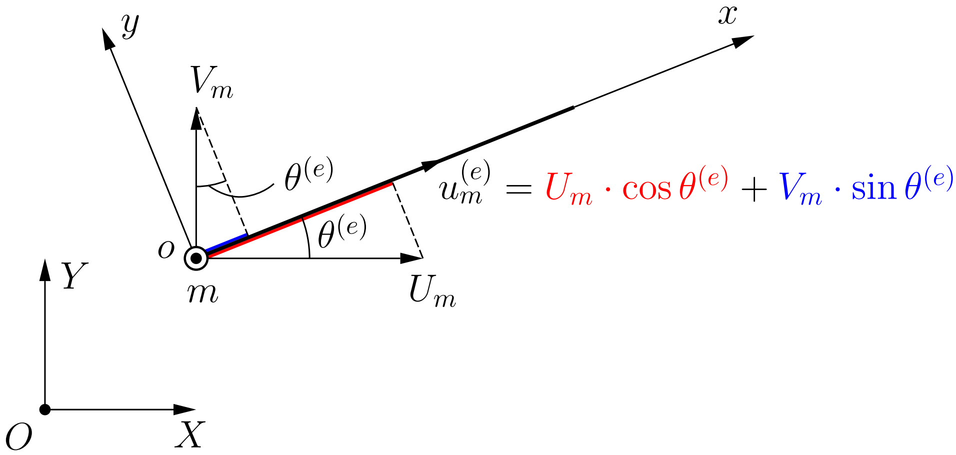

Рисунок 4.7 — Выражение локального перемещения $u_m^{(e)}$ через глобальные перемещения узла m

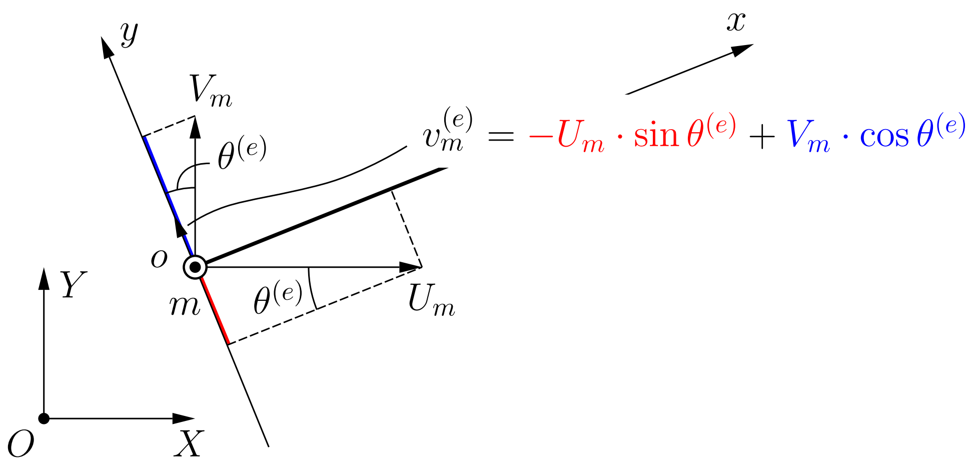

Рисунок 4.8 — Выражение локального перемещения $v_m^{(e)}$ через глобальные перемещения узла m

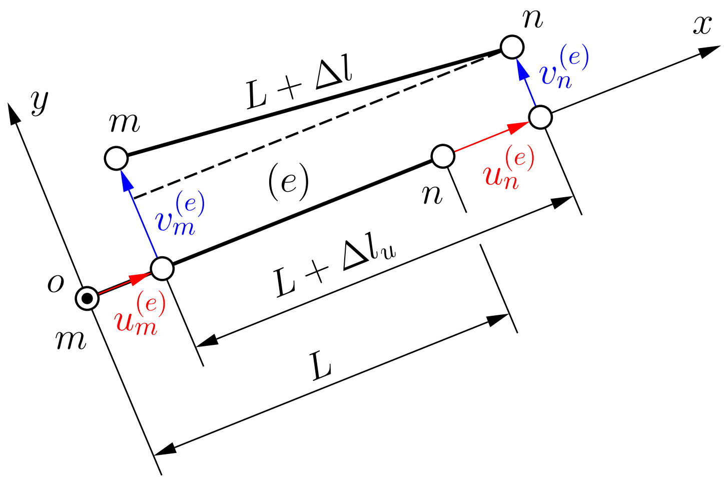

Рисунок 4.9 — Изменение длины стержневого КЭ при перемещении его узлов

$$\begin{Bmatrix} u_m^{(e)} \\ v_m^{(e)} \\ u_n^{(e)} \\ v_n^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta^{(e)} & \sin\theta^{(e)} & 0 & 0 \\ -\sin\theta^{(e)} & \cos\theta^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta^{(e)} & \sin\theta^{(e)} \\ 0 & 0 & -\sin\theta^{(e)} & \cos\theta^{(e)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_m \\ V_m \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}, \qquad (4.5)$$

или в сокращенной форме записи

$$\{q\} = [R] \cdot \{Q\}, \qquad (4.6)$$

где $\{q\}$ — вектор-столбец локальных перемещений узлов элемента; $[R]$ — матрица преобразования перемещений из глобальных в локальные; $\{Q\}$ — вектор-столбец глобальных перемещений узлов элемента.

Тогда для перехода от локальных переменных к глобальным, можно воспользоваться формулой

$$\{Q\} = [R]^{-1} \cdot \{q\}, \qquad (4.7)$$

где $[R]^{-1}$ — обратная матрица преобразования перемещений.

5. Связь между перемещениями узлов и абсолютной деформацией стержня

При перемещении узлов элемента его длина может изменяться (см. рис. 4.9).

Величину абсолютной деформации (удлинения/укорочения) стержня за счет осевого перемещения узлов можно выразить по формуле

$$\Delta l_u = u_n^{(e)} - u_m^{(e)} \qquad (4.8)$$

Однако величина Δl_u может отличаться от итогового удлинения/укорочения стержня Δl за счет перемещения узлов в поперечном направлении (см. рис. 4.9).

Итоговую длину стержня после деформации можно выразить как гипотенузу через два катета воспользовавшись теоремой Пифагора.

$$L + \Delta l = \sqrt{(L + \Delta l_u)^2 + \left(v_m^{(e)} - v_n^{(e)}\right)^2}. \tag{4.9}$$

Так как величина абсолютной деформации на порядки меньше длины стержня, то

$$\left(v_m^{(e)} - v_n^{(e)}\right)^2 \ll (L + \Delta l_u)^2 .$$

Поэтому членом $\left(v_m^{(e)} - v_n^{(e)}\right)^2$ в уравнении 4.9 можно пренебречь. Тогда итоговая длина стержня получится равной длине стержня после деформации только в осевом направлении

$$L + \Delta l = \sqrt{(L + \Delta l_u)^2} = L + \Delta l_u,$$

откуда

$$\Delta l = \Delta l_u = u_n^{(e)} - u_m^{(e)} \tag{4.10}$$

6. Матрица жесткости стержневого КЭ

Применим закон Гука для стержневого конечного элемента:

$$f^{(e)} = k^{(e)} \cdot \Delta l^{(e)}, \tag{4.11}$$

где $f^{(e)}$ — сжимающее или растягивающее усилие, действующее на элемент; $k^{(e)} = \dfrac{S^{(e)} \cdot E^{(e)}}{L^{(e)}}$ — коэффициент упругости элемента ($S^{(e)}$ — площадь поперечного сечения элемента, $E^{(e)}$ — модуль упругости элемента, $L^{(e)}$ — длина элемента); $\Delta l^{(e)}$ — абсолютная деформация элемента.

Как было отмечено ранее, на стержневой элемент действуют два локальных усилия, одинаковых по модулю и направленных вдоль оси элемента (ось ox) в противоположные стороны. Поэтому

$$f^{(e)} = -f_{um}^{(e)} = f_{un}^{(e)}.$$

Согласно правилу знаков сила $f_{um}^{(e)}$ берется со знаком “$-$”, так как стремится сжать элемент, а сила $f_{un}^{(e)}$ — со знаком “$+$”, так как стремится растянуть элемент (см. рис. 4.5).

Согласно формулы 4.10 абсолютная деформация стержневого элемента равна

$$\Delta l = u_n^{(e)} - u_m^{(e)}$$

Учитывая вышесказанное, получим два уравнения, описывающие взаимосвязь локальных усилий и перемещений:

$$\begin{aligned} f_{um}^{(e)} &= -k^{(e)} \cdot (u_n^{(e)} - u_m^{(e)}); \\ f_{un}^{(e)} &= \quad k^{(e)} \cdot (u_n^{(e)} - u_m^{(e)}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Данные уравнения являются *уравнениями равновесия стержневого конечного элемента.* В матричной форме уравнения примут вид

$$\begin{Bmatrix} f_{um}^{(e)} \\ f_{un}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_m^{(e)} \\ u_n^{(e)} \end{Bmatrix},$$

или

$$\begin{Bmatrix} f_{um}^{(e)} \\ f_{un}^{(e)} \end{Bmatrix} = k^{(e)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_m^{(e)} \\ u_n^{(e)} \end{Bmatrix}, \tag{4.13}$$

или в сокращенной форме записи

$$\left\{ f_u^{(e)} \right\} = \left[k^{(e)} \right] \cdot \left\{ u^{(e)} \right\}, \tag{4.14}$$

где

а) $\left\{ f^{(e)_u} \right\}$ — вектор-столбец локальных осевых усилий в узлах элемента;

б) $\left[k^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix} = k^{(e)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ — матрица жесткости элемента в локальной системе координат;

в) $\left\{ u^{(e)} \right\}$ — вектор-столбец локальных осевых перемещений узлов элемента.