

С.В. Филипковский

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по спецкурсу
«ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБЛОЧЕК»

ХНАДУ 2016

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. Параметры оболочки

h - толщина оболочки;

E, ν, α_0 - модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения материала оболочки;

$$c_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$d_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - тангенциальная (при сжатии) и цилиндрическая (при изгибе)

жесткости оболочки;

$$c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \text{ - параметр.}$$

2. Обозначения величин, используемых при записи разрешающих уравнений в координатах, связанных с линиями главной кривизны

$\alpha_1, \alpha_2, \zeta$ - криволинейные координаты точек оболочки

e_1, e_2, n - единичные векторы, связанные с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \zeta$

R_1, R_2 - радиусы нормальной кривизны срединной поверхности вдоль линий α_1, α_2

A_1, A_2 - параметры Ляме, связанные с координатами

p_1, p_2, p_n - составляющие удельной поверхностной нагрузки в пересчете на срединную поверхность оболочки

a_1, a_2, w - смещения точки срединной поверхности и направления ортов (соответственно)

$\vartheta_2, \vartheta_1 w_n$ - углы поворота элемента вокруг ортов (соответственно)

\dot{a}_1, \dot{a}_2, w - относительные удлинения и сдвиг волокон, связанных с линиями

\dot{A}_1, \dot{A}_2, w - параметры изменения кривизны и скручивания элемента

\dot{O}_1, \dot{O}_2, S - нормальное и симметричное сдвигающее усилия

M_1, M_2, H - изгибающие и симметричный скручивающий момент

$\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{S}$ - комплексные усилия

u_1, n_2, w - комплексные смещения

$T = T_1 + T_2$ - комплексная функция В.В. Новожилова

3. Обозначения величин, используемых при записи разрешающих уравнений в ортогональных координатах, не связанных с линиями главной кривизны

α, β, ζ - криволинейные координаты

$\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta, n$ - единичные векторы, связанные с координатами

$R_\alpha, R_\beta, R_{\alpha\beta}$ - радиусы нормальной кривизны и кручения срединной поверхности вдоль линий

A, B - параметры Ляме, связанные с координатами

p_α, p_β, p_n - составляющие удельной поверхности нагрузки

u, v, w - смещение точек срединной поверхности в направлении ортов

$-\vartheta_\beta, \vartheta_\alpha, w_n$ - функции напряжения соответствующие смещениям

$\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta, w$ - углы поворота элемента вокруг ортов

-

T_α, T_β, S - нормальное и симметричное сдвигающиеся усилия

M_α, M_β, H - изгибающие и симметричный скручивающий моменты

4. Обозначения величин, используемых при формулировке граничных условий для края

s_t - текущая координата, связанная с граничным контуром

v, t, n - правая тройка ортов, связанная с граничным контуром

γ - угол между ортами

σ_t, ρ_t, τ_t - нормальная кривизна, геодезическая кривизна и геодезическое кручение граничного контура

Лекция 1.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Криволинейные координаты, связанные с поверхностью. Всякая поверхность плавной формы в декартовой системе координат может быть задана тремя координатами:

$$x = x(\alpha, \beta); \quad y = y(\alpha, \beta); \quad z = z(\alpha, \beta) \quad (1.1)$$

где $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ — непрерывные, с нужным числом производных, функции параметров α и β .

Ограничим область изменения этих параметров так, чтобы каждой точке поверхности отвечала одна, вполне определенная пара значений (α, β) . Тогда параметры α и β могут быть названы *криволинейными координатами* рассматриваемой поверхности.

Придавая в (1.1) параметру β ряд постоянных значений и меняя при этом α , получим семейство кривых, которое назовем координатными линиями α (или α -линиями). Аналогично можно получить β -линии.

Следовательно, всякая точка поверхности может рассматриваться как пересечение некоторых α -линии и β -линии (рис. 1).

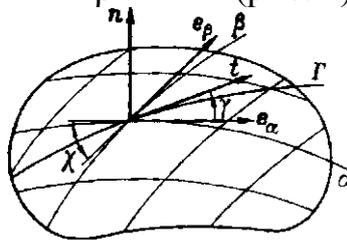


Рис. 1

Три скалярных уравнения (1.1) можно заменить одним векторным

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta) \quad (1.2)$$

Векторы $\partial \vec{r} / \partial \alpha$, $\partial \vec{r} / \partial \beta$ направлены вдоль касательных соответственно к α - и β -линиям. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2} \\ B &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

получим для единичных векторов, касательных к координатным линиям, следующие формулы:

$$e_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \qquad e_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial r}{\partial \beta} \qquad (1.4)$$

В качестве третьего единичного вектора будем рассматривать вектор $n = e_\alpha \times e_\beta$ / $|e_\alpha \times e_\beta|$, перпендикулярный к первым двум (символом « \times » здесь и ниже обозначаем векторное произведение).

Вектор, соединяющий точки (α, β) и $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ на поверхности, определяется формулой

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta} d\beta \qquad (1.5)$$

Отсюда, обозначая через χ угол между координатными линиями (см. рис. 1.1), находим

$$ds^2 = |dr|^2 = A^2 d\alpha^2 + 2AB_{\cos\chi} d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2 \qquad (1.6)$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (1.6), называют *первой квадратичной формой* поверхности. В курсах дифференциальной геометрии доказывается, что первая квадратичная форма не изменяется при изгибании поверхности без растяжения. В дальнейшем в данной книге рассматриваются исключительно ортогональные системы координат, для которых $\chi = 0$ ($n = e_\alpha \times e_\beta$).

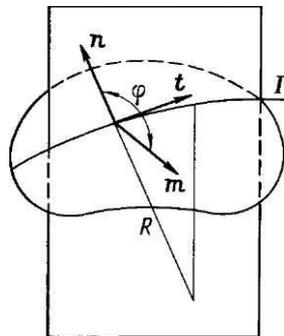


Рис. 2

Соотношения Кодацци—Гаусса. Правила дифференцирования ортов (1.24) для конкретной гладкой поверхности определяются заданием функций $A_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $A_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $R_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $R_2(\alpha_1, \alpha_2)$. Однако взятые наугад четыре функции от α_1 и α_2 , вообще говоря, не могут быть приняты в качестве параметров Ламе и главных радиусов кривизны гладкой поверхности. Они должны удовлетворять некоторым равенствам, именуемым в теории поверхностей соотношениями Кодацци—Гаусса. Действительно, из очевидного тождества

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 n}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1}$$

последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} e_2 \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} e_1 \right) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) e_2 + \frac{A_2}{R_2} \frac{\partial e_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) e_1 + \frac{A_1}{R_1} \frac{\partial e_1}{\partial \alpha_2} \\ \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) - \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] e_2 - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) - \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right] e_1 &= 0 \end{aligned}$$

Заметим в заключение, что параметр $K = 1/R_1 R_2$ называют *гауссовой кривизной* поверхности. При этом точки поверхности подразделяются на эллиптические ($K > 0$), параболические ($K = 0$) и гиперболические ($K < 0$). Поверхность, все точки которой эллиптические, называют поверхностью положительной гауссовой кривизны. Если же все точки параболические, то говорят, что поверхность имеет нулевую гауссову кривизну. Если же все точки гиперболические, то соответствующая поверхность имеет отрицательную гауссову кривизну.

В теории поверхностей доказывалось, что возможность изгибания поверхностей без растяжения тесно связана со знаком гауссовой кривизны. Условия, при которых свобода изгибания исключается, будут различными для поверхностей положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны.

Приведенных сведений из теории поверхностей достаточно для изложения классической теории оболочек.

ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СМЕЩЕНИЙ ПО ТОЛЩИНЕ ОБОЛОЧКИ

Предположим, что под влиянием каких-либо воздействий оболочка деформировалась, т. е. изменила свою первоначальную форму. Пусть при этом вектор

$$\mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2) = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{n} \quad (1.7)$$

описывает перемещение произвольной точки m , лежащей на срединной поверхности. Компоненты u_1 и u_2 вектора перемещений и будем называть тангенциальными смещениями, а компоненту w — нормальным смещением или прогибом.

Через m_1 обозначим точку оболочки, расположенную до деформации на перпендикуляре к срединной поверхности в точке m и удаленную от последней на расстояние ζ . Пусть перемещение точки m_1 описывается вектором

$$\mathbf{u}^\zeta = u_1^\zeta \mathbf{e}_1 + u_2^\zeta \mathbf{e}_2 + w^\zeta \mathbf{n} \quad (1.8)$$

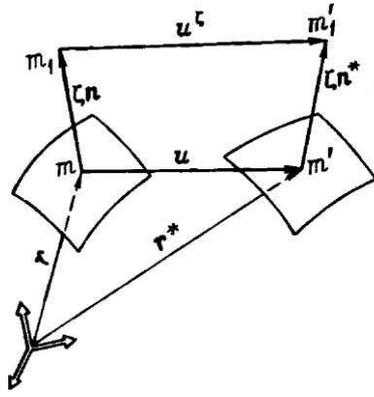


Рис. 3

В соответствии с геометрической гипотезой Кирхгофа вектор mm_1 , после деформации переходит в вектор, перпендикулярный к деформированной срединной поверхности, не изменяя своей длины ζ . Если обозначить вектор нормали к деформированной поверхности в точке m' (рис. 3) через n^* , то смысл гипотезы Кирхгофа заключается в том, что ζn переходит в ζn^* . На основании рис. 3 имеем

$$u^\zeta = u + \zeta(n^* - n) \quad (1.9)$$

Уравнение деформированной срединной поверхности имеет вид

$$r^*(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \alpha_2) + u(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.10)$$

Таким образом, в качестве криволинейных координат деформированной поверхности можно рассматривать все те же α_1 и α_2 , однако соответствующие им координатные линии, вообще говоря, уже не будут линиями кривизны и даже не будут ортогональными.

Используя соотношения предыдущего раздела, получим выражения для единичных векторов координатных линий α_1 и α_2 на деформированной срединной поверхности. Имеем

$$\frac{\partial r^*}{\partial \alpha_1} = A_1(1 + \varepsilon_1)e_1 + A_1\omega_1 e_2 - A_1\vartheta_1 n \quad (1.11)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{w}{R_1} \quad (1.12)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1, \quad \vartheta_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1} \quad (1.13)$$

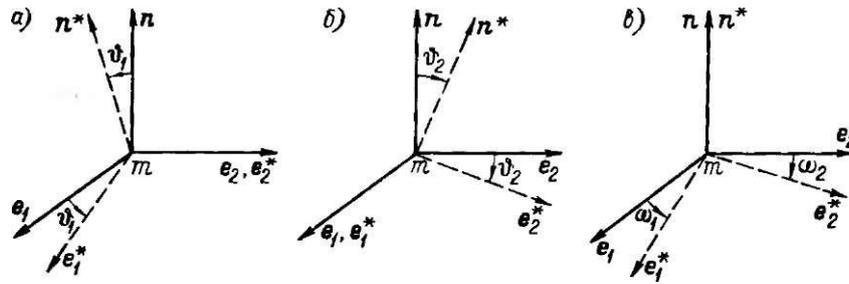


Рис. 4

Аналогично получаем

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial \alpha_2} = A_2(1 + \varepsilon_2)\mathbf{e}_2 + A_2\omega_2\mathbf{e}_1 - A_2\vartheta_2\mathbf{n} \quad (1.14)$$

где

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \frac{w}{R_2} \quad (1.15)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2, \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2} \quad (1.16)$$

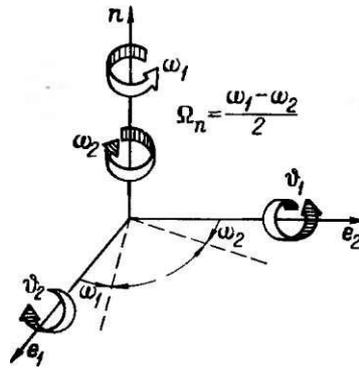


Рис. 5

Вернемся к формуле (1.9). Подставляя в нее вместо \mathbf{n}^* его выражение, получим

$$\mathbf{u}^\zeta = \mathbf{u} + \zeta(\vartheta_1\mathbf{e}_1 - \vartheta_2\mathbf{e}_2) \quad (1.17)$$

или

$$u_1^\zeta = u_1 + \zeta\vartheta_1, \quad u_2^\zeta = u_2 + \zeta\vartheta_2, \quad w_\zeta = w \quad (1.18)$$

Формулы (1.18) позволяют сделать следующий вывод: принятие геометрической гипотезы Кирхгофа приводит к линейному закону изменения смещений по толщине оболочки, причем нормальное смещение не зависит от ζ .

В заключение заметим, что с учетом введенного выше вектора углов поворота окрестности точки (ω) формулу (1.17) можно записать так:

$$\mathbf{u}^\zeta = \mathbf{u} + \omega \times \mathbf{n} \quad (1.19)$$

Лекция 2.

ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧКИ

Удлинения и сдвиг. Рассмотрим на линии две соседние точки, расстояние между которыми до деформации и (в рамках линейного приближения) после деформации. Вычисляя относительное удлинение элемента дуги между рассматриваемыми точками, приходим к равенству

$$\frac{ds_1^* - ds_1}{ds_1} = \varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{w}{R_1} \quad (2.1)$$

делающему очевидным смысл параметра ε_1 (см. форм. (1.12)).

Аналогичное соотношение имеет место и для линии α_1 . Таким образом, параметры ε_1 и ε_2 определяют обусловленные деформацией оболочки относительные удлинения волокон, расположенных вдоль координатных линий срединной поверхности.

Деформацию срединной поверхности характеризует также сдвиг, о котором уже говорилось в предыдущем разделе. Сдвиг можно определить как косинус угла между линиями α_1 и α_2 , после деформации, т. е. (см. рис. 5)

$$\omega = \mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2^* = \omega_1 + \omega_2 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \quad (2.2)$$

Изменения кривизны и кручение. Проведем внутри оболочки поверхность, отстоящую от срединной на расстоянии ζ (впредь эту поверхность будем называть параллельной). Рассмотрим на срединной поверхности произвольную точку и проходящие через нее две координатные линии. Передвигая нормаль к срединной поверхности вдоль этих линий, получим на параллельной поверхности линии α_1 и α_2 . В точке пересечения этих линий расположим тройку единичных векторов \mathbf{e}_1' , \mathbf{e}_2' , \mathbf{n}' направив их соответственно вдоль α_1 -линии, α_2 -линии и по нормали к параллельной поверхности. По условиям построения параллельной поверхности векторы \mathbf{e}_1' и \mathbf{e}_2' параллельны векторам \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , а вектор \mathbf{n}' направлен по той же прямой, что и \mathbf{n} . Отсюда ясно, что сеть линий α_1 , α_2 , на параллельной поверхности ортогональна и что нормаль к срединной поверхности является нормалью и к параллельной поверхности. Более того, линии α_1 , α_2 , на параллельной поверхности будут ее линиями кривизны, поскольку при бесконечно малом перемещении орта \mathbf{n}' вдоль любой из этих линий, он, совпадая по направлению с \mathbf{n} , будет оставаться компланарным.

Построим в двух смежных точках срединной поверхности, лежащих на линии α_1 , единичные нормальные векторы. На рис. 6 показано нормальное

сечение срединной поверхности, определяемое названными нормальными векторами, причем точки m_1, m_2 принадлежат срединной поверхности, а m_1', m_2' — соответствующие им точки параллельной поверхности ($r' = r + \zeta n, \zeta = \text{const}$). Пусть при этом O_1 — центр кривизны срединной поверхности при сечении ее нормальной плоскостью, проведенной, как указано выше.

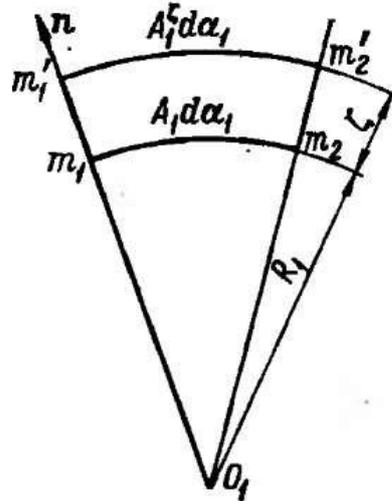


Рис. 6

В формуле содержится четыре различных функции ($\omega_1, \omega_2, \tau_1, \tau_2$) координат срединной поверхности, в которых входит лишь по две функции ϵ_1, χ_1 или ϵ_2, χ_2 . Однако, первую из названных формул также можно привести к виду, содержащему две различные функции

Выведенные формулы определяют удлинения и сдвиг параллельной поверхности, отстоящей от срединной — на расстоянии ζ . С помощью этих формул исследование деформации оболочки сводится к исследованию деформации ее срединной поверхности. В формулы входят шесть различных функций смещений срединной поверхности, а именно:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{\omega}{R_1} \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{\omega}{R_2} \\ \omega &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} - \frac{u_1}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} - \frac{u_2}{R_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) \\ \tau &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Геометрический смысл параметров ε_1 , ε_2 , ω был уже выяснен ранее: они являются относительными удлинениями и сдвигом срединной поверхности. Для выявления геометрического смысла трех остальных параметров χ_1 , χ_2 , τ рассмотрим малый элемент срединной поверхности, ограниченный двумя близкими линиями и двумя близкими линиями α_2 (рис. 7). Задание удлинений и сдвига в точке m_1 полностью характеризует изменение размеров данного элемента после деформации. Однако для определения его формы этого недостаточно, ибо при деформировании, кроме удлинений и сдвига, элемент может искривиться, что названными тремя параметрами не улавливается. Искривление элемента поверхности можно характеризовать, во-первых, изменением кривизны соответственно в направлениях α_1 и α_2 и, во-вторых, скручиванием.

Рассмотрим приращение единичного вектора e_1^* при его перемещении вдоль линий α_1 и α_2 , на бесконечно малые расстояния $Ds_1^* = A_1^* d\alpha_1$, $ds_2^* = A_2^* d\alpha_2$ (соответственно).

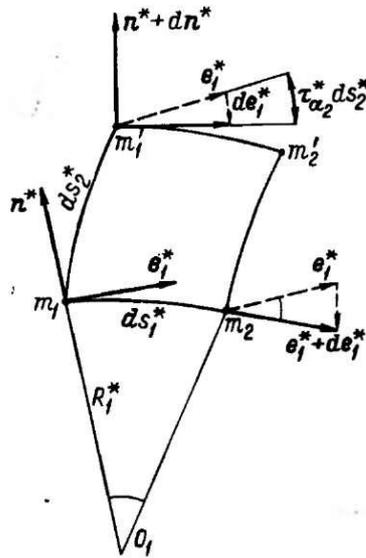


Рис. 7

В первом случае проекция вектора de_1^* на нормаль к деформированной поверхности n^* дает угол поворота орта e_1^* при переходе от точки m_1 к

бесконечно близкой точке m_2 , характеризующий кривизну дуги m_1m_2 . Согласно рис. 7 имеем

$$ds_1^* / R_1^* = |de_1^*| = -de_1^* \times n^*$$

или

$$\frac{1}{R_1^*} = -\frac{1}{A_1^*} \frac{de_1^*}{d\alpha_1} \times n^* \quad (2.4)$$

Во втором случае проекция de_1^* на нормаль n^* дает угол поворота орта e_1^* при переходе от точки m_1 к бесконечно близкой на линии α_2 точке m_2 или, что то же, угол поворота линейного элемента m_1m_2 относительно элемента m_1m_2 , т. е. скручивание элемента деформированной поверхности $m_1m_2m_1m_2$. Обозначая относительный угол закручивания элемента m_1m_2 вокруг линии α_2 в соответствии с рис. 7 находим

$$\tau_{\alpha_2}^* = \frac{|de_1^*|}{ds_2^*} = -\frac{1}{A_2^*} \frac{de_1^*}{d\alpha_2} \times n^* \quad (2.5)$$

Рассуждая аналогично, но рассматривая ие вектор e_1^* , а вектор e_2^* , получим

$$\frac{1}{R_2^*} = -\frac{1}{A_2^*} \frac{de_2^*}{d\alpha_2} \times n^*; \quad \tau_{\alpha_1}^* = -\frac{1}{A_1^*} \frac{\partial e_2^*}{\partial \alpha_1} \times n^* \quad (2.6)$$

где R_2^* — радиус кривизны нормального сечения деформированной поверхности, касательного к линии α_2 ; τ_{α_2} — кручение деформированной срединной поверхности вокруг линии α_1 .

Преобразуем формулы (2.4) – (2.6). Прежде всего, имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R_1^*} &= \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial e_1^*}{\partial \alpha_1} \times n^* = \\ &= \frac{1}{A_1^*} \left(\frac{\partial e_1}{\partial \alpha_1} + \omega_1 \frac{\partial e_2}{\partial e_1} - \vartheta \frac{\partial n}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} e_2 - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha_1} n \right) \times (n + \vartheta_1 e_1 + \vartheta_2 e_2) = \quad (2.7) \\ &= -\frac{1}{R_1} (1 - e_1) - \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \vartheta_2 = -\frac{1}{R_1} (1 - e_1) - x_1. \end{aligned}$$

Следовательно, приращение в результате деформации кривизны срединной поверхности оболочки (χ_1^*) выражается формулой

$$\chi_1^* \equiv 1 / R_1^* - 1 / R_1 = x_1 - e_1 / R_1 \quad (2.8)$$

Путем совершенно аналогичных выкладок находим:

$$x_2^* \equiv \frac{1}{R_2^*} - \frac{1}{R_2} = x_2 - \frac{\varepsilon_2}{R_2} \quad (2.9)$$

$$\tau_{\alpha 1}^* = \tau_{\alpha 2}^* = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} = \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2} = \tau \quad (2.10)$$

Из сказанного выше следует, во-первых, что параметры χ_1 , χ_2 , τ характеризуют изменения кривизны и кручение срединной поверхности оболочки при деформации. Во-вторых, оказывается, что два параметра кручения $\tau_{\alpha 1}$ и $\tau_{\alpha 2}$ (вокруг линий α_1 и α_2 соответственно) равны друг другу и совпадают с введенным ранее параметром τ .

Следует обратить внимание на то, что в выражении для изменений кривизны срединной поверхности χ_1^* , χ_2^* помимо параметров χ_1 , χ_2 , зависящих от углов поворота касательных к линиям α_1 и α_2 , явным образом вошли и удлинения срединной поверхности ε_1 , ε_2 . Это свидетельствует о том, что тангенциальная деформация криволинейной срединной поверхности вызывает изменение ее кривизны. Однако этим дополнительным искривлением срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с искривлением, обусловленным углами поворота ϑ_1, ϑ_2 .

Действительно, переписывая формулы в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^\zeta &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} (\varepsilon_1 + \zeta x_1) = \varepsilon_1 + \frac{\zeta}{1 + \frac{\zeta}{R_1}} x_1^* \\ \varepsilon_2^\zeta &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R_2}} (\varepsilon_2 + \zeta x_2) = \varepsilon_2 + \frac{\zeta}{1 + \frac{\zeta}{R_2}} x_2^* \end{aligned} \quad (2.11)$$

убеждаемся, что если пренебречь в них слагаемыми ζ/R_1 , ζ/R_2 по сравнению с единицей, то получим

$$x_1^* \approx x_1; \quad x_2^* \approx x_2 \quad (2.12)$$

Соотношения (1.70) позволяют в дальнейшем именовать величины χ_1 , χ_2 параметрами изменения кривизны срединной поверхности оболочки, хотя, строго говоря, это и не совсем так.

Заметим, что, как видно из формул, параметры χ_1 , χ_2 будут положительными, если при деформировании оболочки кривизна ее срединной поверхности увеличивается. Кручение же τ положительно, если при взаимном повороте сторон $m_1 m_2$ и $m_1' m_2'$ элемента, изображенного на рис. 7, точка m_2 будет перемещаться в сторону, противоположную направлению нормали.

Итак, деформация оболочки полностью определяется шестью параметрами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \chi_1, \chi_2, \tau$ из которых три первых характеризуют изменения размеров элемента срединной поверхности, а три остальных – его искривление. Указанные шесть параметров, выражающиеся через перемещения формулами (1.61), будем называть деформациями срединной поверхности. Если все они равны нулю, то поверхность не деформируется, т. е. либо ее смещения равны нулю, либо им соответствует перемещение поверхности как жесткого целого.

Заметим, что число параметров, характеризующих деформацию срединной поверхности, не случайно оказалось равным шести. В соответствии с формулами (1.6) и (1.10) поверхность, заданная в неортогональных координатах (а таковыми и являются координаты α_1 и α_2 на деформированной поверхности), полностью определяются шестью коэффициентами первой и второй квадратичных форм.

Лекция 3.

УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Приравнивая векторы и принимая во внимание формулы лекции 1, получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 x_1) - x_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 \tau}{\partial \alpha_1} - \tau \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\omega}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= -\frac{A_2}{R_2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{A_1}{R_1} \vartheta_2 \right) \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 x_2) - x_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 \tau}{\partial \alpha_2} - \tau \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\omega}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{A_1}{R_1} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{A_2}{R_2} \vartheta_1 \right) \\
 \frac{A_1 A_2}{R_2} \tau_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \vartheta_1 \right) &= \frac{A_1 A_2}{R_1} \tau_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \vartheta_2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Правые части первых двух равенств систем (2.3) совпадают с точностью до множителей. Поэтому имеют место зависимости:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \kappa_1) - \kappa_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 \tau}{\partial \alpha_1} - \tau \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\omega}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\
 - \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial A_1 \varepsilon_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 \omega}{\partial \alpha_1} - \varepsilon_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}_1$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \kappa_2) - \kappa_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 \tau}{\partial \alpha_2} - \tau \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\omega}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\
 - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial A_2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 \omega}{\partial \alpha_2} - \varepsilon_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}_2$$

Что касается третьих равенств названных систем, то они, после преобразований с учетом соотношений (1.57), превращаются в тождества.

Можно, далее, рассмотреть смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 e_1^*}{\partial \alpha_1 \cdot \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 e_1^*}{\partial \alpha_2 \cdot \partial \alpha_1}; \quad \frac{\partial^2 e_2}{\partial \alpha_1 \cdot \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 e_2}{\partial \alpha_2 \cdot \partial \alpha_1}$$

и получить тем самым еще шесть равенств, аналогичных (2.3).

Некоторые из этих равенств будут превращаться в тождества, а некоторые – в полученные уже соотношения лекции 1. Однако появится одно новое

дифференциальное соотношение между параметрами деформации срединной поверхности, а именно:

$$\frac{\chi_1}{R_2} + \frac{\chi_2}{R_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[A_2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{1}{2} A_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[A_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{2} A_2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega \right] \right\} = 0 \quad (3.2)_3$$

Полученные три различных дифференциальных соотношения (2.3), связывающие шесть параметров деформации срединной поверхности оболочки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \chi_1, \chi_2, \tau$, были выведены аналогично тому, как выводились в п. 1.1 соотношения Кодацци— Гаусса. Они и являются, в сущности, соотношениями Кодацци— Гаусса для деформированной поверхности $r^*(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \alpha_2) + u(\alpha_1, \alpha_2)$, упрощенными с помощью аналогичных соотношений до деформации.

Соотношения (3,2) выполняются тождественно при замене в них параметров деформации их выражениями через смещения в соответствии с формулами (1.61). Эти соотношения, впервые полученные в работе [34], играют в теории оболочек ту же роль, что и соотношения Сен-Венана в теории упругости: они являются, во-первых, *условиями неразрывности деформаций* и, во-вторых, — *условиями совместности*, при соблюдении которых обеспечивается возможность определения трех смещений u_1, u_2, ω по шести заданным компонентам деформации оболочки — $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \chi_1, \chi_2, \tau$.

УСИЛИЯ И МОМЕНТЫ

Выяснив геометрическую сторону деформирования оболочки, перейдем к рассмотрению возникающих в ней напряжений. Выделим из оболочки объемный элемент, ограниченный четырьмя нормальными сечениями, касающимися линий $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$, и двумя лицевыми поверхностями (рис. 8).

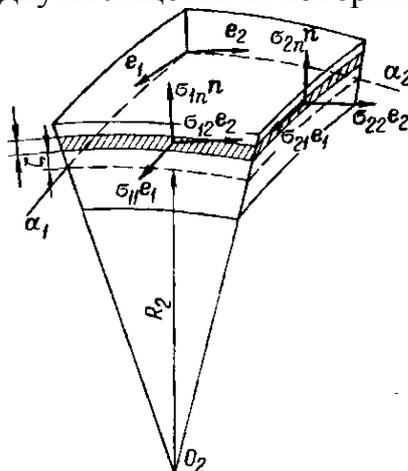


Рис. 8

Компоненты введенных векторов усилий и моментов впредь будем именовать так: T_1, T_2 — нормальные усилия, T_{12}, T_{21} — касательные усилия, T_{1n}, T_{2n} — перерезывающие силы, M_1, M_2 — изгибающие моменты, M_{12}, M_{21} — скручивающие моменты.

Положительные направления этих силовых величин определяются векторными соотношениями и показаны на рис. 9.

Замена напряжений статически им эквивалентными усилиями и моментами позволяет в дальнейшем вместо объемного элемента, выделенного из оболочки, рассматривать соответствующий ему элемент срединной поверхности. Введение усилий и моментов,

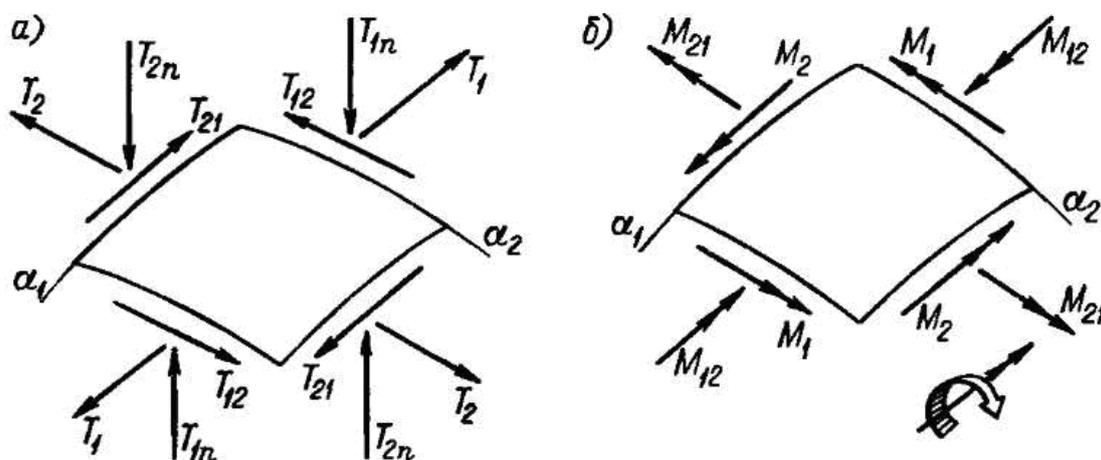


Рис. 9

так же как и выражение деформаций оболочки через деформации ее срединной поверхности, направлено на достижение одной цели, а именно: перейти от исследования напряженно-деформированного состояния оболочки как трехмерного тела к исследованию условий деформирования ее двумерной модели — срединной поверхности.

РАВНОВЕСИЕ ОБЪЕМНОГО ЭЛЕМЕНТА ОБОЛОЧКИ

Выведем условия равновесия выделенного из оболочки объемного элемента, изображенного на рис. 1.8, под действием всех приложенных к нему внешних и внутренних сил. Внешними силами будут, во-первых, объемные силы, приходящиеся на данный элемент, и, во-вторых, поверхностные силы, приложенные к его лицевым поверхностям. Внутренними силами являются напряжения, действующие на боковые грани элемента.

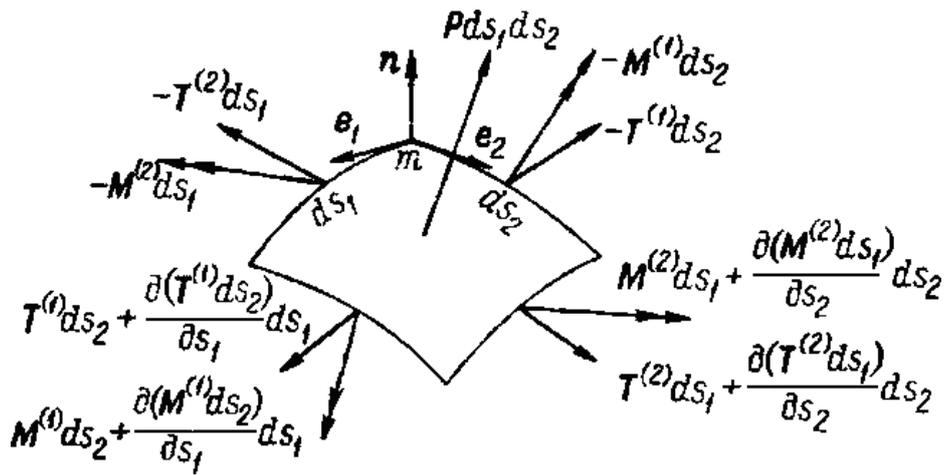


Рис. 10

В предыдущем параграфе все внутренние силы были перенесены на границы участка срединной поверхности, соответствующего рассматриваемому объемному элементу оболочки, и заменены статически эквивалентными усилиями и моментами. Произведем аналогичные преобразования и над внешними силами, заменив их статически эквивалентной нагрузкой, распределенной по срединной поверхности. При этом срединная поверхность окажется загруженной как силами, так и моментами. Однако последними в практических задачах можно пренебречь.

Действительно, объемные силы (тяготения, инерции) ввиду малости толщины оболочки можно считать равномерно распределенными по толщине, так что моментов относительно срединной поверхности они давать не будут (во всяком случае с точностью до слагаемых порядка h/R_0 по сравнению с единицей). Что касается внешних сил, приложенных к лицевым поверхностям оболочки, то в практических задачах они обычно направлены перпендикулярно к срединной поверхности (давление жидкости или газа), и, следовательно, опять-таки момента при переносе на нее не дают. Итак, преследуя практические цели, можно считать, что при переносе всех внешних сил на срединную поверхность последняя будет загружена только распределенными по ней силами. Внешнюю нагрузку, приходящуюся на единицу площади срединной поверхности, обозначим через p :

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_n n \quad (3.3)$$

Теперь для составления условий равновесия можно вместо объемного элемента рассмотреть соответствующий ему элемент срединной поверхности. При этом, оставаясь в рамках линейной теории, все действующие силы и моменты следует относить к названному элементу до деформации, что равносильно пренебрежению произведениями перемещений и их производных.

На основании рис. 10 формулируем условие равенства нулю главного вектора всех действующих на элемент сил условие равенства нулю главного момента всех моментов и сил относительно точки m .

Выполняя в условиях равновесия последовательно приведение подобных членов, сокращение на величину $ds_1 ds_2$ и отбрасывание бесконечно малых слагаемых, получим:

$$\frac{\partial A_2 T^{(1)}}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 T^{(2)}}{\partial a_2} + A_1 A_2 p = 0 \quad (3.4)_1$$

$$\frac{\partial A_2 M^{(1)}}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 M^{(2)}}{\partial a_2} + A_1 A_2 (e_1 \times T^{(1)} + e_2 \times T^{(2)}) = 0 \quad (3.4)_2$$

Используя теперь правила дифференцирования ортов, нетрудно получить эквивалентную этим векторным уравнениям систему скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_1}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial a_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 \right) + \frac{T_{1n}}{R_1} + p_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 T_2}{\partial a_2} + \frac{\partial A_2 T_{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 \right) + \frac{T_{2n}}{R_2} + p_2 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_{1n}}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 T_{2n}}{\partial a_2} \right) - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + p_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)_1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1 M_{21}}{\partial a_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) - T_{1n} &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial a_2} + \frac{\partial A_2 M_{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right) - T_{2n} &= 0 \\ T_{12} - T_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)_2$$

Напомним, что уравнения (3.5)₁ выражают условие равенства нулю главного вектора, а уравнения (3.5)₂ – условие равенства нулю главного момента. Шесть уравнений (3.5)₁, (3.5)₂ в совокупности являются условиями равновесия элемента срединной поверхности оболочки.

Нетрудно убедиться, что последнее уравнение системы (3.5) является тождеством. В самом деле, если ввести в это уравнение вместо усилий и моментов их выражения согласно формулам лекции 1, то получим

$$T_{12} - T_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) (\sigma_{12} - \sigma_{21}) d\zeta \equiv 0 \quad (3.6)$$

Следовательно, каковыми бы ни были принимаемые при построении теории оболочек гипотезы, равенство (3.6) всегда будет выполнено, ибо это обеспечивается лишь симметрией тензора напряжений.

В полученные шесть уравнений равновесия входят десять неизвестных, т. е. задача теории оболочек «внутренне» статически неопределима (статически неопределима уже при рассмотрении бесконечно малого элемента оболочки). Ее решение, следовательно, невозможно до того, пока неизвестные, входящие в уравнения равновесия, не будут связаны с деформациями посредством вагона упругости.

В заключение следует подчеркнуть, что сформулированные в этом разделе уравнения статики оболочек содержат лишь погрешность, связанную с допущением о малости смещений оболочки по сравнению с ее толщиной. Погрешность исходных гипотез на них не отражается, ибо при их выводе эти гипотезы не использовались.

Лекция 4.

ФУНКЦИИ, ТОЖДЕСТВЕННО УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯМ РАВНОВЕСИЯ

При нагружении оболочки только по краям, все десять усилий и моментов можно выразить через четыре произвольные функции координат α_1, α_2 так, что уравнения равновесия будут удовлетворяться тождественно.

Введем обозначения

$$S = T_{12} - \frac{M_{21}}{R_2} = T_{21} - \frac{M_{12}}{R_1}; \quad H = \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21}) \quad (4.1)$$

и исключим из уравнений (3.5)₁ усилия T_{1n}, T_{2n} с помощью первых двух уравнений системы (3.5)₂.

Если при этом учесть введенные обозначения (4.1) и воспользоваться при дифференцировании соотношениями Кодацци, то уравнения равновесия можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S - \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 + 2 \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + 2 \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H \right] = \\ & = -A_1 A_2 p_1; \\ & \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 S}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S - \frac{\partial A_1 T_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + 2 \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H \right] = \\ & = -A_1 A_2 p_2; \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \\ & - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} M_2 \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_1 \right] \right\} = \\ & = p_n \end{aligned}$$

Введем три произвольные функции $a(\alpha_1, \alpha_2)$, $b(\alpha_1, \alpha_2)$, $c'(\alpha_1, \alpha_2)$ и свяжем с ними неизвестные уравнений, посредством формул:

$$\begin{aligned} T_1 &= x_2(a, b, c'); \quad T_2 = x_1(a, b, c'); \\ S &= -\tau(a, b, c'); \quad M_1 = -\varepsilon_2(a, b, c') \\ M_2 &= -\varepsilon_1(a, b, c'); \quad H = (1/2)\omega(a, b, c') \end{aligned} \quad (4.3)$$

где под $\varepsilon_1(a,b,c'), \dots, \tau(a,b,c')$ подразумеваются выражения для параметров деформации срединной поверхности при замене в них перемещений u_1, u_2, ω_2 функциями a, b, c' .

Подставив (4.3) в однородные уравнения (4.2), можно убедиться, что получающиеся при этом выражения оказываются идентичными уравнениям неразрывности деформаций срединной поверхности. Но последние тождественно удовлетворяются при подстановке в них деформаций, выраженных через смещения. Отсюда ясно, что уравнения (4.2) при $p_1 = p_2 = p_n = 0$ тождественно удовлетворяются выражениями (4.3), каковы бы ни были вспомогательные функции a, b, c' .

Выразим через те же функции усилия T_{12}, T_{21} и моменты M_{12}, M_{21} . На основании соотношений (4.2), (4.3) имеем:

$$\begin{aligned} M_{12} + M_{21} &= \omega(a,b,c'); \\ T_{12} - \frac{M_{21}}{R_2} &= T_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} = -\tau(a,b,c') \end{aligned} \quad (4.4)$$

Согласно первой из этих формул можно записать

$$\begin{aligned} M_{12} &= \left(\frac{1}{2}\right)\omega(a,b,c') + \Phi \\ M_{21} &= \left(\frac{1}{2}\right)\omega(a,b,c') - \Phi \end{aligned} \quad (4.5)$$

где Φ — еще одна функция, которая в отношении удовлетворения уравнениям статики, так же, как и функции a, b, c' , произвольна.

Теперь все десять усилий и моментов, характеризующие напряженное состояние в оболочке, выражены через четыре функции a, b, c', Φ , которые естественно называть *функциями напряжения*. Последние очевидным образом обобщаются на случай неоднородной задачи.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК

Все, что касается геометрии деформирования оболочки и условий равновесия выделенного из нее элемента, не зависит от упругих свойств материала, из которого она изготовлена, в связи с чем эти свойства до сих пор не рассматривались. Однако предварительно следует получить формулу для энергии деформации оболочки.

Известно, что энергия деформации произвольного тела, следующего закону Гука, может быть вычислена по формуле

$$V = \frac{1}{2} \int \int \int (\sigma_{11} e_{11} + \sigma_{22} e_{22} + \sigma_{33} e_{33} + \sigma_{12} e_{12} + \sigma_{13} e_{13} + \sigma_{23} e_{23}) d\zeta \quad (4.6)$$

где $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ — нормальные напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках элемента, выделенного из упругого тела; e_{11}, e_{22}, e_{33} — соответствующие им относительные удлинения; $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ — касательные напряжения на тех же площадках; e_{12}, e_{13}, e_{23} — соответствующие им деформации сдвига; dO — объем выделенного элемента, причем интегрирование в (4.6) распространено на весь объем рассматриваемого тела.

Рассмотрим в качестве dO объем элемента, выделенного из оболочки четырьмя близкими сечениями, перпендикулярными к линиям α_1, α_2 срединной поверхности, и двумя близкими параллельными поверхностями. Тогда получим

$$dO = A_1 A_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) da_1 da_2 d\zeta \quad (4.7)$$

Принятие гипотез Кирхгофа равносильно пренебрежению напряжениями σ_{33} по сравнению с другими напряжениями и сдвигами e_{13}, e_{23} по сравнению с другими деформациями.

Но согласно закону Гука для однородных и изотропных тел имеют место формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left(e_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu} \left(e_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left(e_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{12} \quad * \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} &= \frac{1}{1-2\nu} [(1-\nu)e_{33} + \nu(e_{11} + e_{22})] = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$

Пренебрежем в формулах (4.8) напряжением σ_{33} по сравнению с другими напряжениями, что эквивалентно равенству

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} = \frac{1}{1-2\nu} [(1-\nu)e_{33} + \nu(e_{11} + e_{22})] = 0$$

откуда следует

$$e_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (e_{11} + e_{22})$$

Исключая с помощью этой формулы e_{33} из первых двух соотношений (1.104), получим:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{11} + \nu e_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{22} + \nu e_{11})$$

или (поскольку в теории оболочек деформациям e_{11} , e_{22} , e_{12} отвечают ε_1^ζ , ε_2^ζ , ω^ζ)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^\zeta + \nu \varepsilon_2^\zeta); \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2^\zeta + \nu \varepsilon_1^\zeta) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \frac{E}{2(1+\nu)} w^\zeta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Напомним, что параметры деформации параллельной поверхности ε_1^ζ , ε_2^ζ , ω^ζ связаны с параметрами деформации срединной поверхности ε_1 , ε_2 , ω , \varkappa_1 , \varkappa_2 , τ и координатой ζ формулами лекции 1. Подставляя ε_1^ζ , ε_2^ζ , ω^ζ определяемые этими формулами, в (4.4), можно в левой части последней формулы выполнить интегрирование по ζ . Для упрощения получающегося при этом результата разложим подынтегральное выражение (4.4) в ряд по степеням ζ сохранив в нем степени ζ до второй включительно. С этой целью воспользуемся приближенными формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^\zeta &= \varepsilon_1 + \zeta \left(\varkappa_1 - \frac{e_1}{R_1} \right) - \frac{\zeta^2}{R_1} \left(\varkappa_1 - \frac{e_1}{R_1} \right); \\ \varepsilon_2^\zeta &= \varepsilon_2 + \zeta \left(\varkappa_2 - \frac{e_2}{R_2} \right) - \frac{\zeta^2}{R_2} \left(\varkappa_2 - \frac{e_2}{R_2} \right); \\ \omega^\zeta &= \omega + 2\zeta \left[\tau - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\omega}{2} \right] - \zeta^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\tau - \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 + R_2} \frac{\omega}{R_1 R_2} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Выполнив указанные выше преобразования с учетом формул (4.10), получим следующие выражения для упругой энергии деформации:

$$V = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iint \left[\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_0 + Q_1 \zeta + Q_2 \zeta^2) d\zeta \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} Q_0 &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4} \right); \\ Q_2 &= (\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 2(1-\nu) (\varkappa_1 \varkappa_2 - \tau^2) - 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (\varepsilon_1 \varkappa_1 - \varepsilon_2 \varkappa_2) - \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь выражение для Q_1 не расписано, поскольку

$$\int_{-h/2}^{h/2} Q_1 \zeta d\zeta = Q_1 \int_{-h/2}^{h/2} \zeta d\zeta$$

Выполнив в формуле (1.107) интегрирование по частям, получим

$$V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[\frac{1+\nu}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \frac{1-\nu}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint \left[\frac{1+\nu}{2} (\kappa_1 + \kappa_2)^2 + \frac{1-\nu}{2} (\kappa_1 - \kappa_2)^2 + 2(1-\nu) \tau^2 \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$$

(4.15)

Здесь оба интеграла вычисляются по всей области срединной поверхности. Первое слагаемое (4.15) является потенциальной энергией тангенциальной деформации (удлинений и сдвигов), а второе слагаемое — потенциальной энергией изгиба и скручивания.

Лекция 5.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ ОБОЛОЧЕК

Для реализации намеченных выше в общих чертах путей решения задач теории оболочек должны быть сформулированы соответствующие краевые (граничные) условия, т. е. заданы на граничном контуре (или контурах) некоторые соотношения, связывающие усилия, моменты, перемещения или их функции. Необходимое число граничных условий для выявления из общего интеграла разрешающих дифференциальных уравнений искомого решения определяется порядком системы этих уравнений и равно четырем на каждом крае оболочки. Покажем, что для описания условий закрепления края оболочки (как в статическом, так и в геометрическом отношении) достаточно задать на этом крае четыре граничные величины.

Прежде чем переходить к рассмотрению граничных условий, заметим, что оболочка может и не иметь границ, т. е. быть замкнутой. Координатные линии на срединной поверхности замкнутой оболочки являются замкнутыми контурами. Приняв, например, $\alpha_2 = \text{const}$ изменяя непрерывно α_1 будем периодически возвращаться к одной и той же точке срединной поверхности. Поскольку смещения этой точки будут вполне определенными величинами, на общий интеграл разрешающих уравнений следует наложить условия периодичности по α_1 и α_2 (с такими периодами, чтобы имела место отмеченная выше однозначность смещений). Следовательно, когда оболочка является замкнутой, граничные условия заменяются условиями периодичности.

Может оказаться, что оболочка замкнута в отношении одной координаты и не замкнута в отношении другой, примером чего является тонкостенная цилиндрическая труба. Тогда условие периодичности будет иметь место только для одной из координат.

Переходя к рассмотрению оболочек, имеющих боковую поверхность, будем считать, что последняя образована движением перпендикуляра вдоль граничного контура, совпадающего с линией кривизны.

Пусть граничный контур срединной поверхности совпадает с линией α_1 ($\alpha_2 = \text{const}$). Напряжения, действующие на соответствующей боковой поверхности, будучи просуммированы по толщине оболочки, заменяются в излагаемой теории тремя усилиями (T_{21} , T_2 , T_{2n}) и двумя моментами (M_2 , M_{21}). Отсюда, казалось бы, число граничных величин, определяющих равновесие края, должно быть равным пяти. Однако в действительности напряженное состояние на краю оболочки полностью определяется заданием не пяти, а всего лишь четырех обобщенных сил. Дело в том, что крутящий момент может быть заменен на краю оболочки соответствующим образом распределенными касательным и перерезывающим усилиями. Покажем это.

Рассмотрим участок границы срединной поверхности вблизи некоторой точки m_1 (рис. 11). Заменяем приближенно граничный контур $\alpha_2 =$

const произвольной ломаной, образованной рядом элементарных, равных друг другу отрезков. Длина каждого из этих отрезков с точностью до малых высших порядков может быть заменена длиной стягиваемой дуги, т. е. $mm_1 = m_1m_2 = ds_1$.

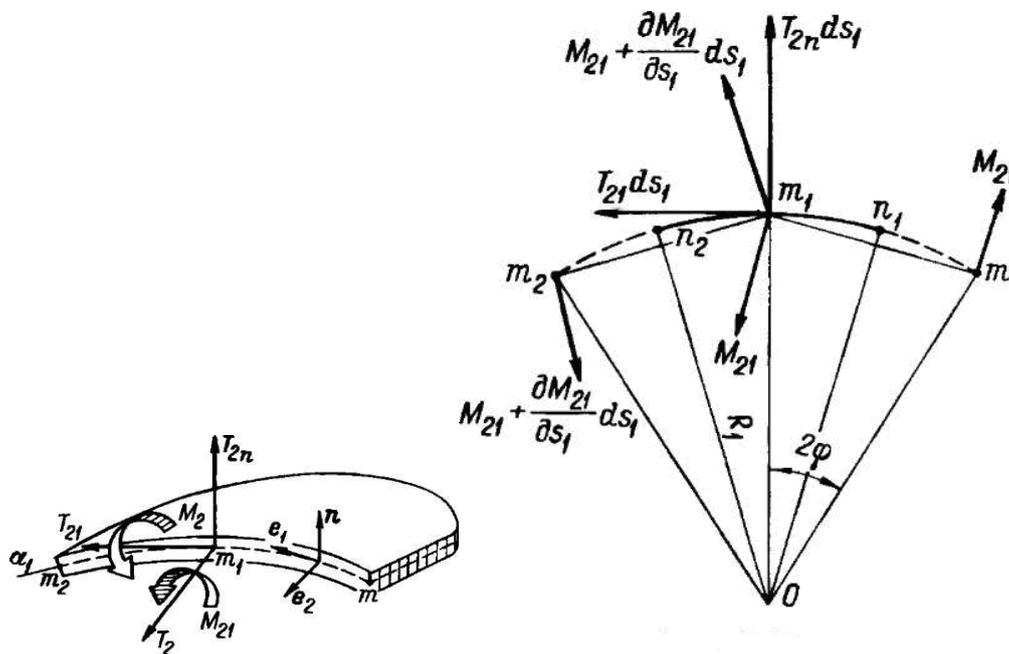


Рис. 11

Рассмотрим также отрезок n_1, n_2 , концы которого расположены в серединах дуг mm_1 и m_1m_2 . Очевидно, что $n_1n_2 \approx ds_1$.

Пусть в точке n_1 действует крутящий момент M_{21} . Тогда крутящий момент в точке n_2 будет иметь значение

$$M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1$$

Заменяем равнодействующую крутящего момента на участке mm_1 ($M_{21}ds_1$) парой сил, приложенных к концам отрезка mm_1 и направленных к нему перпендикулярно (т. е. Параллельно On_1 см. рис. 11). Так же представим равнодействующую крутящего момента на смежном участке m_1m_2 и т.д.

Тогда в каждой из вершин рассматриваемой ломаной будет приложено по две силы. Проектируя силы, приложенные в точке m_1 на нормаль (n) и касательную (e_1) с учетом соотношений (см. рис. 11)

$$\sin \varphi \approx \frac{ds_1}{2R_1}; \quad \cos \varphi \approx 1$$

получим дополнительные силы:
перерезывающую

$$M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 - M_{21} = \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \quad (a)$$

Касательную

$$\left(2M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial s_1} ds_1 \right) \frac{ds_1}{2R_1} \approx \frac{M_{21}}{R_1} ds_1 \quad (б)$$

Следовательно, вдоль края оболочки $\alpha_2 = \text{const}$ крутящий момент может быть заменен перерезывающими (dM_{21}/ds_1) и касательными (M_{21}/R_1) силами.

Заменяя крутящие моменты статически эквивалентными усилиями, мы допускаем некоторое перераспределение напряжений с сохранением их равнодействующей. Согласно принципу Сен-Венана такое перераспределение сказывается лишь в непосредственной близости от боковой поверхности — на расстоянии порядка толщины оболочки.

Итак, четыре величины

$$T_2, \quad T_{21} + \frac{M_{21}}{R_1}, \quad T_{2n} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_1}, \quad M_2 \quad (5.1)_1$$

полностью определяют напряженное состояние на краю оболочки $\alpha_2 = \text{const}$. Первые три из них будем именовать *обобщенными* (кирхгофовскими) *граничными усилиями*. При этом заметим, что согласно формулам (4.1) и второму уравнению (1.92)₂ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} T_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} &= T_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} + \frac{1}{R_1} (M_{12} + M_{21}) = S + 2 \frac{H}{R_1}; \\ T_{2n} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 + 2 \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отсюда видно, что для формулировки граничных условий в терминах обобщенных граничных усилий нет необходимости использовать величины T_{21} , T_{2n} , M_{21} , так как их можно заменить комбинациями введенных ранее величин S и H .

Обобщенным силам (5.1)₁ в качестве обобщенных смещений отвечают величины

$$u_2, u_1, \omega, \vartheta_2 \quad (5.1)_1$$

Совершенно аналогично можно получить выражения для обобщенных сил и смещений края, ограниченного линией $\alpha_1 = \text{const}$:

$$T_1, \quad T_{12} + \frac{M_{12}}{R_2}, \quad T_{1n} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2}, \quad M_1 \quad (5.3)_1$$

$$u_1, u_2, w, \vartheta_1 \quad (5.3)_2$$

При этом имеют место соотношения, получающиеся из (5.2) при замене индексов «1» на «2», «2» на «1».

Приведем ряд возможных вариантов граничных условий для края $\alpha_2 = \text{const}$:

а) свободный край

$$T_2 = 0, \quad T_{21} + \frac{M_{21}}{R_1} = 0, \quad T_{2n} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_1} = 0, \quad M_2 = 0;$$

б) шарнирно опертый скользящий край

$$w = 0, \quad M_2 = 0, \quad T_2 = 0, \quad u_{1=0};$$

в) шарнирно опертый неподвижный край

$$w = 0, \quad M_2 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_{1=0}$$

г) абсолютно заделанный край

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_2 = 0.$$

Приведенные варианты граничных условий отнюдь не исчерпывают возможных связей края оболочки с опорой. Вместе с тем и сами граничные величины (1.129) или (1.131) не являются единственно возможными средствами для формулировки граничных условий.

Лекция 6.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Общей теории оболочек исторически предшествовала так называемая безмоментная теория, значительно более простая и в то же время в некоторых случаях дающая вполне правильное представление о работе оболочки. Эта теория при рассмотрении равновесия элемента оболочки пренебрегает всеми моментами.

Из формул

$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(x_1 + \nu x_2); \\M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(x_2 + \nu x_1); \\H &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau\end{aligned}\tag{6.1}$$

видно, что данное пренебрежение будет обоснованным либо когда весьма мала жесткость оболочки на изгиб, либо когда весьма малы изменения кривизны и кручение срединной поверхности.

В первом случае мы будем иметь равновесие абсолютно гибкой оболочки (мембраны), а во втором – безмоментное напряженное состояние оболочки, обладающей конечной жесткостью на изгиб. Хотя обе эти задачи охватывает одна и та же теория, тем не менее между ними следует делать различие, поскольку они имеют специфические особенности. Так, абсолютно гибкая оболочка (например, матерчатая) совершенно не в состоянии воспринимать сжимающие усилия, ибо всякое сколь угодно малое сжатие будет вызывать потерю устойчивости ее форм, т.е. образование на ней складок. Поэтому расчет подобной оболочки будет соответствовать истине лишь в том случае, если во всех сечениях усилия получаются растягивающими. Данное условие является, например, основным требованием, которому должен удовлетворять корпус мягкого (или полужесткого) дирижабля при проверке его продольной прочности.

Оболочки с конечной жесткостью на изгиб, в отличие от абсолютно гибких оболочек, могут находиться в безмоментном напряженном состоянии при наличии в них как растягивающих, так и сжимающих усилий. Они будут терять устойчивость лишь после того, когда сжимающие усилия в них превзойдут некоторое критическое значение. Если для абсолютно гибких (мягких) оболочек безмоментное напряженное состояние является единственно возможным, поскольку они не обладают сопротивлением изгибу, то для оболочек конечной жесткости такое напряженное состояние является только одним из возможных напряженных состояний и для его существования

необходимо выполнение ряда условий, касающихся формы оболочки, характера действующей на нее нагрузки и закрепления ее краев.

Здесь уместно сопоставить свойства оболочек со свойствами кривых брусьев. Как известно, арка произвольной формы, как правило, работает не только на сжатие, но и на изгиб. Однако можно согласовать ее форму и характер действующей нагрузки так, что изгиба арка испытывать не будет, находясь, согласно принятому выше термину, в безмоментном напряженном состоянии. Так, для арки, очерченной по параболе, нагрузкой, не вызывающей изгиба, будет вертикальное давление, равномерно распределенное по ее хорде, а для арки, очерченной по цепной линии, – ее собственный вес. Способность арок воспринимать некоторую поперечную нагрузку без изгиба определяет их технические преимущества перед балками.

Оболочки обладают аналогичным преимуществом перед пластинами, с той, однако, существенной разницей, что если арка заданной формы способна нести без изгиба лишь вполне определенную нагрузку, то оболочка заданной формы обладает тем же свойством для широкого круга нагрузок, удовлетворяющих лишь весьма общим требованиям, если ее края надлежащим образом закреплены. Именно это свойство оболочек – работать, при соблюдении некоторых условий, без изгиба или, точнее, при незначительных изгибах – определяет то широкое практическое применение, которое они получили в различных областях техники. Следует подчеркнуть, что понятие безмоментного напряженного состояния отнюдь не обязательно связано с бесконечно большой гибкостью оболочки (и тем самым — с бесконечной малостью ее толщины). Даже толстая оболочка, при соблюдении надлежащих условий, может работать в безмоментном напряженном состоянии (в том смысле, что напряжения изгиба в ней будут в R_0/h раз меньше напряжений от усилий).

Уравнения безмоментной теории.

Уравнения безмоментной теории могут быть получены непосредственно из уравнений общей теории оболочек. Проводят соответствующие рассуждения, будем считать, что хотя оболочка в принципе может сопротивляться изгибу, но, ввиду малости изменений кривизны и кручения, моменты в уравнениях равновесия элемента оболочки являются несущественными. Отбрасывая их в уравнениях, получим:

$$T_{12} = T_{21} = S^*, T_{1n} = T_{2n} = 0 \quad (6.2)$$

Следовательно, пренебрежение моментами приводит к необходимости пренебрегать и перерезывающими усилиями. Вводя этот результат в уравнения придем к дифференциальной системе:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S^*}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 S^*}{\partial A_2} - \frac{\partial A_2 T_{2^*}}{\partial \alpha_1} \right) + p_1 = 0; \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1 T_{2^*}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2 S^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 T_1}{\partial \alpha_2} \right) + p_2 = 0 \\
& \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_{2^*}}{R_2} = p_n
\end{aligned} \tag{6.3}$$

которая, в совокупности с (6.2), является условием равновесия элемента оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии (здесь и в дальнейшем усилия, соответствующие этому состоянию, отмечаем звездочкой).

В системе (3) число неизвестных соответствует числу уравнений, так что задача теории оболочек в указанной выше формулировке становится статически определимой (в отношении равновесия бесконечно малого элемента оболочки, но не всегда в отношении равновесия оболочки в целом). Напомним читателю, что аналогичным примером является задача об изгибе балки, в технической ее постановке, где также число неизвестных в уравнениях равновесия соответствует числу уравнений и тем не менее определение реакций опор иногда требует предварительного определения перемещений. Предположим, что систему (3) удалось решить (вопрос о граничных условиях, которые должны быть при этом поставлены, пока оставляем в стороне). Тогда для определения смещений оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии, можно написать следующую систему из трех дифференциальных уравнений в частных производных»

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{\omega}{R_1} = \frac{1}{Eh} (T_{1^*} - \nu T_{2^*}); \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{\omega}{R_2} = \frac{1}{Eh} (T_{2^*} - \nu T_1); \\
\omega^* &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{u_1} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S^*
\end{aligned} \tag{6.4}$$

правые части которых являются известными функциями α_1 и α_2 . Общее решение этой системы может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1^* + u_1^{**}; \\
u_2 &= u_2^* + u_2^{**}; \\
\omega &= \omega^* + \omega^{**}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

где под u_1^* , u_2^* , ω^* подразумевается какое-либо частное решение системы (6.4), а под u_1^{**} , u_2^{**} , ω^{**} – общее решение однородной системы:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{1**}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_{2**} + \frac{\omega^{**}}{R_1} &= 0; \\
\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{2**}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_{1**} + \frac{\omega^{**}}{R_2} &= 0; \\
\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_{2**}}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_{1**}}{A_1} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Как видно, смещения u_1^{**} , u_2^{**} , ω^{**} обращают в нуль удлинения и сдвиги срединной поверхности. Отсюда ясно, что данные смещения могут быть только либо смещениями чистого изгиба оболочки, либо смещениями оболочки как твердого целого.

Следовательно, в общем решении уравнений безмоментной теории всегда присутствуют смещения чистого изгиба на равных правах со смещениями оболочки как твердого тела. Физически это означает, что абсолютно гибкая оболочка допускает появление данных смещений, не оказывая им никакого сопротивления.

При постановке задач безмоментной теории смещения чистого изгиба должны быть либо вовсе устранены, либо, по крайней мере, надлежащим образом ограничены. Это замечание касается не только абсолютно гибких оболочек (форма которых в противном случае будет неопределенной), но и оболочек, способных сопротивляться изгибу, однако находящихся в таком напряженном состоянии, когда напряжениями от моментов по сравнению с напряжениями от усилий можно пренебречь. Действительно, для подобных оболочек наличие существенно больших смещений чистого изгиба будет несовместимо с предположением о малости напряжений изгиба.

Лекция 7.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Система дифференциальных уравнений (3), определяющая в безмоментной теории усилия, имеет второй порядок. Соответственно второй порядок имеет и система (4), определяющая смещения. Однако входящие в правые части уравнений этой системы усилия сами являются решениями системы второго порядка.

Отсюда смещения в безмоментной теории подчиняются системе дифференциальных уравнений четвертого порядка, которая может быть написана, если подставить в уравнения (3) усилия T_1^* , T_2^* , S^* , выраженные через деформации, а тем, в свою очередь, через смещения. Не будем, однако, этого делать, поскольку всегда удобнее расчленять решение на два последовательных этапа – определение усилий из системы (3) и определение смещений из системы (4). Следовательно, для смещений в безмоментной теории получаются дифференциальные уравнения вдвое более низкого порядка, чем в общей (моментной) теории оболочек, откуда следует, что и число краевых условий, которыми можно распорядиться, в первой теории будет вдвое меньше числа краевых условий во второй теории. В безмоментной теории на каждом краю оболочки может быть задано лишь два граничных условия.

Рассмотрим (для определенности) случай, когда границей оболочки является линия $\alpha_1 = \text{const}$. В общей теории оболочек на этом краю должны быть заданы величины:

$$T_1, T_{12} + \frac{M_{12}}{R_2}, \quad T_{1n} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2}, \quad M_1$$

(коль скоро граничные условия формулируются в напряжениях).

В безмоментной теории

$$T_{1n} = T_{2n} = M_1 = M_2 = M_{12} = M_{21} = 0$$

во всех точках срединной поверхности, а следовательно, и на границах оболочки.

Отсюда следует, что края оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии, должны быть свободны от внешней краевой нагрузки в виде перерезывающих сил и изгибающих моментов. Безмоментная оболочка может нести лишь тангенциальную краевую нагрузку, в соответствии с чем на ее рассматриваемом краю могут действовать лишь усилия T_1 и $S = T_{12}$, в которых, следовательно, и должно быть сформулировано краевое условие.

Рассмотрим далее случай, когда граничные условия задаются в смещениях. Тогда, для определенности решения уравнений общей теории оболочек, надо задать (на краю $\alpha = \text{const}$) величины:

$$u_1, u_2, \omega, \vartheta_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}.$$

В безмоментной теории распоряжаться краевыми смещением ω и углом поворота ϑ_1 уже нельзя, так как задание их непосредственно отражается на краевых значениях соответствующих обобщенных сил T_{1n} и M_1 . Приняв, например, на границе оболочки $\omega = \vartheta_1 = 0$ (т. е. «заделав» край в отношении нормального смещения и угла поворота), разумеется, уже невозможно считать, что на этом же краю $T_{1n} = 0$, $M_1 = 0$, так как последнее противоречит первому. Из сказанного следует, что на краю безмоментной оболочки можно распоряжаться лишь компонентами вектора смещений, касательными к срединной поверхности, т. е. u_1 и u_2 , в которых и должны формулироваться граничные условия безмоментной теории, если они задаются в смещениях. Необходимо далее учесть, что дифференциальные уравнения безмоментной теории в усилиях и в смещениях имеют разный порядок – соответственно второй и четвертый. Следствием является, что краевые условия для безмоментной оболочки не могут быть заданы полностью только в усилиях. Половина их обязательно должна быть задана в смещениях. Эта принудительность задания половины краевых условий в смещениях имеет следующий физический смысл: как было указано в предыдущем параграфе, оболочка, не сопротивляющаяся изгибу, является не жестким телом, а механизмом, свободно допускающим смещения, соответствующие чистому изгибу. Надлежащим тангенциальным закреплением краев такие смещения, как правило, могут быть устранены, т. е. оболочка может быть превращена в жесткую систему. Для этой цели предназначены и должны быть использованы те «принудительные» граничные условия, о которых шла речь выше.

Остающиеся краевые условия могут быть заданы как в усилиях, так и в смещениях. В том случае, если все эти краевые условия заданы в усилиях – задача безмоментной теории будет статически определимой (напряжения в оболочке могут быть найдены независимо от смещений). Если же хотя бы одно из граничных условий задано в смещениях, то задача безмоментной теории будет статически неопределимой.

В частном случае все граничные условия для безмоментной оболочки могут быть сформулированы в смещениях. Полной тангенциальной заделке краев такой оболочки соответствуют равенства $u_1 = u_2 = 0$, имеющие место на каждом ее краю.

Условия существования безмоментного напряженного состояния

Безмоментная оболочка не может быть нагруженной по своему краю ни перерезывающими усилиями, ни моментами. Углы поворота и нормальные смещения на ее краях не должны быть стеснены. И, наконец, на ее краях необходимо задать такие граничные условия (в касательных смещениях), которые обеспечили бы надлежащее ограничение величины смещений чистого

изгиба (что иногда бывает невозможно). Нарушение любого из перечисленных требований равносильно нарушению безмоментности напряженного состояния – в большей или меньшей мере. Однако, будучи необходимыми, эти требования не являются достаточными: помимо них имеются дополнительные условия, при нарушении которых безмоментное напряженное состояние не может существовать.

Еще одним источником противоречивости безмоментной теории является то, что ее уравнения определяют усилия в оболочке вне зависимости от соотношений неразрывности срединной поверхности, которые при этом оказываются в большей или меньшей мере нарушенными. Если форма оболочки и действующая на нее поверхностная нагрузка имеют плавный характер, так что R_1 , R_2 , h , p_n , p_1 , p_2 при дифференцировании по α_1 , α_2 не возрастают существенно, то для удовлетворения условиям неразрывности достаточно предположить наличие малых изгибающих моментов и перерезывающих усилий – таких, какими в уравнениях равновесия элемента оболочки допустимо пренебречь. Иначе будет, если кривизна оболочки, ее толщина или нагрузка на нее в некоторых сечениях изменяются скачкообразно. Тогда в тех же сечениях скачкообразно будут изменяться (по безмоментной теории) и деформации, существенно нарушая сплошность срединной поверхности. При этом для удовлетворения условиям сплошности надо предположить в районах указанных сечений наличие значительных перерезывающих усилий и моментов, что равносильно отказу от использования (по крайней мере в соответствующих районах оболочки) безмоментной теории. Можно предвидеть, что это замечание останется и в тех случаях, когда радиусы кривизны, толщина или нагрузка на оболочку хотя и не терпят разрыва, но тем не менее изменяются в некоторых сечениях достаточно резко.

Из сказанного, в частности, следует, что безмоментная оболочка не может работать на сосредоточенные силы, перпендикулярные к ее срединной поверхности. Напряженное состояние в оболочке, нагруженной такими силами, будет моментным (по крайней мере, в окрестностях точек приложения этих сил).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судостроение, 1962.
2. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. – М.: Стройиздат, 1983.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972.