Навчальний посібник.

Теоретична механіка. Теорія та задачі.

Статика.

Солодов В.Г.
Авершин А.Г.
Стародубцев Ю.В.
Хандримайлов А.А.
Красніков С.В.

Доповнено та відредаговано 2016.

ВСТУП

Механіка вивчає стан спокою або руху тіл під дією сил. Залежно від природи досліджуваних тіл, механіка підрозділяється на *механіку твердого тіла*, *механіку деформованого тіла* й *механіку рідин та газів.*

В цьому виданні ми будемо мати справу з механікою твердих тіл, інакше – теоретичною механікою. Тверді тіла не деформуються під дією прикладених сил – це означає, що відстані між будь-якими двома точками тіла не змінюються під дією прикладених сил.

Механіка твердих тіл вивчається в трьох частинах: *статика, кінематика* й *динаміка.* Статика має справу з твердими тілами в стані спокою. Кінематика вивчає рух твердих тіл без урахування причин цього руху, а динаміка вивчає тверді тіла в русі під дією сил.

Кожне тіло у світі існує в просторі й часі. Для визначення положення тіла в просторі потрібна система відліку й відповідна система координат. Концепція часу є істотною для встановлення зв'язку в послідовності положень тіла в просторі протягом руху.

Якщо розмір тіла нехтовно малий або не є суттєвим для опису руху тіла, таке тверде тіло визначається як *частка* або *матеріальна точка.* Це – одна з абстракцій теоретичної механіки. Інше фундаментальне абстрактне поняття – *сила* – визначається як міра взаємодії тіл.

Основні закони теоретичної механіки являють собою фундаментальні принципи, які засновані на експериментальних спостереженнях за рухом тіл. Найпростіша система таких принципів становить *аксіоми системи сил, закони руху Галілея-Ньютона*.

РОЗДІЛ І. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Статика – розділ механіки, в якому викладене загальне вчення про сили й досліджуються умови рівноваги систем сил і твердих тіл.

До основних абстрактних понять статики відносяться: *матеріальна точка, абсолютно тверде тіло* й *сила* – як міра взаємодії тіл.

Порівняння різних систем сил засновано на відношенні *еквівалентності* [3, стор. 5].

Фундаментом статики є аксіоми, які сформульовані на підставі досвіду й спостережень, і приймаються без доказів.

Основними завданнями статики є *еквівалентні спрощення систем сил*, діючих на тверде тіло, і *умови рівноваги систем сил*. Ці завдання розв'язуються на основі геометричних властивостей векторів сил, тому даний розділ називається *геометричною статикою*, на відміну від *аналітичної статики*, заснованої на *принципі віртуальних переміщень*, що викладається в динаміці. Досліджуване в статиці вчення про сили справедливо й у динаміці. Таким чином, статика є окремим випадком динаміки.

У механіці розглядають вільні тіла, рух яких не обмежений іншими тілами, і невільні тіла, переміщення яких обмежує будь-яке інше тіло. Матеріальні об'єкти, які обмежують свободу переміщення даного твердого тіла, називаються з*в'язками*. Сила, з якою зв'язок діє на тверде тіло, обмежуючи його переміщення, називається *реакцією зв'язку (опори)*. Однією з центральних аксіом механіки є *аксіома зв'язку,* яка стверджує: *будь-який зв'язок можна відкинути й замінити реакцією без порушення рівноваги*. Реакції зв'язків є вторинними щодо діючих на тіло *активних сил* у тому розумінні, що їхня величина залежить від активних сил.

Більшість теорем і законів динаміки формулюється для тіл, звільнених від зв'язків , тому основним при розв'язанні завдань статики є вміння правильно заміняти відкинуті зв'язки реакціями [3, стор.9].

І. Плоска система сил

Система розміщених у площині сил, діючих на тверде тіло, приводиться або до рівнодіючої сили, або до пари сил, або є врівноваженою [1, стор.59, 3, стор.39]. В останньому випадку загальною умовою рівноваги є рівність нулю головного вектора сил системи й головного моменту відносно довільного центра.

У площині залишається всього три змістовних умови рівноваги системи сил: проекції головного вектора на осі в площині та проекція головного моменту на вісь, перпендикулярну площині, мають дорівнювати нулю:

$$\sum X_i = 0;\ \sum Y_i = 0;\ \sum M_{iA} = 0\ .$$

При порушенні однієї з умов тіло буде переміщуватись під дією неврівноваженої системи сил.

При наявності невідомих сил ці умови перетворюються в рівняння для визначення невідомих. Звичайно в ролі невідомих виступають реакції зв'язків. Таким чином, із трьох рівнянь рівноваги плоскої системи сил можна визначити три невідомі реакції. Умовою успіху є нерівність нулю визначника системи. При меншому числі невідомих система рівнянь рівноваги може бути несумісною – рівновага може не досягатися, а при більшому числі невідомих реакцій їхнє значення визначити неможливо.

1.1. Визначення реакцій опор твердого тіла

Задача 0.1

Схема закріплення бруса (рРис. 0.1); $P = 20$ кН, $M = 10$ кН$\cdot$м, $F = 40$ кН. Визначити реакції опор у точках *A* та *B*, викликані зовнішніми навантаженнями.

Р і ш е н н я : Розглянемо систему зрівноважених сил, прикладених до конструкції. Дію зв'язків на конструкцію замінюємо їх реакціями (рРис. 0.2).

Нерухомий шарнір у точці *B* замінюємо реакціями X_B, Y_B. Рухомий шарнір у точці *A* – реакцією R_A.

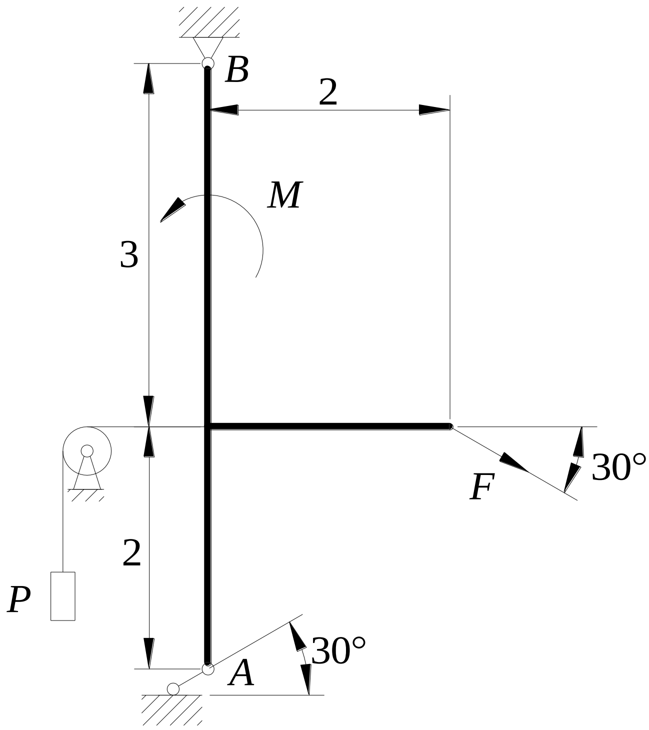


Рис. 0.1

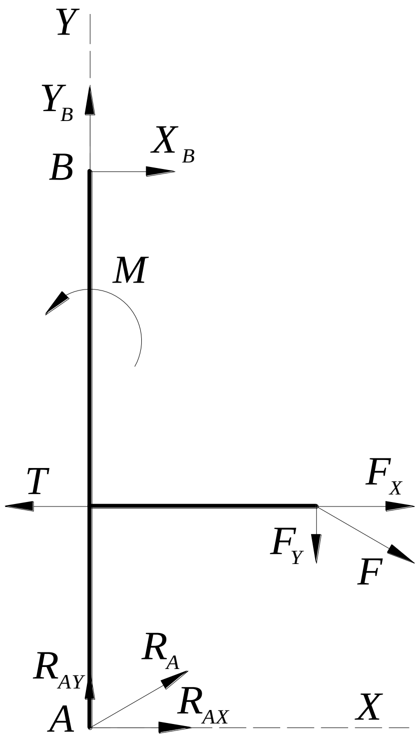


Рис. 0.2

За теоремою Вариньона розкладемо силу F на складові F_X та F_Y, а реакцію R_A – на складові R_{AX} та R_{AY}. Отримаємо:

$$F_X = F \cdot \cos 30° = 34{,}64 \text{ кН},$$

$$F_Y = F \cdot \sin 30° = 20 \text{ кН},$$

$$R_{AX} = R_A \cdot \cos 30°,$$

$$R_{AX} = R_A \cdot \sin 30°.$$

Сила натягу троса $T = P$ (за модулем).
Система рівнянь рівноваги матиме вигляд:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad X_B - P - R_A \cdot \cos 30° + F_X = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad Y_B + R_A \cdot \sin 30° - F_Y = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad -X_B \cdot 5 + M + P \cdot 2 - F_X \cdot 2 - F_Y \cdot 2 = 0. \qquad (3)$$

Із рівняння (3) знаходимо X_B:

$$X_B = \frac{M + P \cdot 2 - F_X \cdot 2 - F_Y \cdot 2}{5} = -11{,}86 \text{ кН}.$$

Із рівняння (1) знаходимо R_A:

$$R_A = \frac{X_B - P + F_X}{\cos 30^\circ} = 3{,}22 \text{ кН}.$$

Із рівняння (2) знаходимо Y_B:

$$Y_B = -R_A \cdot \sin 30^\circ + F_Y = 17{,}22 \text{ кН}.$$

Знак мінус у відповідях вказує на те, що реакції спрямовані в протилежному напрямку від передбачуваних.

Задача 0.2

У прикладі розглядається три способи закріплення балки складної форми. Необхідно визначити реакції обраної опори та знайти той спосіб кріплення, при якому реактивний момент має найменший модуль.

Дано: схеми закріплення бруса (рис. 1 а, б, в); $P = 5$ кН, $M = 8$ кН$\cdot$м, $q = 1{,}2$ кН/м. Визначити реакції опор для того способу кріплення бруса, при якому момент M_A у закладенні *A* має найменший модуль.

Р і ш е н н я : Розглянемо систему врівноважених сил, прикладених до конструкції (рРис. 0.3). Дію зв'язків на конструкцію заміняємо їхніми реакціями (рРис. 0.4): (а) X_A, Y_A, M_A; у схемі (б) Y'_A, R_B, M'_A; (в) X_B, Y_B, M''_A. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q замінимо рівнодіючою:

$$Q = q \cdot 2 = 2{,}4 \text{ кН}.$$

Щоб з'ясувати, в якому випадку момент у закладенні є найменшим, знайдемо його для всіх трьох схем, не визначаючи поки що інших реакцій.

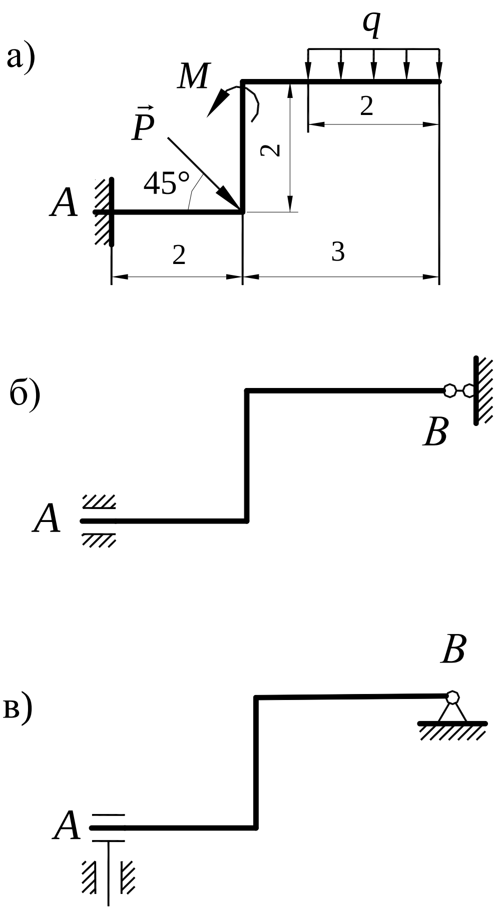


Рис. 0.3

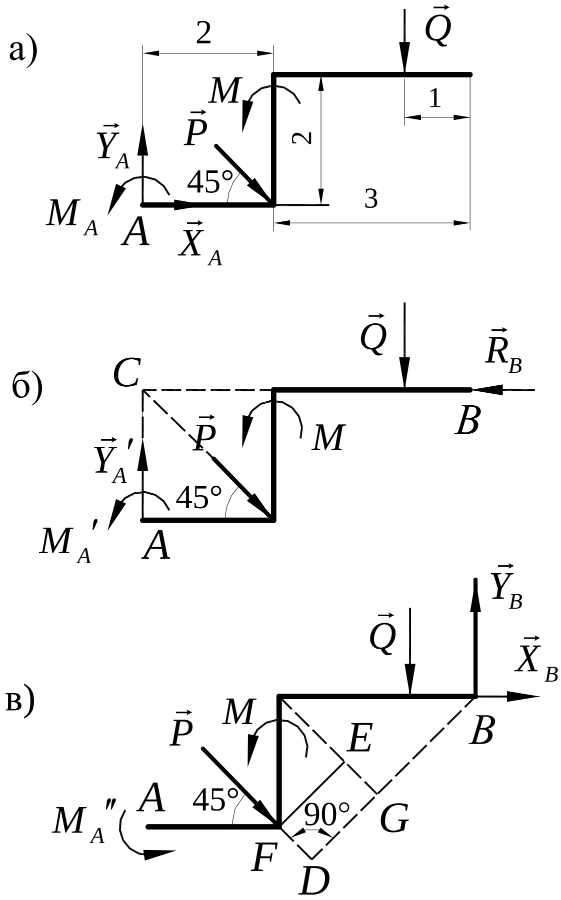


Рис. 0.4

Для схеми (а):

$$\sum M_{iA} = 0 : M_A - P \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ + M - Q \cdot 4 = 0;$$

чисельно одержимо:

$$M_A = P \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ - M + Q \cdot 4 = 8.671 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схеми (б):

$$\sum M_{iC} = 0 : M'_A + M - Q \cdot 4 = 0;$$

чисельно одержимо:

$$M'_A = -M + Q \cdot 4 = 1{,}6 \ \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схеми (в):

$$\sum M_{iB} = 0: M''_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0;$$

чисельно одержимо:

$$M''_A = -P \cdot BD - M - Q = -28{,}08 \ \text{ кН} \cdot \text{м},$$

тут

$$BD = DG + GB = \sqrt{2} + 3 \big/ \sqrt{2} = 3{,}536 \text{м}.$$

Таким чином, момент у закладенні буде найменшим при закріпленні бруса за схемою (б).

Визначимо інші опорні реакції для цієї схеми:

$$\sum X_i = 0: P \cdot \cos 45^\circ - R_B = 0,$$

$$\sum Y_i = 0: \ Y'_A - P \cdot \sin 45^\circ - Q = 0,$$

звідки

$$R_B = P \cdot \cos 45^\circ = 3{,}54 \ \text{кН};$$

$$Y'_A = P \cdot \sin 45^\circ + Q = 5{,}94 \ \text{ кН}.$$

Таблиця 0.1

Результати розрахунку зЗадача 0.2

Схема (рис. 1.3)	Момент $M_A(M'_A, M''_A)$, кН·м	Сили, кН	
		Y'_A	R_B
а	8. 671	–	–
б	1.6	5.94	3.54

в	–28.08	–	–

Задача 0.3

У прикладі розглядається рівновага бруса з ламаною віссю в площині під дією плоскої системи сил.

Дано: схеми закріплення бруса (рРис. 0.5 а,б,в); $P = 10$ кН, $M = 15$ кН$\cdot$м, $q = 4$ кН/м. Визначити реакції опор для того способу закріплення бруса, при якому реакція Y_A має найменший модуль.

Р і ш е н н я : Розглянемо систему врівноважених сил, прикладених до конструкції. Дію зв'язків на конструкцію заміняємо їхніми реакціями (рРис. 0.6): у схемі (а) – X_A, Y_A, M_A; у схемі (б) – Y'_A, X'_A, R_B; і в схемі (в) – X_B, Y_B, M''_A.

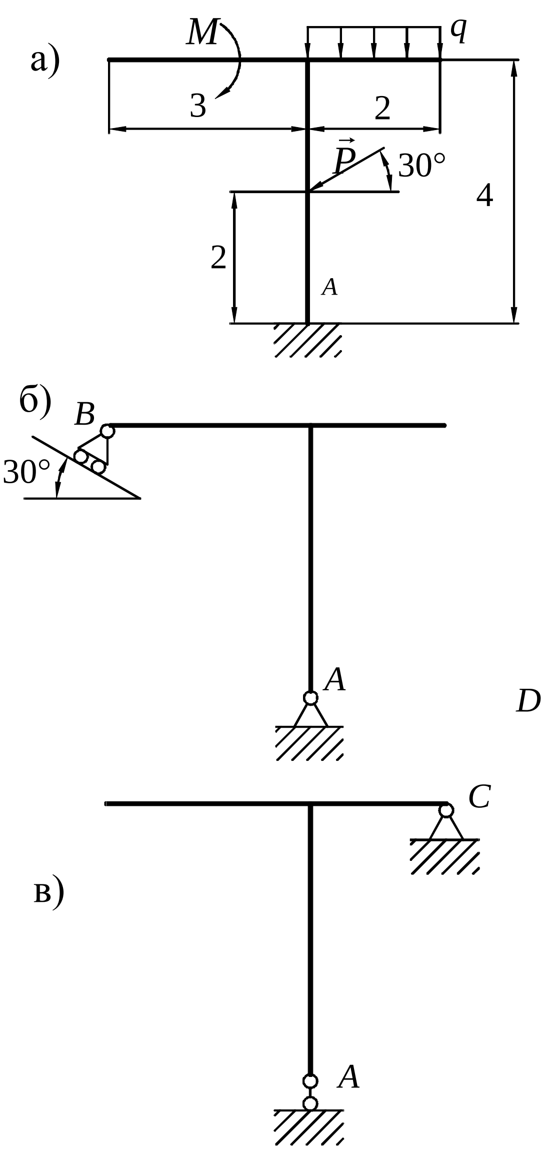


Рис. 0.5

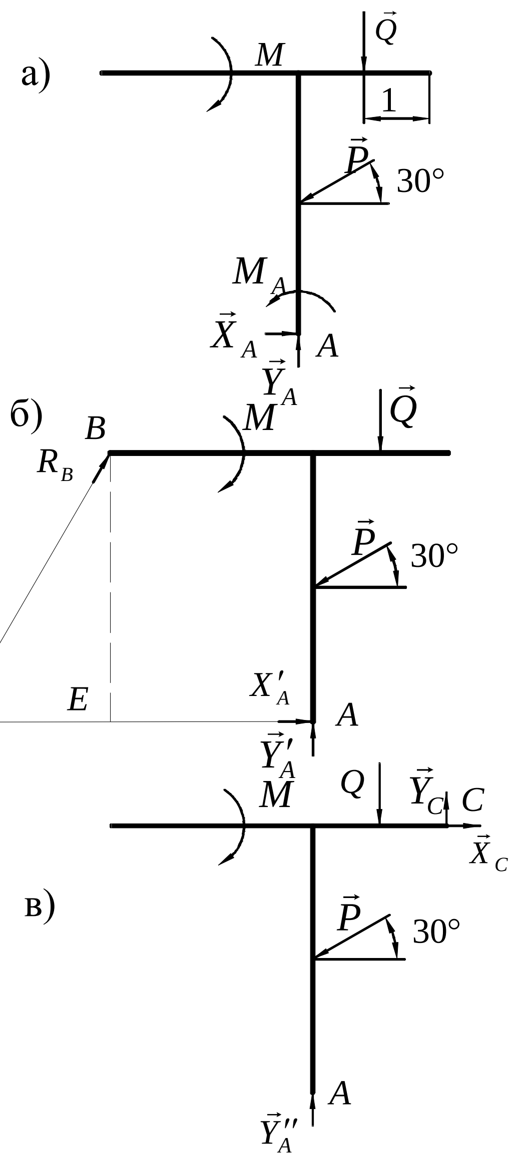


Рис. 0.6

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q замінимо рівнодіючою:

$$Q = q \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}.$$

Знайдемо поки що тільки реакцію Y_A для всіх схем і з'ясуємо, в якому з трьох випадків вона має найменший модуль

Для схеми (а):

$$\sum Y_i = 0: \quad -Q - P \cdot \sin 30^\circ + Y_A = 0;$$

чисельно

$$Y_A = P\cdot\sin 30^\circ + Q = 13 \text{ кН}.$$

Для схеми (б):

$\sum M_{iD} = 0:$

$-M + P\cdot\cos 30^\circ\cdot 2 - P\cdot\sin 30^\circ\cdot AD + Y_A'\cdot AD - Q\cdot\left(AD+1\right) = 0$;

тут

$$AD = AE + DE = AE + BE\cdot\operatorname{tg}30^\circ = 3 + 4\cdot\operatorname{tg}30^\circ = 5.3 \text{ м}.$$

Чисельно

$$Y_A' = \frac{M - P\cdot\cos 30^\circ\cdot 2 + P\cdot\sin 30^\circ\cdot AD + Q\cdot\left(AD+1\right)}{\mathrm{AD}} = 14{,}07 \text{ кН}.$$

Для схеми (в):

$$\sum M_{iC} = 0:\ -M - P\cdot\cos 30^\circ\cdot 2 + P\cdot\sin 30^\circ\cdot 2 - Y_A''\cdot 2 + Q\cdot 1 = 0;$$

Обчислюючи, одержимо

$$Y_A'' = \frac{Q - M + P\cdot\sin 30^\circ\cdot 2 - P\cdot\cos 30^\circ\cdot 2}{2} = -7{,}16 \text{ кН}.$$

Таким чином, реакція Y_A буде найменшою при закріпленні бруса за схемою (в).

Визначимо інші опорні реакції для цієї схеми:

$$\sum \mathrm{X_i} = 0:\ X_C - P\cdot\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum \mathrm{Y_i} = 0:\ Y_A'' - P\cdot\sin 30^\circ - Q + Y_C = 0;$$

звідки

$$X_C = P\cdot\cos 30^\circ = 8{,}66 \text{ кН};$$

$$Y_C = P\cdot\sin 30^\circ + Q - Y_A'' = -1{,}24 \text{ кН}.$$

Таблиця 0.2

Результати розрахунку зЗадача 0.23

Схема (рРис. 0.5)	Сила $Y_A\,(Y'_A, Y''_A)$, кН	Сили, кН	
		X_C	Y_C
а	13	–	–
б	14.07	–	–
в	-7.16	8.66	20.16

Задача 0.4

Колесо (рис. 1.7) масою m = 2000 кг та радіусом r = 60 см упирається в камінь висотою 8 см (схематична схема на рис. 1.8). Визначити горизонтальне зусилля *P*, необхідне для перетаскування колеса через камінь.

Дано: m = 2000кг; r = 60 см; h (каменю) = 8 см. Знайти: *P* -?

Рис. 1.7

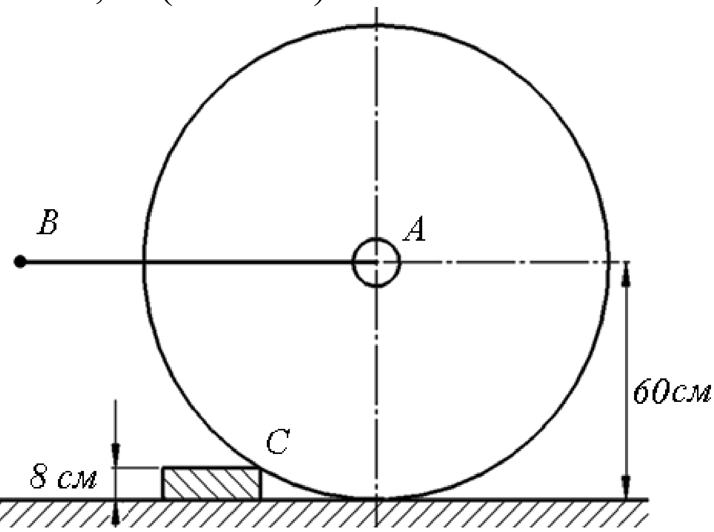


Рис. 1.8

Р і ш е н н я : Розглянемо рівновагу колеса за розрахунковою схемою, що зображено на рис. 1.9. Коли колесо відривається від дороги, то камінь діє наче нерухомий шарнір. На колесо діють сили: горизонтальне зусилля *P*, сила ваги *G* й реакція R_C в точці *C*. Для того, щоб колесо перемістилося через камінь необхідно, щоб момент сили *P* навколо точки *C* був більше, ніж момент сили ваги *G*.

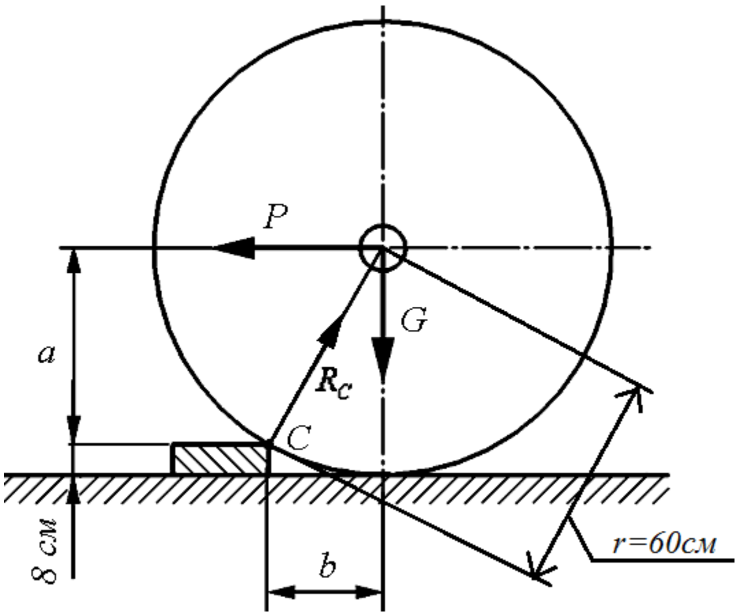


Рис. 1.9

Запишемо рівняння моментів відносно точки *C*:

$$\sum M\left(F_i\right)_C = 0:\ R_C \cdot 0 + G \cdot b - P \cdot a = 0 \qquad (1)$$

де: $a = 60 - 8 = 52$ см, $\qquad b = \sqrt{r^2 - a^2} = 30$ см.

Підставляємо значення a й b у рівняння моментів (1) і виражаємо *P*. Одержуємо:

$$P = G\frac{b}{a} = 2000 \cdot 9.8\frac{30}{52} = 11.392 \text{ кН}$$

Результати вирішення задачі 1.4: колесо перекотиться через камінь на разі прикладення зусилля $P \geq 11.392$ кН.

Задача 0.5

На круглому гладкому циліндрі з горизонтальною віссю й радіусом $OA = 0{,}1$ м лежать дві кульки А і В; вага першої 1 Н, другого 2 Н. Кульки з'єднані ниткою АВ довжиною 0,2 м (рис. 1.10). Знайти: кути φ_1 й φ_2, що становлять радіусами ОА й ОВ з вертикальною прямою ОС у положенні рівноваги кульки А і В, тиск N_1 й N_2 кульок на циліндр у точках А и В. Розмірами кульок зневажити.

Дано: OA = 0,1 м; AB = 0,2 м; A = 1 H; B = 2 H. Знайти: φ_1, φ_2, N_1, N_2 - ?

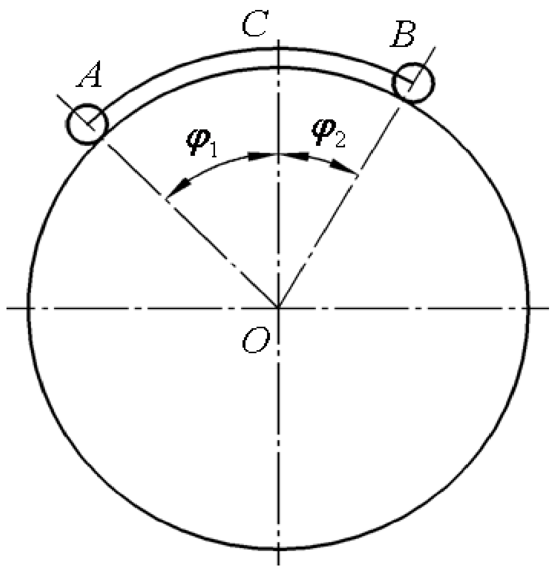


Рис. 1.10

Р і ш е н н я : Зв'язок двох кульок *A* й *B* замінюємо їх реакціями (рис. 1.11). Становимо та вирішуємо рівняння рівноваги.

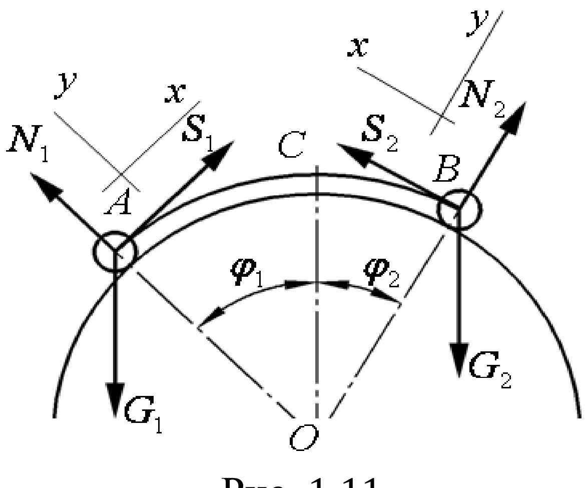


Рис. 1.11

Рівняння рівноваги для кульки A:

$$\sum X_i = 0;\ S_1 - G_1 \cdot \sin\varphi_1 = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0;\ N_1 - G_1 \cdot \cos\varphi_1 = 0. \qquad (2)$$

Рівняння рівноваги для кульки B:

$$\sum X_i = 0;\ S_2 - G_2 \cdot \sin\varphi_2 = 0; \tag{3}$$

$$\sum Y_i = 0;\ N_2 - G_2 \cdot \cos\varphi_2 = 0. \tag{4}$$

За третім законом Ньютона $S_1 = S_2$. Дорівнюючи рівняння (1) і (3) одержуємо:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}. \tag{5}$$

За умовою $\varphi_1 + \varphi_2 = s/r$. Виражаємо φ_1 через φ_2:

$$\varphi_1 = 2 - \varphi_2 \text{ (у радіанах)};\quad \varphi_1 = 114.55 - \varphi_2 \text{ (у градусах)}. \tag{6}$$

Підставляємо вираження (6) у рівняння (5):

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\sin 2 \cdot \cos\varphi_2 - \cos 2 \cdot \sin\varphi_2}{\sin\varphi_2};$$

$$2 = \sin 2 \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi_2 - \cos 2;$$

Звідки визначаємо кут φ_2:

$$\mathrm{tg}\,\varphi_2 = \frac{\sin 2}{2 + \cos 2} = \frac{0.91}{2 - 0.415};\quad \varphi_2 = 29.8°.$$

Кут φ_1 визначаємо, підставивши значення φ_2 в рівняння (6):

$$\varphi_1 = 114.55 - \varphi_2 = 84.75°.$$

Підставляючи значення φ_1 й φ_2 у рівняння (2), (4) знаходимо реакції опор N_1 і N_2:

$$N_1 = G_1 \cdot \cos\varphi_1 = 0.0092 \text{ Н}.$$

$$N_2 = G_2 \cdot \cos\varphi_2 = 0.173 \text{ Н}.$$

Результати вирішення задачі 1.5:

φ_1 = 84,75°; φ_2 = 29,8°; N_1 = 0,0092 Н; N_2 = 0,173 Н.

Задача 0.6

Звідний міст AB (рис. 1.12, схематичне зображення на рис. 1.13) піднімається за допомогою двох брусів CD довжиною 8 м, масою $m_{CD} = 400$ кг, по одному з кожної сторони мосту.

Рис. 1.12

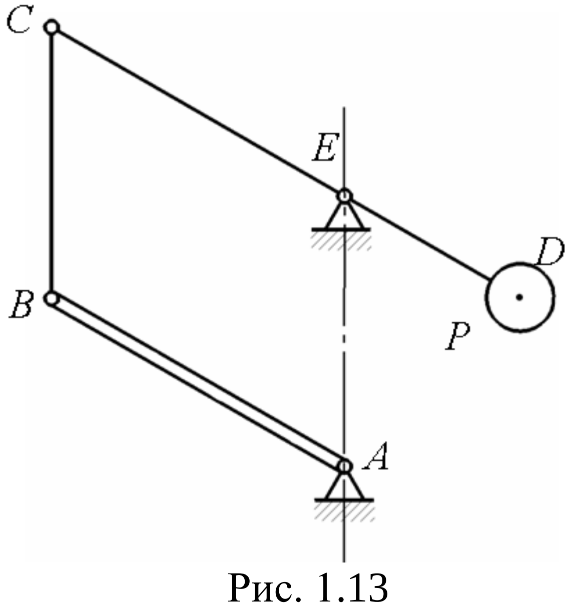


Рис. 1.13

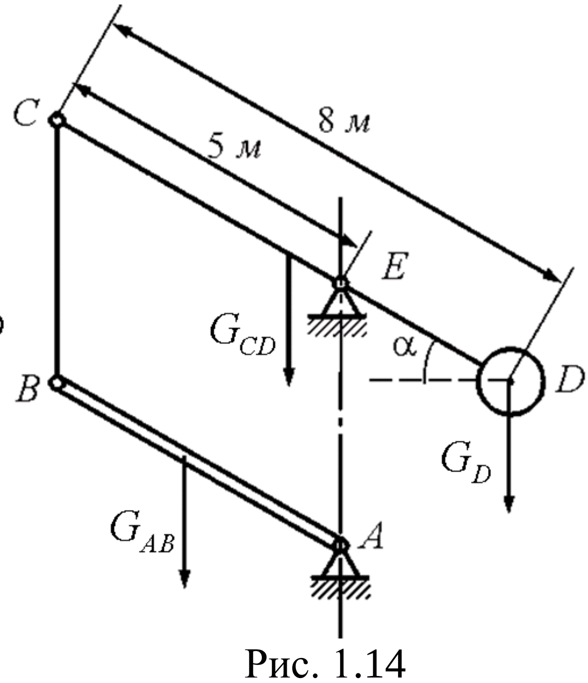


Рис. 1.14

Довжина мосту $AC = AE = 5$ м; довжина ланцюга $AC = BE$; маса мосту m_{AB} = 3000 кг й може вважатися прикладеним у середині AB. Знайти масу противаг m_D, що врівноважують міст.

Дано: $CD = 8$ м; $m_{CD} = 400$ кг; $AC = AE = 5$ м; $AC = BE$; m_{AB} = 3000 кг. Знайти: m_D - ?.

Р і ш е н н я : розрахункова схема зображена на рис. 1.14. На міст діють сили ваги мосту G_{AB}, двох брусів G_{CD} і сила ваги двох противаг G_D. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M\left(F_i\right)_E = 0;$$

$$2 \cdot m_{CD} \cdot g \cdot 1 \cdot \cos\alpha + m_{AB} \cdot g \cdot 2.5 \cdot \cos\alpha - 2 \cdot m_D \cdot g \cdot 3 \cdot \cos\alpha = 0;$$

У рівнянні рівноваги скорочуємо g й $\cos\alpha$. Знаходимо m_D:

$$m_D = \frac{m_{CD} \cdot 2 + m_{AB} \cdot 2.5}{6} = 1383.3 \text{ кг}.$$

Р е з у л ь т а т и в и р і ш е н н я з а д а ч і 1 . 6 : m_D = 1383,3 кг.

1.2. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої ферми

Найпростіша плоска ферма, розглядувана в теоретичній механіці, становить собою геометрично незмінну конструкцію, складену з прямолінійних стрижнів. Спрощений інженерний розрахунок ферми припускає невагомість стрижнів і з'єднання стрижнів ідеальними невагомими плоскими шарнірами; а діючі на ферму сили – прикладеними у вузлах. Перераховані припущення дозволяють знехтувати вигином, крутінням стрижнів.

Визначення зусиль у стрижнях ферми випереджається знаходженням реакцій опор ферми як твердого тіла на підставі рівнянь рівноваги виду

$$\sum X_i = 0;\ \sum Y_i = 0;\ \sum M_{iA} = 0\ .$$

Визначення розтягуючих або стискаючих зусиль у стрижнях способом вирізання вузлів зводиться до послідовного вирізання вузлів ферми із заміною розрізаних стрижнів зусиллями, спрямованими вздовж стрижнів. Розтяжні зусилля в стрижнях умовно вважаються позитивними й тому направляються від вузлів. У кожному вузлі одержуємо систему збіжних сил, рівновага якої в плоскому випадку описується двома умовами:

$$\sum X_i = 0;\ \sum Y_i = 0\ .$$

Для всієї ферми одержуємо систему пар рівнянь за кількістю вузлів. Вона може бути зв'язаною, і тоді застосовується метод виключення Ґаусса. На практиці складання системи рівнянь для вузлів починається з вузла, в якому беруть участь не більше двох невідомих зусиль. У цьому випадку рівняння системи розв'язуються послідовно по вузлах. Рівняння рівноваги останнього вузла не містять невідомих і використовуються для перевірки правильності рішення.

Спосіб перетинів розрахунку ферм і модифікація Риттера [1] використовують розсічення ферми на дві частини, які перебувають під дією не збіжної, а довільної плоскої системи сил, рівновага якої описується трьома умовами

$$\sum X_i = 0;\ \sum Y_i = 0;\ \sum M_{iA} = 0\ .$$

Модифікація Риттера спрямована на спрощення системи рівнянь рівноваги відсіченої частини й використає умови виду

$$\sum M_{iA} = 0; \quad \sum M_{iB} = 0; \quad \sum M_{iC} = 0,$$

де A, B і C – точки Риттера – точки сходження двох невідомих реакцій. Якщо два з трьох розсічених стрижнів паралельні, то одна точка Риттера зникає на нескінченності, і тоді використовуються умови виду

$$\sum X_i = 0;\ \sum M_{iA} = 0;\ \sum M_{iB} = 0,$$

Задача 0.7

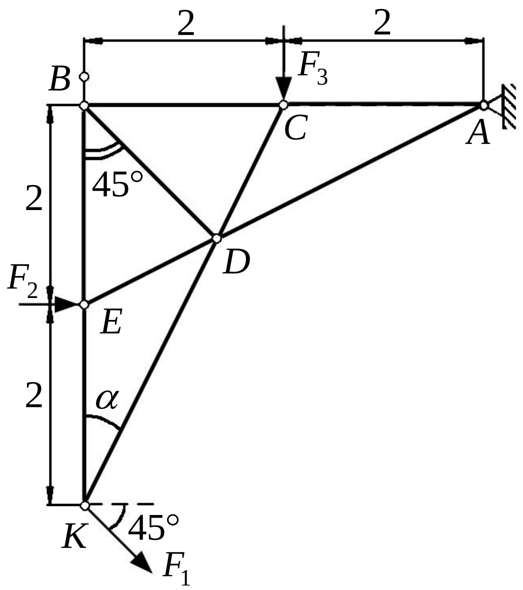


Рис. 0.15

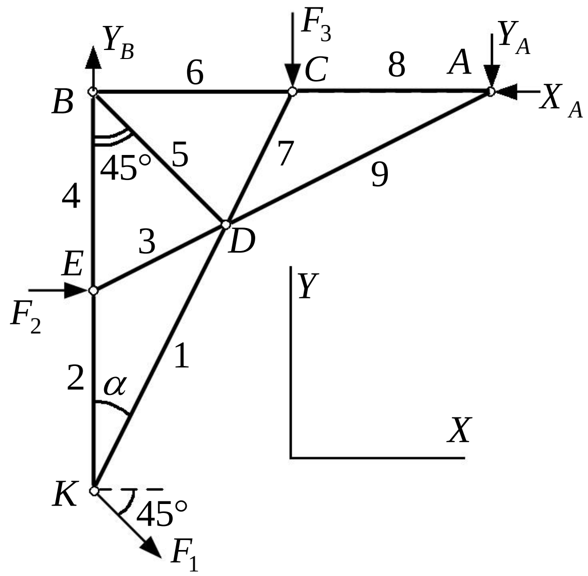


Рис. 0.16

Визначити зусилля в стрижнях даної ферми (рРис. 0.15) $F_1 = 3\,\text{кН}$, $F_2 = 4\,\text{кН}$, $F_3 = 5\,\text{кН}$.

Р і ш е н н я : Задамо літерне позначення вузлам ферми, а стрижні позначимо цифрами.

1) Відкинемо зв'язки й замінимо їхню дію реакціями (рРис. 0.16).

Введемо систему координат. Перевіримо ферму на статичну визначність:

Вузлів «В» – 6, стрижнів «С» – 9

$$C = 2 \cdot B - 3 \Rightarrow 9 = 2 \cdot 6 - 3,$$

отже, ферма статично визначувана.

Складаємо рівняння рівноваги сил, прикладених до ферми.

$$\sum F_{iX} = 0: \quad -X_A + F_2 + F_1 \cdot \cos 45° = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad Y_B - Y_A - F_3 - F_1 \cdot \cos 45° = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad -Y_B \cdot 4 + F_3 \cdot 2 + F_2 \cdot 2 + F_1 \cdot 8 \cdot \cos 45 = 0. \tag{3}$$

Із 1-го рівняння знаходимо:

$$X_A = F_2 + F_1 \cdot \cos 45° = 6{,}121\,\text{кН};$$

Із 3-го рівняння знаходимо:

$$Y_B \cdot = \frac{F_3 \cdot 2 + F_2 \cdot 2 + F_1 \cdot 8 \cdot \cos 45}{4} = 8{,}743\,\text{кН};$$

Із 2-го рівняння знаходимо:

$$Y_A = Y_B - F_3 - F_1 \cdot \cos 45° = 1{,}621\,\text{кН}.$$

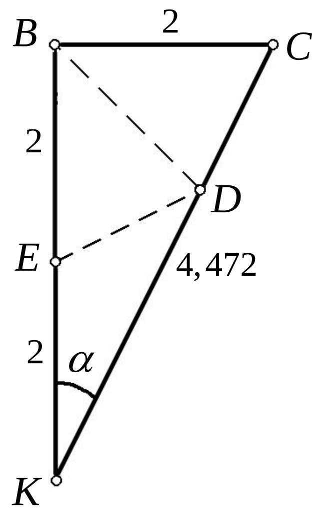


Рис. 0.17

2) Визначимо зусилля в стрижнях методом вирізання вузлів. Він полягає в послідовному вирізанні вузлів ферми й розгляданні їхньої рівноваги. Оскільки на вузол діє плоска збіжна система сил, для якої можна записати тільки два рівняння рівноваги, то вирізати вузли треба так, щоб невідомих сил було не більше двох. При складанні розрахункової схеми будемо вважати, що всі стрижні розтягнуті, тобто всі внутрішні зусилля направимо від вузла всередину стрижня. Для кожного вузла складаються рівняння рівноваги.

Для розрахунків необхідно визначити $\cos\alpha$ й $\sin\alpha$ (рРис. 0.17).

$$\cos(\alpha) = 0{,}894;$$

$$\sin(\alpha) = 0{,}447;$$

Починаємо вирізання з вузла *K*, оскільки тут невідомими є тільки два зусилля (рис. 18, а).

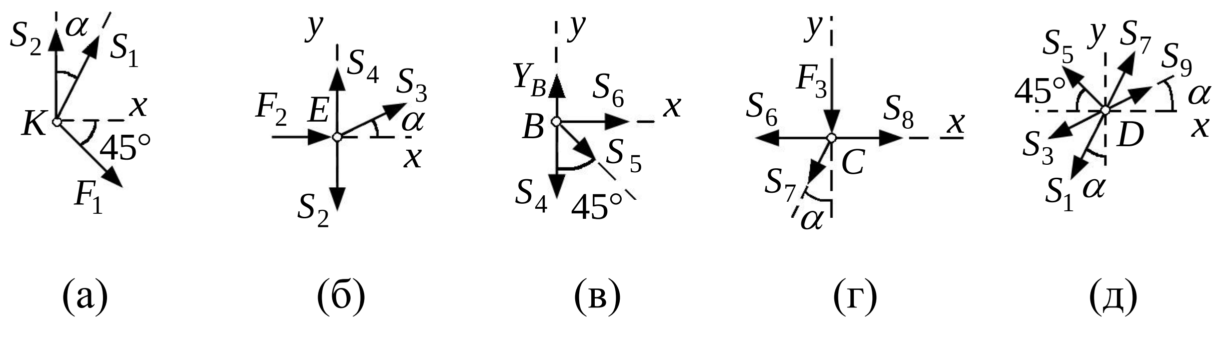


Рис. 0.7

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad S_1 \cdot \sin\alpha + F_1 \cdot \cos 45° = 0;$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad S_2 + S_1 \cdot \cos\alpha - F_1 \cdot \cos 45° = 0.$$

У результаті обчислень одержуємо:

$$S_1 = -\frac{F_1 \cdot \cos 45^\circ}{\sin \alpha} = -4,743\,\text{кН};$$

$$S_2 = -S_1 \cdot \cos \alpha + F_1 \cdot \cos 45^\circ = 6,364\,\text{кН}.$$

Знак «–» у відповіді вказує на те, то стрижень стиснений.

Вузол *E* (рРис. 0.7, б). Рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad S_3 \cdot \cos \alpha + F_2 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad S_4 + S_3 \cdot \sin \alpha - S_2 = 0;$$

У результаті обчислень одержуємо:

$$S_3 = -\frac{F_2}{\cos \alpha} = -4,472\,\text{кН};$$

$$S_4 = S_2 - S_3 \cdot \sin \alpha = 8,364\,\text{кН}.$$

Вузол *B* (рРис. 0.7, в). Рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad S_5 \cdot \cos 45^\circ + S_6 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad Y_B - S_4 - S_5 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

У результаті обчислень одержуємо:

$$S_5 = \frac{Y_B - S_4}{\cos 45^\circ} = 0,536\,\text{кН};$$

$$S_6 = S_5 \cdot \cos 45^\circ = -0,379\,\text{кН}.$$

Вузол *C* (рРис. 0.7, г). Рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad S_8 - S_7 \cdot \sin \alpha - S_6 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad -F_3 - S_7 \cdot \cos\alpha = 0;$$

У результаті обчислень одержуємо:

$$S_7 = -\frac{F_3}{\cos\alpha} = \text{-5,59 кН};$$

$$S_8 = S_7 \cdot \sin\alpha + S_6 = -2{,}879 \text{ кН}.$$

Вузол D (рРис. 0.7, д). Рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad S_9 \cdot \cos\alpha + S_7 \cdot \sin\alpha - S_5 \cdot \cos 45° -$$
$$-S_3 \cdot \cos\alpha - S_1 \cdot \sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad S_7 \cdot \cos\alpha + S_9 \cdot \sin\alpha + S_5 \cdot \cos 45° -$$
$$-S_3 \cdot \sin\alpha - S_1 \cdot \cos\alpha = 0;$$
;

У результаті обчислень одержуємо:

$$S_9 = \frac{-S_7 \cdot \sin\alpha + S_5 \cdot \cos 45° + S_3 \cdot \cos\alpha + S_1 \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{-3,625 кН};$$

Оскільки зусилля у всіх стрижнях визначені, останні рівняння використаємо для перевірки.

$$S_9 = \frac{-S_7 \cdot \cos\alpha - S_5 \cdot \cos 45° + S_3 \cdot \sin\alpha + S_1 \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{-3,625 кН}.$$

Результати розрахунків заносимо в таблицю 1.3. Знак «–» у відповіді вказує на те, то стрижень стиснений.

Таблиця 0.3

Результати розрахунку зЗадача 0.27

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Знак	–	+	–	+	+	–	–	–	–
Сила	4,74	6,36	4,47	8,36	0,54	0,38	5,59	2,88	3,63

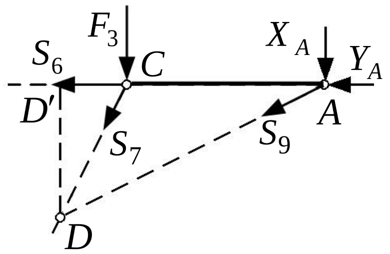


Рис. 0.8

3) Визначимо зусилля в 6 і 7 стрижнях методом перетинів. Розсічемо ферму на дві частини так, щоб у перетині опинилися відзначені стрижні. Відкинемо ліву частину, а її дію на конструкцію, що залишилася, замінимо зусиллями в стрижнях $\vec{S}_6$, $\vec{S}_7$, $\vec{S}_9$, (рРис. 0.8). Припускаючи, що стрижні розтягнуті, направимо всі зусилля у бік відкинутої частини ферми.

Для 6-го стрижня складемо рівняння моментів відносно точки *D:*

$$\sum M_{iD} = 0: \quad S_6 \cdot DD' - F_3 \cdot CD' - X_A \cdot AD' + Y_A \cdot DD' = 0;$$

$$S_6 = \frac{F_3 \cdot CD' + X_A \cdot AD' - Y_A \cdot DD'}{DD'} = -0{,}379 \text{ кН}.$$

Для 7-го стрижня – рівняння моментів відносно точки *A:*

$$\sum M_{iA} = 0: \quad S_7 \cdot \cos\alpha \cdot AC + F_3 \cdot AC = 0;$$

$$S_7 = -\frac{F_3 = 0}{\cos\alpha} = -5{,}59 \text{ кН}.$$

Для 9-го стрижня – відносно точки С*:*

$$\sum M_{iC} = 0: \quad -S_9 \cdot \sin\alpha \cdot AC - Y_A \cdot AC = 0;$$

$$S_7 = -\frac{F_3 = 0}{\cos\alpha} = -5{,}59 \text{ кН}.$$

Задача 0.8

На ферму (рРис. 0.90, а) діють сили $\vec{P}_1 = 2$ кН; $\vec{P}_2 = 4$ кН; $\vec{P}_3 = 6$ кН; відстань $a = 4$ м. Визначити: зусилля, що виникають у всіх стрижнях конструкції. Додатково способом Риттера визначити зусилля в стрижнях 4 і 5.

Р і ш е н н я : *1. Визначення реакцій опор.* Покажемо зовнішні сили, прикладені до ферми: активні сили $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, і реакції опор *A* і *B* (рРис. 0.90, б).

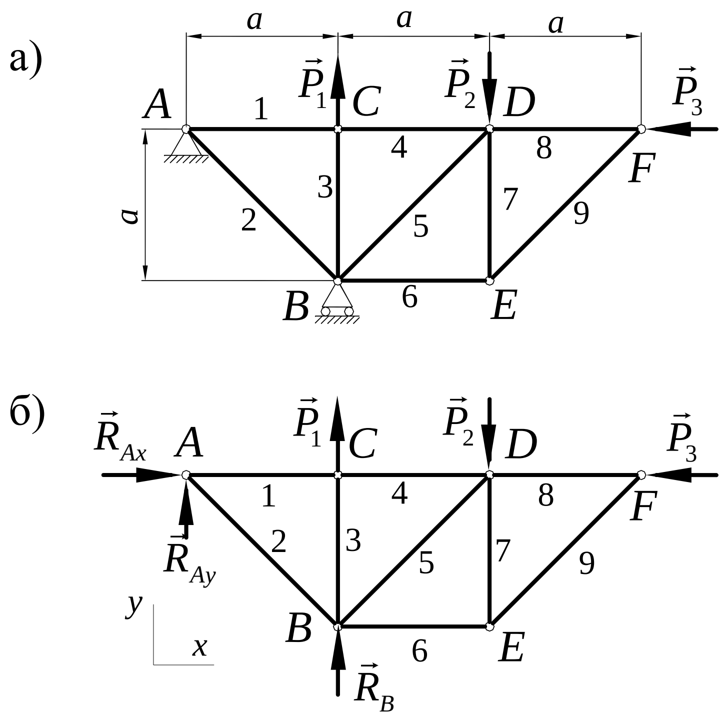


Рис. 0.90

Оскільки лінія дії реакції опори *A* невідома, визначимо її складові по координатних осях – $\vec{X}_A$ і $\vec{Y}_A$. Опора *B* – рухлива; лінія дії її реакції відома – вона спрямована перпендикулярно поверхні кочення.

Складемо рівняння рівноваги сил, прикладених до ферми:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum M_{iA} = 0:\ P_1 \cdot a + R_B \cdot a - P_2 \cdot 2 \cdot a = 0;\\
&\sum X_i = 0:\ R_{XA} - P_3 = 0;\\
&\sum Y_i = 0:\ R_{YA} + R_B - P_2 + P_1 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Із цих рівнянь:

$$R_B = 6 \text{ кН};\ R_{XA} = 6 \text{ кН};\ R_{YA} = -4 \text{ кН}.$$

2. Визначення зусиль у стрижнях ферми способом вирізання вузлів.

Стрижні, які сходяться у вузлах ферми, є для вузлового з'єднання зв’язками. Відкинемо уявно ці зв’язки й замінимо реакціями їхню дію на вузли. На рРис. 0.210 показані вузли ферми з прикладеними до них активними й реактивними силами. Зусилля в стрижні з номером *i* позначимо S_i, реакцію стрижня, прикладену до вузла M, – S_{iM}. Для стрижня, що з'єднує вузли M і N,

$$\vec{S}_{iM} = -\vec{S}_{iN}\text{, але } S_{iM} = S_{iN} = S_i.$$

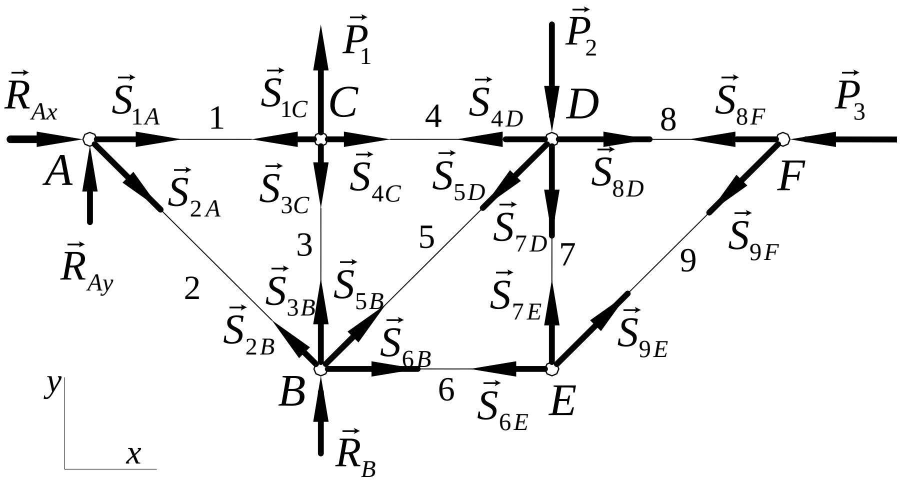


Рис. 0.210

У припущенні, що стрижні розтягнуті, напрямки реакцій всіх стрижнів показані від вузлів усередину. Якщо в результаті рішення реакція стрижня вийде негативною, – це буде означати, що відповідний стрижень стиснений.

Для кожного вузла складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0 \text{ і } \sum Y_i = 0. \qquad (1)$$

Неважко переконатися, що із цих рівнянь можна визначити не тільки всі сили, але й реакції опор, тому попереднє визначення реакцій опор не є необхідним. Дійсно, вузлів 6 (*A, B, C, D, E, F*), рівнянь, отже, 12, а невідомих – теж 12 (тобто 9 зусиль у стрижнях і 3 складові опорних реакцій). Знайдені раніше реакції опор можуть бути застосовані для перевірки рішення.

Якщо передбачається рішення рівнянь без застосування ЕОМ, рекомендується розглядати вузли в такій послідовності, щоб кожного разу в рівняння (1) входило не більше двох невідомих.

Почнемо з вузла F:

$$\sum X_i = 0:\ -P_3 - S_{8F} - S_{9F}\cos 45° = 0;$$

$$\sum Y_i = 0:\ S_{9F} = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{9F} = S_9 = 0 \text{ кН},\ \ S_{8F} = S_8 = -6 \text{ кН}$$

Потім складаємо рівняння рівноваги сил, прикладених до вузлів *E*, *D*, *C*, *B*, *A*. Для перевірки розрахунку корисно для кожного вузла побудувати багатокутник сил (рРис. 0.22).

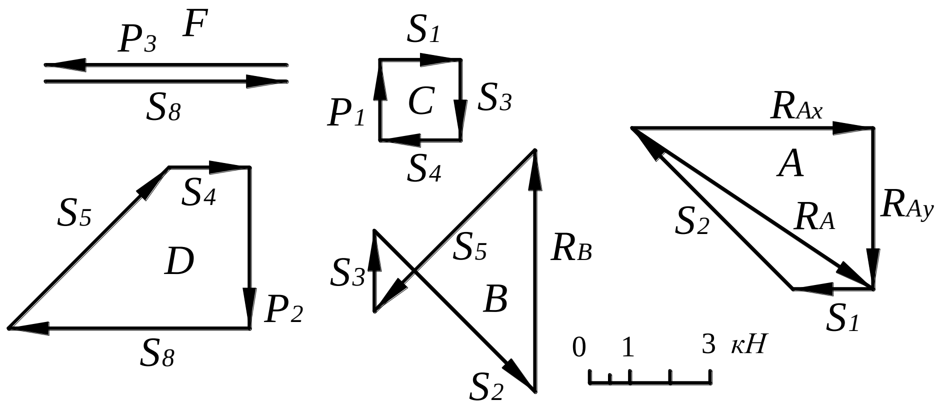


Рис. 0.22

Для вузла F відкладаємо в масштабі силу P_3 і проводимо через кінець і початок цього вектора два промені в напрямку реакцій S_{8F} і S_{9F} до їхнього взаємного перетинання. Стрілки векторів $\vec{S}_{8F}$ і $\vec{S}_{9F}$ направляємо так, щоб силовий трикутник був замкнений.

Для цього на рис. 1.22 стрілку $\vec{S}_{8F}$ направляємо у бік, протилежний показаному на рис. 1.21, – це відповідає знаку мінус в аналітичному рішенні. Модулі сил, отримані з силового багатокутника, мають збігатися з модулями сил, знайденими аналітично.

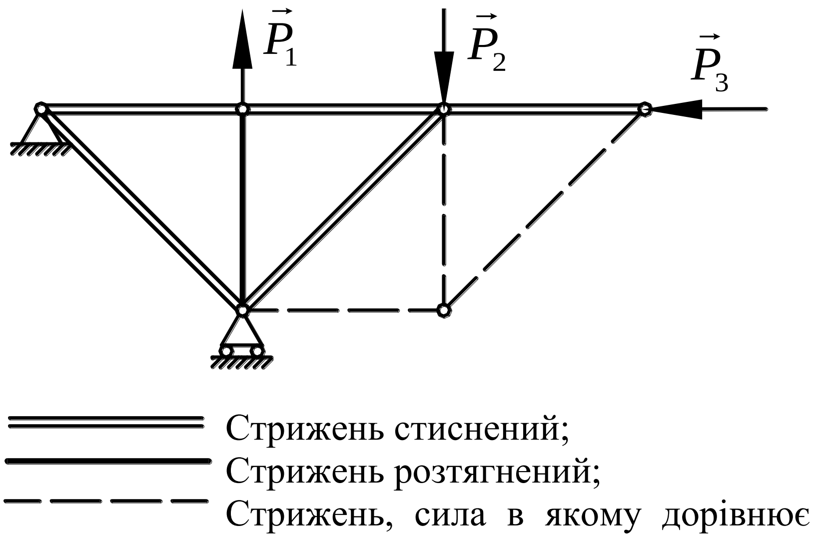


Рис. 0.23

Приводимо таблицю значень зусиль у стрижнях (тТаблиця 0.4) і схему ферми з фактичною картиною сил (рРис. 0.23).

Таблиця 0.4

Результати розрахунку зЗадача 0.8

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Знак сили	–	–	+	–	–			–	
Сила, кН	2	5.66	2	2	5.66	0	0	6	0

3. Визначення сил у стрижнях способом перетинів (способом Риттера).

Відповідно до способу Риттера, кожна сила має бути визначена з окремого рівняння й не повинна виражатися через сили в інших стрижнях.

Для визначення сил S_4 і S_5 подумки розріжемо ферму перетином I–I (рРис. 0.24). Розглянемо рівновагу сил, прикладених до верхньої частини ферми. Дію відкинутої нижньої частини на верхню частину представлено силами S_4, S_5 і S_6.

Як і раніше, умовно припускаємо всі стрижні розтягненими. Знак «мінус» у відповіді вкаже на те, що стрижень стиснений.

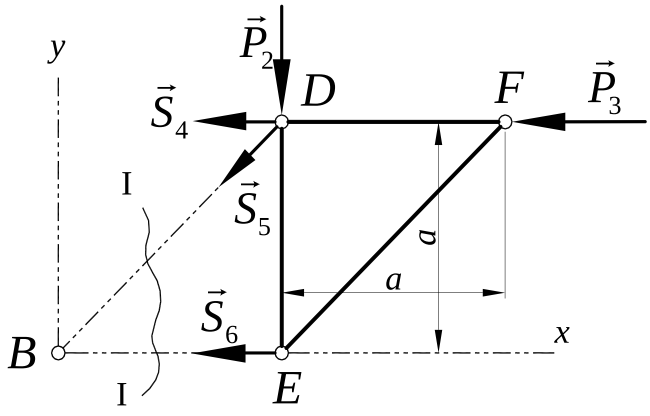


Рис. 0.24

Для визначення S_4 складемо рівняння моментів сил відносно точки *B*, де перетинаються лінії дії сил S_5 і S_6 (точка Риттера для стрижня 4):

$$\sum M_B = 0: \ S_4 \cdot a - P_2 \cdot a + P_3 \cdot a = 0,$$

$$S_4 = P_2 - P_3 = -2 \text{ кН}.$$

Для визначення S_5, щоб виключити з рівняння сили S_4 й S_6, проектуємо сили на вісь *y*:

$$\sum Y_i = 0: \ -S_5 \cdot \cos 45° - P_2 = 0,$$

звідки $S_5 = -5{,}66$ кН.

1.3. Визначення реакцій опор складеної конструкції (система двох тіл)

Розрахунок реакцій опор для системи двох урівноважених зв'язаних тіл під дією плоскої системи сил виконується шляхом роз'єднання системи на окремі тіла по зв’язкам. Взаємовплив тіл ураховується невідомими реакціями зв’язків. Далі складаються умови рівноваги для кожного окремого тіла й співвідношення спільності на зв'язках. У результаті для невідомих реакцій виходить система шести рівнянь рівноваги, визначник якої не повинен дорівнювати нулю.

Задача 0.9

На ферму діє сила $P = 8$ кН; розподілене навантаження q = 0,75 кН/м; момент $M = 10$ кН$\cdot$м; відстань $BD = 0,5BC$, розміри зазначено в метрах (рРис. 0.25). Визначити реакції зв'язків в точках *A*, *B* та в шарнірі *C*.

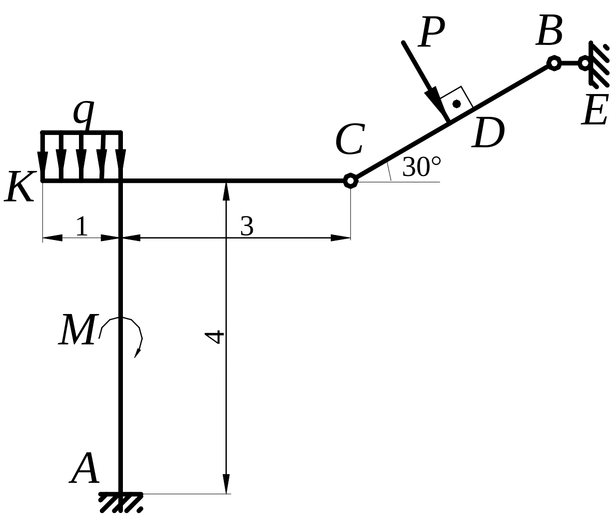


Рис. 0.25

Р і ш е н н я : У прикладі зовнішніми зв'язками є: ідеальний (шарнірний) стрижень *BE* й закладення в точці *A*. Лінія дії реакції $\vec{R}_B$ стрижня спрямована уздовж стрижня, невідомою є величина реакції.

Реакцію закладення представляємо у вигляді двох сил $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ і моменту M_A.

Кількість невідомих реакцій, прикладених до всієї конструкції, дорівнює чотирьом, а кількість рівнянь рівноваги, які можна скласти, – трьом.

Розглянемо окремо верхню й нижню частини конструкції (*CB* і *ACK* відповідно). На верхню частину конструкції *CB* діє одна задана сила $\vec{P}$ й три невідомі реакції зв'язків $\vec{R}_B$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$; кількість рівнянь рівноваги для частини *CB* також дорівнює трьом (рРис. 0.27).

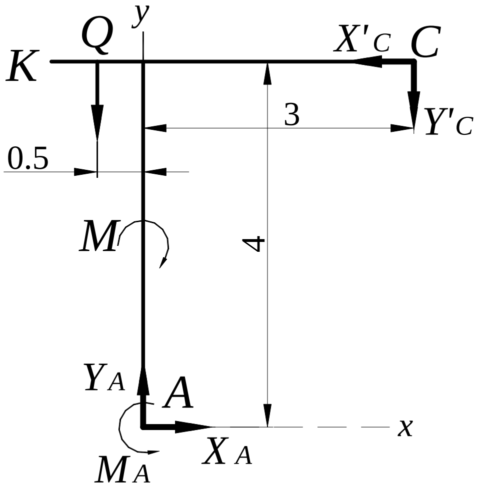


Рис. 0.26

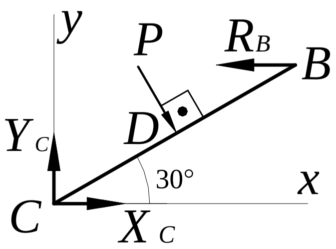


Рис. 0.27

На нижню частину конструкції *ACK* (рРис. 0.26) діє рівномірно розподілене навантаження, дію якого заміняємо зосередженою силою

$$Q = q \cdot 1 = 0,75 \quad \text{кН}.$$

Також діє момент *M* і реакції закладення $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ і M_A. Складові реакції шарніра *C* за законом дії та протидії спрямовуємо в сторони, протилежні складовим, прикладеним до верхньої частини, причому

$$X'_C = X_C,\ Y'_C = Y_C.$$

Для частини *ACK* кількість рівнянь рівноваги також дорівнює трьом. Завдання вирішуємо, окремо складаючи рівняння рівноваги сил, прикладених до нижньої й верхньої частин конструкції.

Рівняння рівноваги для верхньої частини конструкції (рРис. 0.27):

$$\sum P_{iX} = 0:\ X_C + P \cdot \cos 60° - R_B = 0; \qquad (1)$$

$$\sum P_{iY} = 0:\ Y_C - P \cdot \cos 30° = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_{iC} = 0: \ -P \cdot CD + R_B \cdot BC \cdot \sin 30° = 0. \qquad (3)$$

Із рівняння (3) знаходимо

$$R_B = P \cdot 0{,}5 \cdot BC / (BC \cdot \sin 30°) = P = 8 \text{ кН}.$$

Із рівняння (1) одержуємо

$$X_C = R_B - P \cdot \cos 60° = 8 - 8 \cdot 0{,}5 = 4 \text{ кН}.$$

Із рівняння (2) визначаємо

$$Y_C = P \cdot \cos 30° = 8 \cdot 0{,}866 = 6{,}93 \text{ кН}.$$

Рівняння рівноваги для нижньої частини конструкції (рис.3)

$$\sum P_{iX} = 0: \ X_A - X'_C = 0; \qquad (4)$$

$$\sum P_{iY} = 0: \ Y_A - Q - Y'_C = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_{iA} = 0: \ M_A - M + Q \cdot 0{,}5 - X'_C \cdot 4 - Y'_C \cdot 3 = 0. \qquad (6)$$

Із рівняння (4) знаходимо

$$X_A = X'_C = 4 \text{ кН}.$$

Із рівняння (5) одержуємо

$$Y_A = Q + Y_C = 0{,}75 + 6{,}93 = 7{,}68 \text{ кН}.$$

Із рівняння (6) визначаємо

$$M_A = M - Q \cdot 0{,}5 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 3 = 14{,}41 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Для перевірки правильності розрахунків варто переконатися, що виконується кожне з рівнянь рівноваги для сил, прикладених до всієї конструкції. Наприклад,

$$\sum M_{iC} = 0:$$

$$Q \cdot 3{,}5 - Y_A \cdot 3 + X_A \cdot 4 + M_A - M + P \cdot BD - R_B \cdot BC \cdot \sin 30° = 0.$$

Результати розрахунку з Задача 0.89: $M_A = 14{,}41$ кН**·м**; $X_A = 4$ кН; $Y_A = 7{,}68$ кН; $R_B = 8$ кН; $X_C = 4$ кН; $Y_C = 6{,}93$ кН.

Задача 0.10

Дано: P = 8 кН; q = 0,75 кН/м; M = 10 кН·м; $BD = 0{,}5BC$, $BC = 4$ м. Розміри на рис. 1.28 зазначено в метрах. Знайти реакції зв'язків.

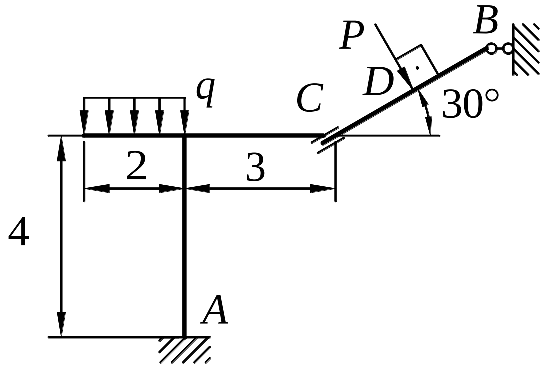


Рис. 0.118

Рішення: У прикладі зовнішніми зв'язками є ідеальний (шарнірний) стрижень BE і закладення в точці A. Лінія дії реакції $\vec{R}_B$ стрижня спрямована вздовж стрижня, невідомою є величина реакції.

Реакцію закладення представляємо у вигляді двох сил $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ і моменту M_A.

Кількість невідомих реакцій, прикладених до всієї конструкції, дорівнює чотирьом, а кількість рівнянь рівноваги, які можна скласти, – трьом.

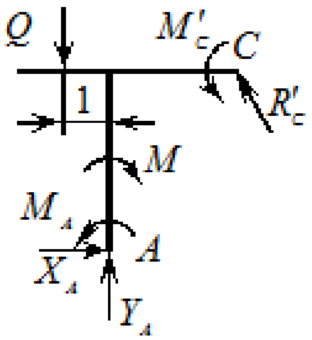


Рис. 0.12

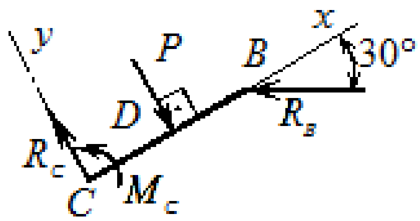


Рис. 0.30

Розглянемо окремо верхню й нижню частини конструкції (*CB* і *AC* відповідно). На верхню частину конструкції *CB* діє одна задана сила $\vec{P}$ і три невідомі реакції зв’язків $\vec{R}_B, \vec{R}_C$ $, \vec{M}_C$ (рРис. 0.30); кількість рівнянь рівноваги для частини *CB* також дорівнює трьом.

На нижню частину конструкції *AC* (рРис. 0.129) діють момент *M*, реакції гладкої опори А $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, M_A та рівномірно розподілене навантаження, дію якого замінюємо зосередженою силою

$$Q = q \cdot 2 = 1{,}5 \text{ кН}.$$

Складові реакції шарніра *C* за законом дії та протидії спрямовуємо в сторони, протилежні складовим, прикладеним до верхньої частини, причому

$$R'_C = R_C,\ M'_C = M_C.$$

Для частини *AC* кількість рівнянь рівноваги також дорівнює трьом. Завдання розв'язуємо, окремо складаючи рівняння рівноваги сил, прикладених до нижньої та верхньої частин конструкції.

Рівняння рівноваги для верхньої частини конструкції (рис. 1.30):

$$\sum P_{iX} = 0: \quad R_B \cdot \cos 30° = 0; \tag{1}$$

$$\sum P_{iY} = 0: \quad R_C - P + R_B \cdot \sin 30° = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_{iC} = 0: \quad M_C - P \cdot CD + R_B \cdot BC \cdot \sin 30° = 0. \tag{3}$$

Із рівняння (1) знаходимо

$$R_B = 0.$$

Із рівняння (2) одержуємо

$$R_C = P - R_B \cdot \sin 30° = 8 - 0 = 8 \text{ кН}.$$

Із рівняння (3) визначаємо

$$M_C = P \cdot DC - R_B \cdot \sin 30° = 8 \cdot 2 - 0 = 16 \text{ кН} \cdot \text{ м}.$$

Рівняння рівноваги для нижньої частини конструкції (рРис. 0.12)

$$\sum P_{iX} = 0: \quad X_A - R'_C \cdot \cos 60° = 0; \tag{4}$$

$$\sum P_{iY} = 0: \quad Y_A - Q - R'_C \cdot \sin 60° = 0; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} = 0: \; & M_A - M - M_C + Q \cdot 1 - R'_C \cdot 4 \cdot \cos 60° - \\ & - R'_C \cdot 3 \cdot \sin 60° = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Із рівняння (4) знаходимо

$$X_A = -R'_C \cdot \cos 60 = -4 \text{ кН}.$$

Із рівняння (5) одержуємо

$$Y_A = Q + R'_C \cdot \sin 60° = 1{,}5 + 6{,}928 = 8{,}428 \text{ кН}.$$

Із рівняння (6) визначаємо

$$\begin{aligned} & M_A = M + M_C - Q \cdot 1 + R'_C \cdot 4 \cdot \cos 60° + R'_C \cdot 3 \cdot \sin 60° = \\ & = 10 + 16 - 1{,}5 + 16 + 20{,}784 = 61{,}284 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Результати розрахунку з Задача 0.810:
M_A = 61,28 кН·м; X_A = - 4 кН; Y_A = 8,428 кН; R_B = 0 Н; R_C = 8 кН; M_C = 16 кН·м.

Задача 0.11

Визначити реакції в точках *A, B, C* ферми, викликані зовнішніми силами $F_1 = 20$ кН; $F_2 = 30$ кН; $q = 10$ кН/м; $M = 40$ кН$\cdot$м; $BC = 4$ м, $BD = 0{,}5BC$. Розміри на рРис. 0.131 зазначено в метрах.

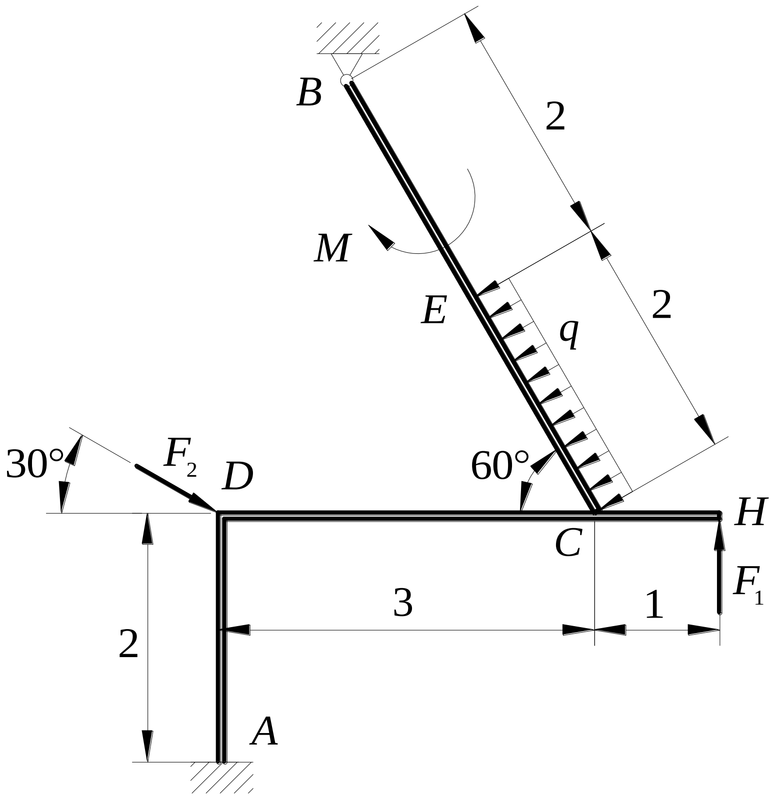


Рис. 0.131

Р і ш е н н я : У прикладі зовнішніми зв’язками є шарнір *C* й закладення в точці *A*. Реакцію в шарнірі представимо як X_B, Y_B. Реакцію в закладенні представляємо у вигляді двох сил X_A, Y_A і моменту M_A.

Кількість невідомих реакцій, прикладених до всієї конструкції, дорівнює п'яти, а кількість рівнянь рівноваги, які можна скласти, – трьом.

Відокремимо верхню частину від нижньої частини конструкції (*CB* і *ADH* відповідно). Розглянемо спочатку окремо верхню частину (рис. 1.32). На верхню частину конструкції *CB* діє рівномірно розподілене навантаження, яке замінюємо зосередженою силою

$$Q = q \cdot 2 = 20 \text{ кН},$$

момент *M*, а також реакції X_B, Y_B і N_C.

$$\sum F_{iX} = 0: \quad X_B - Q \cdot \cos 30° = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad N_C - Y_B - Q \cdot \sin 30° = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_{iB} = 0: \quad -M - Q \cdot 3 + N_C \cdot 4 \cdot \sin 30 = 0. \tag{3}$$

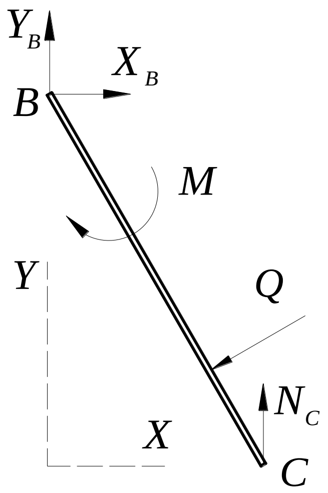


Рис. 1.32

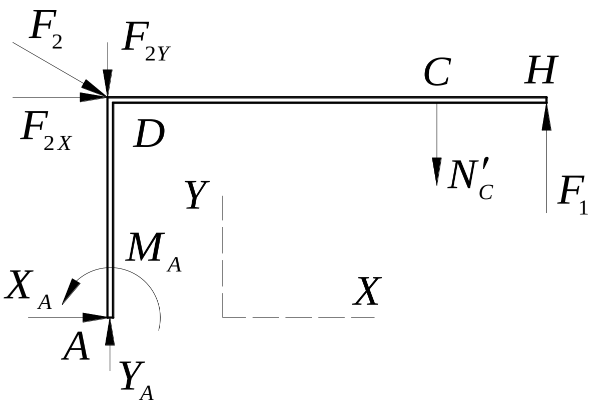


Рис. 1.33

Із рівняння (1) знаходимо

$$X_B = Q \cdot \cos 30° = 17{,}32 \text{ кН}$$

Із рівняння (3) одержуємо

$$N_C = \frac{M + Q \cdot 3}{4 \cdot \sin 30} = 50 \text{ кН}.$$

Із рівняння (2) визначаємо

$$Y_B = N_C - Q \cdot \sin 30° = 40 \text{ кН}.$$

На нижню частину конструкції *ADH* діють сили F_1, F_2 а також реакції закладення X_A, Y_A і M_A. Реакцію N'_C за законом дії та протидії спрямовуємо у бік, протилежний $\vec{N}_C$, причому, $N'_C = N_C$. Для нижньої частини кількість рівнянь рівноваги також дорівнює трьом.

За теоремою Вариньона розкладемо силу $\vec{F}_2$ на складові $\vec{F}_{2X}$ та $\vec{F}_{2Y}$. Отримаємо:

$$F_{2X} = F_2 \cdot \cos 30° = 25{,}98 \text{ кН}.$$

$$F_{2Y} = F_2 \cdot \sin 30° = 15 \text{ кН}.$$

Рівняння рівноваги для нижньої частини конструкції (рис. 1.33)

$$\sum F_{iX} = 0: \quad X_A + F_{2X} = 0; \tag{4}$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad Y_A - F_{2Y} - N'_C + F_1 = 0; \tag{5}$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad M_A - F_{2X} \cdot 2 - N'_C \cdot 3 + F_1 \cdot 4 = 0. \tag{6}$$

Із рівняння (4) знаходимо

$$X_A = -F_{2X} = -25{,}98 \text{ кН}.$$

Із рівняння (5) одержуємо

$$Y_A = F_{2Y} + N'_C - F_1 = 45 \text{ кН}.$$

Із рівняння (6) визначаємо

$$M_A = F_{2X} \cdot 2 + N'_C \cdot 3 - F_1 \cdot 4 = 121{,}96 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Знак мінус у відповідях вказує на те, що реакції спрямовані в протилежному напрямку від передбачуваних.

Р е з у л ь т а т и р о з р а х у н к у з З а д а ч а 0 . 8 1 1 :

M_A = 121,96 кН·м; X_A = - 25,98 кН; Y_A = 45 кН; X_B = 17,32 кН; Y_B = 40 кН; N_C = 50 кН.

Задача 0.12

Два трамвайних провода (рис. 1.34) підвішені до поперечних дротових канатів, що прикріплено до двох стовпів (рис. 1.35). Стовпи розставлені уздовж шляху на відстані 40 м друг від друга. Для кожного поперечного каната відстані $AK = KL = LB = 5\text{м}$; KC = LD = 0,5 м. Зневажаючи вагою дротового каната, знайти сили натягів T_1, T_2, T_3 в частинах AC, CD, DB якщо маса 1 м проводу дорівнює 0,75 кг.

Дано: $AK = KL = LB = 5\text{м}$, KC = LD = 0,5 м, m=0,75 кг. Знайти: T_1, T_2, T_3 - ?.

Рис. 1.34

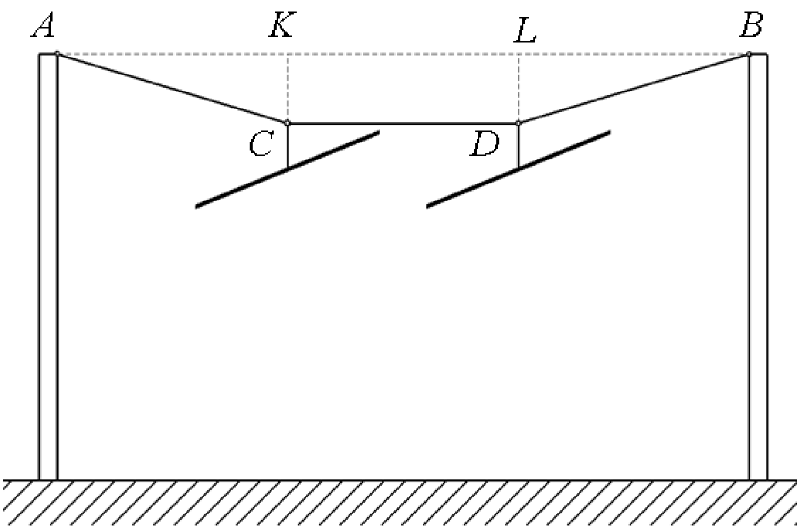


Рис. 1.35

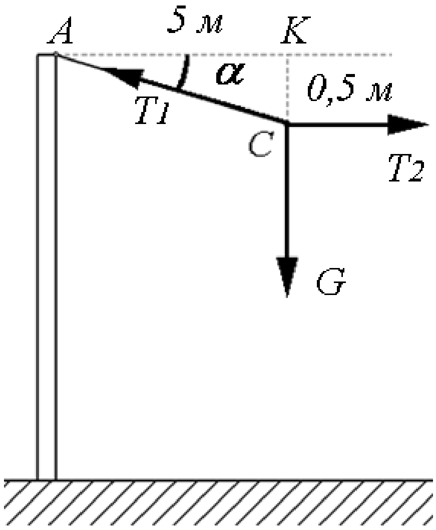


Рис. 1.36

Р і ш е н н я : Розглянемо рівновагу сил у вузлі C (рис. 1.36). У точці C діють сили G, T_1, T_2. Визначаємо значення сили ваги:

$$G = 40 \cdot 9.81 \cdot 0.75 = 294.3\,\text{Н}.$$

Становимо трикутник сил, що прикладені у точці С (рис. 1.37).

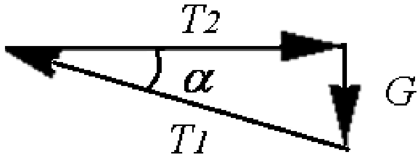


Рис. 1.37

Визначаємо силу натягу ниток T_1, T_2 :

$$T_2 = \frac{G}{tg(\alpha)} = 2943\,\text{Н},$$

$$T_1 = \sqrt{G^2 + T_2^{\,2}} = 2957.72\,\text{Н}.$$

$tg(\alpha)$ визначаємо із трикутника AKC як:

$$tg(\alpha) = \frac{0.5}{5} = 0.1$$

Р е з у л ь т а т и р о з р а х у н к у з З а д а ч а 0 . 8 1 2 :
$T_1 = T_3 = 2957{,}72$ Н, $T_2 = 2943$ Н.

Задача 0.13

Дано: трьохшарнірна арка, що зображена на рис. 1.38. Знайти: реакції опор А та В, що виникають при дії горизонтальної сили Р = 20 кН. Вагою арки зневажити.

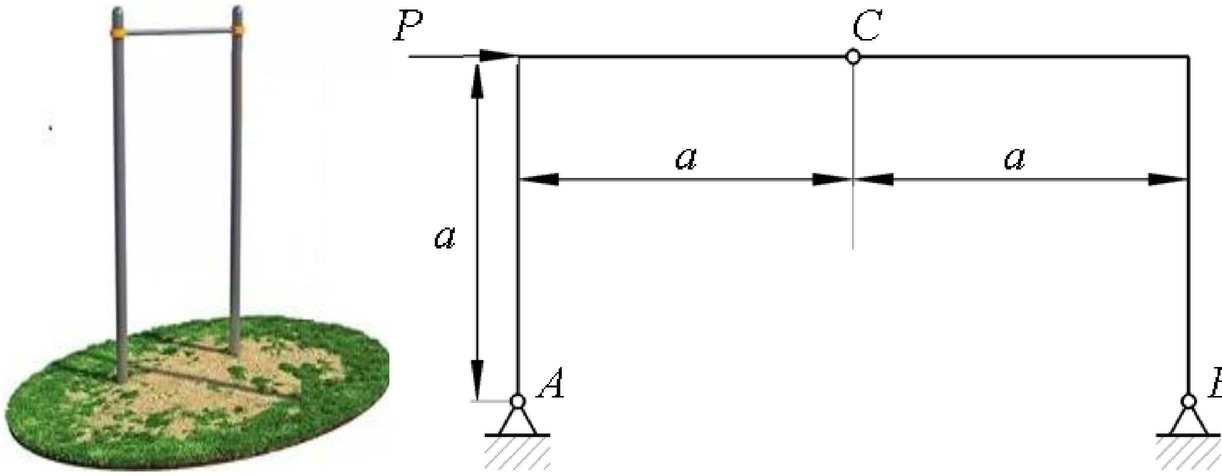


Рис. 1.38

Р і ш е н н я : трьохшарнірна арка являє собою систему двох тіл, з'єднаних між собою шарніром C. Зовнішніми зв'язками є шарніри A й B.

Замінюємо опори їх реакціями. У результаті на арку діють три зрівноважені зовнішні сили: сила P та реакції шарнірів R_A і R_B, лінії дії яких невідомі. Розглянемо праву частину арки (рис. 1.39).

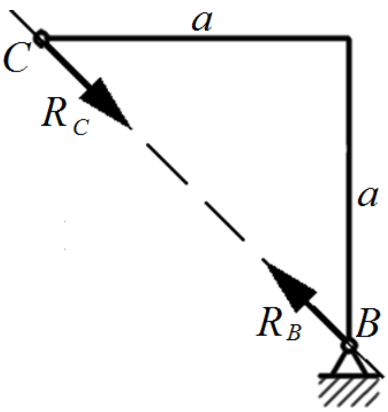


Рис. 1.39

До правої частини арки прикладені дві сили R_C і R_B. Ці дві сили врівноважуються, отже, вони спрямовані по одній прямій BC у протилежні сторони та рівні за модулем.

Знаючи лінію дії сили P й реакції R_B, по теоремі про рівновагу трьох непаралельних сил знаходимо точку перетинання ліній дії сил P, R_A і R_B (рис. 1.40). Будуємо замкнутий трикутник сил (рис. 1.41).

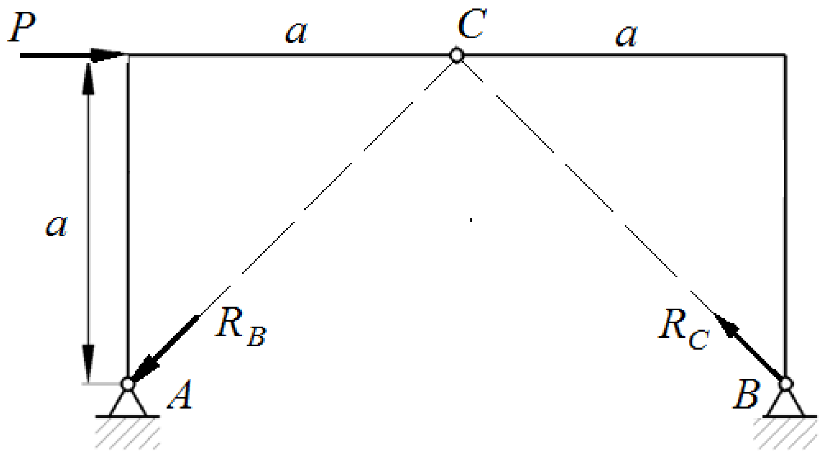


Рис. 1.40

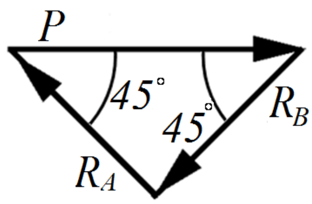


Рис. 1.41

Визначаємо значення реакцій опор:

$$R_A = R_B = P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

$$R_A = R_B = 20 \cdot 0{,}707 = 14{,}14 \text{ кН}$$

Результати розрахунку з Задача 0.813:
$R_A = R_B = 14{,}14$ кН.

Задача 0.14

Для виміру великих зусиль *Q* улаштована система двох нерівноплечих важелів *ABC* і *EDF* (рис. 1.42), з'єднаних між собою тяжем *CD*. У крапках *B* і *E* є нерухомі опори. По важелю *EDF* може пересуватися вантаж *P* вагою 12, 5 кг. Сила *Q*, прикладена в точці *A*, урівноважується цим вантажем, поміщеним на відстані *l* від точки *D*. Необхідно визначити на яку довжину *x* потрібно пересунути для збереження рівноваги вантаж *P* при збільшенні сили *Q* на 1000 кг.

Дано: $a = 3{,}3$ мм, $b = 660$ мм, $c = 50$ мм, P = 12,5 кг, ΔQ = 1000 кг. Знайти: x - ?

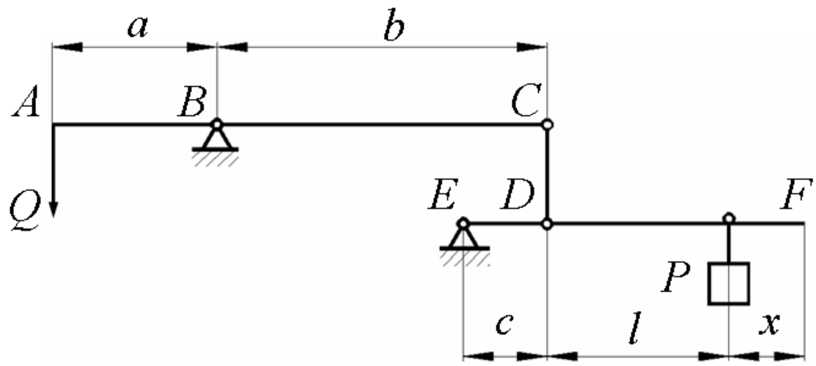


Рис. 1.42

Р і ш е н н я : Система статично невизначена, тому розділяємо її на дві частини в точці С та вирішуємо окремо.

Розглянемо частину *ABC* (рис. 1.43).

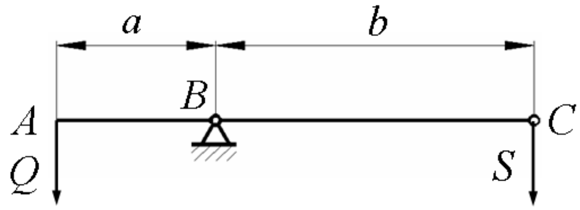


Рис. 1.43

Складемо рівняння рівноваги щодо точки *B*:

$$Q \cdot a = S \cdot b \Rightarrow S = Q \cdot \frac{a}{b} \qquad (1)$$

Складемо рівняння рівноваги щодо точки *E* для тіла *EDF* (рис. 1.44):

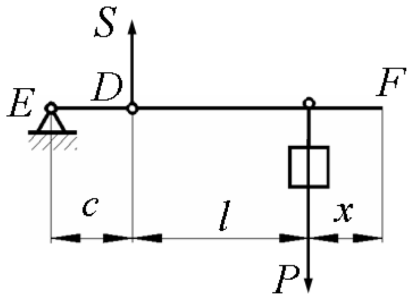


Рис. 1.44

$$P \cdot (l + c) = S \cdot c \Rightarrow S = P \cdot \frac{l + c}{c} \qquad (2)$$

Дорівняємо рівняння (1) і (2), виразимо Q:

$$Q = \frac{P \cdot b \cdot (l + c)}{a \cdot c}; \tag{3}$$

При збільшенні Q на ΔQ рівняння (3) приймає вид:

$$Q + \Delta Q = \frac{P \cdot b \cdot (l + x + c)}{a \cdot c}; \tag{4}$$

Підставляємо рівняння (3) у рівняння (4):

$$\Delta Q = \frac{P \cdot b \cdot x}{a \cdot c}; \tag{5}$$

З рівняння (5) знаходимо шукану довжину x:

$$x = \frac{\Delta Q \cdot a \cdot c}{P \cdot b} = 20 \text{ мм}$$

Результати розрахунку зЗадача 0.813: $x = 20$ мм.

1.4. Рівновага сил з урахуванням зчеплення (тертя спокою)

Завдання на рівновагу з урахуванням тертя є досить складними в силу нелінійності тертя. Нижче розглядаються прості приклади, у яких напрямок невідомої граничної сили сухого тертя визначено конфігурацією системи, і тому нелінійності в явищі тертя вдається уникнути.

Сила сухого тертя або зчеплення (в умовах спокою) обчислюється відповідно до закону Кулона про пропорційність граничної дотичної сили тертя й нормальної реакції поверхні тертя:

$$F_{TP} = f\, N$$

Коефіцієнт пропорційності і є коефіцієнтом сухого тертя. Це експериментальна величина, що звичайно задається в умовах завдань.

Рішення завдань із урахуванням тертя починається з поділу контактуючих тіл і заміни зв’язків реакціями, як це робиться в попередніх прикладах. До умов рівноваги системи контактуючих тіл додається умова зв'язку з урахуванням сили тертя на основі закону Кулона.

Задача 0.15

Дано: $G = 2$ кН; $Q = 20$ кН; $a = 10$ см, $b = 20$ см, коефіцієнт зчеплення (тертя спокою) $f = 0.1$ (рис. 1.45). Знайти: мінімальне значення сили *P* и реакції опор *O*, *A* и *B*.

Р і ш е н н я : Розглянемо спочатку систему врівноважених сил, прикладених до тіла *Q* (рис. 1.46). На тіло діють: сила ваги $\vec{Q}$, реакція нитки $\vec{T}$ й нормальна реакція $\vec{N}_1$.

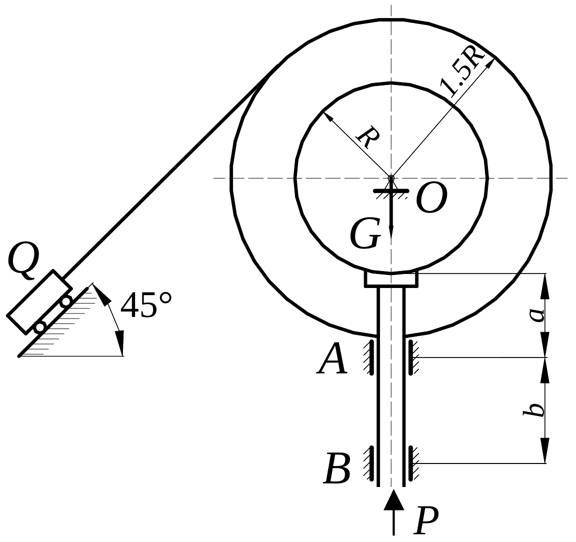


Рис. 1.45

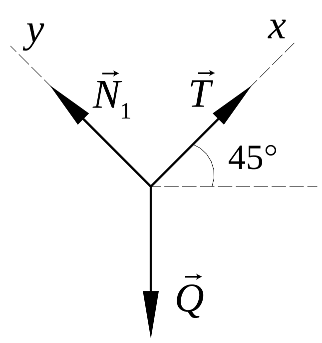


Рис. 1.46

Розглядаючи тіло *Q* як матеріальну точку, складемо рівняння рівноваги зазначених сил:

$$\sum X_i = 0: \ T - Q \cdot \cos 45° = 0;$$

$$\sum Y_i = 0: \ N_1 - Q \cdot \sin 45° = 0.$$

Звідси: $T = Q \cdot \cos 45°$ й $N_1 = Q \cdot \sin 45°$.

Потім розглянемо рівновагу сил, прикладених до барабана (рис. 1.47):

$$\sum M_{io} = 0: \ \ T' \cdot R \cdot 1.5 - F_{TP} \cdot R = 0, \tag{1}$$

де F_{TP} — сила зчеплення (сила тертя спокою).

$$\sum X_i = 0: \ -F_{\text{ТР}} - T' \cdot \cos 45° + X_O = 0; \qquad (2)$$

$$\sum Y_i = 0: \ N_2 + Y_O - T' \cdot \cos 45° - G = 0. \qquad (3)$$

У стані граничної рівноваги сила $\vec{P}$ мінімальна, а сила зчеплення (тертя спокою) між гальмовою колодкою й барабаном визначається рівністю

$$F_{TP} = f \cdot N_2. \qquad (4)$$

З рівнянь (1) – (4) одержимо:

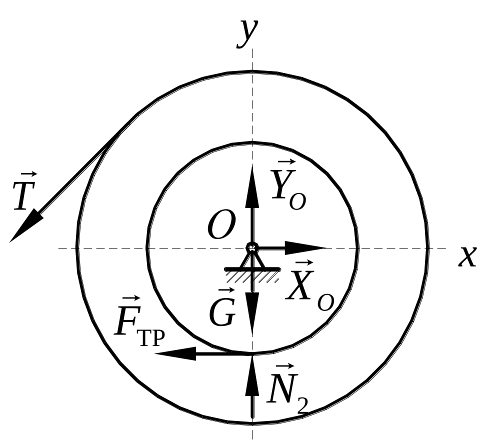


Рис. 1.47

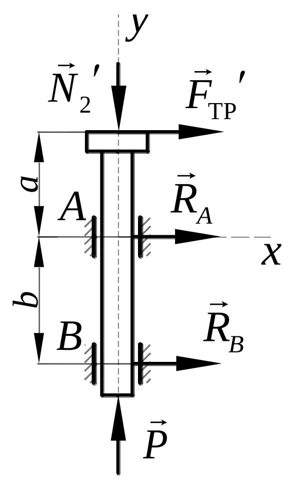


Рис. 1.48

$$F_{TP} = T' \cdot 1{,}5; \ N_2 = F_{TP} / f;$$

$$X_O = F_{TP} + T' \cdot \cos 45^\circ;$$

$$Y_O = -N_2 + T' \cdot \cos 45^\circ + G.$$

Для визначення мінімального значення сили P и реакцій опор A и B (ці реакції перпендикулярні напрямної A и B, тому що тертям тут зневажаємо) розглянемо рівновагу сил, прикладених до штока гальмового пристрою (рис. 1.48):

$$\sum M_{iA} = 0:\ R_B \cdot b - F_{TP} \cdot a = 0 \qquad (5)$$

$$\sum X_i = 0:\ F_{TP} + R_A + R_B = 0; \qquad (6)$$

$$\sum Y_i = 0:\ P_{\min} - N_2' = 0. \qquad (7)$$

Вирішуючи ці рівняння, одержуємо:

$$R_B = F_{TP} \cdot a/b;\ P_{\min} = N'_2;\ R_A = -F_{TP} - R_B.$$

Підставивши задані в умові числові значення, одержуємо:

$$N_1 = 14{,}1\ \text{кН},\ F_{TP} = 21.2\ \text{кН};\ Y_O = -200.1\ \text{кН};\ R_A = -31.8\ \text{кН};$$

$$N_2 = 212{,}1\ \text{кН},\ X_O = 31.2\ \text{кН};\ P_{\min} = 212.1\ \text{кН};\ R_B = 10.6\ \text{кН}.$$

Задача 0.16

Дано: $G = 2$ кН; $a = 8$ м, $b = 4$ м, коефіцієнт тертя спокою $f = 0.1$ (рис. 1.49). Визначити максимальне значення сили *P* и реакції опор *A, У* и *C.*

Р і ш е н н я : Розглянемо спочатку систему врівноважених сил, прикладених до тіла вагою *G* (рис. 1.50). На тіло діють: сила ваги $\vec{G}$, сила $\vec{P}$, нормальні складові реакції $\vec{N}_B$, $\vec{N}_C$, а також дотичні складової сили зчеплення $\vec{F}^B_{\text{ТР}}$, $\vec{F}^C_{\text{ТР}}$.

Запишемо три рівняння рівноваги для зазначених сил:

$$\sum X_i = 0:\ -P + F^C_{\text{ТР}} + F^B_{\text{ТР}} + G\cos 45^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0:\ N_B + N_C - G\sin 45^\circ = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_{iB} = 0:\ -G \cdot \frac{b}{3}\cos 45^\circ - G \cdot \frac{b}{2}\sin 45^\circ + P \cdot \frac{b}{4} + N_C \cdot b = 0. \qquad (3)$$

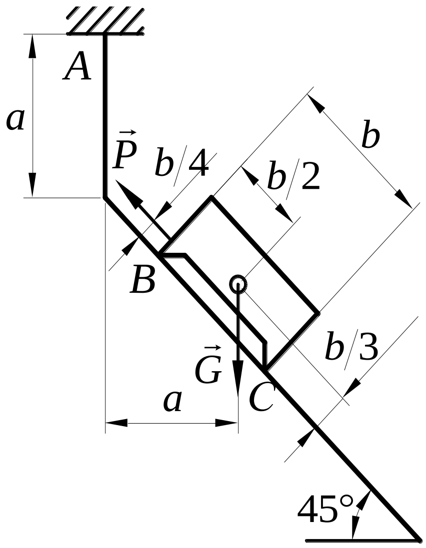


Рис. 1.49

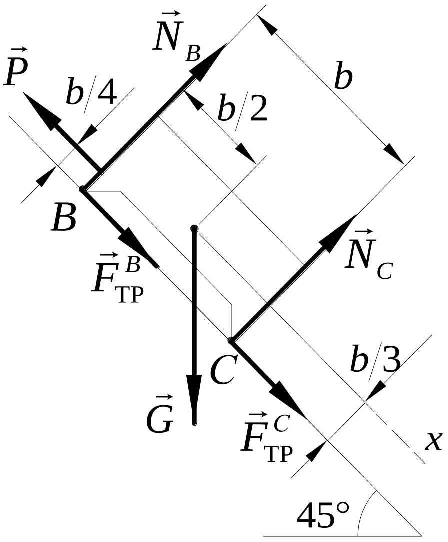


Рис. 1.50

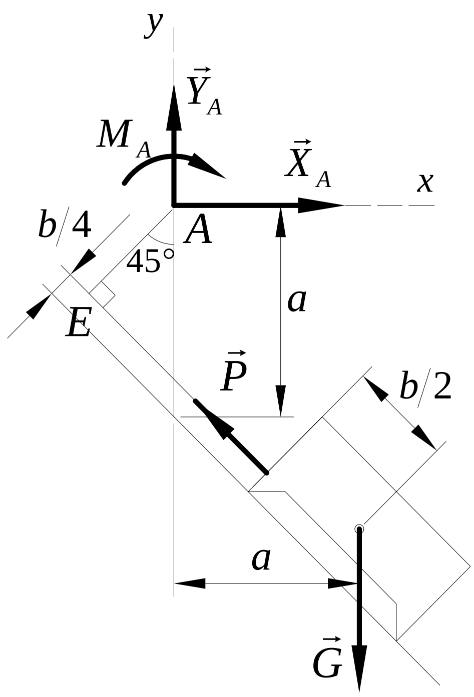


Рис. 1.51

Система рівнянь має 5 невідомих. Тому у випадку граничної рівноваги $P = P_{\max}$, система рівнянь доповнюється рівняннями:

$$F_{ТР}^{C} = f \cdot N_C; \tag{4}$$

$$F_{ТР}^{B} = f \cdot N_B. \tag{5}$$

Вирішуємо систему рівнянь (1)-(5).

Підставимо в рівняння (1) рівняння (4) і (5), одержимо:

$$-P+f\cdot N_C+f\cdot N_B+G\cos 45^\circ=0; \qquad (6)$$

Помножимо рівняння (2) на f, одержимо:

$$f\cdot N_B+f\cdot N_C-f\cdot G\sin 45^\circ=0; \qquad (7)$$

Віднімемо з рівняння (7) рівняння (6), одержимо:

$$P=(1+f)G\cos 45^\circ,$$

чисельно $P=1{,}556$ кН.

Підставивши отримане значення в рівняння (3), знайдемо

$$N_C=0.789 \text{ кН}.$$

Тоді з рівняння (6):

$$N_B=\frac{P}{f}-N_C-\frac{G}{f}\cos 45^\circ,$$

звідки чисельно знаходимо

$$N_B=0.631 \text{ кН}.$$

Підставляємо значення N_C й N_B у рівняння (4) і (5):

$$F_{TP}^{C}=0.0789 \text{ кН};$$

$$F_{\text{ТР}}^{\text{В}}=0.0631 \text{ кН}.$$

Далі, для визначення реакції в точці A, розглянемо систему врівноважених сил, прикладених до всієї конструкції (рис. 1.51). Це реакції в точці A: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, M_A; а також сили $\vec{P}$ й $\vec{G}$.

Складемо рівняння рівноваги для даної системи сил:

$$\sum X_i = 0: \; X_A - P\cos 45° = 0;$$

$$\sum Y_i = 0: \; Y_A + P\sin 45° - G = 0;$$

$$\sum M_{iA} = 0: \; -M_A - G \cdot a - P \cdot AE = 0;$$

тут відстань $AE = a \cdot \cos 45° - \dfrac{b}{4}$.

За результатами розрахунків одержуємо:

$X_A = 1.1$ кН, $Y_A = 0.9$ кН, $M_A = -23.24$ кН$\cdot$м.

Задача 0.16

Дано: $G = 30\,кН$; $Q = 20\,кН$; $a = 10\,см$, $b = 20\,см$, коефіцієнт зчеплення (тертя спокою) $f_{зч} = 0{,}1$ (рис. 1.52). Визначити мінімальне значення сили *P* і реакції опор *O, A*.

Р і ш е н н я : Розглянемо спочатку систему зрівноважених сил, прикладених до тіла *Q* (рис. 1.53, а). На тіло діють сила важеля Q і реакція нитки T.

Розглядаючи тіло *Q* як матеріальну точку, складемо рівняння рівноваги зазначених сил:

$$\sum Y_i = 0: \quad T - Q = 0. \tag{1}$$

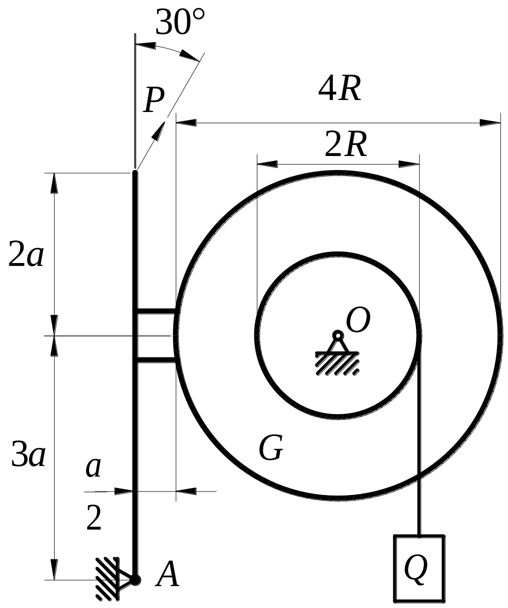
Звідси $\mathrm{T} = \mathrm{Q} = 20\,кН$.

Потім розглянемо рівновагу сил, прикладених до барабана (рис. 1.53, б). Система рівнянь має вигляд:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad X_o + N = 0; \tag{2}$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad Y_o - F_{зч} - T' - G = 0; \tag{3}$$

$$\sum M_{iO} = 0: \quad F_{зч} \cdot 2 \cdot R - T' \cdot R = 0. \tag{4}$$



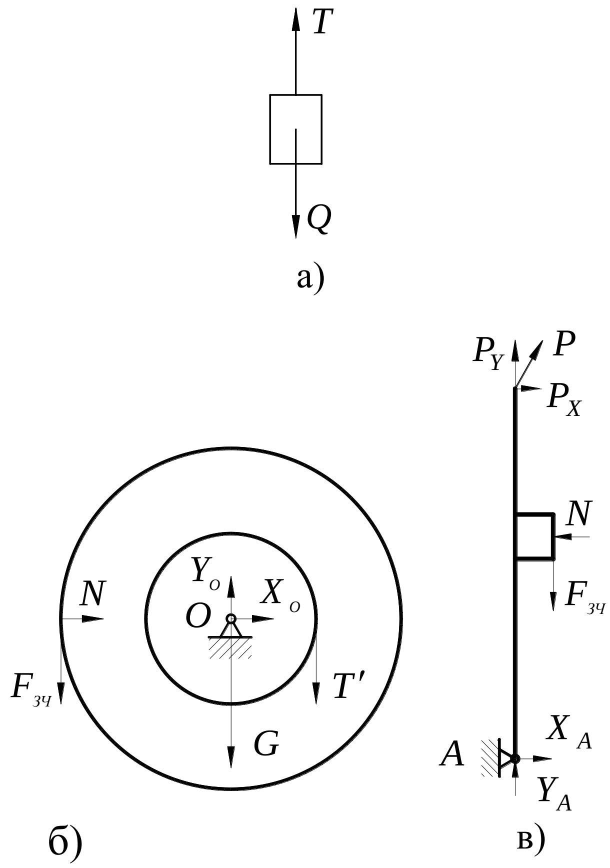


Рис. 1.52 Рис. 1.53

де $F_{ЗЧ}$ — сила зчеплення (сила тертя спокою).

У стані граничної рівноваги сила зчеплення (тертя спокою) між гальмовою колодкою та барабаном визначається рівністю

$$F_{ЗЧ} = f_{ЗЧ} \cdot N. \qquad (5)$$

Сила T' за законом дії та протидії дорівнює $T' = T$.

Із рівнянь (1) – (4) одержимо:

$$F_{ЗЧ} = T' \cdot \frac{R}{2 \cdot R} = \frac{T'}{2} = 10\ кН;$$

$$N = \frac{F_{ЗЧ}}{f_{ЗЧ}} = 100\ кН;$$

$$Y_o = F_{ЗЧ} + T' + G = 60\ кН;$$

$$X_o = -N = -100\ кН.$$

Для визначення мінімального значення сили P і реакції опори A розглянемо рівновагу сил, прикладених до штока гальмового прибудую (рис. 1.53, в): За теоремою Вариньона розкладемо силу P на складові P_X та P_Y.

$$P_X = P \cdot \cos 60°,$$

$$P_Y = P \cdot \sin 60°,$$

Система рівнянь рівноваги має вигляд:

$$\sum F_{iX} = 0: \quad X_A - N + P \cdot \cos 60° = 0; \qquad (6)$$

$$\sum F_{iY} = 0: \quad Y_A - F_{ЗЧ} + P \cdot \sin 60° = 0; \qquad (7)$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad N \cdot 3 \cdot a - F_{ЗЧ} \cdot 0{,}5 \cdot a - P \cdot \cos 60° \cdot 5 \cdot a = 0. \qquad (8)$$

Із рівнянь (6) – (8) одержимо:

$$P = \frac{N \cdot 3 \cdot a - F_{ЗЧ} \cdot 0{,}5 \cdot a}{\cos 60° \cdot 5 \cdot a} = 118\,кН;$$

$$X_A = N - P \cdot \cos 60 = 41\,кН;$$

$$Y_A = F_{ЗЧ} - P \cdot \sin 60 = -92{,}2\,кН.$$

Знак мінус у відповідях вказує на ті що реакції спрямовані в протилежному напрямку від передбачуваних.

Р е з у л ь т а т и р о з р а х у н к у з З а д а ч а 0 . 8 1 6 :
X_A = 41 кН; Y_A = -92,2 кН; X_O = -100 кН; Y_O = 60 кН; P = 118 кН.

Задача 0.17

Аркуші паперу (рис. 1.54), складені, як показано на кресленні (рис. 1.55), склеюються вільними кінцями через лист таким чином, що виходять дві самостійні частини А та В. Маса кожного листа $m = 6$ г, число всіх аркушів 200, коефіцієнт тертя паперу об папір, а також об стіл, на якому папір лежить дорівнює $f = 0{,}2$. Одна з частин аркушів паперу утримується нерухомо. Знайти: найменше горизонтальне зусилля *P*, необхідне для того, щоб витягти другу частину аркушів.

Дано: кількість аркушів 200 шт., $m = 6$ г, $f = 0,2$. Знайти: P - ?

Рис. 1.54

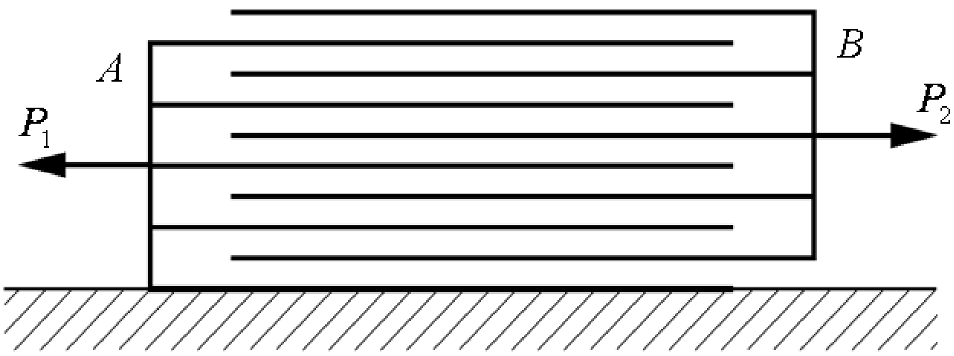


Рис. 1.55

Р і ш е н н я : Коли ми прикладаємо силу P_1 або P_2 до частин аркушів *A* або *B* між аркушами, а так само між листом і поверхнею стола виникає сила тертя. Сила *P* повинна бути більше чим сумарна сила тертя. Розглянемо випадок якщо частину B витягаємо з A:

Складемо рівняння рівноваги:

$$P_1 - \sum F_{TPi} = 0; \text{ або } P_1 = \sum F_{TPi} \quad (1)$$

Сумарна сила тертя дорівнює:

$$\sum F_{TPi} = \sum_{n=1}^{199} f \cdot n \cdot m \cdot g \, .$$

Константи f, m і g можна винести за знак підсумовування:

$$\sum F_{TPi} = f \cdot m \cdot g \cdot \sum_{n=1}^{199} n,$$

де $\sum_{n=1}^{199} n$ - арифметична прогресія суму, який знаходимо по формулі:

$$\sum_{n=1}^{199} n = \frac{n}{2}\left(n+1\right) = 19900.$$

Підставляємо значення й вирішуємо рівняння (1):

$$P_1 = f \cdot m \cdot g \cdot \sum_{n=1}^{199} n = 0.2 \cdot 0.006 \cdot 9.81 \cdot 19900 = 234.26\,\text{Н}.$$

За випадком, якщо частину A витягаємо з B:

$$\sum_{n=1}^{200} n = \frac{n}{2}\left(n+1\right) = 20100,$$

$$P_2 = f \cdot m \cdot g \cdot \sum_{n=1}^{200} n = 0.2 \cdot 0.006 \cdot 9.81 \cdot 20100 = 236.62\,\text{Н}.$$

Результати розрахунку зЗадача 0.817: $P = 234{,}26$ Н.

Задача 0.18

Клин (рис. 1.56) A, кут якого $tg\alpha = 0.05$, заганяється в поглиблення BB_1 зусиллям $Q = 6$кН (рис. 1.57). Визначити: нормальний тиск N на щоки клина, а також зусилля P, необхідне для того, щоб витягти клин, якщо коефіцієнт тертя $f = 0.1$.

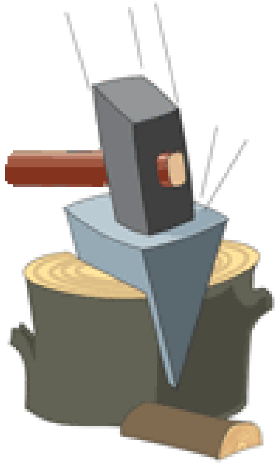


Рис. 1.56

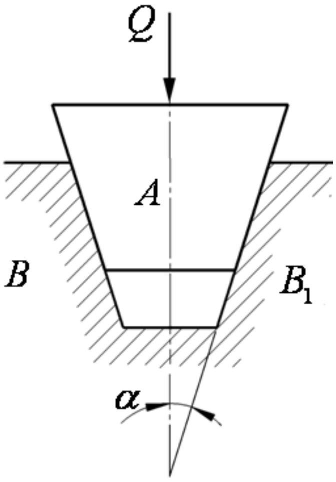


Рис. 1.57

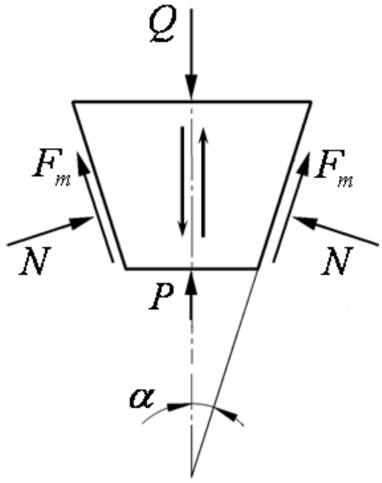


Рис. 1.58

Дано: $tg\alpha = 0.05$, $Q = 6$кН, $f = 0.1$. Знайти: N - ? P-?

Р і ш е н н я : Звільняємо клин від зв'язків, заміняючи дію зв'язків їх реакціями (рис. 1.58). Становимо й вирішуємо рівняння рівноваги. Визначаємо нормальний тиск N:

$$Q - 2 \cdot F_m \cdot \cos\alpha - 2 \cdot N \cdot \sin\alpha = 0. \tag{1}$$

Силу тертя визначаємо як:

$$F_m = f \cdot N. \tag{2}$$

Підставляємо рівняння (2) у рівняння (1) і виражаємо N:

$$Q - 2 \cdot N\left(f \cdot \cos\alpha + \sin\alpha\right) = 0,$$

$$N = \frac{Q}{2 \cdot \left(f \cdot \cos\alpha + \sin\alpha\right)},$$

При $\mathrm{tg}\,\alpha = 0.05$ $\cos\alpha \approx 1$ тому:

$$N = \frac{Q}{2 \cdot \cos\alpha\left(f + \mathrm{tg}\,\alpha\right)} = \frac{6}{2\left(0.1 + 0.05\right)} = 20 \text{ кН}.$$

Визначаємо необхідне зусилля P:

$$P - 2 \cdot F_T \cdot \cos\alpha + 2 \cdot N \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$P = 2 \cdot F_T \cdot \cos\alpha - 2 \cdot N \cdot \sin\alpha = 2 \cdot N \cdot \cos\alpha\left(f - \mathrm{tg}\alpha \right) = 2\ \text{кН}.$$

Результати розрахунку з Задача 0.818:
N = 20 кН; *P* = 2 кН.

Задача 0.19

Ящик вагою *P* (рис. 1.59) лежить на шорсткуватій поверхні з коефіцієнтом тертя *f*. Під яким кутом *β* треба прикласти силу *Q*, і величину цієї сили за умови: зрушити ящик при найменшій величині *Q*.

Рішення: Звільнимо ящик *P* від зв'язків, замінимо дії зв'язків їх реакціями (рис. 1.60).

Становимо рівняння рівноваги:

Рис. 1.59

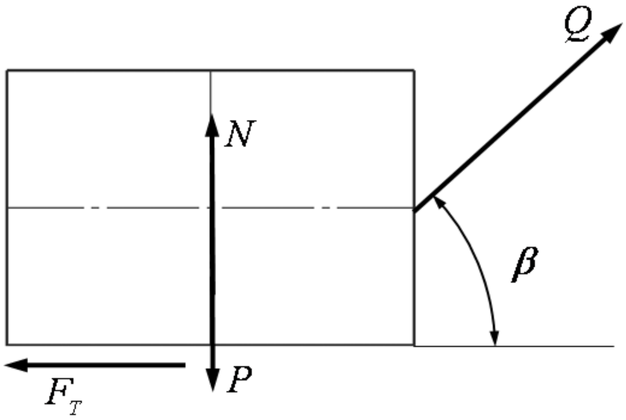


Рис. 1.60

$$\sum X_i = 0;\ Q \cdot \cos\beta - F_T = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0;\ Q \cdot \sin\beta + N - P = 0; \tag{2}$$

Силу тертя виражаємо як:

$$F_T = f \cdot N, \tag{3}$$

Підставляємо рівняння (3) у рівняння (1) і виражаємо N:

$$N = \frac{Q \cdot \cos\beta}{f}, \tag{4}$$

Якщо до вираження (4) додати в рівняння (2) і виразити *Q*:

$$Q = \frac{f \cdot P}{f \cdot \sin\beta + \cos\beta}, \tag{5}$$

Тому що чисельник є константою, то мінімального значення *Q* набуває при максимальному значенні знаменника:

$$\frac{d\left(f \cdot \sin\beta + \cos\beta \right)}{d\beta} = f \cdot \cos\beta - \sin\beta = 0,$$

$$f = \mathrm{tg}\beta, \text{ або } \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}, \ \sin\beta = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Підставляємо отримані значення в рівняння (5), знаходимо мінімальне значення *Q*:

$$Q_{\min} = \frac{f \cdot P}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Результати вирішення зЗадача 0.819: $\sin\beta = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$; $Q_{\min} = \frac{f \cdot P}{\sqrt{1+f^2}}$.

Задача 0.20

До вертикальної стіни приставлені сходи AB, що опираються своїм нижнім кінцем на горизонтальну підлогу (рис. 1.61). Коефіцієнт тертя сходи об стіну f_1, об підлогу f_2. Вага сходів разом з людиною, що перебуває на ній в точці *C* (рис. 1.62) дорівнює *P*. Точка *C* ділить довжину сходів у співвідношенні $m:n$. Визначити найбільший кут α, що становить сходами зі стіною в положенні рівноваги, а також нормальні складових реакцій N_A стіни й N_B пола для цього значення α.

Дано: f_1, f_2, P, співвідношення сходів $m:n$. Знайти: N_A, N_B, α.

Рис. 1.61

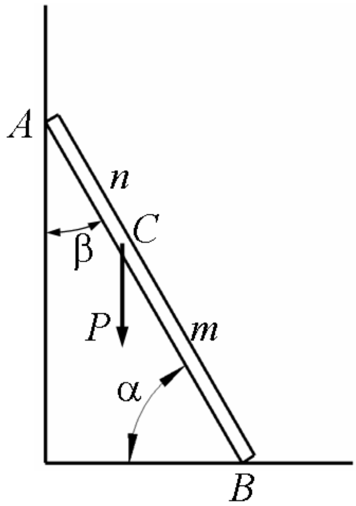


Рис. 1.62

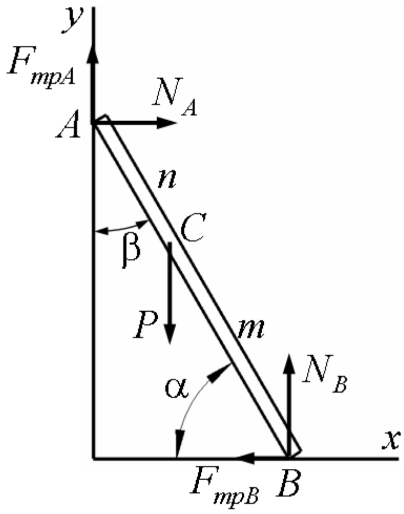


Рис. 1.63

Р і ш е н н я : Звільнимо сходи *AB* від зв'язків, замінимо дії зв'язків їх реакціями (рис. 1.63).

Становимо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0;\ N_A - F_{mpB} = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0;\ F_{mpA} + N_B - P = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_A = 0;\ N_B \cdot (n+m) \cdot \sin\beta - P \cdot n \cdot \sin\beta - F_{mpB} \cdot (n+m) \cdot \cos\beta = 0. \tag{3}$$

За умови рівноваги сили зчеплення (тертя спокою) у точках *A* і *B* визначаються як:

$$F_{mpA} = f_1 \cdot N_A; \tag{4}$$

$$F_{mpB} = f_2 \cdot N_B; \tag{5}$$

Підставимо рівняння (4), (5) у рівняння (1), (2), (3):

$$N_A - f_2 \cdot N_B = 0; \tag{6}$$

$$f_1 \cdot N_A + N_B - P = 0; \tag{7}$$

$$N_B \cdot (n+m) \cdot \sin\beta - P \cdot n \cdot \sin\beta - f_2 \cdot N_B \cdot (n+m) \cdot \cos\beta = 0; \tag{8}$$

Помножимо рівняння (7) на f_2 й додамо його до рівняння (6):

$$N_A = \frac{P \cdot f_2}{f_1 \cdot f_2 + 1}; \tag{9}$$

Аналогічно визначаємо N_B:

$$N_B = \frac{P}{f_1 \cdot f_2 + 1}; \tag{10}$$

З аналізу рівнянь видно, що реакції опор N_A і N_B **(**для даної постановки задачі) не залежать від кута нахилу сходи α.

Для того щоб визначити максимальний (граничний) кут нахилу α,підставимо рівняння (10) у рівняння (8), попередньо розділивши рівняння (8) на $\cos\beta$:

$$\frac{P}{f_1 \cdot f_2 + 1} \cdot (n+m) \cdot \mathrm{tg}\beta - P \cdot n \cdot \mathrm{tg}\beta - f_2 \cdot \frac{P}{f_1 \cdot f_2 + 1} \cdot (n+m) = 0; \tag{11}$$

Виражаємо $\mathrm{tg}\beta$ з рівняння (10):

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{m - n \cdot f_1 \cdot f_2}{(m+n) \cdot f_2};$$

Тангенс найбільшого кута α за умови $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\beta}$ визначаємо, як:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{(m+n) \cdot f_2}{m - n \cdot f_1 \cdot f}.$$

Р е з у л ь т а т и в и р і ш е н н я з З а д а ч а 0 . 8 2 0 :

$$N_A = \frac{P \cdot f_2}{f_1 \cdot f_2 + 1};\;\; N_B = \frac{P}{f_1 \cdot f_2 + 1};\;\; \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{(m+n)\cdot f_2}{m - n \cdot f_1 \cdot f}.$$

Задача 0.21

Однорідний стрижень своїми кінцями A и B може сковзати по негладкій окружності радіуса a (рис. 1.64). Відстань OC стрижня до центра O окружності, розташованої у вертикальній площині, дорівнює b. Коефіцієнт тертя між стрижнем і окружністю дорівнює f. Знайти для положення рівноваги стрижня кут φ, що становить прямій OC з вертикальним діаметром окружності.

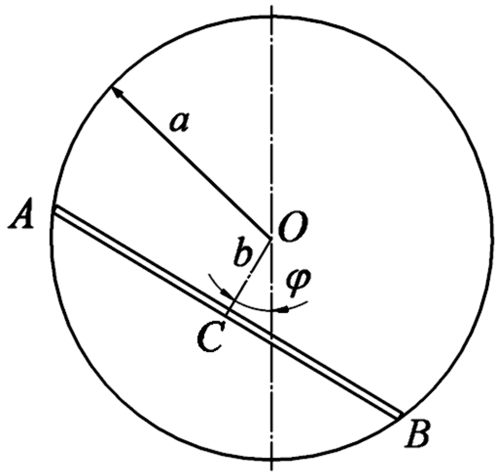


Рис. 1.64

Р і ш е н н я : Звільнимо стрижень від зв'язків (рис. 1.65), замінимо дії зв'язків їх реакціями. У точці A реакція опори N_A й сила тертя $F_{трA}$, у точці B реакція опори N_B й сила тертя $F_{трB}$

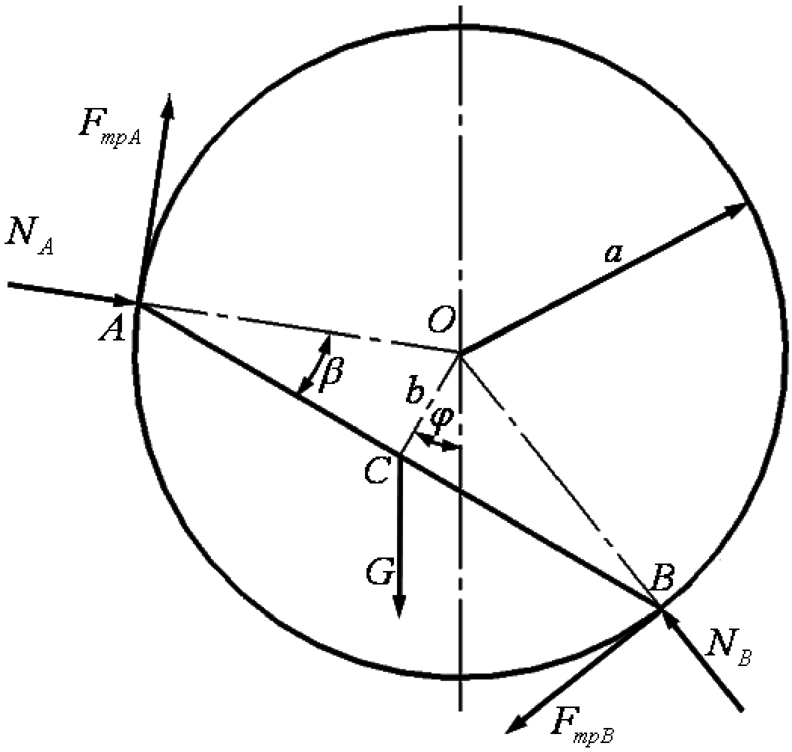


Рис. 1.65

Становимо рівняння рівноваги. Запишемо рівняння моментів сил навколо точок B і A:

$$\sum M_B = 0;\; G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi - N_A \cdot l \cdot \sin\beta - F_{трA} \cdot l \cdot \cos\beta = 0; \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0;\; G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi - N_B \cdot l \cdot \sin\beta + F_{трB} \cdot l \cdot \cos\beta = 0. \qquad (2)$$

За умови рівноваги сили зчеплення (тертя спокою) у точках B і A визначаються як:

$$F_{трA} = f \cdot N_A; \qquad (3)$$

$$F_{трB} = f \cdot N_B. \qquad (4)$$

Підставимо рівняння (3), (4) у рівняння (1), (2):

$$G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi - N_A \cdot l \cdot \sin\beta - f \cdot N_A \cdot l \cdot \cos\beta = 0; \qquad (5)$$

$$G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi - N_B \cdot l \cdot \sin\beta + f \cdot N_B \cdot l \cdot \cos\beta = 0 . \tag{6}$$

Виразимо з 5-го й 6-го рівнянь N_A і N_B:

$$N_A = \frac{G \cdot \cos\varphi}{2 \cdot \left(\sin\beta + f \cdot \cos\beta\right)}; \tag{7}$$

$$N_B = \frac{G \cdot \cos\varphi}{2 \cdot \left(\sin\beta - f \cdot \cos\beta\right)}. \tag{8}$$

Запишемо рівняння моментів сил навколо точки O:

$$\sum M_O = 0;\ G \cdot b \cdot \sin\varphi - F_{трA} \cdot a - F_{трB} \cdot a = 0. \tag{9}$$

Підставимо в рівняння (9) рівняння (3) і (4):

$$G \cdot b \cdot \sin\varphi - f \cdot N_A \cdot a - f \cdot N_B \cdot a = 0$$

$$G \cdot b \cdot \sin\varphi = f \cdot a\left(N_A + N_B\right); \tag{10}$$

У рівнянні (10) заміняємо N_A і N_B на їх вираження:

$$b \cdot \sin\varphi = \frac{f \cdot a}{2} \cdot \cos\varphi\left(\frac{1}{\sin\beta + f \cdot \cos\beta} + \frac{1}{\sin\beta - f \cdot \cos\beta}\right) = 0; \tag{11}$$

Із трикутника AOC визначаємо $sin\ \beta = b/a$. Використовуючи рівняння $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ знаходимо $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$. Підставляючи отримані значення в рівняння (11) визначаємо рішення задачі у вигляді $ctg\varphi$:

$$ctg\varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{1 + f^2}{f} - f .$$

II. Система сил, що не лежать в одній площині

Просторова система сил, що діють на тверде тіло, відповідно до теореми Пуансо [3, стор. 33] у загальному випадку приводиться до сили – *головному вектору* системи, і до *пари*, що характеризується *головним моментом* M_O системи сил щодо центра приведення. При зміні центра приведення головний вектор системи R не змінюється, тобто є *інваріантом*, головний момент змінюється. Існує мінімальне для даної системи сил значення головного моменту, що визначається спеціальним вибором центра приведення.

Мінімальне значення головного моменту визначає *другий інваріант системи сил* – скалярний добуток головного моменту системи на головний вектор, інакше проекцію головного моменту на головний вектор. Якщо проекція дорівнює нулю, то система сил лежить у площині, перпендикулярної головному моменту, і в загальному випадку зводиться тільки до сили – *рівнодіючої*.

При ненульових значеннях головного вектора й мінімального головного моменту система сил приводиться до *силового гвинта* або «динаме». Наприклад, силовий гвинт діє на обертовий шуруп, його вісь збігається з віссю шурупа, кут між головним вектором і моментом дорівнює нулю. Вісь обертання шурупа під дією такої системи сил є *центральною гвинтовою віссю.* У загальному випадку центральна гвинтова вісь системи сил вимагає спеціального визначення, як це показано в прикладі - задачі 1.22.

1.5. Приведення системи сил до найпростішого виду

Задача 0.22

Дано: система сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ прикладена до прямокутного паралелепіпеда $OABCDEFK$; модулі, точки навантаження й напрямки цих сил зазначені в таблиці 1.5. Знайти: головний вектор та головний момент системи сил.

Таблиця 1.5

Дані для розрахунку задачі 1.22

Розміри прямокутного паралелепіпеда, см (рис. 1.65)			$\vec{P}_1$			$\vec{P}_2$			$\vec{P}_3$			$\vec{P}_4$		
a	b	c	Модуль, Н	Точка навантаження	Напрямок	Модуль, Н	Точка навантаження	Напрямок	Модуль, Н	Точка навантаження	Напрямок	Модуль, Н	Точка навантаження	Напрямок
40	50	30	8	D	DO	20	A	AC	25	E	EF	15	F	FB

Р і ш е н н я : 1. Визначення головного вектора заданої системи сил, представленої на рис. 1.66.

Попередньо визначаємо

$$\cos\alpha = b\Big/\sqrt{a^2+b^2}\ ;\ \sin\alpha = a\Big/\sqrt{a^2+b^2}\ ;.$$

У цьому випадку

$$\cos\alpha = 0.781;\ \sin\alpha = 0.625.$$

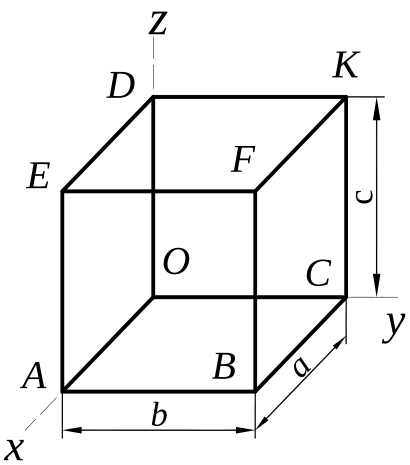


Рис. 1.65

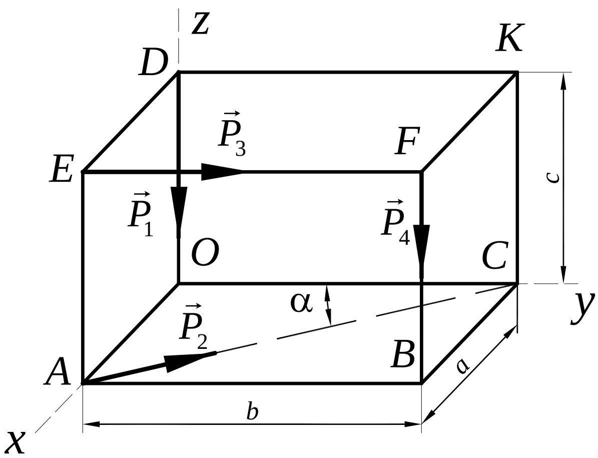


Рис. 1.66

Проекції головного вектора на осі координат:

$$X = -P_2 \sin\alpha;$$

$$Y = P_2 \cos\alpha + P_3;$$

$$Z = -P_1 - P_4.$$

Підставивши задані в умові числові значення, одержимо:

$$X = -12.494 \text{ Н}; \; Y = 40.617 \text{ Н}; \; Z = -23 \text{ Н}.$$

Модуль головного вектора

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 48.32 \text{ Н}.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{i}) = X/R \; ; \; \cos(\vec{R}^*, \vec{j}) = Y/R \; ; \; \cos(\vec{R}^*, \vec{k}) = Z/R .$$

Згідно з вихідними даними, одержуємо:

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{i}) = -0.259; \; \cos(\vec{R}^*, \vec{j}) = 0.841; \; \cos(\vec{R}^*, \vec{k}) = -0.476.$$

Головний вектор показаний на рис. 1.67.

2. Визначення головного моменту заданої системи сил щодо центра О. Головні моменти заданої системи сил щодо координатних осей:

$$M_X = -P_3 \cdot c - P_4 \cdot b;$$

$$M_Y = P_4 \cdot a;$$

$$M_Z = P_3 \cdot a + P_2 \cdot \cos\alpha \cdot a.$$

У результаті обчислень маємо:

$$M_X = -1500 \text{ Н}\cdot\text{см}; \; M_Y = 600 \text{ Н}\cdot\text{см}; \; M_Z = 1624.695 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Модуль головного моменту

$$M_O = \sqrt{M_X{}^2 + M_Y{}^2 + M_Z{}^2} = 2291.208 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = M_X / M_O;$$

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = M_Y / M_O;$$

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = M_Z / M_O.$$

У результаті обчислень маємо:

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = -0.655; \ \cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = 0.262; \ \cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = 0.341.$$

Головний момент $\vec{M}_O$ показано на рис. 1.67.

3. Обчислення найменшого головного моменту заданої системи сил:

$$M^* = (XM_X + YM_Y + ZM_Z)/R^*;$$

По цій формулі одержуємо $M^* = 520.51$ Н · см.

4. Оскільки $R^* \neq 0$, $M^* \neq 0$, те задана система сил зводиться до силового гвинта. Рівняння центральної осі має вигляд:

$$\frac{\left[M_X - \left(y \cdot Z - z \cdot Y\right)\right]}{X} = \frac{\left[M_Y - \left(z \cdot X - x \cdot Z\right)\right]}{Y} =$$

$$= \frac{\left[M_Z - \left(x \cdot Y - y \cdot X\right)\right]}{Z} = \frac{M^*}{R^*}.$$

Із цих трьох рівнянь незалежними є тільки два. Підставляючи у два з них знайдені числові значення величин, знаходимо:

$$\left[M_X - \left(yZ - zY\right)\right]/X = M^*/R^*: \ 23 \cdot y + 40.62 \cdot z = 1365.42.$$

$$\left[M_Y - \left(zX - xZ\right)\right]/Y = M^*/R^*:\ 23 \cdot y - 12.5 \cdot z = 162.468 .$$

Значення координат точок перетинання центральною віссю координатних площин, певні за допомогою цих рівнянь, представлені в таблиці 1.6. Центральна вісь системи сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ показана на рис. 1.67.

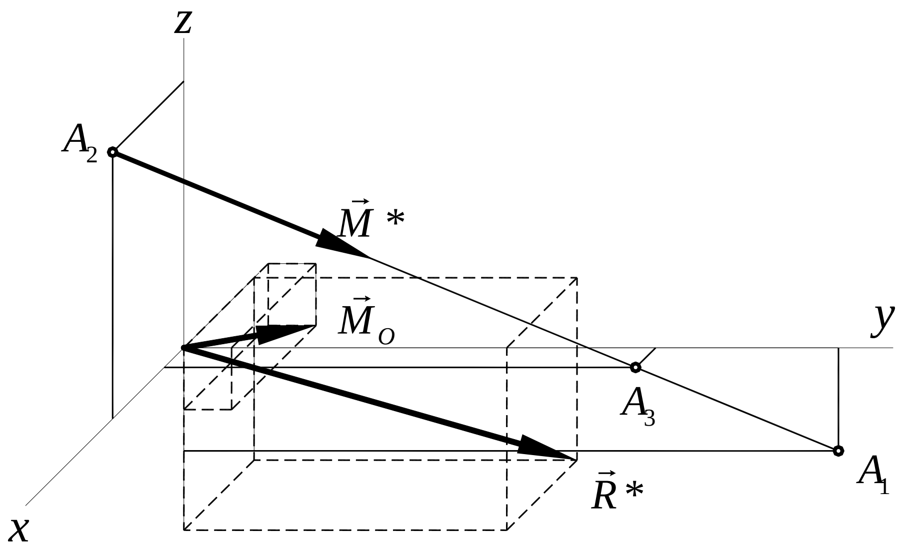


Рис. 1.67

Примітка. Якщо система сил зводиться до рівнодіючого, тобто $M^* = 0$, і $\vec{R} = \vec{R}^* \neq 0$, то рівняння лінії дії рівнодіючої буде мати вигляд:

$$M_X = Y - Z; \quad M_Y = Z - X; \quad M_Z = X - Y,$$

де *X*, *Y*, *Z* – проекції рівнодіючої сили на координатні осі;

M_X, M_Y, M_Z – головні моменти заданої системи сил щодо координатних осей.

Із цих трьох рівнянь незалежними також є тільки два.

Таблиця 1.6

Результати розрахунку задачі 1.22

Точки	Координати, см

	x	y	z
A_1	0	82.33	-13.0
A_2	25. 325	0	33.62
A_3	7.06	59.4	0

1.6. Визначення реакцій опор твердого тіла

Завдання про визначення реакцій опор твердого тіла під дією просторової системи сил вирішується після звільнення тіла від зв'язків на основі умов рівноваги просторової системи сил.

Тіло в просторі має шість ступенів волі, рівновага тіла в просторі забезпечується шістьома скалярними умовами рівноваги,

$$\sum X_i = 0;\ \sum Y_i = 0;\ \sum Z_i = 0;\ \sum M_{iOX} = 0;\ \sum M_{iOY} = 0;\ \sum M_{iOZ} = 0\ .$$

При наявності невідомих реакцій зв'язків умови рівноваги виступають як алгебраїчні рівняння для їхнього визначення, і дозволяються як у плоскому випадку.

Особливої уваги в просторовому випадку вимагає трактування зв'язків і їхня заміна реакціями. Наприклад, закладення балки в загальному випадку описується трьома проекціями вектора-моменту й трьома проекціями сили, підшипники можуть трактуватися як плоскі (тільки з реакціями в площині, перпендикулярній осі) і просторові (з додатковим вектором-моментом перпендикулярно осі).

Задача 0.23

Дві однорідні прямокутні тонкі плити вагою P_1 та P_2 жорстко з'єднані під прямим кутом друг до друга й закріплені сферичним шарніром у точці *A*, циліндричним шарніром у точці *D* і невагомим стрижнем 1 (рис. 1.68) всі стрижні прикріплені до плит і до нерухомих опор шарнірами. Сили F, P_1, P_2, направлені паралельно площині *XZ*. Д а н о : $M = 6$ кН·м, $M \in xAy$ $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 8$ кН, $F = 10$ кН, $F \perp Ay$, $AD = 3$ м, $AB = 4$ м, $AD = 2$ м, $\alpha = 60°$.

З н а й т и : реакції опор *A*, *D* та зусилля в стрижні EE'.

Р і ш е н н я :

Розглянемо рівновагу однорідних плит. На них діють задані сили P_1, P_2, F і пари сил з моментом M. Плити закріплені сферичним шарніром у точці *A*, циліндричним шарніром у точці *D* і невагомим стрижнем 1.

Відкинемо зв'язки та замінимо їх реакціями (рис. 1.69).

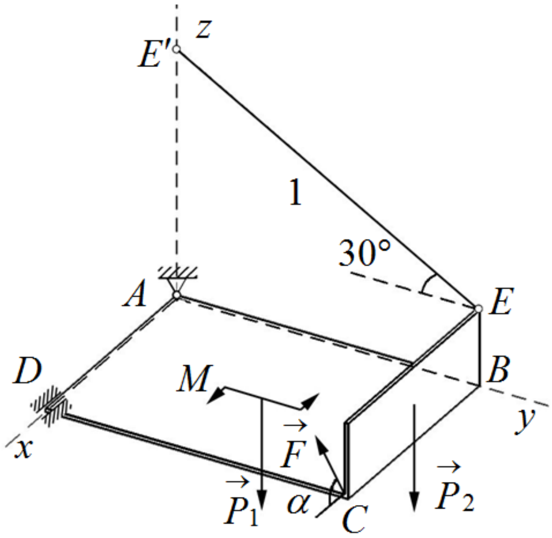


Рис. 1.68

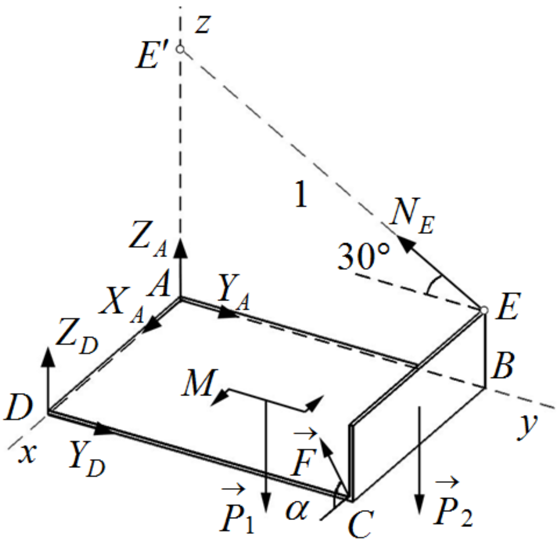


Рис. 1.69

Складемо рівняння рівноваги цієї просторової системи сил:

$$\sum F_{iX} = 0: X_A + F \cdot \cos 60° = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iY} = 0: Y_D + Y_A - N_E \cdot \cos 30° = 0; \qquad (2)$$

$$\sum F_{iZ} = 0: Z_A + Z_D + N_E \cdot \sin 30° + F \sin 60° - P_1 - P_2 = 0; \qquad (3)$$

$$\sum M_{iX} = 0: -P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 4 + N_E \cdot 2 \cdot \cos 30 + N_E \cdot 4 \cdot \sin 30 + F \cdot 4 \cdot \sin 60° = 0; \qquad (4)$$

$$\sum M_{iY} = 0: P_1 \cdot 1{,}5 + P_2 \cdot 1{,}5 - F \cdot 3 \cdot \sin 60 - Z_D \cdot 3 = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_{iZ} = 0: Y_D \cdot 3 - F \cdot 4 \cdot \cos 60 + M = 0. \qquad (6)$$

Вирішуючи систему рівнянь 1-6 знаходимо результати вирішення зЗадача 0.823:

$X_A = -5$ кН, $Y_A = -3{,}423$ кН, $Z_A = 17{,}282$ кН, $Y_D = -14{,}66$ кН, $Z_D = 4{,}667$ кН, $N_E = 1{,}436$ кН.

Знак «-» у відповідях указує на те, що дійсні реакції спрямовані в протилежну сторону від передбачуваного напрямку.

Задача 0.24

Д а н о : на горизонтальний вал, що лежить у підшипниках *A* та *B*, насаджені перпендикулярно осі вала два шківи з радіусами: $r = 20$ см, $R = 25$ см. До рукоятки D прикладена сила $\vec{P}$. Зневажаючи вагою вала, визначити реакції підшипників і величину сили *P* в стані рівноваги, якщо ваги шківів відповідно: $Q_1 = 150$ Н, $Q_2 = 300$ Н, сила $T = 200$ Н, відстані $a = 20$ см, $b = 30$ см, $c = 15$ см, $l = CD = 20$ см (рис. 1.70).

Р і ш е н н я : Розглядаємо рівновагу вала. На нього діють задані сили: вага шківів $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$, сила $\vec{T}$. На вал накладені зв'язки: підшипники в точках *A* и *B*. Подумки їх відкидаємо, заміняючи їхню дію на вал реакціями.

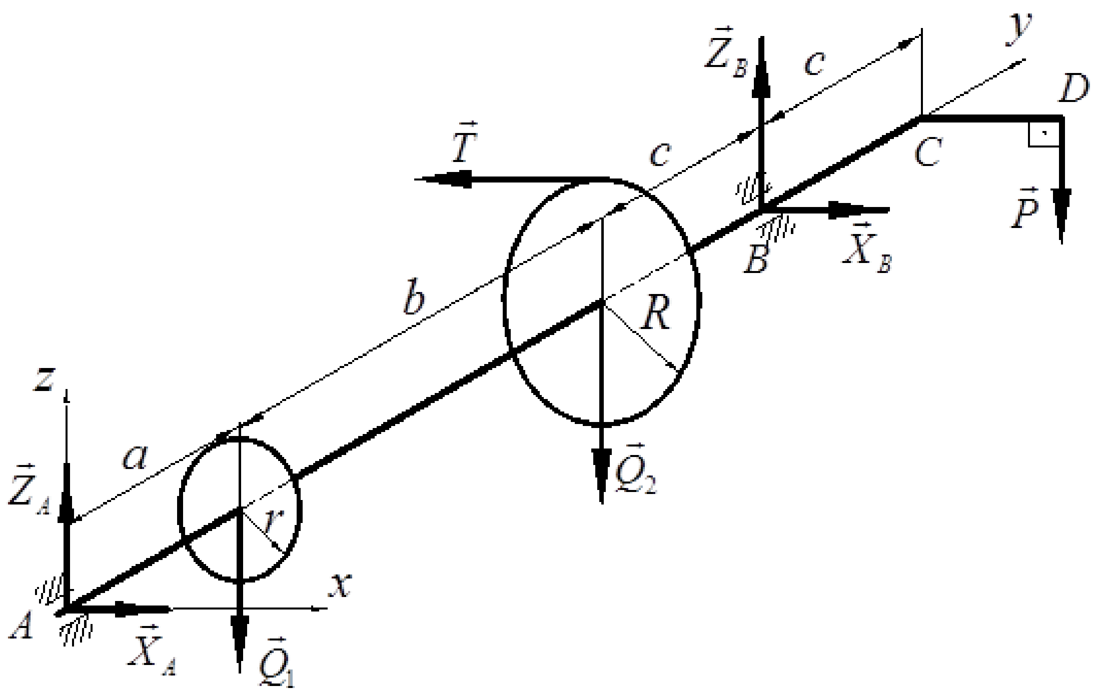


Рис. 1.70

Реакції підшипників *A* и *B* розкладаємо на $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, що є проекціями спрямованими паралельно вісям координат AX і AZ. Крім того, на рукоять вала *CD* діє невідома сила *P*, прикладена в точці *D*.

Всі задані сили й сили, величини яких потрібно визначити, зображуємо на рис.1.70. Прикладені до вала сили утворять довільну просторову систему сил. Становимо рівняння рівноваги сил, що діють на вал:

$$\sum P_{iX} = 0: X_A + X_B - T = 0; \tag{1}$$

$$\sum P_{iZ} = 0: Z_A + Z_B - Q_1 - Q_2 - P = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_{iX} = 0: \begin{aligned} -Q_1 \cdot a - Q_2(a+b) + Z_B(a+b+c) - \\ - P(a+b+2c) = 0; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\sum M_{iY} = 0: -T \cdot R + P \cdot l = 0; \tag{4}$$

$$\sum M_{iZ} = 0: T(a+b) - X_B(a+b+c) = 0. \tag{5}$$

Одержуємо п'ять рівнянь із такою же кількістю невідомих. Завдання статично визначене. З рівняння (5) знаходимо

$$X_B = \frac{T(a+b)}{a+b+c} = \frac{250 \cdot 50}{65} = 192.3 \text{ Н},$$

а з рівняння (4) визначаємо:

$$P = T \cdot P/l = 250 \cdot 25 / 20 = 312.5 \text{ Н}.$$

Підставляючи знайдені значення X_B і P у рівняння (1), (2), (3), обчислюємо:

$$X_A = T - X_B = 57.7 \text{ Н},$$

$$Z_B = \frac{Q_1 \cdot a + Q_2 \cdot (a+b) + P(a+b+2 \cdot c)}{a+b+c} = 661.5 \text{ Н},$$

$$Z_A = Q_1 + Q_2 + P - Z_B = 101 \text{ Н}.$$

Значення проекцій реакцій підшипників X_A, Z_A X_B, Z_B позитивні. Тобто напрямку цих сил, показані на рис. 1.70, збігаються з їхніми дійсними напрямками.

Р е з у л ь т а т и р о з р а х у н к у з З а д а ч а 0 . 8 2 4 :
X_A = 57,7 Н; Z_A = 101 Н; X_B = 192,3 Н; Z_B = 661,5 Н; P = 312,5 Н.

1.7. Визначення положення центра ваги тіла

Формули для визначення центра ваги тіла безпосередньо випливають із формул для визначення положення центра системи паралельних сил [1,3,5] Завдання по визначенню центра ваги тіла в загальному випадку зводиться до визначення інтегралів від розподілу щільності тіла по обсязі.

У простих випадках однорідних тіл, складених із частин канонічної форми з відомим положенням центрів ваги, завдання радикально спрощується й зводиться до алгебраїчних обчислень. Додаткові спрощення можна одержати для тіл, які можна вважати плоскими, тобто постійної товщини. У цьому випадку завдання визначення положення центра ваги стає двовимірної, і обчислення обсягів частин заміняється обчисленням їхніх площ.

Спрощення можна одержати також для тіл каркасної конфігурації, складених зі стрижнів постійного перетину й щільності. У цьому випадку завдання залишається тривимірної, але обчислення обсягів окремих частин заміняється визначенням їхніх довжин.

Крім того, при визначенні центрів ваги тіл варто використати міркування симетрії, раціональний вибір системи координат, а також прибігати, де це раціонально, до використання методу негативних частин. Останній найбільш корисний при наявності в тілі (фігурі) порожнеч, вирізів канонічної форми. За основу приймається тіло без вирізів, площа й вага кожного вирізу вважаються негативними.

Задача 0.25

Д а н о : плоска фігура, зображена на рис. 1.71. Визначити координати центра її ваги.

Р і ш е н н я : Координати центра ваги плоскої фігури визначаємо за формулами

$$x_C = S_Y / F; \; y_C = S_X / F, \qquad (1)$$

де $S_Y = \sum F_i x_i$, $S_X = \sum F_i y_i$ – статичні моменти фігури щодо осей *OY* і *OX*, *F* – площа фігури.

Для того, щоб скористатися формулами (1), розбиваємо плоску фігуру на частині, для яких відомі або легко визначаються площі F_i й координати центрів ваги x_i й y_i. У цьому випадку такі частини є наступними фігурами: прямокутник, трикутник і півколо (рис. 1.72). Серед обраних частин немає вирізів. Проте пам’ятаємо, що для вирізів площа вважається негативною.

Всі розрахункові дані заносимо в таблицю 1.7.

Таблиця 1.7

Результати розрахунку задачі 1.25

Номер елемента	F_i, см^2	x_i, см	y_i, см	$S_{iY} = F_i x_i$, см^3	$S_{iX} = F_i y_i$, см^3
1	2500	50	25	125000	62500
2	500	81.67	33.33	40835	16665
3	981.75	10.62	25	10426.19	24543.7
Σ	3981.75			176261.19	103709

Далі по формулах (1) обчислюємо координати центра ваги всієї фігури:

$$x_C = 179962{,}354 / 3981{,}75 = 45{,}2 \text{ см};$$

$$y_C = 103709 / 3981{,}75 = 26{,}05 \text{ см}.$$

Центр ваги фігури показаний на рис. 1.72.

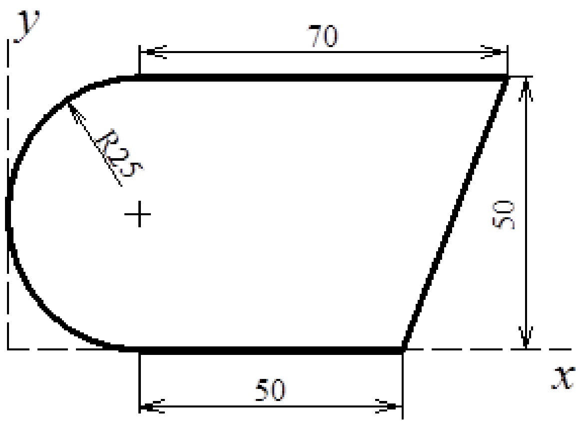


Рис. 1.71

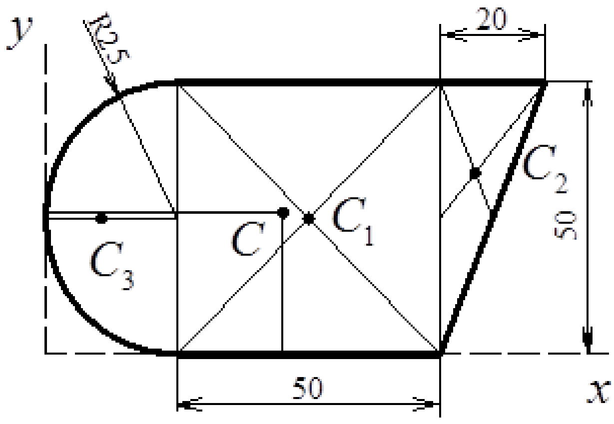


Рис. 1.72

Задача 0.26

Два однорідних стрижня *AB* і *BP* однакового поперечного перерізу, з яких *AB* удвічі коротше *BP*, з'єднані жорстко своїми кінцями під кутом $60°$, утворюють ламаний важіль *ABC*. У кінця *A* важіль підвішено на нитці (рис. 1.73). Визначити: кут α нахилу стрижня *BC* до обрію при рівновазі важеля; поперечними розмірами стрижнів зневажити.

Дано: *AB*:*BC*=1:2; $\angle ABC = 60°$; Знайти: α-?

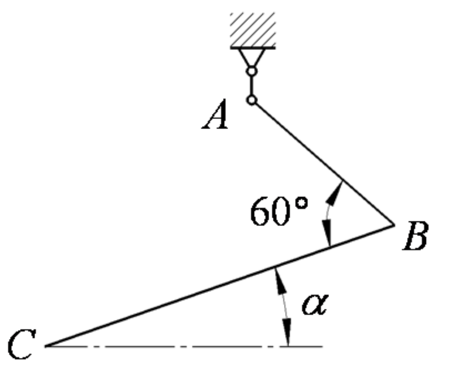


Рис. 1.73

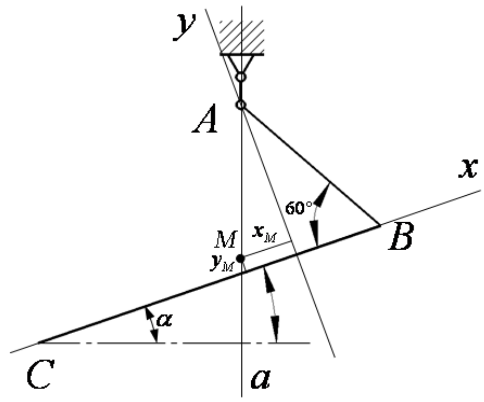


Рис. 1.74

Р і ш е н н я : розрахункова схема зображена на рис. 1.74. У зв'язку з тим, що ламаний важіль *ABC* перебуває в стані спокою, то центр ваги ламаного важеля проходить через вертикальну вісь *a*. Визначимо місце знаходження центра ваги ламаного важеля.

Виберемо систему координат з початком відліку в крапці *A* (рис. 1.74). Координати цента ваги визначаються за формулами:

$$x_M = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{L};$$

$$y_M = \frac{\sum y_i \Delta l_i}{L};$$

де: L - довжина стрижнів ламаного важеля, Δl_i - довжина і-го стрижня, y_i, x_i - координати центрів ваги і-го стрижня.

У результаті розрахунків, одержуємо:

$$x_M = -\frac{3}{12};$$

$$y_M = \frac{\sqrt{3}}{12};$$

Знаючи положення центра ваги обчислюємо кут α:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x_M}{1 \cdot \sin 60° - y_M} = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

Результати розрахунку зЗадача 0.826: $\alpha = 19.1$.

Задача 0.27

Дано: об’ємна фігура, що зображена на рис. 1.75 з розмірами у сантіметрах. Визначити: координати центра її ваги.

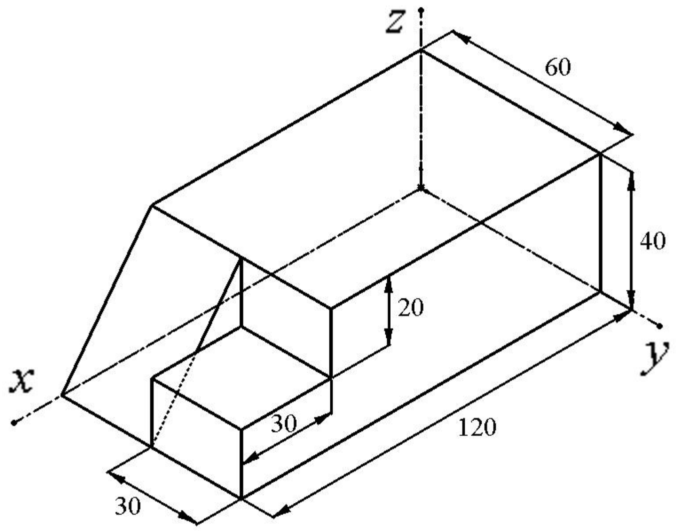


Рис. 1.75

Р і ш е н н я : координати центра ваги плоскої фігури визначаємо за формулами:

$$x_C = \frac{\Sigma x_i \cdot \Delta v_i}{V}; \; y_C = \frac{\Sigma y_i \cdot \Delta v_i}{V}; \; z_C = \frac{\Sigma z_i \cdot \Delta v_i}{V}. \qquad (1)$$

В формулах (1) Δv_i – об'єм елементарної частини тіла, V – об'єм всього тіла, x_i, y_i, z_i – координати центра ваги частини тіла.

Щоб скористатися формулами (1), поділяємо фігуру на частини, для яких відомі або легко визначаються об'єми Δv_i та координати центрів ваги x_i, y_i, z_i. У даному випадку за такі частини приймаємо дві прямокутних паралелепіпеда та призми (рис. 1.76). Початок координат обираємо на нижній площині прямокутного паралелепіпеда, у дальньому куті. Вісі x, y, z спрямовуємо вдовж граней паралелепіпеду.

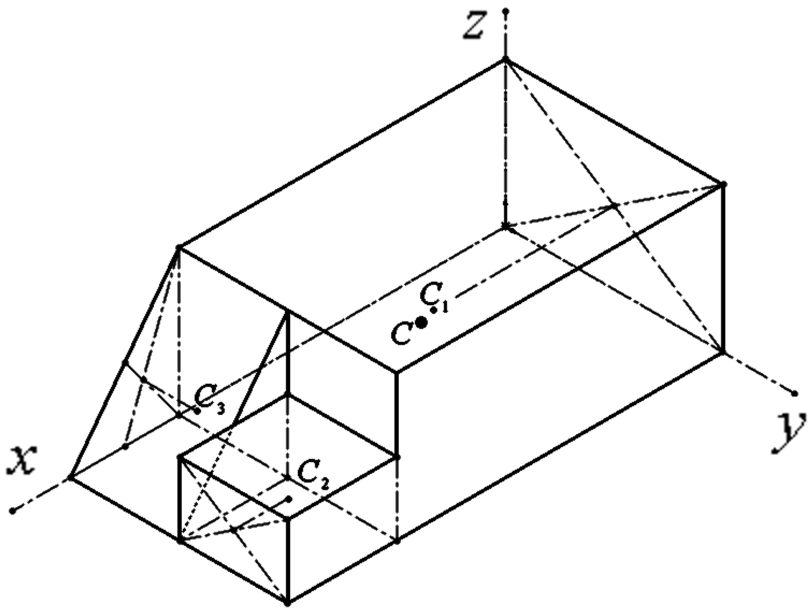


Рис. 1.76

Об'єм прямокутного паралелепіпеда розраховуємо за формулою:

$$V_{пар} = a \cdot b \cdot c,$$

де a, b, c - відповідні сторони прямокутного паралелепіпеда.

Об'єм призми розраховуємо за формулою:

$$V_{призма} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2}$$

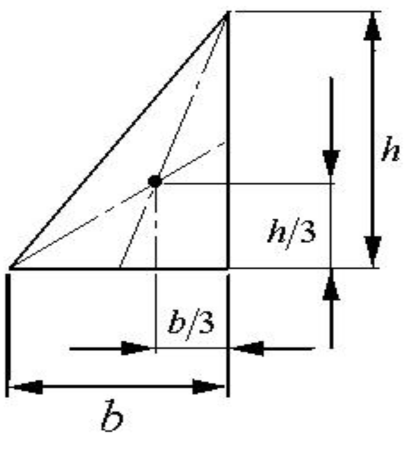


Рис. 1.77

На рис. 1.76 зазначені три точки: C_1, C_2- координата центра ваги прямокутного паралелепіпеда, C_3 – координати центра ваги призми. Для призми зі стороною у вигляді трикутника вісь через точку C_3, розташована згідно з рис. 1.77.

Усі розрахункові дані заносимо в таблицю 1.8.

Таблиця 1.8

Результати розрахунку задачі 1.27

	$\Delta v_i, м^3$	$x_i, м$	$y_i, м$	$z_i, м$	$x_i \cdot \Delta v_i$	$y_i \cdot \Delta v_i$	$z_i \cdot \Delta v_i$
Прям.парал.	0,216	0,45	0,3	0,2	0,0972	0,0648	0,0432
Прям.парал.	0,018	1,15	0,45	0,15	0,0207	0,0081	0,0027
Призма	0,018	0,1	0,15	0,133	0,0018	0,0027	0,0024
Σ	0,252	-	-	-	0,1197	0,0756	0,0483

За формулами (1) обчислюємо координати центра ваги плоскої фігури:

$$x_c = 0{,}1197 / 0{,}252 = 0{,}475 \text{ м}$$

$$y_c = 0{,}0756 / 0{,}252 = 0{,}3 \text{ м}$$

$$z_c = 0{,}0483 / 0{,}252 = 0{,}1917 \text{ м}$$

Центр ваги фігури зазначено у точці *C* на рис. 1.76.

Задача 0.28

Д а н о : об'ємна фігура, що зображена на рис. 1.78. $R = 30\ см$, $a = 50\ см$, $b = 40\ см$

В и з н а ч и т и : координати центра ваги.

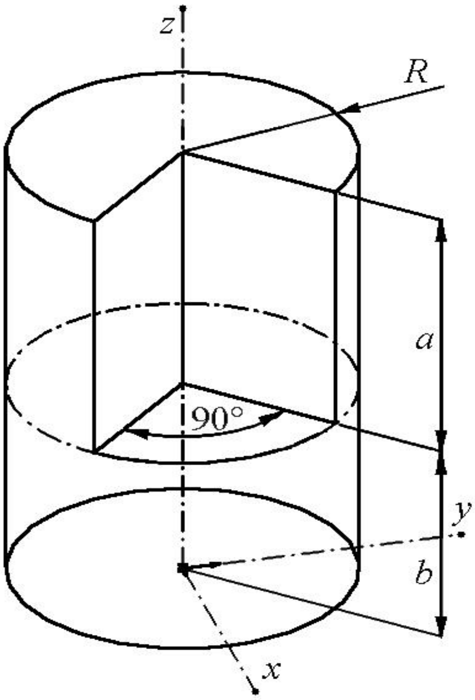
Р і ш е н н я : координати центра ваги плоскої фігури визначаємо за формулами:

$$x_C = \frac{\Sigma x_i \cdot \Delta v_i}{V};\ y_C = \frac{\Sigma y_i \cdot \Delta v_i}{V};\ z_C = \frac{\Sigma z_i \cdot \Delta v_i}{V}, \qquad (1)$$

де Δv_i – об'єм елементарної частини тіла,

V – об'єм всього тіла,

x_i, y_i, z_i – координати центрів ваги частин тіла.



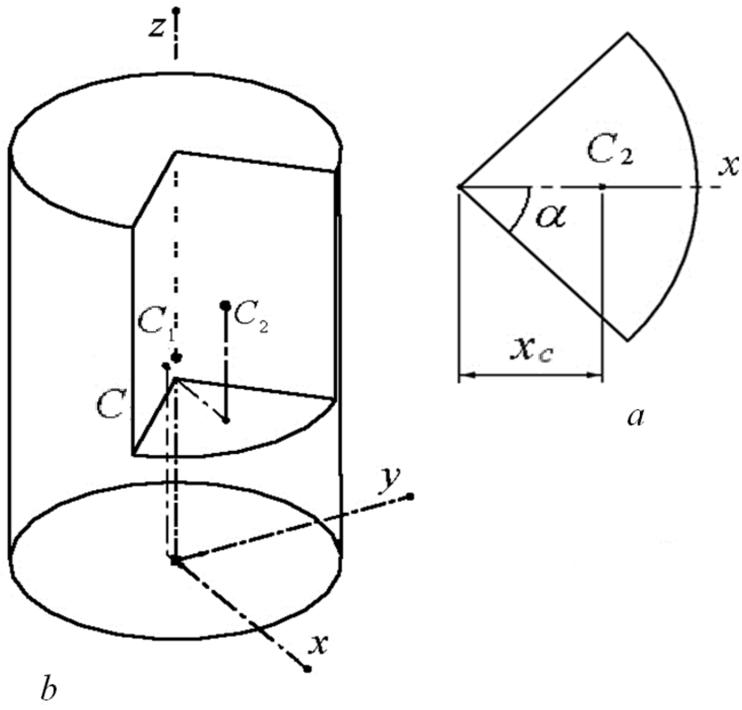


Рис. 1.78 Рис. 1.79

Поділяємо фігуру на прості частини, що мають відомі формули обчислень об'ємів Δv_i та координат центрів ваги x_i, y_i, z_i. Фігуру зручно розділити на дві частини: циліндр і сектор циліндру (рис. 1.79). Початок координат розташовуємо на нижній площині циліндру в центрі кола. Вісь z спрямовуємо вздовж циліндру. Вісь x спрямовуємо так, щоб вона розділяла основу сектора циліндру навпіл.

Об'єм циліндра розраховуємо за формулою:

$$V_{цil} = \pi \cdot R^2 \cdot h,$$

де R та h - відповідно радіус та висота циліндра.

Об'єм сектору циліндра розраховуємо за формулою:

$$V_{сек} = \alpha \cdot R^2 \cdot h$$

Сектор циліндра є вирізом, тому вважаємо його об'єм від'ємним.

C_1 – координата центра тяжіння циліндра:

$$z_c = h/2 .$$

C_2 – координати центра тяжіння сектору циліндра:

$$z_c = b + a/2 \text{ та } x_c = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} .$$

Усі розрахункові дані заносимо в таблицю

Таблиця 1.9

Результати розрахунку задачі 1.28

	Δv_i, $м^3$	x_i, $м$	y_i, $м$	z_i, $м$	$x_i \cdot \Delta v_i$	$y_i \cdot \Delta v_i$	$z_i \cdot \Delta v_i$
Циліндр	0,254	0	0	0,45	0	0	0,1144
Сектор	-0,035	0. 1801	0	0,65	-0,0064	0	-0,0229
Σ	0,2191	-	-	-	-0,0064	0	0,0915

За формулами (1) обчислюємо координати центра ваги:

$$x_C = -0.0064 / 0.2191 = -0.029 \text{ м;}$$

$$y_C = 0 \text{ м;}$$

$$z_C = 0.0915 / 0.2191 = 0.418 \text{ м;}$$

На рис. 1.79, б точкою *C* зображено центр ваги об’ємної фігури.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. ТЕОРІЯ ТА ЗАДАЧІ.

РОЗДІЛ 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

І. Плоска система сил

1.1. Визначення реакцій опор твердого тіла
1.2. Визначення реакцій опор і зусиль у стрижнях плоскої ферми
1.3. Визначення реакцій опор складеної конструкції (система двох тіл)
1.4. Рівновага сил з урахуванням зчеплення (тертя спокою)

ІІ. Система сил, що не лежать в одній площині

1.5. Приведення системи сил до найпростішого виду
1.6. Визначення реакцій опор твердого тіла
1.7. Визначення положення центра ваги тіла