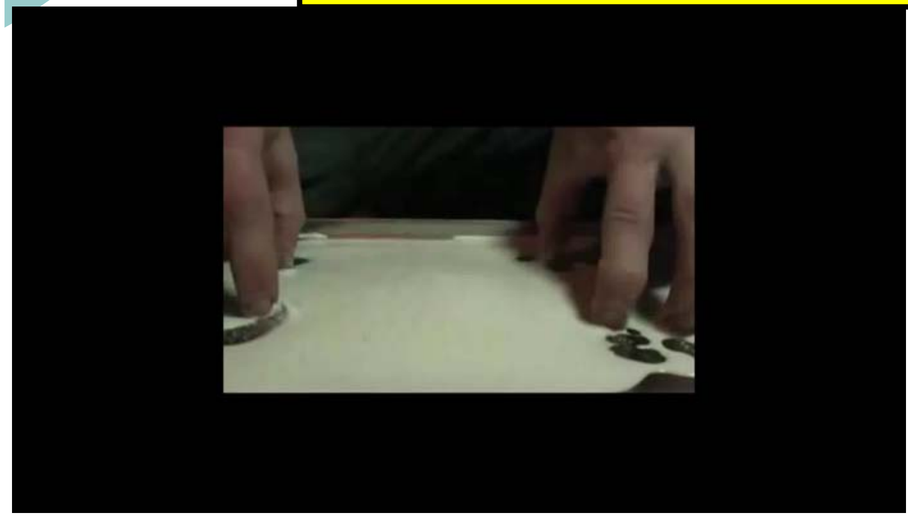
Гидравлика (иллюстративный материал)

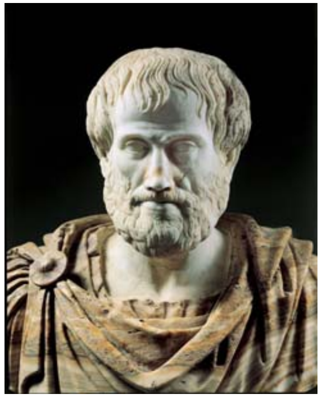
доц. Роговой А.С.

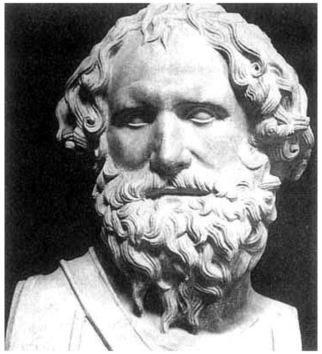
Модуль 1. Гидростатика

Гидравликой называют науку, изучающую физические свойства жидкостей, законы их равновесия (гидростатика) и движения (гидродинамика), а также разрабатывающую методы применения этих законов к решению практических инженерных задач с использованием основ физики, технической механики и математического аппарата.



История развития гидравлики





Аристотель
384-322 до н.э.

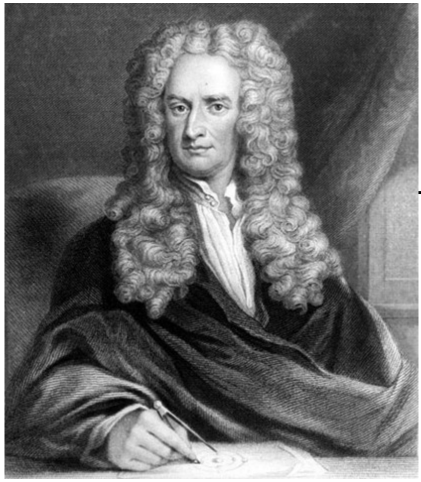
Архимед
287-212 до н.э.

Теория плавания тел

Леонардо да Винчи
1452-1519

Машущий полет и планиро-вание

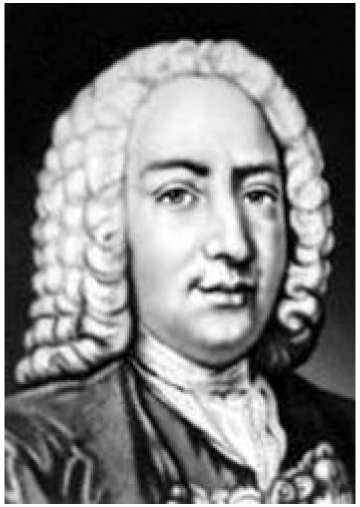
История развития гидравлики



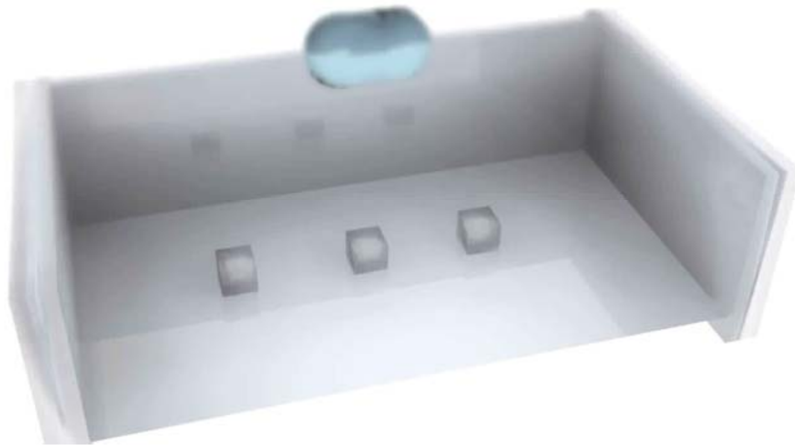
Исаак Ньютон
1643-1727

Связь сопротивления и скорости

Леонард Эйлер
1707-1783



Даниил Бернулли
1700-1783



Создание теоретической гидродинамики как специальной науки

Силы, действующие на жидкость. Давление в жидкости.

В следствие текучести (подвижности частиц) в жидкости действуют силы не сосредоточенные, а непрерывно распределенные по ее объему (массе) или поверхности. В связи с этим силы, действующие на объемы жидкости и являющиеся по отношению к ним внешними, разделяют на **массовые (объемные) и поверхностные**

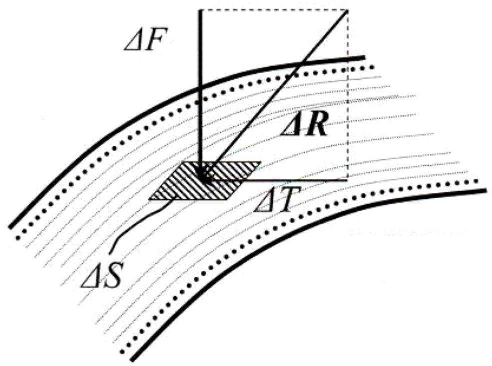


Рис. Разложение поверхностной силы на две составляющие

ΔF – нормальная составляющая

ΔT – тангенциальная составляющая

Среднее нормальное напряжение (напряжение силы давления, гидромеханическое давление) определяется по формуле

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

При стягивании в точку

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10000 \text{ кгс/м}^2 = 0{,}98 \text{ бар} = 98000 \text{ Па}$$

$$\boxed{p_a = p_{atm} + p_{exc}}$$

абсолютное давление

атмосферное давление

избыточное давление

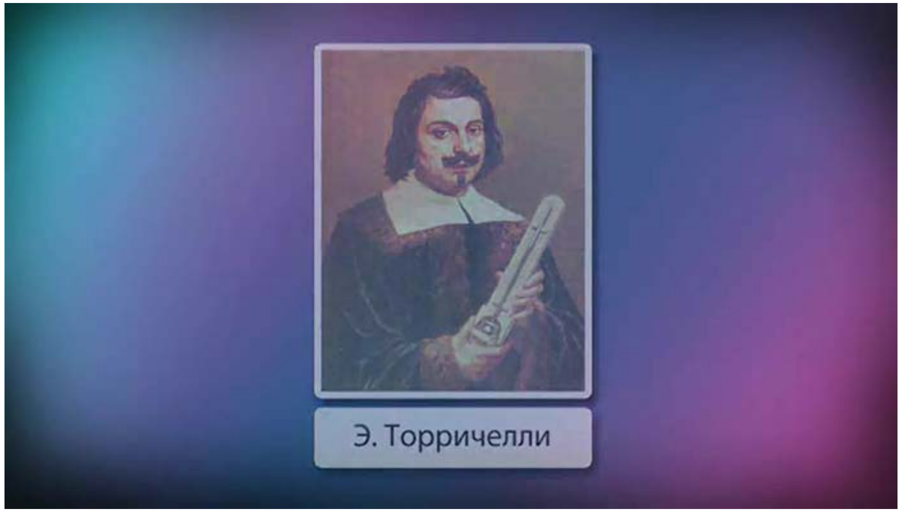
1 мм. рт. ст. = 133,4 Па

1 мм. вод. ст. = 9,81 Па

1 фунт/фут^2 = 47,88 Па

1 PSI = 6894 Па

Если **давление отсчитывают от абсолютного нуля**, то его называют **абсолютным**, а если от **атмосферного давления – избыточным или манометрическим.**

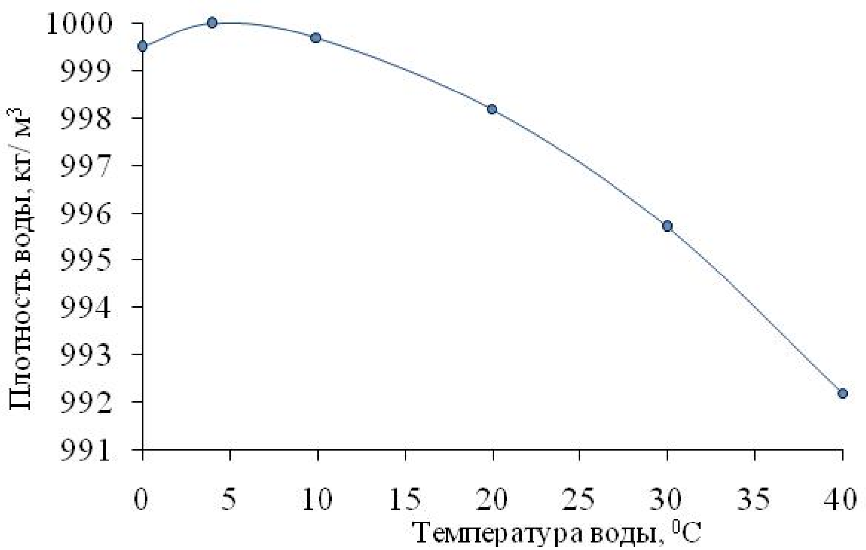


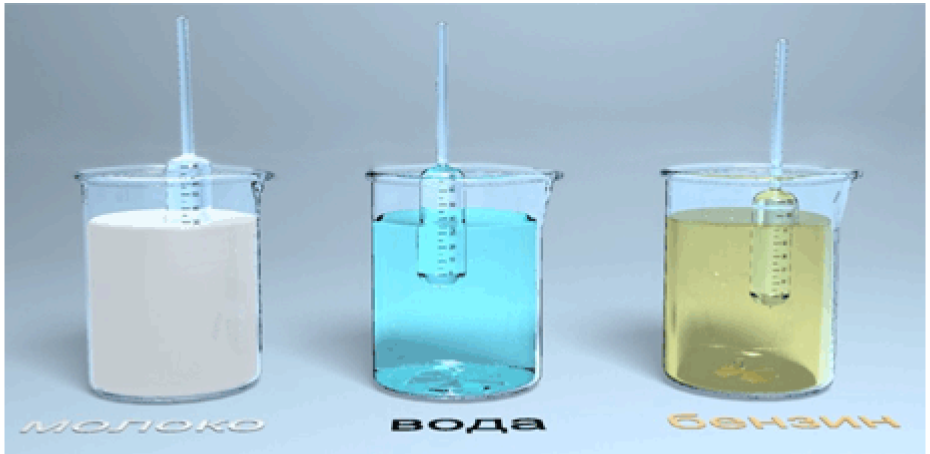
Касательное напряжение в жидкости

$$\boxed{\tau = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta S}}$$

Основные свойства капельных жидкостей

Плотностью ρ **(кг/м^3)** называют массу жидкости, заключенную в единице объема: $\rho = M/W$, где M – масса жидкости в объеме W.





$$\rho = \frac{M}{W} = \frac{M}{G/\gamma} = \frac{\gamma M}{Mg} = \frac{\gamma}{g}$$

Удельным весом γ **(Н/м^3)** называют вес единицы объема жидкости, т.е. $\gamma = G/W$.

Сжимаемость – это свойство жидкости изменять свой объем под действием давления.

Характеризуется коэффициентом β_p.

$$\boxed{\beta_p = -\frac{dW}{dp}\frac{1}{W}}$$

$$K = 1/\beta_p$$

$$\beta_p = -\frac{dW}{dp}\frac{1}{W} = -\frac{d\left(M/\rho\right)}{dp}\frac{1}{M/\rho} = -\frac{d\left(1/\rho\right)}{dp}\rho = \rho^{-2}\frac{d\rho}{dp}\rho$$

$$K = \frac{dp}{d\rho}\rho \qquad \frac{K}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} = c^2$$

Изотермический модуль упругости воды в МПа

Температура t, °C	Давление p, МПа (1МПа=10^6 Па)				
	0,5	1,0	2,0	4,0	8,0
0	1890	1900	1920	1950	1980
5	1930	1950	1970	2010	2070
10	1950	1970	2010	2050	2120
15	1970	2000	2030	2090	2170
20	1980	2020	2060	2120	2217

Пример. Определить объем воды, который необходимо дополнительно подать в водовод диаметром $d = 500$ мм и длиной $l = 1$ км для повышения давления до $\Delta p = 5\cdot 10^6$ Па. Водовод подготовлен к гидравлическим испытаниям и заполнен водой при атмосферном давлении. Деформацией трубопровода можно пренебречь.

Решение. Вместимость водовода

$$W_w = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{3{,}14\cdot 0{,}5^2}{4}\cdot 1000 = 196{,}2 \text{ м}^3$$

Объем воды ΔW, который необходимо подать в водовод для повышения давления, находим из соотношения:

$$\beta_p = \frac{dW}{Wdp} = \frac{\Delta W}{W\Delta p} = \frac{\Delta W}{(W_w + \Delta W)\Delta p}.$$

Тогда

$$\beta_p (W_w + \Delta W)\Delta p = \Delta W;$$

$$\beta_p W_w \Delta p + \beta_p \Delta W_w \Delta p = \Delta W;$$

$$\beta_p W_w \Delta p = \Delta W - \beta_p \Delta W_w \Delta p = \Delta W (1 - \beta_p \Delta p);$$

$$\beta_p = \frac{1}{K} = \frac{1}{2000\cdot 10^6} = 5\cdot 10^{-10} \text{ 1/Па}$$

$$\Delta W = \frac{W_w \beta_p \Delta p}{1 - \beta_p \Delta p} = \frac{196{,}2\cdot 5\cdot 10^{-10}\cdot 5\cdot 10^6}{1 - 5\cdot 10^{-10}\cdot 5\cdot 10^6} = \frac{0{,}4905}{0{,}9975} = 0{,}49 \text{ м}^3$$

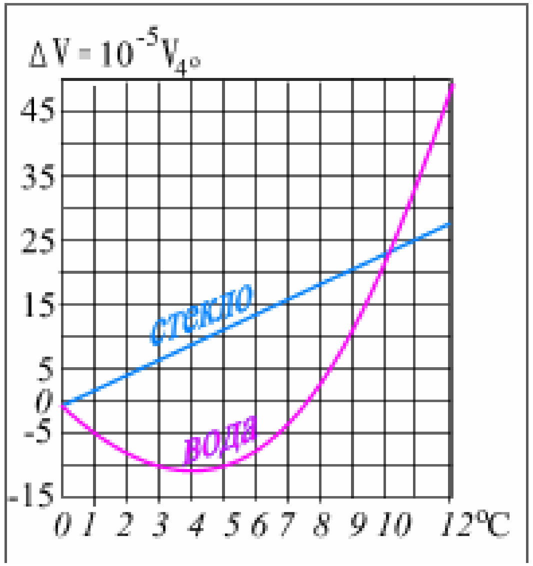
Таким образом, при увеличении давления на 5 МПа, объем изменяется всего на 0,25 %.

Температурное расширение характеризуется коэффициентом β_T объемного расширения, представляющим собой относительное изменение объема при изменении температуры на 1º С и постоянном давлении.

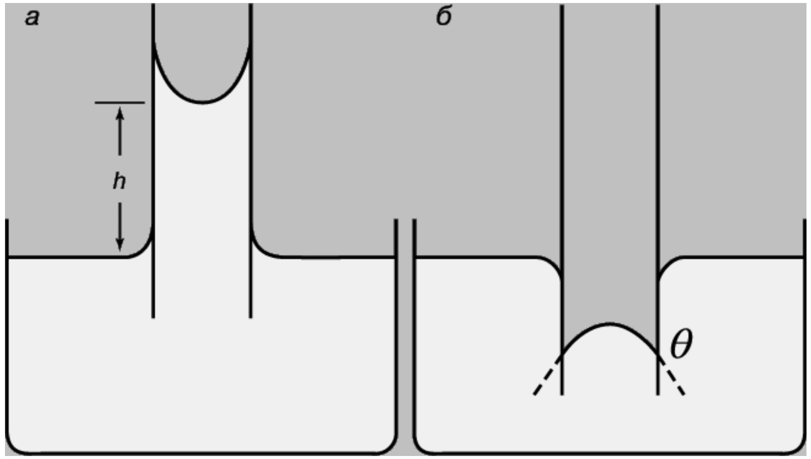
$$\beta_T = \frac{dW}{dT}\frac{1}{W_1}$$

Жидкость	β_t
Алкоголь	0,00110
Вода	0,00015
Глицерин	0,00050
Масло:	
оливковое	0,00072
репное	0,00090
Нефть	0,00060
Ртуть	0,00018

Аномалия воды



Поверхностное натяжение жидкости обусловливается силами взаимного притяжения молекул поверхностного слоя, стремящихся сократить свободную поверхность жидкости.



Вследствие поверхностного натяжения жидкость, имеющая криволинейную поверхность, испытывает дополнительное усилие, увеличивающее или уменьшающее давление в жидкости на величину (формула Лапласа):

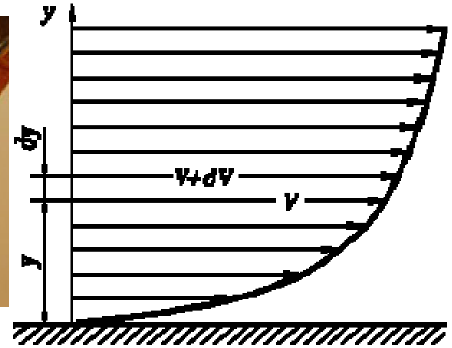
$$\boxed{p_{pov} = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}$$

где σ – поверхностное натяжение, Н/м; r_1, r_2 – главные радиусы кривизны рассматриваемого элемента поверхности.

Вязкость представляет собой свойство жидкости сопротивляться сдвигу (скольжению) ее слоев. Это свойство проявляется в том, что в жидкости при определенных условиях возникают касательные напряжения. Вязкость есть свойство, противоположное текучести: более вязкие жидкости являются менее текучими и наоборот

Между слоями возникает проскальзывание, сопровождающееся возникновением касательных напряжений. Согласно гипотезы Ньютона экспериментально обоснованной Петровым

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$



Профиль скоростей при течении вязкой жидкости вдоль стенки

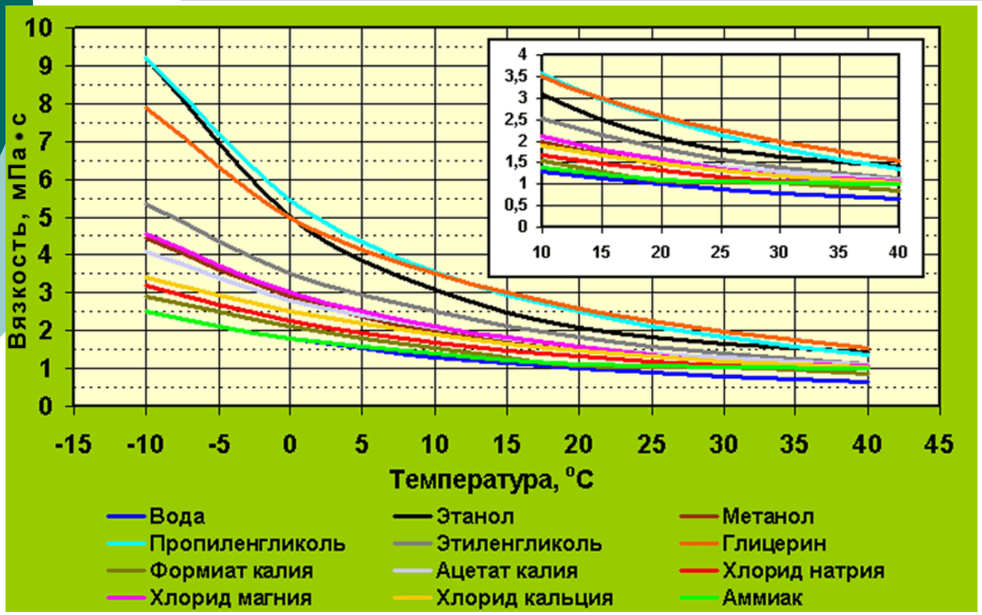
μ – динамическая вязкость жидкости (измеряется в Пуазах (П) 1 П = 1 Па·с).

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1\ \text{Ст} = 1\ \text{см}^2/\text{с})$$

Кинематическая вязкость воды при температуре 20°С:

$$\nu_{20} = 0{,}01\ Cm = 1\ cCm = 1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2/\text{с}$$

Вязкость жидкостей практически не зависит от давления, но значительно уменьшается с увеличением температуры. Вязкость газов наоборот увеличивается с увеличением температуры.



На практике вязкость жидкостей определяется вискозиметрами и чаще всего выражается в градусах Энглера (°Е). Для перехода от вязкости, выраженной в градусах Энглера служит формула:

$$\nu = (0{,}0731°E - \frac{0{,}0631}{°E}) \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$$

Испаряемость свойственна всем капельным жидкостям, однако интенсивность испарения неодинакова у различных жидкостей и зависит от условий, в которых они находятся. В гидросистемах нормальное атмосферное давление является лишь частным случаем; обычно приходится иметь дело с испарением, а иногда и кипением жидкостей в замкнутых объемах при различных температурах и давлениях. Поэтому наиболее полной характеристикой испаряемости является давление (упругость) насыщенных паров p_{sv}, выраженное в функции температуры. Чем больше давление насыщенных паров при данной температуре, тем больше испаряемость жидкости. С увеличением температуры давление p_{sv} увеличивается, однако у разных жидкостей в разной степени.

Растворимость газов в жидкостях характеризуется количеством растворенного газа в единице объема жидкости, различна для разных жидкостей и изменяется с увеличением давления. Относительный объем газа, растворенного в жидкости до ее полного насыщения, можно считать по закону Генри:

$$\frac{W_g}{W_l} = k\frac{p}{p_0},$$

где W_g – объем растворенного газа, приведенный к нормальным условиям (p_0, T_0). k – коэффициент растворимости (при 20 ºС для воды 0,016, керосина – 0,13).

Гидростатическое давление и его свойства

Гидростатикой называется раздел гидравлики, в котором рассматриваются законы равновесия жидкости и их практическое применение.

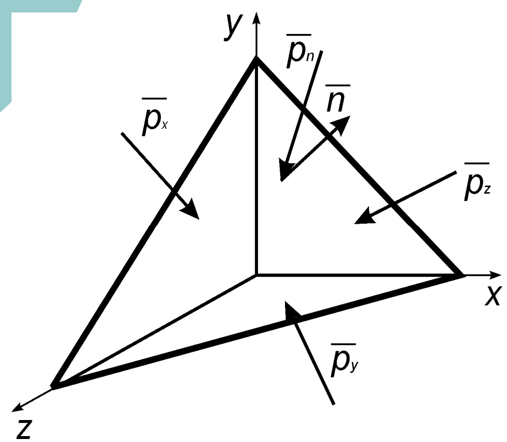


Схема для доказательства свойства гидростатического давления

Уравнение равновесия тетраэдра:

$$p_x dy \frac{dz}{2} - p_n dS \cos\left(\hat{n, x}\right) + \frac{1}{6}\rho X dx dy dz = 0,$$

$$dS \cos\left(\hat{n, x}\right) = \frac{1}{2} dy dz, \quad p_x - p_n + \frac{1}{3}\rho X dx = 0.$$

При $dx \to 0$, $p_x - p_n = 0$ или $p_x = p_n$. Аналогично: $p_y = p_n$ и $p_z = p_n$. Тогда:

$$\boxed{p_x = p_y = p_z = p_n.}$$

Так как размеры тетраэдра взяты произвольно, то и наклон площадки dS произволен и, следовательно, в пределе при стягивании тетраэдра в точку давление в этой точке по всем направлениям будет одинаково.

В любой точке жидкости гидростатическое давление не зависит от ориентировки площадки, на которую оно действует, т.е. от углов ее наклона по отношению к координатным осям.

Основное уравнение гидростатики

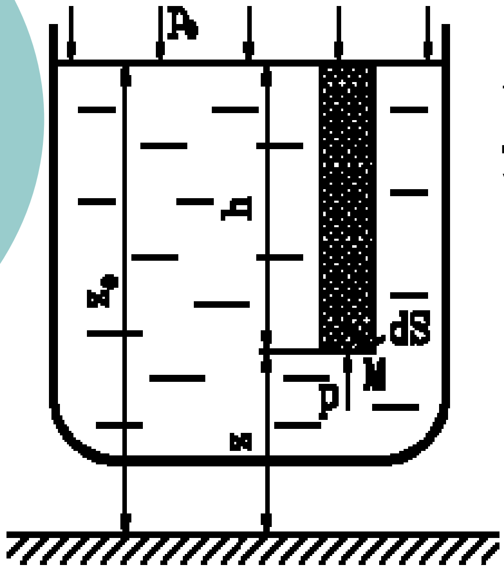


Схема для вывода основного уравнения гидростатики

Найдем гидростатическое давление p в произвольно взятой точке M, расположенной на глубине h. Запишем сумму сил, действующих на рассматриваемый объем в проекции на вертикаль, учитывая массовую силу $XdM = gd\left(\rho W\right) = g\rho hdS$.

$$pdS - p_0 dS - \rho ghdS = 0\,.$$

$$p - p_0 - \rho gh = 0\,,$$

$$p = p_0 + \rho gh = p_0 + \gamma h\,.$$

Блез Паскаль
1623-1662

Величина p_0 является одинаковой для всех точек объема жидкости, поэтому, учитывая свойство гидростатического давления, ***давление, приложенное к внешней нормали жидкости, передается всем точкам этой жидкости и по всем направлениям одинаково.*** Это положение называется ***законом Паскаля.***

Т.к. M взята произвольно, то $z + \dfrac{p}{\rho g} = const$.

Координата z – ***геометрическая высота***, $\dfrac{p}{\rho g}$ – ***пьезометрическая высота***, а $z + \dfrac{p}{\rho g} = const$ – ***гидростатический напор***, величина постоянная для всего объема неподвижной жидкости.

Дифференциальные уравнения равновесия жидкости и их интегрирование для простейшего случая

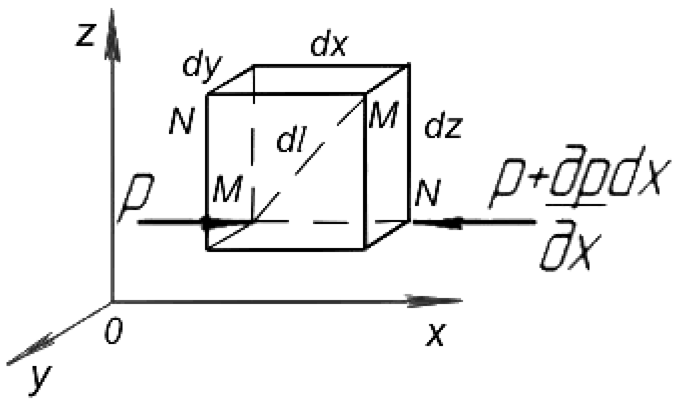


Схема для вывода дифференциальных уравнений равновесия жидкости

Исходя из того, что на параллелепипед действуют только массовые силы и силы давления, то

$$\left.\begin{aligned} &X\rho dxdydz-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz=0;\\ &Y\rho dxdydz-\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz=0;\\ &Z\rho dxdydz-\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz=0.\end{aligned}\right\}$$

Разделим эти уравнения на массу параллелепипеда и стягивая параллелепипед к исходной точке.

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера.

$$\begin{cases} X-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0; & \times dx\\ Y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0; & \times dy\\ Z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0. & \times dz\end{cases}\qquad \begin{cases} Xdx-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}dx=0;\\ Ydy-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}dy=0;\\ Zdz-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}dz=0.\end{cases}$$

Сложим все три уравнения:

$$Xdx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx+Ydy-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy+Zdz-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}dz=0;$$

$$Xdx+Ydy+Zdz-\frac{1}{\rho}\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)}_{dp}=0.$$

$$Xdx+Ydy+Zdz-\frac{dp}{\rho}=0 \text{ или } \boxed{dp=\rho\left(Xdx+Ydy+Zdz\right).}$$

Если предположить, что на жидкость действует только одна сила тяжести, то $X = Y = 0$, $Z = -g$

$$dp = -\rho g dz \qquad p = -\rho g z + C$$

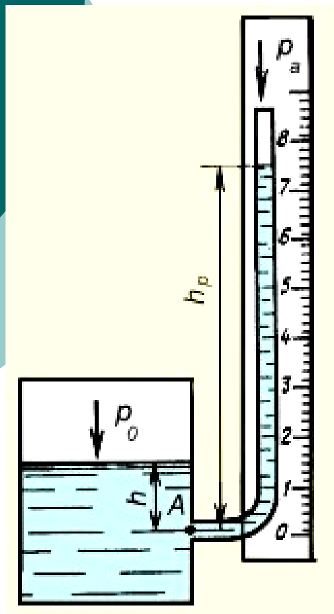
Подставив параметры свободной поверхности $C = p_0 + \rho g z_0$

$$p = p_0 + \rho g \left(z_0 - z \right)$$

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} = const$$

Леонард Эйлер
1707-1783

Пьезометрическая высота. Вакуум. Измерение давления.



Пьезометр, присоединенный к баку

Пьезометрическая высота, равная $(p/\rho g)$, представляет собой высоту столба данной жидкости, соответствующую данному давлению p (избыточному или абсолютному). Пьезометрическую высоту, соответствующую избыточному давлению, можно определить по ***пьезометру*** – простейшему устройству для измерения давления

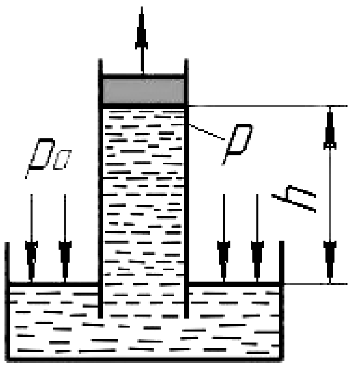
$$h_p = \frac{p_{abs} - p_a}{\rho g} = \frac{p_{exc}}{\rho g}$$

если на свободную поверхность действует атмосферное давление

$$h_p = \frac{p_0}{\rho g} + h$$

Если абсолютное давление в жидкости или газе меньше атмосферного, то говорят, что имеет место ***разрежение***, или ***вакуум***.

За величину разрежения, или вакуума, принимается недостаток до атмосферного давления: $p_{vac} = p_a - p_{abs}$.



Всасывание жидкости поршнем

$$h_{\max} = h_{vac} = \frac{p}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g}$$

При нормальном атмосферном давлении (0,1033 МПа) высота $h_{\max}$ для воды равна 10,33 м.

Дифференциальный манометр обоими концами изогнутой прозрачной трубки 1 присоединяется к точкам, разность давлений в которых необходимо определить.

Поверхностью равного давления будет горизонтальная плоскость 0-0, в которой давления, создаваемые столбами жидкости в левой и правой трубках, будут одинаковы.

$$p_2 + \rho g(z_2 - \Delta h) + \rho_p g \Delta h = p_1 + \rho g z_1$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_p - \rho) g \Delta h - \rho g (z_1 - z_2)$$

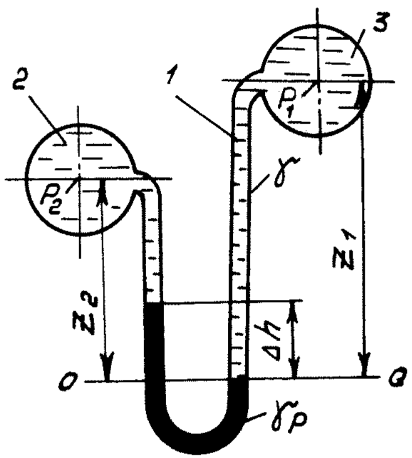
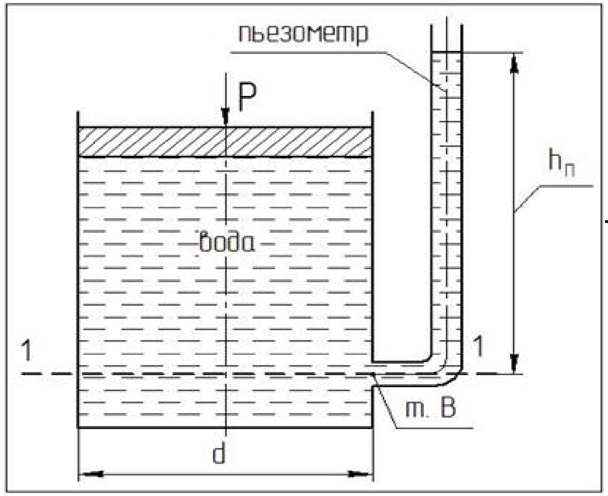


Схема подключения дифференциального манометра

Для увеличения точности при измерении малых давлений в газах (до 5000 Па) применяют чашечные микроманометры с наклонной трубкой. Для измерения давлений более 0,2 – 0,3 МПа применяют механические манометры – пружинные или мембранные.



Пьезометр

Найти высоту подъема жидкости в пьезометре, если диаметр резервуара $d = 200$ мм, а сила, действующая на поршень $P = 308$ Н. Уровень жидкости в резервуаре $h = 2$ м.

Решение.

Обозначим на рис. точку В, тогда давление, которое действует на эту точку слева:

$$p_a + \frac{P}{F} + \rho g h = p_{left}.$$

Давление, которое действует на точку В справа:

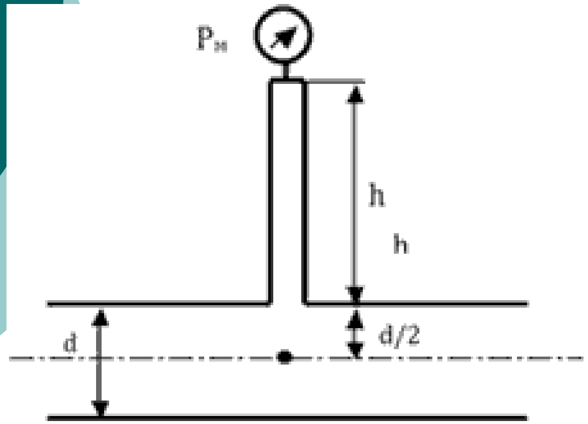
$$p_a + \rho g h_П = p_{right}.$$

Т.к. $p_{left} = p_{right}$, то $p_a + \dfrac{P}{F} + \rho g h = p_a + \rho g h_П$.

Следовательно, учитывая, что $F = \dfrac{\pi d^2}{4}$:

$$\frac{4P}{\pi d^2} + \rho g h = \rho g h_П, \text{ откуда } h_П = \frac{4P}{\rho g \pi d^2} + h = \frac{4 \cdot 308}{1000 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2^2} + 2 = 3 \text{ м.}$$

На трубопроводе диаметром $d = 0{,}6$ м, заполненном водой, установлена вертикально металлическая труба высотой $h = 2{,}8$ м, к которой подключен манометр, показание которого $P_M = 3{,}6$ ат. Определить давление на оси трубопровода.

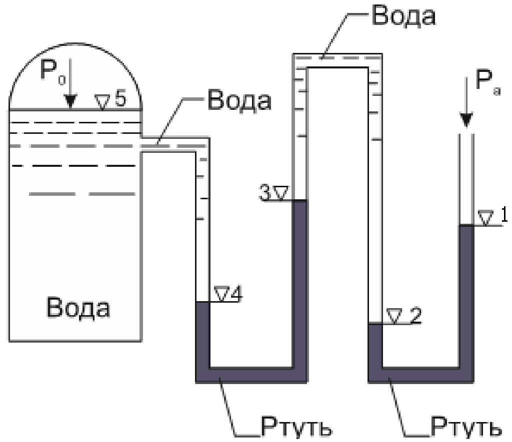


Решение.

$$p_M = p + \rho g\left(h + \frac{d}{2}\right)$$

$$p = p_M - \rho g\left(h + \frac{d}{2}\right) = 3{,}6 \cdot 98 \cdot 10^3 - 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}1 = 383000 \text{ Па.}$$

Определить абсолютное давление пара на поверхности воды в котле по показаниям батарейного ртутного манометра, если даны отметки уровней в метрах от условного нуля. $\nabla 1 = 6$ *м*; $\nabla 2 = 4{,}9$ *м*; $\nabla 3 = 6{,}2$ *м*; $\nabla 4 = 5{,}1$ *м*; $\nabla 5 = 6{,}7$ *м*. $p_a = 754$ мм. рт. ст.



Решение.

Избыточное давление:

$$p = \rho_{pm} g(h_1 - h_2) - \\ -\rho_w g(h_3 - h_2) + \\ +\rho_{pm} g(h_3 - h_4) - \\ -\rho_w g(h_5 - h_4)$$

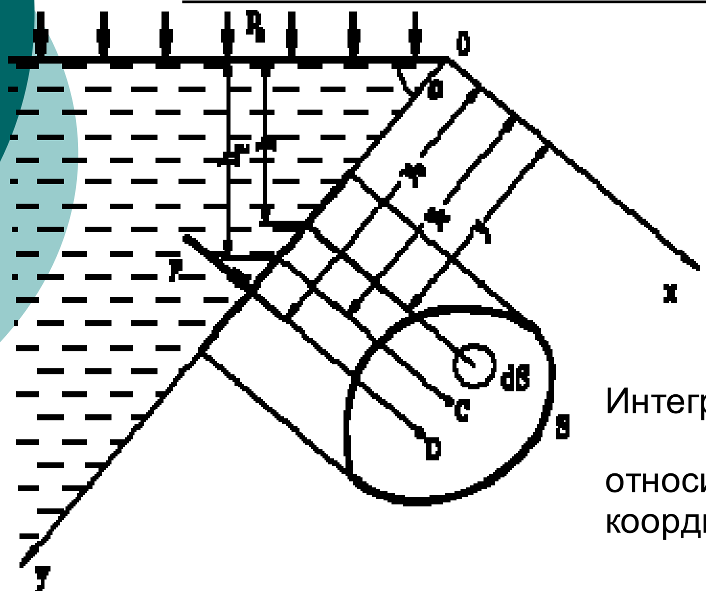
$$p = 13600 \cdot 9{,}8 \cdot (6 - 4{,}9) - 1000 \cdot 9{,}8(6{,}2 - 4{,}9) + 13600 \cdot 9{,}8 \cdot (6{,}2 - 5{,}1) - \\ -1000 \cdot 9{,}8 \cdot (6{,}7 - 5{,}1) = 147000 - 12700 + 147000 - 15700 = 265000 \text{ } Па.$$

$$p_{abs} = p_a + p_{exc}$$

$$p_a = \frac{101325 \cdot 754}{760} = 100{,}5 \text{ кПа}$$

$$p_{abs} = 100{,}5 + 265 = 365{,}5 \text{ кПа}$$

Сила давления жидкости на твердую стенку



Определение силы давления жидкости на плоскую стенку

$$dF = pdS = \left(p_0 + \rho gh\right)dS$$

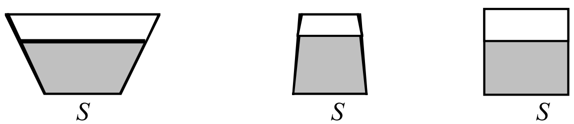
Интегрируем по всей площади:

$$F = \int\limits_S \left(p_0 + \rho gh\right)dS = p_0 S + \int\limits_S \rho ghdS$$

$$\int\limits_S \rho ghdS = \int\limits_S \rho gy\sin\alpha dS = \rho g\sin\alpha \int\limits_S ydS$$

Интеграл $\int\limits_S ydS$ представляет собой статический момент площади S относительно оси Ox и равен произведению этой площади на координату ее центра тяжести (точка C), т.е.

$$F = p_0 S + \rho g\sin\alpha\, y_C S = p_0 S + \rho gh_C S = \left(p_0 + \rho gh_C\right)S$$



Сила давления на дно сосудов

Полная сила давления жидкости на плоскую стенку равна произведению площади стенки на гидростатическое давление p_c в центре тяжести этой площади.

Так как внешнее давление передается всем точкам площади одинаково, то его равнодействующая будет приложена в центре тяжести площади

$$\boxed{y_D = y_C + \frac{J_{x0}}{y_C S}}$$

J_{x0} – момент инерции площади S относительно центральной оси, параллельной Ox.

Сила давления жидкости на криволинейные стенки

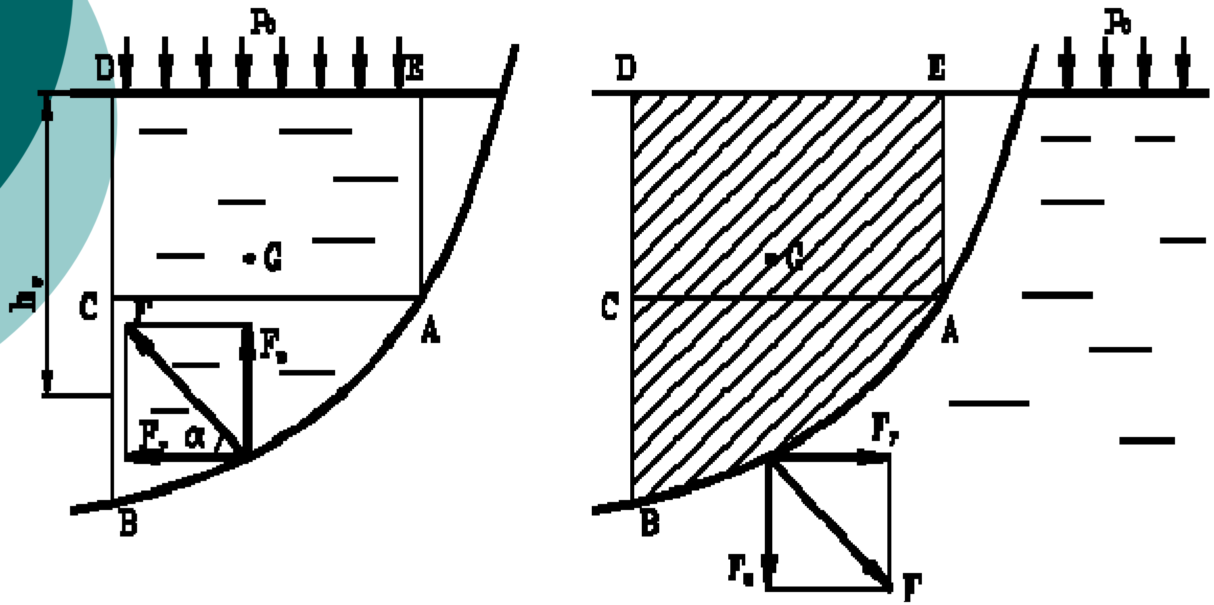


Схема для определения силы давления жидкости на цилиндрическую поверхность

Общая сила: $F = \sqrt{F_v^2 + F_g^2}$

В горизонтальном направлении

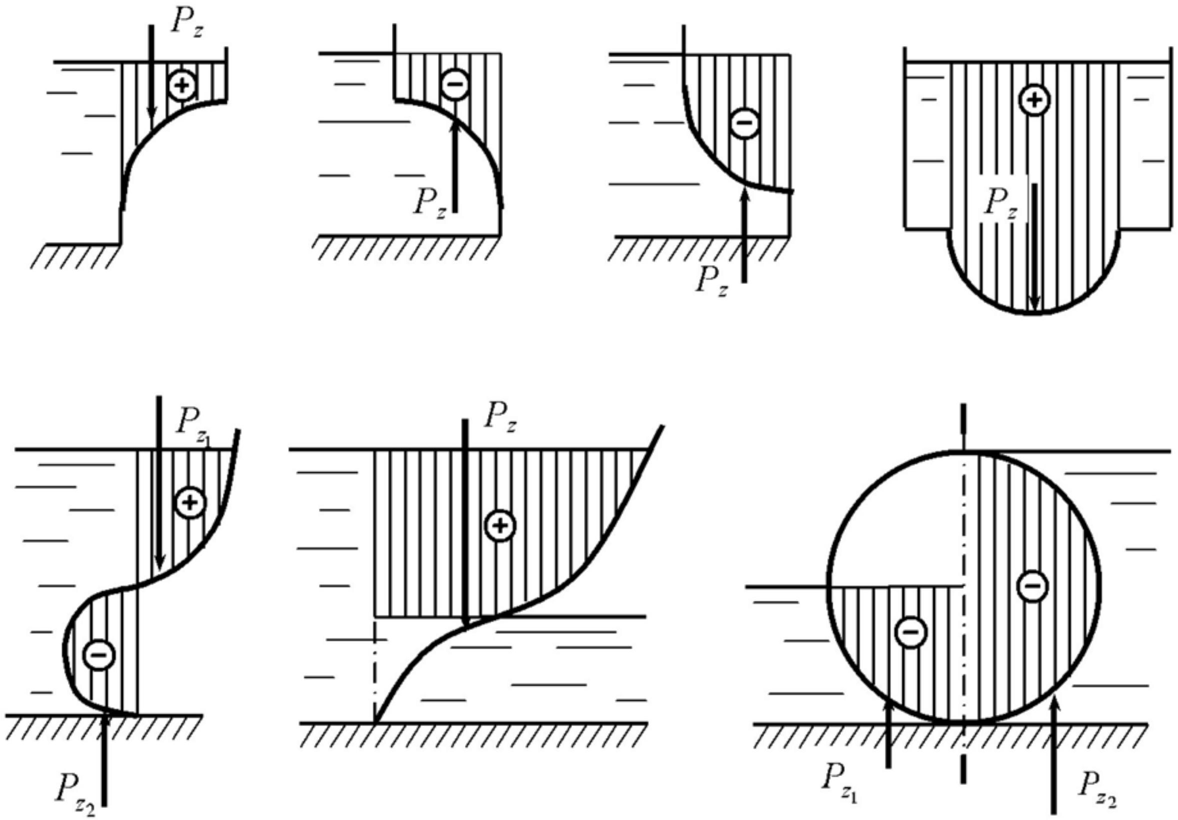
$$F_g = \rho g h_C S_v + p_0 S_v$$

В вертикальном направлении

$$F_v = p_0 S_g + G$$

Центр давления находится из уравнения моментов. Если цилиндрическая поверхность круговая, то задача значительно упрощается, так как в этом случае равнодействующая силы давления жидкости на стенку проходит через ось цилиндрической поверхности. Дело в том, что в каждой точке поверхности давление направлено по нормали к стенке, то есть по радиусу и, таким образом, не создает момента относительно оси, проходящей через центр вращения. Тогда и равнодействующая сила не должна создавать момента относительно той же оси, то есть должна проходить через центр вращения.

Сила давления жидкости на криволинейные стенки



Построение тел давления

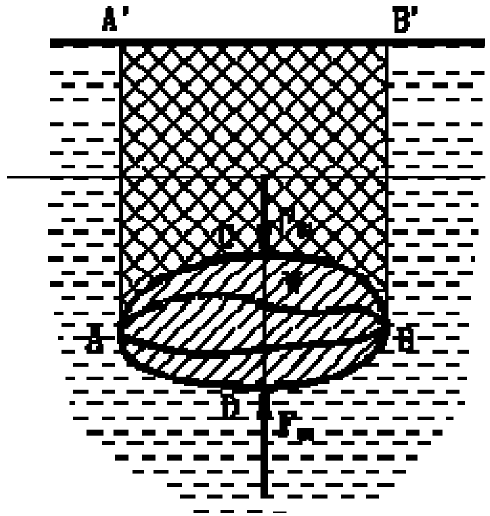
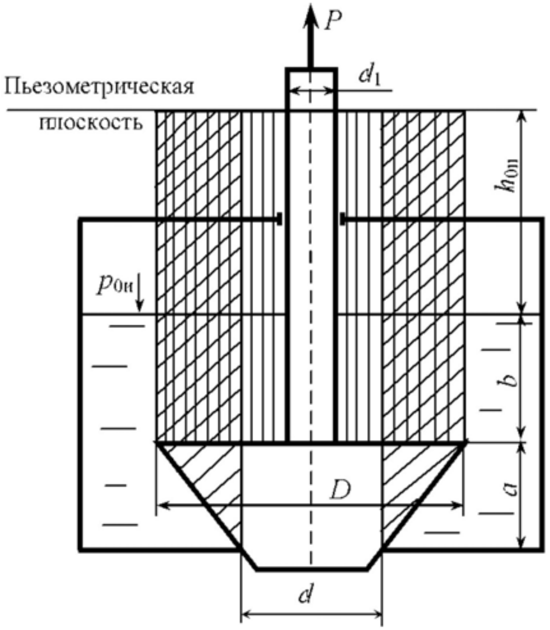


Схема доказательства закона Архимеда

$$F_a = F_{v2} - F_{v1} = G_{ACBD} = \rho g W$$

На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх, численно равная весу жидкости, вытесненной телом, и приложенная в центре масс объема погруженной части тела (центре водоизмещения).



Отверстие в дне сосуда, содержащего масло относительной плотностью $\delta = 0{,}83$, закрыто конической пробкой с размерами $D = 100$ мм, $d = 50$ мм и $a = 100$ мм, укрепленной на штоке диаметром $d_1 = 25$ мм. Уровень масла расположен выше пробки на расстоянии $b = 50$ мм. Определить начальное усилие P, необходимое для подъёма пробки, при избыточном давлении в сосуде $p_{0ex} = 10$ кПа. Массой пробки и трением в сальнике пренебречь.

Решение.

Пьезометрическая плоскость проходит над свободной поверхностью жидкости в сосуде на высоте:

$$h_{0ex} = \frac{p_{0ex}}{\rho g} = \frac{10 \cdot 10^3}{0{,}83 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8} = 1{,}23$$

$$P_1 = \rho g \left(h_{oex} + b \right) \frac{\pi \left(D^2 - d_1^2 \right)}{4}.$$

На боковую поверхность пробки горизонтальная составляющая давления воды равна нулю, так как на вертикальные проекции действуют соответственно равные и противоположно направленные силы, а вертикальная составляющая

$$P_1 = \rho g W_{md} = \rho g \left(\frac{\pi D^2}{4} \left(b + h_{oex} \right) - \frac{\pi d^2}{4} \left(a + b + h_{oex} \right) + \frac{1}{12} \pi a \left(D^2 + Dd + d^2 \right) \right),$$

и направлена вертикально вверх. Тогда начальное усилие

$$P = P_1 - P_2 = \rho g \left(h_{oex} + b \right) \frac{\pi \left(D^2 - d_1^2 \right)}{4} - \rho g \left(\frac{\pi D^2}{4} \left(b + h_{oex} \right) - \frac{\pi d^2}{4} \left(a + b + h_{oex} \right) + \frac{1}{12} \pi a \left(D^2 + Dd + d^2 \right) \right) =$$

$$= 0{,}83 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \left(1{,}23 + 0{,}05 \right) \frac{3{,}14 \left(0{,}1^2 - 0{,}025^2 \right)}{4} - 0{,}83 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \left(\begin{array}{l} 0{,}785 \cdot 0{,}01 \cdot 1{,}28 - 0{,}785 \cdot 0{,}05^2 \cdot 1{,}38 + \\ + \dfrac{3{,}14 \cdot 0{,}1}{12} \left(0{,}1^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}05^2 \right) \end{array} \right) =$$

$$= 76{,}7 - 8140 \left(0{,}01 - 0{,}0027 + 0{,}00046 \right) = 13{,}5\ H$$

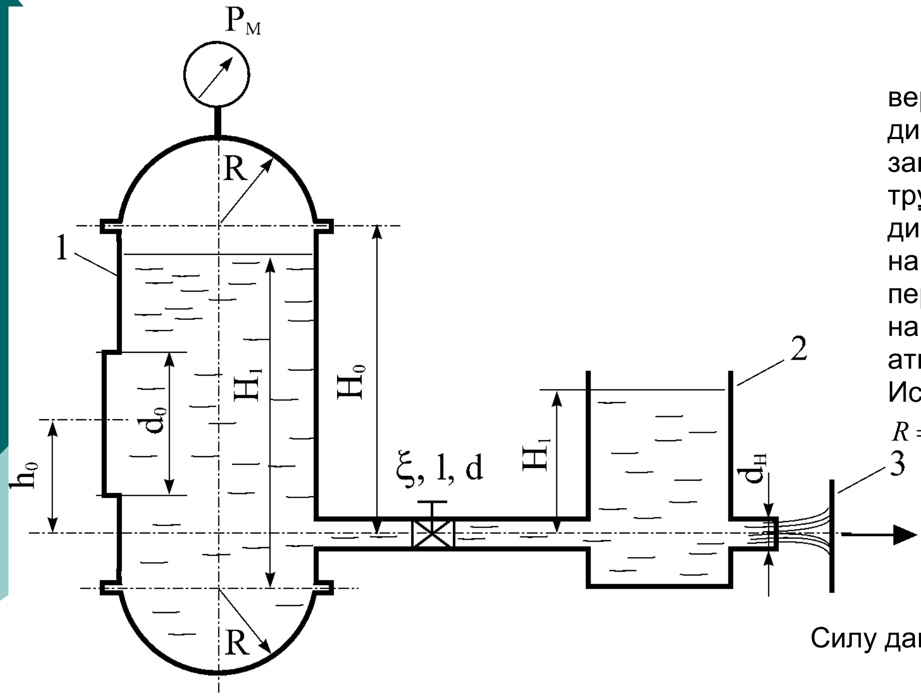


Схема гидросистемы

Пример 2. Цилиндрический резервуар 1 с полусферическими верхней и нижней крышками радиусом R, имеющий боковой люк диаметром d_0 и находящийся на расстоянии от оси трубопровода h_0, закрытый плоской крышкой, соединен с резервуаром 2 трубопроводом, изготовленном из старой стальной трубы длиной ℓ и диаметром d и коэффициентом сопротивления задвижки ξ. Вода под напором H_0 и давлением воздуха на свободной поверхности $p_м$ перетекает из резервуара 1 в резервуар 2, а из него при постоянном напоре H_1 через цилиндрический насадок диаметром $d_н$ вытекает в атмосферу, ударяясь о плоскую преграду 3.

Исходные данные: $p_M = 0{,}1$ МПа; $H_1 = 6{,}0$ м; $H_o = 5{,}0$ м; $h_o = 4{,}0$ м; $R = 2{,}8$ м; $d_o = 0{,}5$ м; $L = 20$ м; $d = 50$ мм; $\zeta = 7{,}5$.

Силу давления на любую плоскую поверхность можно определить как:

$$P = p_c F$$

Сила давления на плоский люк:

$$P = p_c F = \left(p_m + \rho g (H_o - h_o)\right)\cdot\frac{\pi d_o^2}{4} = \left(0{,}1\cdot 10^6 + 1000\cdot 9{,}81\cdot(5{,}0-4{,}0)\right)\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}5^2}{4} = 22 \text{ кН}$$

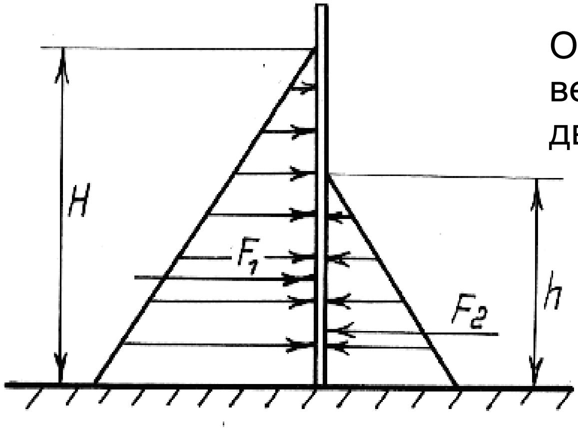
Сила давления на верхний люк, учитывая, что там находится воздух, следовательно, давление на крышку будет одинаковым во всех точках:

$$P = p_M F = p_M \pi R^2 = 0{,}1\cdot 10^6\cdot 3{,}14\cdot 2{,}8^2\cdot 10^{-3} = 2460 \text{ кН}$$

На нижний люк: $P_Г = 0$;

$$P_B = \rho g W_{тд} = \rho g\left(\left(\frac{p_m}{\rho g} + H_1\right)\cdot \pi R^2 + \frac{2}{3}\pi R^3\right) =$$

$$= 1000\cdot 9{,}81\left(\left(\frac{0{,}1\cdot 10^6}{1000\cdot 9{,}81} + 6{,}0\right)\cdot \pi\cdot 2{,}8^2 + \frac{2}{3}\pi\cdot 2{,}8^3\right)\cdot 10^{-3} = 4360 \text{ кН}$$



Определить равнодействующую силу давления жидкости (воды) на вертикальную прямоугольную стенку шириной $b = 5$ м при двустороннем давлении, если $H = 2$ м, $h = 0,5$ м.

Решение.

Равнодействующая сила давления равна разности сил избыточного давления слева и справа стенки

$$F = F_1 - F_2$$

$$F_1 = p_{c1}S_1 = \frac{\rho g H}{2} bH = \frac{\rho g b}{2} H^2$$

$$F_2 = p_{c1}S_2 = \frac{\rho g h}{2} bh = \frac{\rho g b}{2} h^2$$

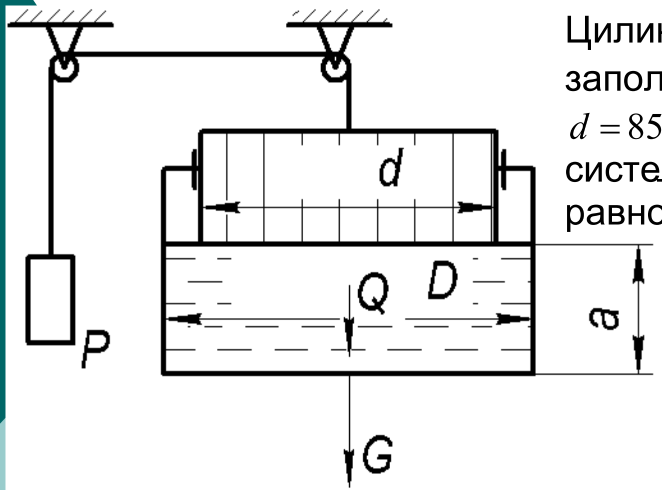
$$F = F_1 - F_2 = \frac{\rho g b}{2}(H^2 - h^2) = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 5}{2}(2^2 - 0,5^2) = 92000\ H$$

Центр давления найдем, воспользовавшись теоремой о моменте равнодействующей. Момент силы возьмем относительно оси, проходящей через точку B и нормальной к плоскости рисунка

$$Fx = F_1 \frac{H}{3} - F_2 \frac{h}{3}$$

Отсюда

$$Fx = \frac{F_1}{F}\frac{H}{3} - \frac{F_2}{F}\frac{h}{3} = \frac{98100}{92000}\frac{2}{3} - \frac{6131}{92000}\frac{0,5}{3} = 0,711 - 0,011 = 0,7 \text{ м}$$



Цилиндрический резервуар диаметром $D = 900$ мм, весом $G = 0,2$ кН, заполненный водой на высоту $a = 0,5$ м, висит на поршне диаметром $d = 850$ мм. К поршню через блоки подвешен груз, удерживающий систему в равновесии. Определить вакуум в сосуде, обеспечивающий равновесие в цилиндре. Трением в системе пренебречь.

Решение.

Запишем условие равновесия системы: $P = G + Q$.

Сила давления жидкости на нижнюю стенку резервуара:

$$Q = pS = \rho g a \frac{\pi D^2}{4} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,9^2}{4} = 3120 \text{ Н.}$$

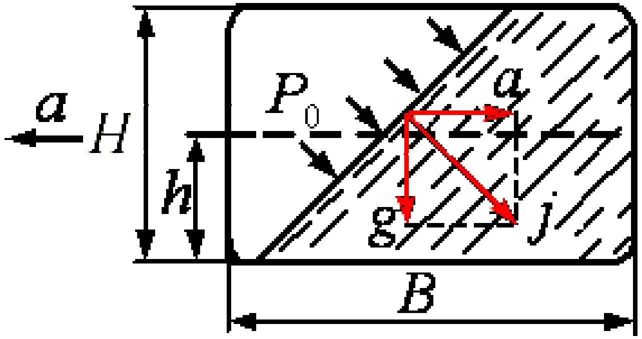
Сила давления на верхнюю стенку, связанная с вакуумом p_v в сосуде:

$$P = p_v S = p_v \frac{\pi d^2}{4} = p_v \cdot \frac{3,14 \cdot 0,85^2}{4} = 0,567 p_v .$$

Тогда,

$$0,567 p_v = 3120 + 200 = 3320, \quad p_v = 5860 \text{ Па.}$$

Абсолютный и относительный покой (равновесие) жидких сред

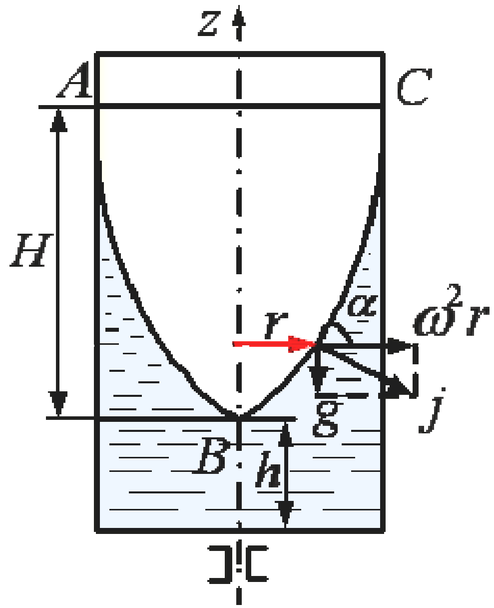


Силы, действующие на жидкость при относительном покое, и свободная поверхность при прямолинейном равно-ускоренном движении ёмкости

При движении емкости прямолинейно с постоянным ускорением a на жидкость действуют: сила тяжести mg, направленная по вертикали вниз, и сила инерции ma, направленная в сторону, обратную ускорению a. Результирующую массовую силу $F = mj$ определяют суммированием векторов силы тяжести и силы инерции, а угол наклона свободной поверхности к горизонту находят из условия ее перпендикулярности к силе F. На рисунке буквами a, g, j обозначены векторы соответствующих единичных массовых сил (отнесенных к единице массы).

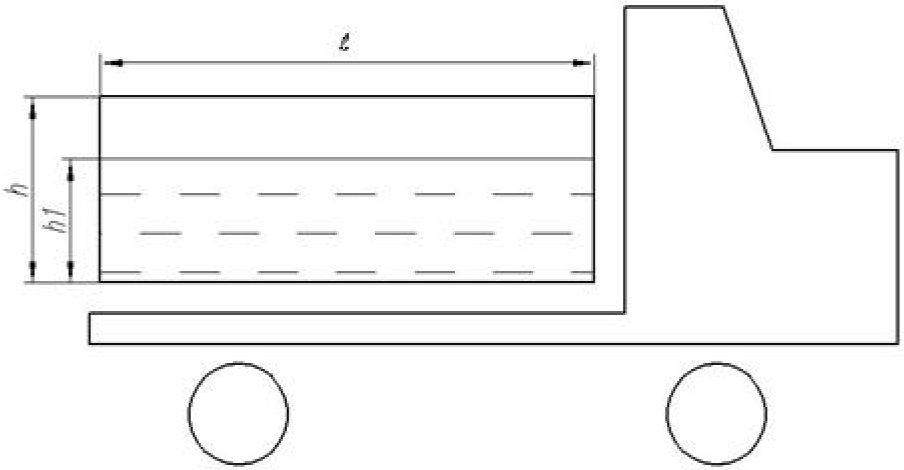
При вращении емкости вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω на жидкость действуют две массовые силы – сила тяжести и центробежная сила, которые, будучи отнесенными к единице массы, соответственно равны g и $\omega^2 r$. Равнодействующая массовая сила j увеличивается с увеличением радиуса r, а угол наклона ее к горизонту уменьшается.

$$\boxed{H = \frac{\omega^2 r^2}{2g}}$$



Свободная поверхность жидкости, находящейся в относительном покое во вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью открытой ёмкости

В кузов автомобиля-самосвала до уровня $h_1 = 0,4$ налит цементный раствор. Определить наименьший допустимый путь торможения самосвала от скорости $V = 36$ км/ч до остановки исходя из условия, чтобы раствор не выплеснулся из кузова. Для упрощения принять, что кузов самосвала имеет форму прямоугольной коробки размерами $\ell = 2,5$ м, $h = 0,8$, ширина кузова $B = 1,8$, а движение при торможении равнозамедленное.



Решение. Путь при торможении определяется по формуле:

$$S = S_0 + V_0 t - \frac{at^2}{2},$$

где $S_0 = 0$ – путь в начальный момент торможения. Тогда $S = V_0 t - \frac{at^2}{2}$.

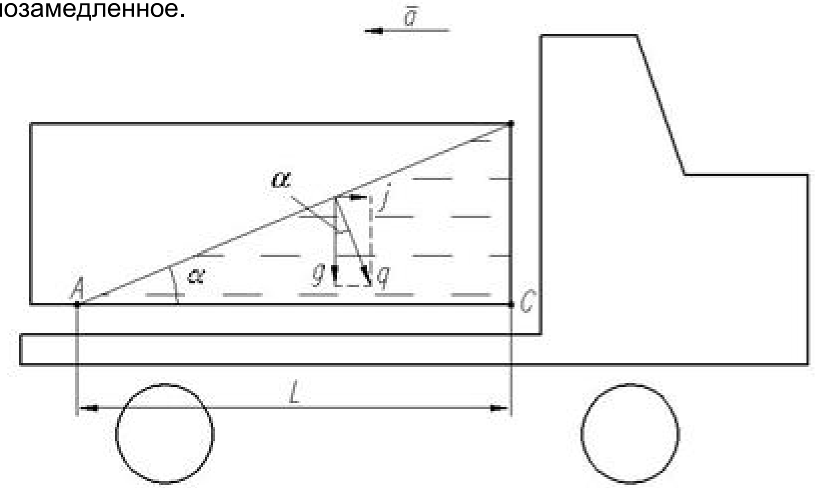
Время t определим из уравнения скорости: $V = V_0 - at$, где $V = 0$ – конечная скорость. Тогда:

$$0 = V_0 - at, \; V_0 = at, \; t = {}^{V_0}\!/_{a}. \; S = V_0 \frac{V_0}{a} - \frac{a\left(\frac{V_0^2}{a^2}\right)}{2} = \frac{V_0^2}{2a}.$$

Для нахождения ускорения рассмотрим движение автомобиля. При равномерном движение автомобиля жидкость находится в равновесии. При торможении (равнозамедленное движение) на жидкость, кроме сил тяжести, действуют еще силы инерции В этом случае жидкость принимает новое положение равновесия. Единичная сила инерции j численно равна ускорению a и направлена в противоположную сторону.

Для того, чтобы вычислить j, необходимо определить угол наклона свободной поверхности жидкости $(tg\alpha = j/g)$. Из треугольника ABC определим $tg\alpha = h/L$. Для нахождения L рассмотрим объем жидкости до торможения и после. До торможения:

$$W = h_1 \ell B$$



После торможения:

$$W = \frac{1}{2} hLB.$$

Данные объемы равны, поэтому приравнивая их определим L:

$$L = \frac{h_1 \ell B}{\frac{1}{2} hB} = \frac{2h_1 \ell}{h} = \frac{2 \cdot 0,4 \cdot 2,5}{0,8} = 2,5 \text{ м.}$$

$$tg\alpha = \frac{h}{L} = \frac{0,8}{2,5} = 0,32, \qquad j = g tg\alpha = 9,81 \cdot 0,32 = 3,14 \text{ м/с}^2$$

Так как j численно равна ускорению a, то определим путь торможения – $S = \frac{10^2}{2 \cdot 3,14} = 15,9$ м.

Модуль 2. Гидродинамика

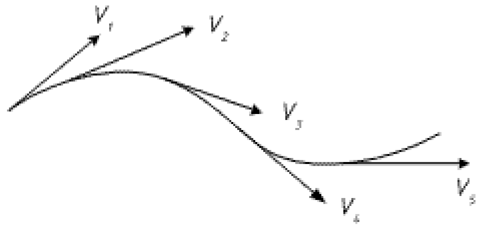
Гидродинамика - раздел гидравлики, в котором изучаются законы движения жидкости и ее взаимодействие с неподвижными и подвижными поверхностями.

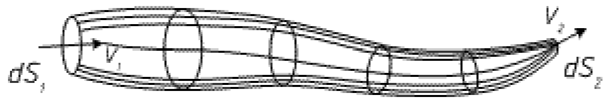
Кинематика. Общие сведения

Идеальная жидкость – воображаемая жидкость, совершенно лишенная вязкости. В такой жидкости возможен только один вид напряжений – гидромеханическое давление

Установившимся называется течение жидкости, неизменное по времени, при котором давление и скорость являются функциями только координат, но не зависят от времени.

Линией тока называется кривая, в каждой точке которой вектор скорости в данный момент времени направлен по касательной. При установившемся движении линии тока и траектории совпадают. Если в движущейся жидкости взять бесконечно малый замкнутый контур и через все его точки провести линии тока, то образуется трубчатая поверхность, называемая ***трубкой тока***. Часть потока, заключенная внутри трубки тока, называется ***элементарной струйкой тока***. При стремлении поперечных размеров струйки к нулю она в пределе стягивается в линию тока





Линия (слева) и струйка (справа) тока

Неустановившимся называется течение жидкости, все характеристики которого (или некоторые из них) изменяются по времени в точках рассматриваемого пространства. Для неустановившегося движения – $p = f_1(t, x, y, z)$; $\overline{V} = f_2(t, x, y, z)$

Живым сечением, или просто сечением потока, называется в общем случае поверхность в пределах потока, проведенная нормально к линиям тока. Различают напорные и безнапорные течения жидкости. ***Напорными*** называют течения в закрытых руслах без свободной поверхности, а ***безнапорными*** — течения со свободной поверхностью. При напорных течениях давление вдоль потока обычно переменное, при безнапорном – постоянное (на свободной поверхности) и чаще всего атмосферное.

Расходом называется количество жидкости, протекающее через живое сечение потока (струйки) в единицу времени.

- Объемный Q
- Весовой Q_G
- Массовый G

Для элементарной струйки, можно считать, что скорость одинакова во всех точках сечения и тогда: $dQ = VdS$; $dG = \rho dQ = \rho VdS$.

Для потока конечных размеров:

$$\boxed{Q = \int_S VdS\,.}$$

Если ввести среднюю по сечению скорость $V_{cp} = Q/S$, то $Q = V_{cp}S$.

Основываясь на законе сохранения вещества вдоль струйки:

$$dQ = V_1 dS = V_2 dS = \ldots = const\,.$$

$V_{1cp}S_1 = V_{2cp}S_2 = \ldots = const$. (уравнение неразрывности)

Средние скорости в потоке несжимаемой жидкости обратно пропорциональны площадям сечений:

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1}.}$$

Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости

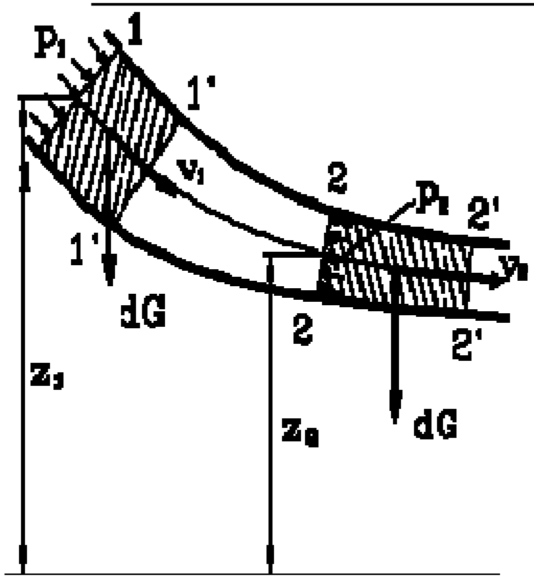


Схема для вывода уравнения Бернулли

Применим теорему об изменении кинетической энергии

Работа сил давления равна произведению силы на путь. Работа сил тяжести равна произведению разницы высот и силы тяжести.

Изменение кинетической энергии равно разнице кинетических энергий объемов жидкости 1’-2’ и 1-2

$$\Delta T = T_{1'-2'} - T_{1-2} = T_{1'-2} + T_{2-2'} - T_{1-1'} - T_{1'-2} =$$

$$= T_{2-2'} - T_{1-1'} = \frac{dm}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{dG}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Сложив работы сил и приравняв к изменению кинетической энергии

$$p_1 dS_1 V_1 dt - p_2 dS_2 V_2 dt + dG\left(z_1 - z_2\right) = \frac{dG}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

Учитывая, что $dG = gdm = \rho g dW = \rho g \underbrace{Vdt}_{H} dS$ и $V_1 dS_1 = V_2 dS_2$, получаем

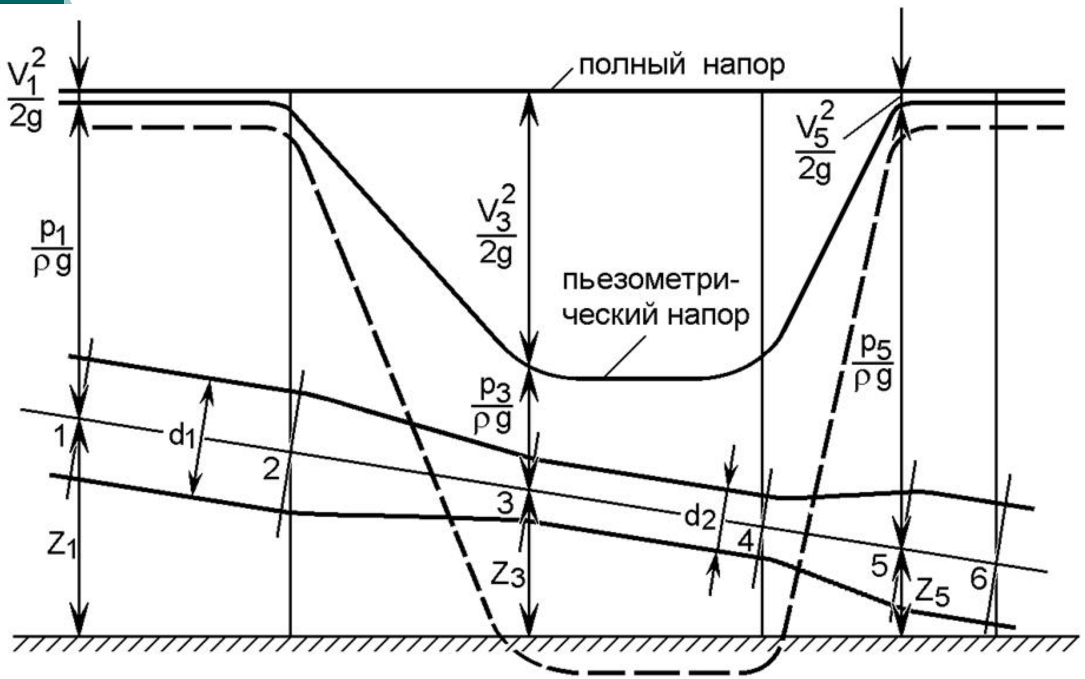
$$p_1 \frac{dG}{\rho g} - p_2 \frac{dG}{\rho g} + dG\left(z_1 - z_2\right) = \frac{dG}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right); \quad \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \left(z_1 - z_2\right) = \frac{1}{2g}\left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Сгруппируем члены по сечениям:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} = H\,,} \qquad (*)$$

где z – геометрическая высота, или геометрический напор; $\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрическая высота или напор; $\frac{V^2}{52g}$ – скоростная высота или напор.

Для идеальной движущейся жидкости сумма трех напоров (высот): геометрического, пьезометрического и скоростного есть величина постоянная вдоль струйки.



Изменение пьезометрического и скоростного напоров вдоль струйки идеальной жидкости

Уравнение Бернулли (*) записано для двух произвольно взятых сечений струйки и выражает равенство полных напоров в этих сечениях.

Линия изменения пьезометрических высот называется ***пьезометрической линией***, ее можно рассматривать как геометрическое место уровней в пьезометрах, установленных вдоль струйки

Энергетический смысл уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости заключается в постоянстве вдоль струйки полной энергии жидкости.

Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости

В потоке идеальной жидкости возьмем произвольную точку M с координатами x, y, z и выделим у этой точки элемент жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда. Запишем второй закон Ньютона для выделенного объема жидкости:

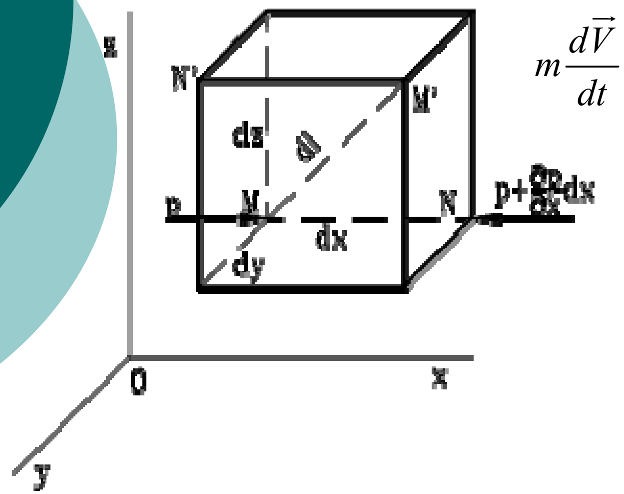


Схема для вывода дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\sum_{i=1}\vec{F}_i$$

$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{dV_x}{dt}=X\rho\delta x\delta y\delta z-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{dV_y}{dt}=Y\rho\delta x\delta y\delta z-\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$$

$$\rho\delta x\delta y\delta z\frac{dV_z}{dt}=Z\rho\delta x\delta y\delta z-\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

$$\begin{cases}\dfrac{dV_x}{dt}=X-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x};\\ \dfrac{dV_y}{dt}=Y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y};\\ \dfrac{dV_z}{dt}=Z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}.\end{cases}$$

Умножим каждое из уравнений на соответствующие проекции элементарного перемещения, и сложим уравнения

$$V_x dt\frac{dV_x}{dt}+V_y dt\frac{dV_y}{dt}+V_z dt\frac{dV_z}{dt}=XV_x dt+YV_y dt+ZV_z dt-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}V_x dt-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}V_y dt-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}V_z dt$$

$$V_x dV_x+V_y dV_y+V_z dV_z=Xdx+Ydy+Zdz-\frac{1}{\rho}\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)}_{dp}$$

$$d\left(\frac{V_x^2}{2}\right)+d\left(\frac{V_y^2}{2}\right)+d\left(\frac{V_z^2}{2}\right)=Xdx+Ydy+Zdz-\frac{1}{\rho}dp$$

$$Xdx+Ydy+Zdz=d\left(\frac{V^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}dp$$

$$\xrightarrow{X=0,\ Y=0,\ Z=-g}$$

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}dp+gdz=0$$

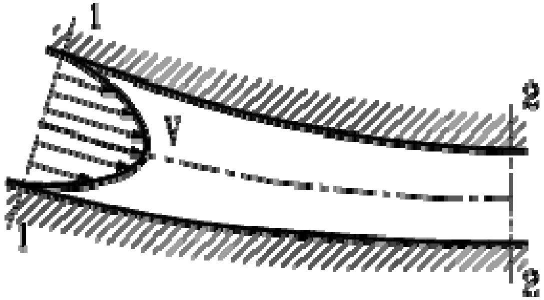
$$-gdz=d\left(\frac{V^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}dp$$

$$\rho=const$$

$$d\left(\frac{V^2}{2}+\frac{1}{\rho}p+gz\right)=0$$

$$\frac{V^2}{2}+\frac{1}{\rho}p+gz=const$$

Уравнение Бернулли для потока реальной (вязкой) жидкости



Распределение скоростей в реальном потоке

Мощность потока элементарной струйки:

Допущение: $z + \frac{p}{\rho g} = const$

$$dN = gHdG = g\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}\right)\rho dQ = \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right)\rho V dS$$

$$N = \rho\int_S\left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right)VdS \qquad N = \rho\left(gz + \frac{p}{\rho}\right)\int_S VdS + \rho\int_S \frac{V^3}{2}dS$$

Найдем среднее по сечению значение полной удельной энергии жидкости делением полной мощности потока на массовый расход

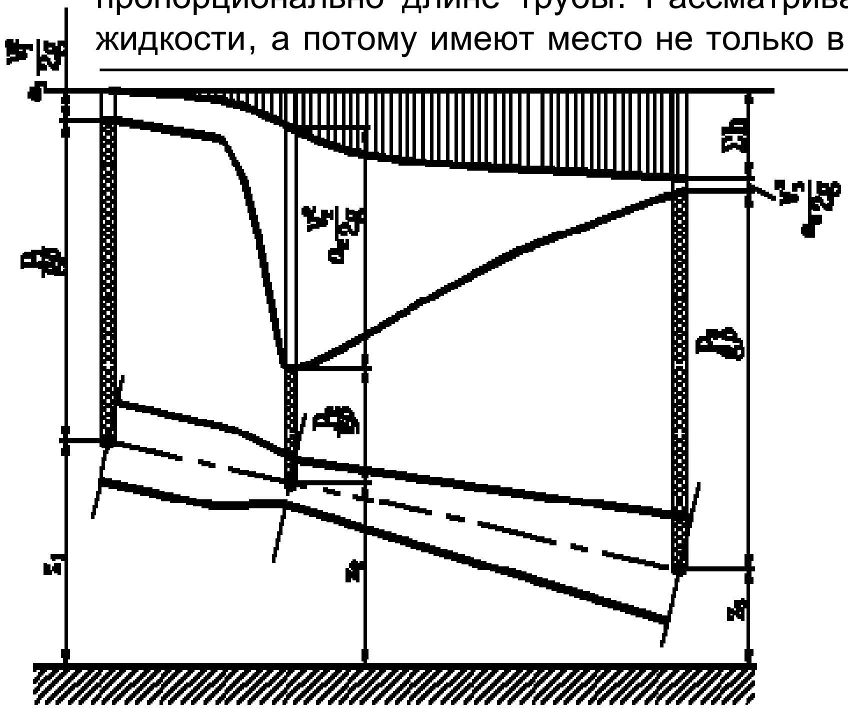
$$gH_{cp} = \frac{N}{\rho Q} = \frac{1}{Q}\left(gz + \frac{p}{\rho}\right)\underbrace{\int_S VdS}_{Q} + \frac{1}{2Q}\int_S V^3 dS = \left(gz + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{2Q}\int_S V^3 dS$$

$$H_{cp} = \left(z + \frac{p}{\rho g}\right) + \frac{V_{cp}^2}{2gV_{cp}SV_{cp}^2}\int_S V^3 dS = \left(z + \frac{p}{\rho g}\right) + \frac{V_{cp}^2}{2g}\frac{\int_S V^3 dS}{V_{cp}^3 S} = z + \frac{p}{\rho g} + \alpha\frac{V_{cp}^2}{2g}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\int_S V^3 dS}{V_{cp}^3 S}}$$

где α – безразмерный коэффициент Кориолиса, учитывающий неравномерность распределения скоростей. При равномерном распределении скоростей по сечению $\alpha = 1$, при неравномерном – $\alpha > 1$.

Потери на трение по длине – это потери энергии, которые в чистом виде возникают в прямых трубах постоянного сечения, т.е. при равномерном течении, и возрастают пропорционально длине трубы. Рассматриваемые потери обусловлены внутренним трением в жидкости, а потому имеют место не только в шероховатых, но и в гладких трубах.



Графическая иллюстрация уравнения Бернулли для реального потока

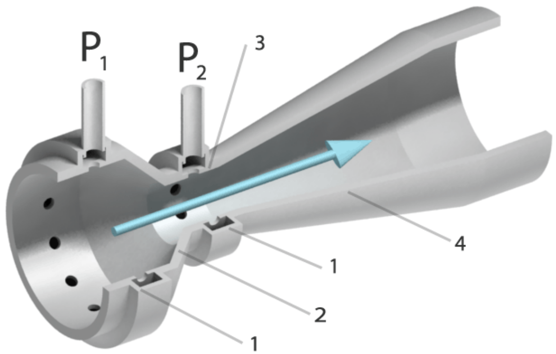
Возьмем два сечения реального потока и обозначим средние значения полного напора жидкости в этих сечениях H_{cp1} и H_{cp2}. Тогда $H_{cp2} = H_{cp1} + \sum h_{\Pi}$, где $\sum h_{\Pi}$ – суммарная потеря полного напора на участке между 1 и 2 сечениями.

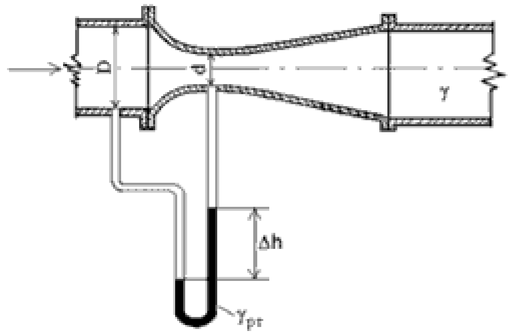
Используя выражение для полного напора, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_{cp2}^2}{2g} + \sum h_{\Pi}$$

Уменьшение среднего значения полной удельной энергии жидкости вдоль потока, приходящееся на единицу его длины, называется ***гидравлическим уклоном***. Изменение удельной потенциальной энергии давления, приходящееся на единицу длины потока, называется ***пьезометрическим уклоном***. В горизонтальной трубе постоянного сечения эти уклоны одинаковы.

Примеры использования уравнения Бернулли в технике





Расходомер Вентури – представляет собой устройство, устанавливаемое в трубопроводах и осуществляющее сужение потока.

Схема расходомера Вентури

Уравнение Бернулли для сечений с давлениями p_1 и p_2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}.$$

Используя уравнение неразрывности: $V_1 S_1 = V_2 S_2$ и принимая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, получим

$$\Delta h + \frac{V_2^2 S_2^2}{2g S_1^2} = \frac{V_2^2}{2g}, \quad Q = V_2 S_2 = S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}} = S_2 \sqrt{\frac{2g}{\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}} \sqrt{\Delta h}.$$

Измерение скорости. Трубка полного напора (или трубка Пито) служит для измерения скорости, например, в трубе. Если установить в этом потоке трубку, изогнутую под углом 90°, отверстием навстречу потоку и пьезометр, то жидкость в этой трубке поднимается над уровнем в пьезометре на высоту, равную скоростному напору.

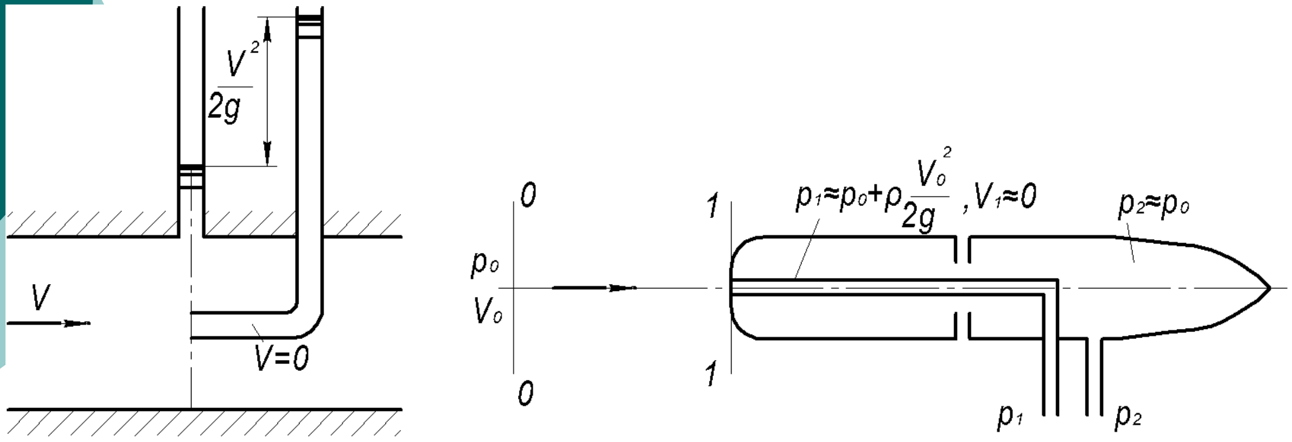


Схема трубки полного напора (слева) и насадка для измерения скорости (справа)

Объясняется это тем, что скорость V частиц жидкости, попадающих в отверстие трубки, уменьшается до нуля, а давление, следовательно, увеличивается на величину скоростного напора. Измерив разность высот подъема жидкости в трубке Пито и пьезометре, легко определить скорость жидкости в данной точке.

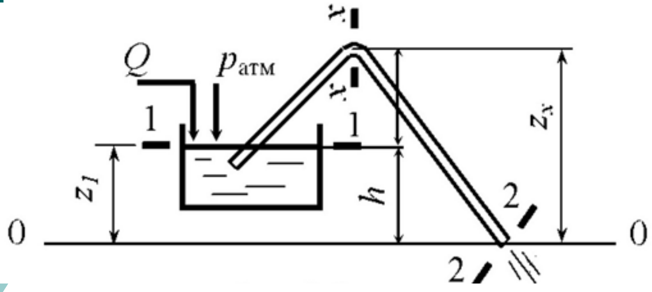
Запишем уравнение Бернулли для струйки, которая набегает на трубку вдоль ее оси, а затем растекается по ее поверхности. Для сечений 0-0 (невозмущенный поток) и 1-1 (где $V = 0$), получаем

$$p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} \approx p_1.$$

Так как боковые отверстия трубки приближенно воспринимают давление невозмущенного потока, $p_2 \approx p_0$, следовательно из предыдущего имеем

$$V_0 \approx \sqrt{\frac{2\left(p_1 - p_2\right)}{\rho}}.$$

Пример 1. По сифонному трубопроводу движется вода. Определить расход Q и давление воды в сечении $x-x$, пренебрегая потерями напора. Верхняя точка оси трубопровода расположена выше уровня воды в резервуаре на $H=1$ м, а нижняя – ниже на $h=3$ м. Внутренний диаметр трубопровода $d=20$ мм.



Решение. Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 относительно плоскости сравнения 0-0. Уравнение Бернулли имеет вид

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\alpha_2\frac{V_2^2}{2g}+\sum h_{\Pi}\,.$$

Здесь $z_1=h,\ z_2=0,\ \sum h_{\Pi}=0$. На поверхность жидкости в питающем резервуаре и на выходе из трубопровода действует атмосферное давление p_{am}, поэтому $p_1=p_2=p_{am}$. Принимаем $\alpha_1=\alpha_2\approx 1$. Скорость изменения уровня в резервуаре $V_1=0$, так как в резервуар поступает вода с расходом Q и уровень воды в нем постоянный. Произведя подстановку в исходное уравнение, получим уравнение Бернулли в виде

$$h=\alpha_2\frac{V_2^2}{2g},\quad V_2=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 3}=7{,}67 \text{ м/с.}$$

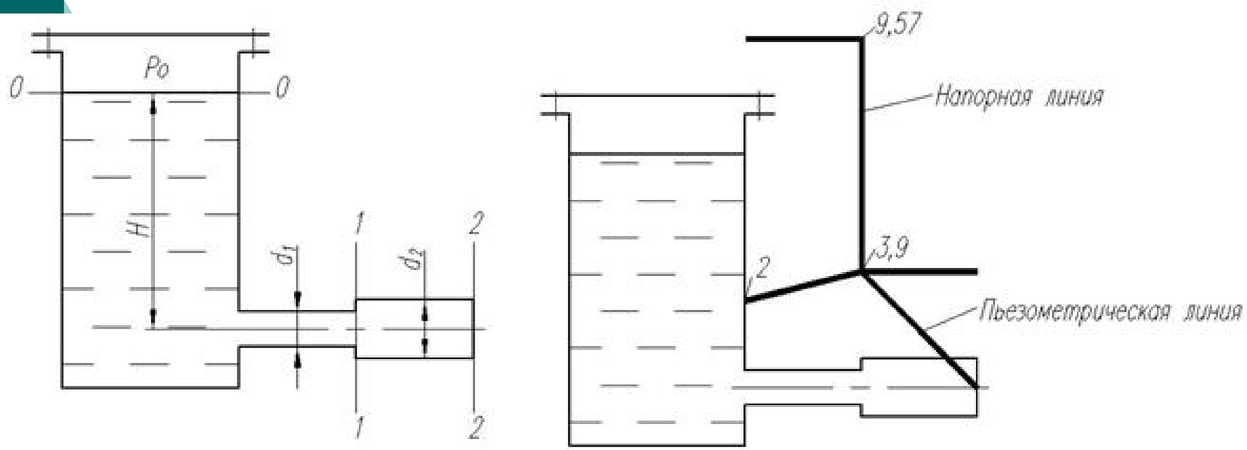
Расход определяется по формуле

$$Q=VS=V_2\frac{\pi d^2}{4}=7{,}67\cdot\frac{3{,}14\cdot 0{,}02^2}{4}=0{,}0024 \text{ м}^3\text{/с}$$

Для расчета абсолютного давления в верхней точке трубопровода составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и $x-x$ относительно плоскости сравнения 0-0:

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}=z_x+\frac{p_x}{\rho g}+\alpha_x\frac{V_x^2}{2g}\,.$$

Пример 2. При известных диаметрах трубопровода ($d_1 = 32$ мм, $d_2 = 40$ мм) и избыточном давлении в резервуаре $p_0 = 20$ кПа определить геометрический напор H, при котором будет обеспечен расход воды $Q = 11$ л/с. Построить напорную и пьезометрическую линии.



Составим уравнение Бернулли для сечений 0-0 и 2-2, выбрав за плоскость сравнения ось трубопровода:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_0 \frac{V_0^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{\Pi} .$$

Здесь

$z_0 = H,\ z_2 = 0,\ \sum h_{\Pi} = 0,\ V_0 = 0,\ p_2 = 0$.

Принимаем $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$. Тогда

$$H + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g},\ H = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{p_0}{\rho g}.$$

Из уравнения расхода определим скорость V_2:

$$Q = V_2 S_2,\ V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,04^2} = 8,75 \text{ м/с.}$$

Найдем $H = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{p_0}{\rho g} = \frac{8,75^2}{2 \cdot 9,81} - \frac{20 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9,81} = 1,87$ м.

Для построения напорной линии определим скорость V_1 и скоростные напоры:

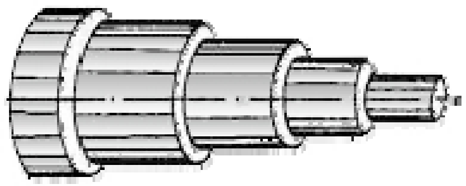
$$V_1 S_1 = V_2 S_2,\ V_1 = \frac{V_2 S_2}{S_1} = \frac{V_2 d_2^2}{d_1^2} = \frac{8,75 \cdot 0,04^2}{0,032^2} = 13,7 \text{ м/с}$$

Скоростные напоры: $\frac{V_0^2}{2g} = 0$; $\frac{V_1^2}{2g} = 9,57$ м; $\frac{V_2^2}{2g} = 3,9$ м.

Для построения пьезометрической линии определим пьезометрические высоты: $\frac{p_0}{\rho g} = 2,04$ м;

$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_0 + \rho g H}{\rho g} = 3,91$ м; $\frac{p_2}{\rho g} = 0$.

Модуль 3. Режимы течения жидкости в трубах



Слоистый характер потока при ламинарном течении жидкости

Ламинарным называется слоистое течение без перемешивания частиц жидкости и без пульсаций скоростей и давления. При таком течении все линии тока вполне определяются формой русла, по которому течет жидкость. При ламинарном течении жидкости в прямой трубе постоянного сечения все линии тока направлены параллельно оси трубы, т. е. прямолинейно; отсутствуют поперечные перемещения жидкости.

Турбулентным называется течение, сопровождающееся интенсивный перемешиванием жидкости в пульсациями скоростей и давлений. Движение отдельных частиц оказывается подобным хаотическому, беспорядочному движению молекул газа. При турбулентном течении векторы скоростей имеют не только осевые, но и нормальные к оси русла составляющие, поэтому наряду с основным продольным перемещением жидкости вдоль русла происходят поперечные перемещения (перемешивание) и вращательное движение отдельных объемов жидкости. Этим и объясняются пульсации скоростей в давления.

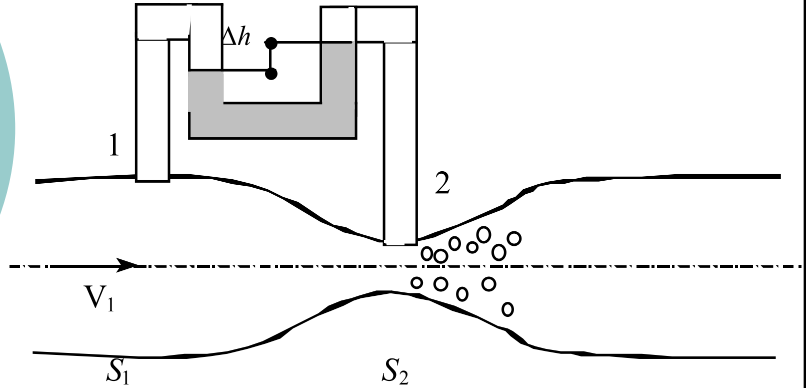
$$\mathrm{Re}_{kp} = \frac{V_{kp} d}{\nu}$$

Правило. Режим течения жидкости считают ламинарным при Re < Re_{kp} и турбулентным при Re > Re_{kp} .

Re_{kp}

для гладких круглых труб ---------------------------	2300
для гибких рукавов -----------------------------------	1600
для щелей золотниковых распределителей ------	260
для щелей конических клапанов -------------------	80

Кавитация



Процесс возникновения пузырьков пара в потоке жидкости

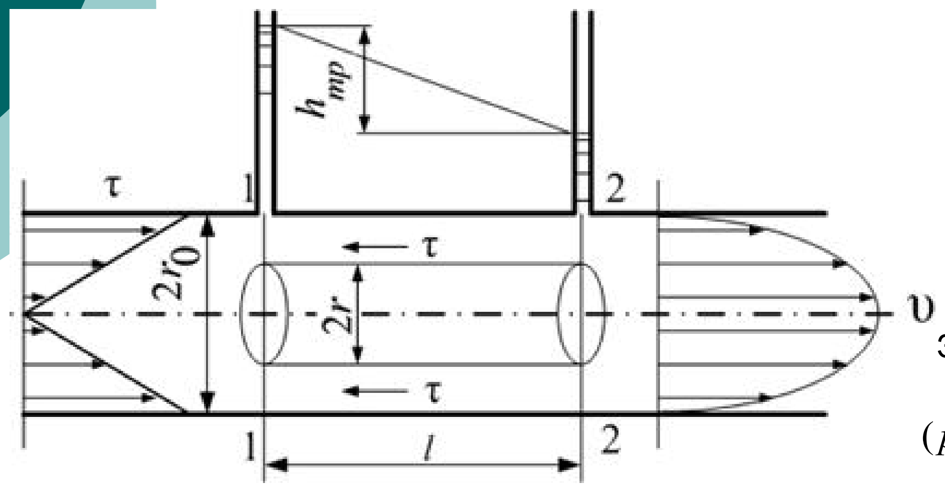
Кавитация. В некоторых случаях при напорном движении жидкости в трубопроводах и в других элементах гидросистем может возникать кавитация.
Кавитацией называется процесс возникновения пузырьков пара в потоке жидкости при снижении рабочего давления до дав-ления парообразования, с последующей конденсацией паров жидкости в зоне повышенного давления.

Кавитация возникает при понижении давления, в результате чего жидкость закипает или из нее выделяется растворенный газ. В потоке жидкости такое падение давления происходит обычно в области повышенных скоростей. В большинстве случаев жидкость настолько быстро проходит через область пониженного давления, что газ не успевает выделиться. В этом случае кавитацию часто называют паровой. Полости или пузырьки, заполненные паром, замыкаются.

Последствием кавитации являются следующие явления:
1. Эрозия материалов стенки канала. При полной конденсации пузырька происходит столкновение частиц жидкости, сопровождающееся мгновенным местным повышением давления, достигающем сотен МПа.
2. Звуковые явления (шум, треск, удары) и вибрация установки, являющиеся следствием колебания жидкости, которые вызваны замыканием полостей, заполненных паром.
3. Уменьшение подачи, напора, мощности и КПД гидравлических машин (насосов, моторов).

Ламинарное течение

Ламинарное течение подчиняется гипотезе Ньютона: $\tau = \mu \dfrac{dV}{dy}$.



К теории ламинарного течения жидкости в трубе

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}$$

Т.к. $z_1 = z_2 = 0$ и $V_1 = V_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, тогда

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \sum h_{1-2}, \quad \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h_{mp}, \quad h_{mp} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{p_{mp}}{\rho g}$$

Запишем равенство нулю суммы сил, действующих на объем

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - \tau \cdot 2\pi r \cdot l \Rightarrow \tau = \frac{(p_1 - p_2) r}{2l} = \frac{p_{mp} r}{2l}$$

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} = -\mu \frac{dV}{dr} \Rightarrow \frac{p_{mp} r}{2l} = -\mu \frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -\frac{p_{mp} r dr}{2l\mu}$$

$$V = -\frac{p_{mp} r^2}{4l\mu} + c$$

$r = r_o$, $V = 0$

$$\Rightarrow c = \frac{p_{mp} r_o^2}{4l\mu}$$

$$\boxed{V = -\frac{p_{mp} r^2}{4l\mu} + \frac{p_{mp} r_o^2}{4l\mu} = \frac{p_{mp}(r_o^2 - r^2)}{4l\mu}}$$

закон распределения скорости при ламинарном движении

Максимальная скорость, имеющая место в центре сечения при $r=0$:

$$V_{\max} = \frac{p_{mp} r_o^{\ 2}}{4l\mu}$$

Найдем расход протекающей жидкости:

$$dQ = VdS \qquad dS = 2\pi r dr \quad \Rightarrow \quad dQ = \frac{p_{mp}(r_o^{\ 2} - r^2)}{4l\mu}\cdot 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^{r_o} dQ = \int_0^{r_o} \frac{p_{mp}(r_o^{\ 2} - r^2)}{4l\mu}\cdot 2\pi r dr = \frac{p_{mp}\cdot\pi}{2l\mu}\int_0^{r_o}(r_o^{\ 2} - r^2) r dr = \frac{\pi p_{mp}}{8l\mu} r_o^4 .$$

$$V_{cp} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi r_o^2} = \frac{p_{mp}}{8l\mu} r_o^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{cp} = \frac{V_{\max}}{2}}$$

Потери на трение при ламинарном течении

$$p_{mp} = \frac{8l\mu Q}{\pi r_o^4}, \qquad h_{mp} = \frac{p_{mp}}{\rho g}, \qquad \mu = \rho\nu, \qquad d = 2r_o \quad \Rightarrow \quad h_{mp} = \frac{p_{mp}}{\rho g} = \frac{8l\mu Q}{\pi r_o^4 \rho g} = \frac{8l\nu Q}{\pi r_o^4 g} = \frac{128 l\nu Q}{\pi d^4 g}$$

$$h_{mp} \sim \begin{bmatrix} l \\ Q \\ 1/d^4 \end{bmatrix} \qquad h_{mp} = \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} \qquad Q = V_{cp}\frac{\pi d^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$h_{mp} = \frac{128 l\nu Q}{\pi d^4 g} = \frac{128 l\nu V_{cp}\pi d^2}{4\pi d^4 g} = \frac{128 l\nu V_{cp}}{4 d^2 g} = \frac{64\nu}{V_{cp} d}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{V^2}{2g} = \lambda\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{V_{cp} d}{\nu} \qquad \boxed{h_{mp} = \frac{64}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{V^2}{2g} \qquad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}}$$

Коэффициент Кориолиса (коэффициент кинетической энергии)

$$S = \pi r_o^2 \longrightarrow dS = 2\pi r dr$$

$$V_{cp} = \frac{p_{mp} r_o^2}{8l\mu} \qquad V = \frac{p_{mp}(r_o^2 - r^2)}{4l\mu}$$

$$\alpha = \frac{\int V^3 dS}{V_{cp}^3 S}$$

$$\alpha = 2$$

для ламинарного режима течения жидкости

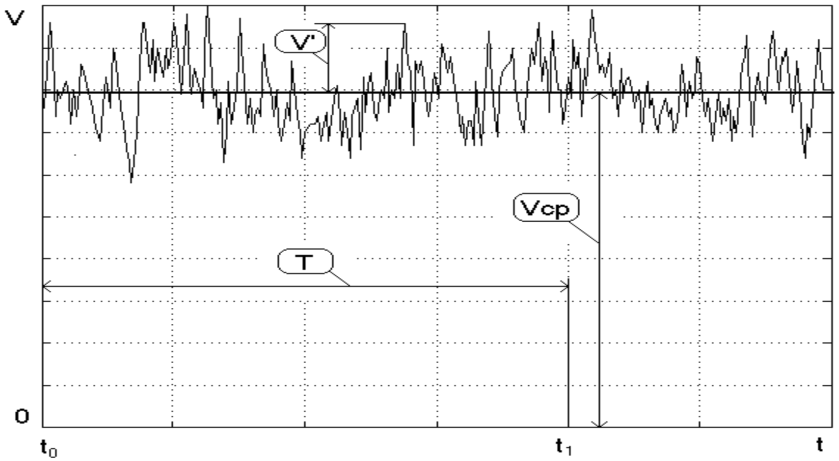
$$\alpha = \frac{\int V^3 dS}{V_{cp}^3 S} = \frac{1}{\left(\frac{p_{mp} r_o^2}{8l\mu}\right)^3 \pi r_o^2} \cdot \int V^3 dS = \frac{1}{\left(\frac{p_{mp} r_o^2}{8l\mu}\right)^3 \pi r_o^2} \cdot \int_S \left(\frac{p_{mp}(r_o^2 - r^2)}{4l\mu}\right)^3 2\pi r dr =$$

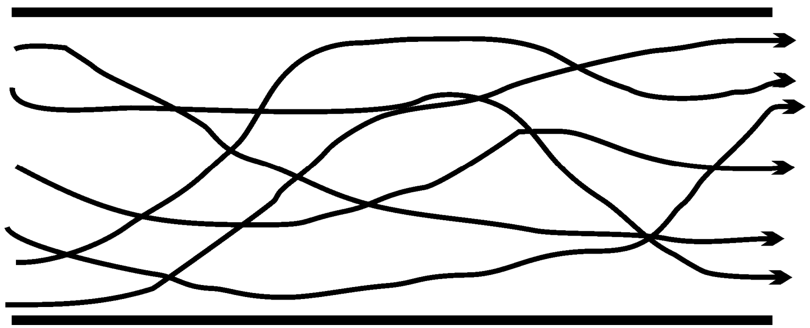
$$= \frac{1}{\left(\frac{p_{mp} r_o^2}{8l\mu}\right)^3 \pi r_o^2} \left(\frac{p_{mp}}{4l\mu}\right)^3 2\pi \int_r \left((r_o^2 - r^2)\right)^3 r dr = \frac{8^3 l^3 \mu^3}{p_{mp}{}^3 r_o^6 \pi r_o^2} \cdot \frac{2\pi p_{mp}{}^3 r_o^6}{4^3 l^3 \mu^3} \int_r \left((1 - \frac{r^2}{r_o^2})\right)^3 r dr =$$

$$= \frac{16}{r_o^2} \int_r \left((1 - \frac{r^2}{r_o^2})\right)^3 r dr = 16 \int_r \left((1 - \frac{r^2}{r_o^2})\right)^3 \frac{r dr}{r_o^2} = \left[\begin{array}{l} 1 - \frac{r^2}{r_o^2} = z,\ dz = \frac{2r dr}{r_o^2}, \\ dr = \frac{r_o^2 dz}{2r} \end{array}\right] =$$

$$= 8 \int_r \left((1 - \frac{r^2}{r_o^2})\right)^3 \frac{2r dr}{r_o^2} = -8 \int_z z^3 dz = -8 \int_1^0 z^3 dz = 8 \int_0^1 z^3 dz = 8 \cdot \frac{z^4}{4}\Big|_0^1 = 2(1^4 - 0^4) = 2.$$

Турбулентное течение в трубах





Пульсации скорости и характер линий тока в турбулентном потоке

Для турбулентного течения характерно перемешивание жидкости и пульсации скоростей и давлений. Частицы жидкости перемещаются по очень сложным криволинейным траекториям, отличным от траекторий соседних частиц. Поэтому для описания процесса турбулентного течения используются статистические методы исследования, рассматриваются средние по времени характеристики потока.

$$\overline{V}_x = \frac{\int_o^t V_x dt}{t}$$

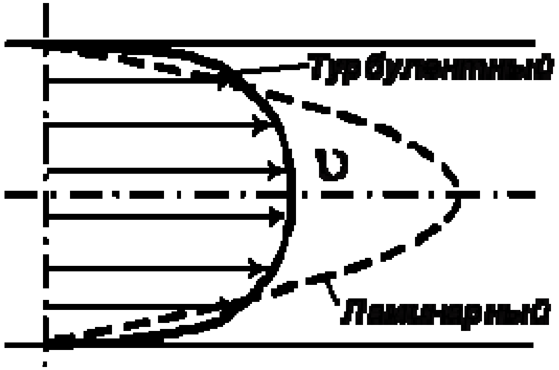
$$V = \sqrt{\overline{V_x}^2 + \overline{V_y}^2 + \overline{V_z}^2}$$

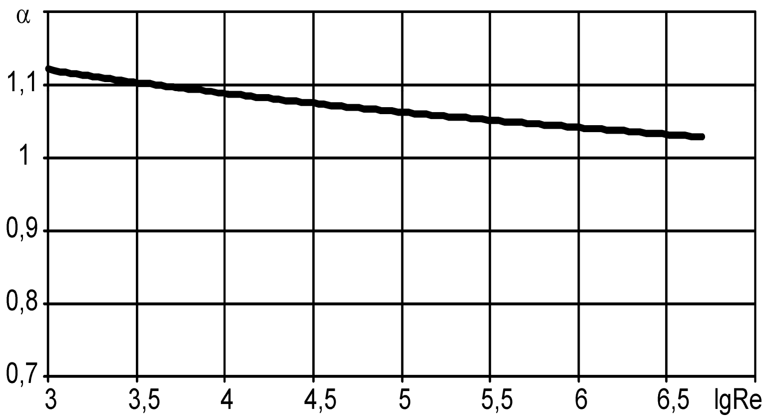
$$V' = V - \overline{V}$$

$$\sum_t V' = 0$$

Было установлено, что скорость жидкости на стенке равна нулю (эффект прилипания). На весьма малом расстоянии от стенки скорость достигает значительной величины. Далее происходит дальнейшее, но более медленное увеличение скорости

Равномерное распределение скорости в ядре потока объясняется интенсивным перемешиванием жидкости.
Т.к. происходит интенсивное перемешивание, то закон Ньютона выражает лишь малую часть полного касательного напряжения





Профили скоростей в ламинарном и турбулентном потоках (слева) и зависимость коэффициента Кориолиса от числа Рейнольдса

Потери энергии при турбулентном течении жидкости

$$\lambda = f(\mathrm{Re}, \overline{\Delta})$$

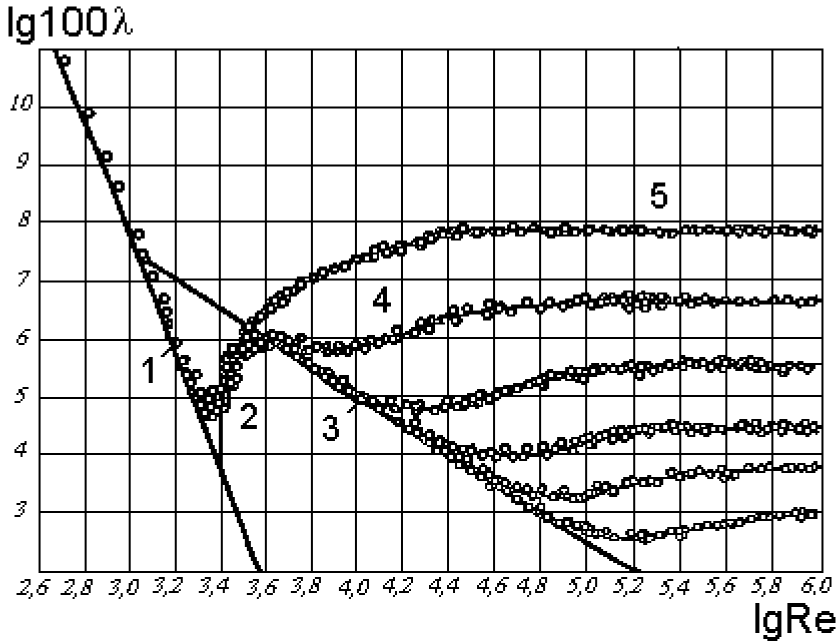


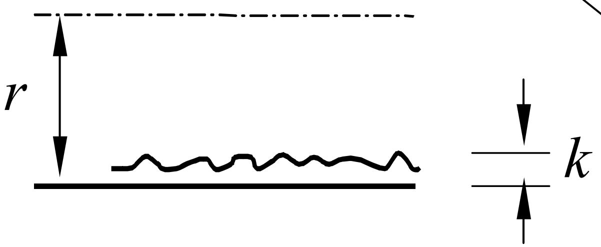
График Никурадзе

$$\lambda = f(\mathrm{Re}, \overline{\Delta})$$ где $\overline{\Delta} = \dfrac{k}{d}$ – относительная шероховатость.

1) $\lambda = f(\mathrm{Re})$ – зона «гидравлически гладких» труб;

2) $\lambda = f(\mathrm{Re}, \overline{\Delta})$ – зона развитого турбулентного движения;

3) $\lambda = f(\overline{\Delta})$ – зона квадратичного сопротивления (автомодельная область)



Относительная шероховатость

Определить коэффициент трения λ можно:

1) по графику;
2) опытным путем;
3) по эмпирическим зависимостям для турбулентного течения.

$\mathrm{Re} > 2320$ $\quad \mathrm{Re}\dfrac{\Delta}{d} < 10$

зона «гидравлически гладких» труб

$\lambda = f(\mathrm{Re})$

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$$

формула Блазиуса

$10 < \mathrm{Re}\dfrac{\Delta}{d} < 500$

зона развитого турбулентного движения

$\lambda = f(\mathrm{Re}, \overline{\Delta})$

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0{,}25}$$

формула Альтшуля

$\mathrm{Re}\dfrac{\Delta}{d} > 500$

зона квадратичного сопротивления (автомодельная область)

$\lambda = f(\overline{\Delta})$

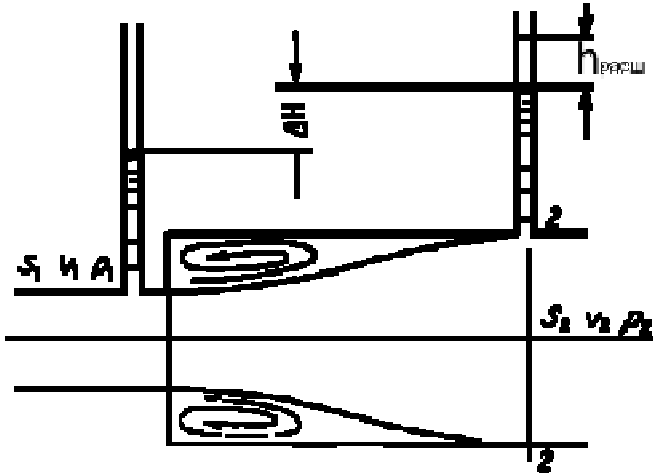
$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25}$$

формула Шези

Местные гидравлические сопротивления

$$h_{m.c.} = \xi \frac{V^2}{2g}$$

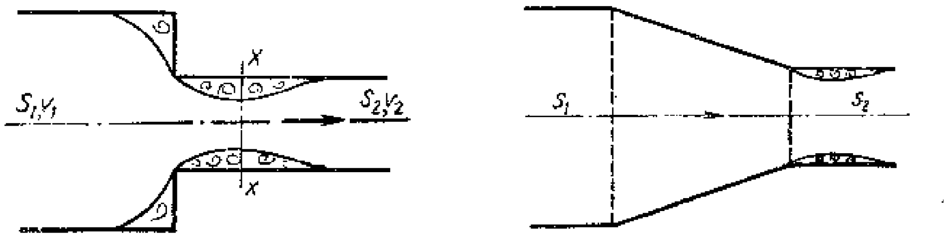
Значения коэффициентов местных потерь в большинстве случаев получают из опытов, на основании которых выводят эмпирические формулы или строят графики.



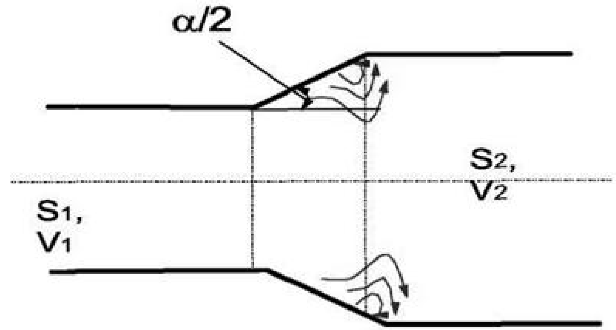
Внезапное расширение трубы

$$\xi = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$ -коэффициент потерь для внезапного расширения русла

$$\xi = \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) \cdot 0,5$$ - коэффициент потерь для внезапного сужения



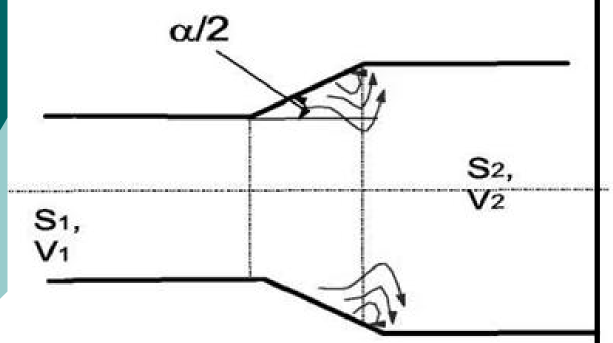
Сужение русла



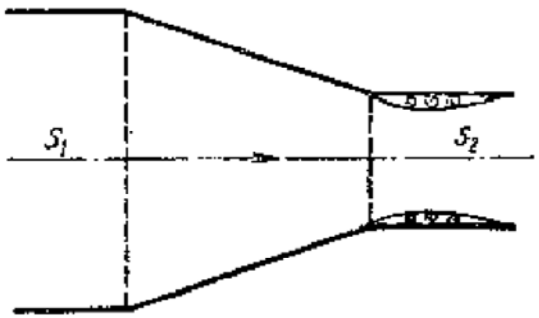
Постепенное расширение русла

Из формул следует, что когда $S_2 >> S_1$ (жидкость входит в резервуар), $\xi = 1$.

Когда $\frac{S_2}{S_1} = 0$, т.е. при выходе трубы из резервуара достаточно больших размеров коэффициент сопротивления $\xi = 0,5$.

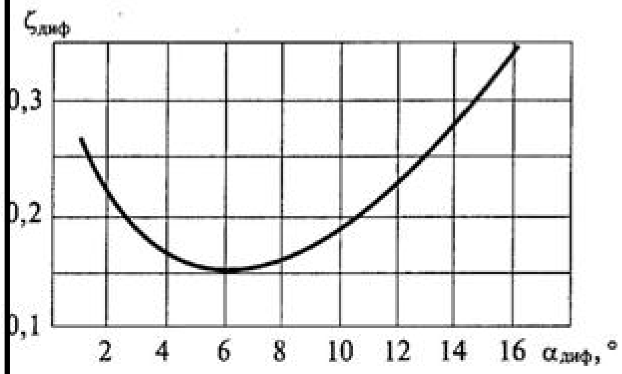


Диффузор



Конфузор

Течение жидкости в конфузоре сопровождается увеличением скорости и падением давления; так как давление жидкости в начале конфузора выше, чем в конце, причин к возникновению вихреобразования и срыва потока (как в диффузоре) нет. Для ликвидации вихреобразования и связанных с ним потерь рекомендуется коническую часть плавно сопрягать с цилиндрической или коническую часть заменять криволинейной, плавно переходящей к цилиндрическую. При этом можно допустить значительную степень сужения при небольшой длине вдоль оси и небольших потерях.



Коэффициент сопротивления диффузора

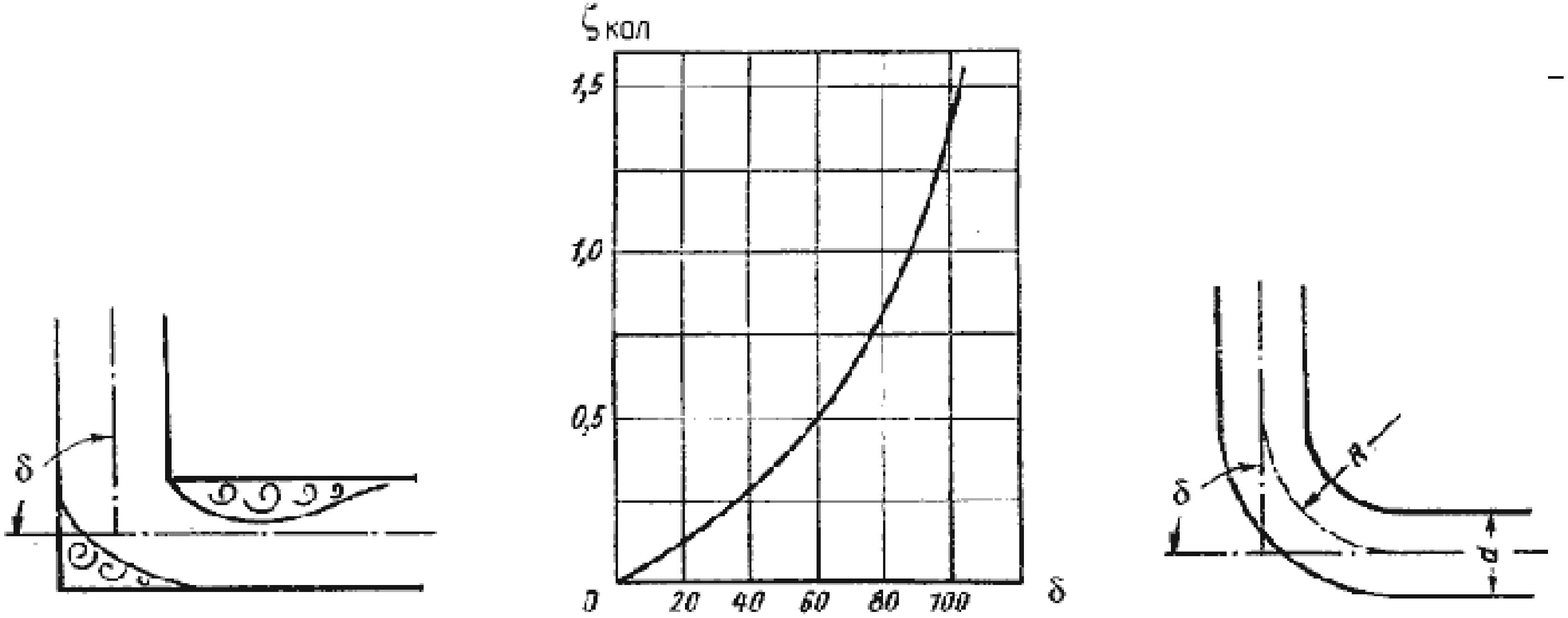
$$\alpha_{opt} = \arcsin\sqrt{\frac{n+1}{n-1}\frac{\lambda_T}{4}}$$

$n = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ -степень расширения диффузора

λ_T – коэффициент потерь на трение

Постепенное сужение трубы, т. е, коническая сходящаяся труба, называется ***конфузором***

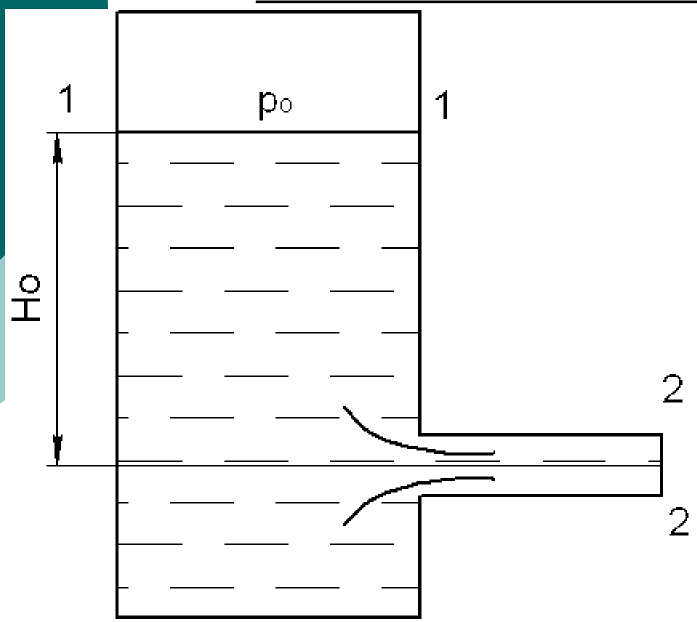
Поворот русла



Внезапный поворот трубы, или колено без закругления (рис. 3.4.4), обычно вызывает значительные потери энергии, так как в нем происходят отрыв потока и вихреобразование, причем эти потери тем больше, чем больше угол

Постепенный поворот трубы, или закругленное колено (рис. 3.4.4 справа), называется также отводом. Плавность поворота значительно уменьшает интенсивность вихреобразования, а следовательно, и сопротивление отвода по сравнению с коленом

Истечение жидкости через отверстия и насадки



Истечение жидкости из резервуара

Истечение может быть в атмосферу (***незатопленное отверстие***), под уровень (***затопленное отверстие***), при постоянном и переменном напоре.

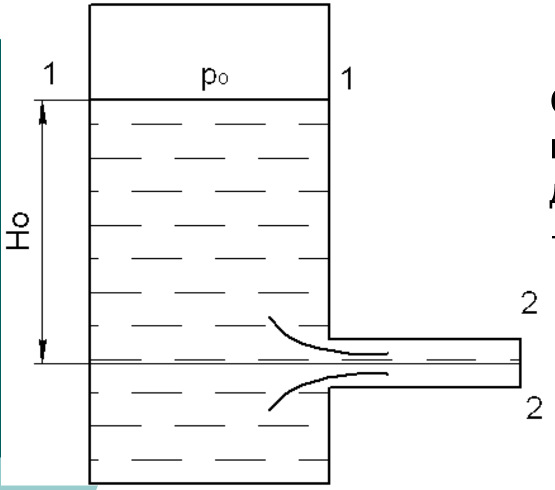
«Тонкая стенка» – стенка толщиной $\delta < 0,2d_o$.

Частицы жидкости приближаются к отверстию двигаясь ускоренно по различным плавным траекториям. Вследствие, инерции струя жидкости на выходе из отверстия сужается, а затем принимает цилиндрическую форму ($l = d$) и образуется практически параллельно-струйное течение.

Степень сжатия оценивается коэффициентом сжатия струи

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_o} \qquad \varepsilon = \frac{d_c^2}{d_o^2}$$

В процессе истечения запас потенциальной энергии, которым обладает жидкость в резервуаре, превращается с большими или меньшими потерями в кинетическую энергию свободной струи и капель.



Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2. Сечение 2-2 выбираем там, где струя принимает цилиндрическую форму и давление равно давлению окружающей среды

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}$$

$$p_1 = p_0; \quad z_1 = H_o; \quad V_1 = 0;$$
$$p_2 = 0; \quad z_2 = 0.$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + H_o = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \zeta \frac{V^2}{2g}$$

$$\frac{p_o}{\rho g} + H_o = \frac{V^2}{2g}(\alpha + \zeta)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2g\left(\frac{p_o}{\rho g} + H_o\right)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}} \sqrt{2gH_p}$$

или $V = \varphi\sqrt{2gH_p}$, где $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$ – коэффициент скорости.

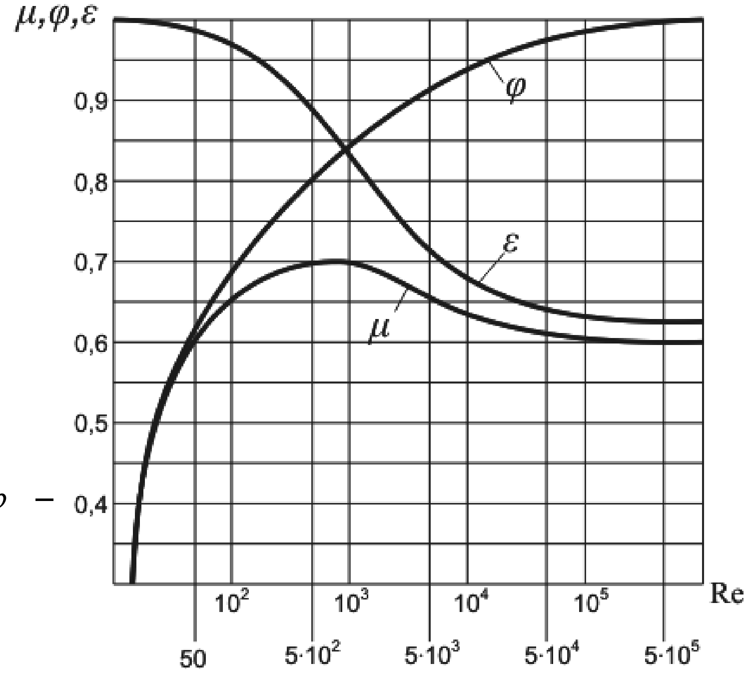
$$\varphi = \frac{V}{V_{теор}}$$

Найдем расход: $Q = VS_c = \varepsilon\varphi\sqrt{2gH_p} \cdot S_o$, $\quad Q = \mu S_o \sqrt{2gH_p}$, где $\mu = \varepsilon\varphi$ – коэффициент расхода.

Среднее значение коэффициента расхода для отверстия:

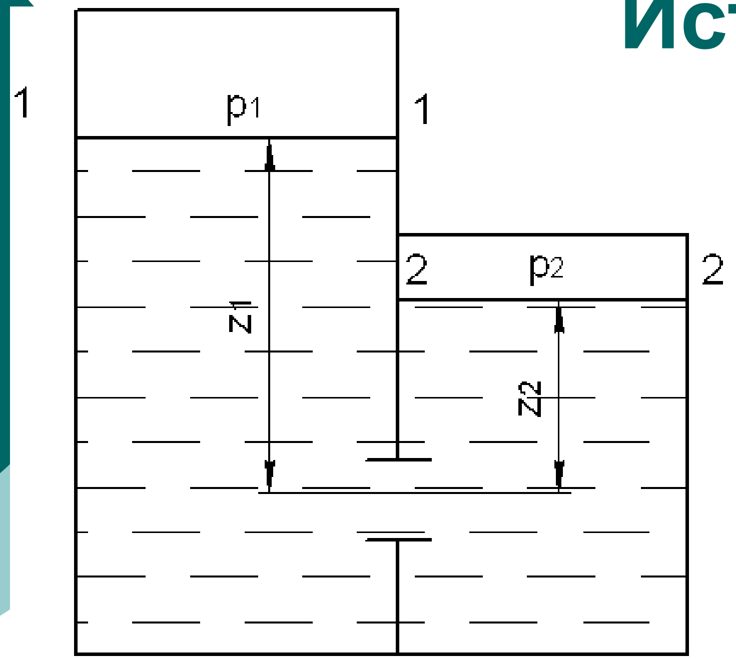
$\mu = 0{,}62$, $\quad \zeta = 0{,}065$

$\varphi = 0{,}97$, $\quad \varepsilon = 0{,}64$.



Зависимость $\varepsilon, \varphi, \mu$ от числа Рейнольдса ($\mathrm{Re}_i = \frac{V_i d}{\nu} = \frac{d}{\nu}\sqrt{2gH_p}$) для круглого отверстия в тонкой стенке.

Истечение жидкости через насадки



Истечение жидкости из резервуара (затопленное отверстие)

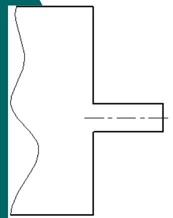
Коэффициенты сжатия и расхода при истечении под уровень можно принимать те же, что и при истечении в воздушную среду, но при этом располагаемый напор определяется по формуле

$$H_p = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + (z_1 - z_2)$$

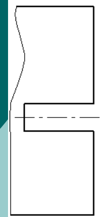
Диффузорный насадок представляет собой комбинацию сопла и диффузора. Приставка диффузора к соплу влечет за собой снижение давления в узком месте насадка, а следовательно, увеличение скорости и расхода жидкости через него. При том же диаметре узкого сечения, что и у сопла, и том же напоре диффузорный насадок может дать значительно больший расход (увеличение до 2,5 раза), чем сопло.

Коноидальный насадок, или сопло очерчивается приблизительно по форме естественно сжимающейся струи и благодаря этому обеспечивает безотрывность течения внутри насадка и параллельноструйность в выходном сечении. Это весьма распространенный насадок, так как он имеет коэффициент расхода, близкий к единице, и очень малые потери (коэффициент сжатия равен 1), а также устойчивый режим течения без кавитации.

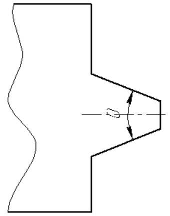
Истечение жидкости через насадки



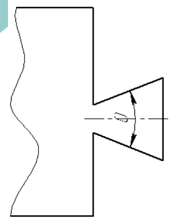
- Внешний цилиндрический насадок (Насадок Вентури)



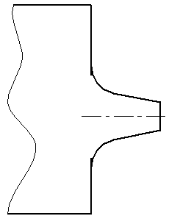
- Вутренний цилиндрический насадок (Насадок Борда)



- Внешний конфузорный насадок



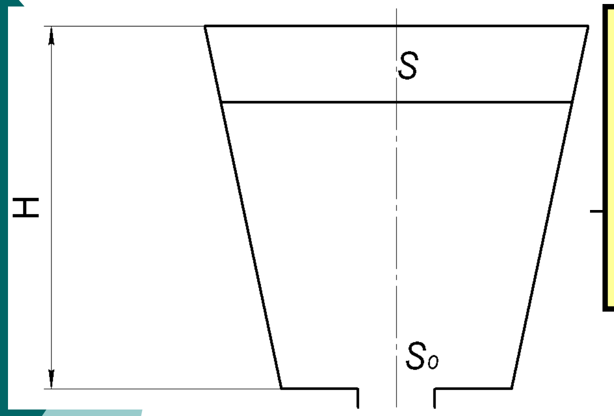
- Внешний диффузорный насадок



- Внешний коноидальный насадок

Коэффициенты $\varepsilon, \varphi, \mu$ для насадков разного типа

№, п/п	Тип насадка	φ	ε	μ
1	Отверстие в тонкой стенке	0,97	0,64	0,62
2	Внешний цилиндрический насадок (насадок Вентури)	0,82	1	0,82
3	Внутренний цилиндрический насадок (насадок Борда)	0,71	1	0,71
4	Внешний конфузорный насадок 13º24’	0,963	0,982	0,946
5	Внешний диффузорный насадок 7º	0,5	1	0,5
6	Внешний коноидальный насадок	0,98	1	0,98



Истечение из резервуара при переменном напоре, строго говоря, является неустановившемся, однако, если напор и скорость меняются медленно, то движение в каждый момент времени можно рассчитывать как установившееся (квазистационарное) и применить уравнение Бернулли.

Схема истечения при переменном напоре

$$Sdh = -Qdt\,;\quad Sdh = -\mu S_o\sqrt{2gh}dt\,;\qquad -\frac{Sdh}{\mu S_o\sqrt{2gh}} = dt\,;\quad -\frac{Sdh}{\mu S_o\sqrt{2g}\sqrt{h}} = dt\,;$$

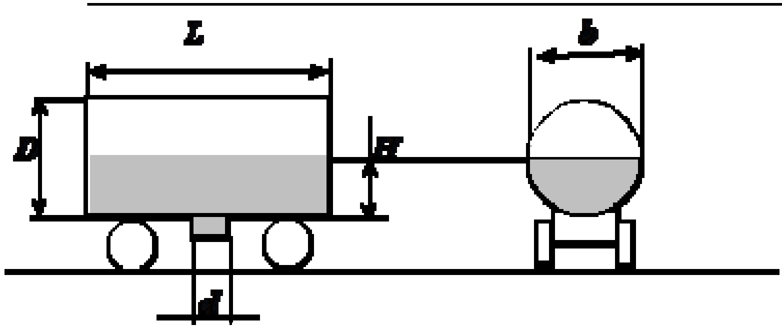
$$t = -\frac{1}{\mu S_o\sqrt{2g}}\int_H^0 S\frac{dh}{\sqrt{h}}\,.$$

Для призматических сосудов $S = const$.

$$t = \frac{-S}{\mu S_o\sqrt{2g}}\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{-S}{\mu S_o\sqrt{2g}}\left.\frac{h^{0,5}}{0,5}\right|_H^0 = \frac{S}{\mu S_o\sqrt{2g}}\frac{H^{0,5}}{0,5} = \frac{2SH^{0,5}}{\mu S_o\sqrt{2g}} = \frac{2SH}{\mu S_o\sqrt{2gH}} = \frac{2W}{Q}\,.$$

$$t_{on} = \frac{2W}{Q}\,.$$

Пример. Вычислить продолжительность опорожнения цистерны при её диаметре $D=2$ м и длине $L=5$ м, если диаметр сливного отверстия $d=0{,}1$ м, а коэффициент расхода $\mu=0{,}62$.



Опорожнение цистерны

Продолжительность опорожнения $t=\dfrac{1}{\mu S\sqrt{2g}}\int\limits_{H_1}^{H_2}\dfrac{\Omega dh}{\sqrt{h}}$

Здесь $\Omega=bL$ – переменная по высоте горизонтальная площадь сечения цистерны, причём хорда $b=2\sqrt{Dh-h^2}$.

Имеем:

$$t=\frac{2L}{\mu S\sqrt{2g}}\int\limits_0^D\frac{\sqrt{Dh-h^2}\,dh}{\sqrt{h}}=\frac{2L}{\mu S\sqrt{2g}}\int\limits_0^D\sqrt{D-h}\,dh=\frac{4LD^{3/2}}{3\mu S\sqrt{2g}}=$$

$$=\frac{4\cdot5\cdot2{,}828}{3\cdot0{,}65\cdot0{,}00785\cdot4{,}43}=875\ c.$$

Взаимодействие струи с преградой

Определим силу действия свободной струи, вытекающей из отверстая или насадка, на неподвижную стенку. Эта задача является частным случаем задачи определения силы действия потока па стенки канала

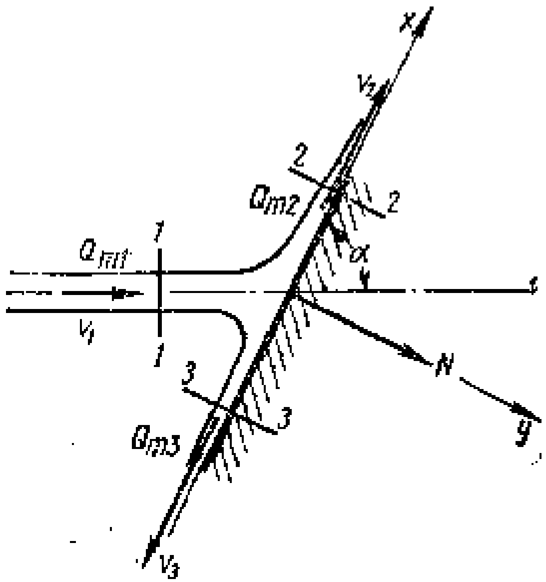


Схема натекания струи на плоскую наклонную стенку

$$\overline{N} = \overline{N}_{дин} = \overline{Q}_{m1}V_1 - \overline{Q}_{m2}V_2 - \overline{Q}_{m3}V_3$$

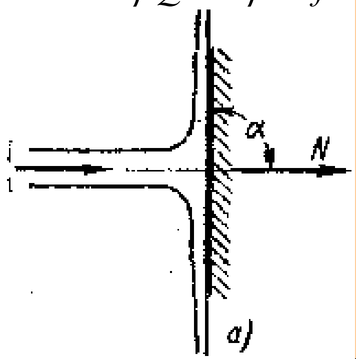
$$N_y = N = Q_{m1}V_1 \sin\alpha;$$

$$N_X = 0 = Q_{m1}V_1 \cos\alpha - Q_{m2}V_2 + Q_{m3}V_3;$$

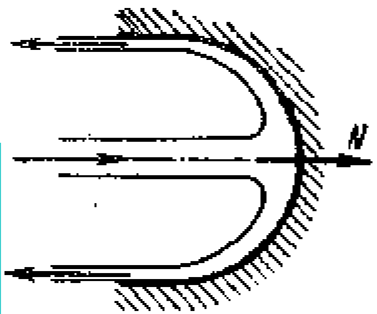
$$N_X = 0 = Q_{m1} \cos\alpha - Q_{m2} + Q_{m3};$$

$$Q_{m1} = Q_{m2} + Q_{m3};$$

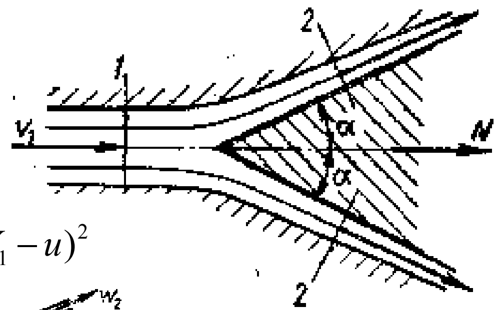
$$R = \rho QV = \rho V^2 f$$



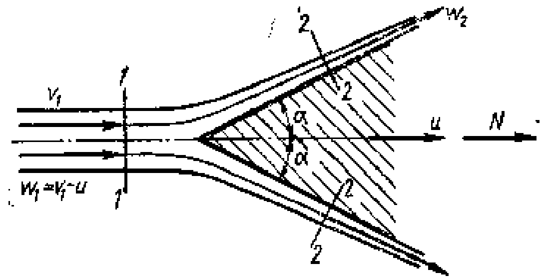
$$R = 2\rho QV = 2\rho V^2 f$$



$$R = \rho QV(1-\cos\alpha) = \rho V^2 f(1-\cos\alpha)$$



$$R = \rho QV(1-\cos\alpha)(V_1 - u)^2$$



Гидравлический удар

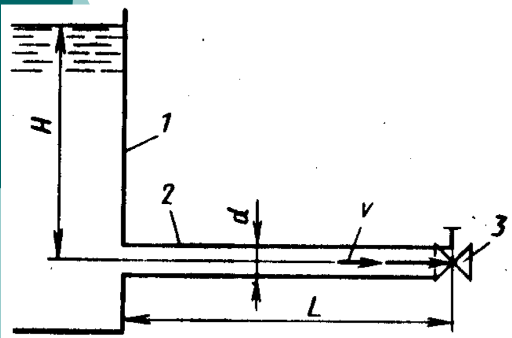


Схема к понятию гидроудара

При быстром закрытии запорных устройств (клапанов, распределителей и т. п.) в напорных трубопроводах вследствие резкого изменения скорости движения жидкости давление повышается до значений, в несколько раз превышающих номинальное давление в гидросистеме. Это явление называют ***гидравлическим ударом.*** Гидравлический удар весьма опасен для гидроустройств и трубопроводов и может вызвать их разрушение

Способ предотвращения гидравлического удара в гидроприводе выбирают для каждого конкретного случая. Наиболее эффектив-ным является устранение возможности прямого гидравлического удара, что при заданном трубопроводе сводится к увеличению времени закрытия запорных устройств.

При резком изменении скорости происходит замедление или ускорение движения жидкости, что приводит к повышению или понижению давления из-за сил инерции. У крана скорость жидкости равна нулю, а давление повышается до $\Delta p_{у\partial}$

$T = 2L/c$ -фаза гидравлического удара

$$c = \frac{\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}}{\sqrt{1+\dfrac{K}{E}\dfrac{d}{\delta}}}$$

- Скорость распространения ударной волны

$\Delta p_{у\partial} = \rho c V_у \dfrac{T_{зак}}{\tau}$ -непрямой удар

$$\Delta p_{у\partial} = \rho c V_у$$

Максимальное увеличение давления жидкости в трубо-проводе при полном гидравлическом ударе определяют по формуле Н. Е. Жуковского

Гидравлический расчет трубопроводов

Простым называют трубопровод, не имеющий боковых ответвлений. Целями расчета простого трубопровода являются выбор условного прохода, определение потерь давления и толщины стенок.

Под условным проходом понимают внутренний диаметр трубопровода, округленный до ближайшего значения из установленного ряда.

D_y, мм	1,0	1,2	1,6	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
	6,0	8	10	12	16	20	25	32
	40	50	63	80	100	125	160	200
	250							

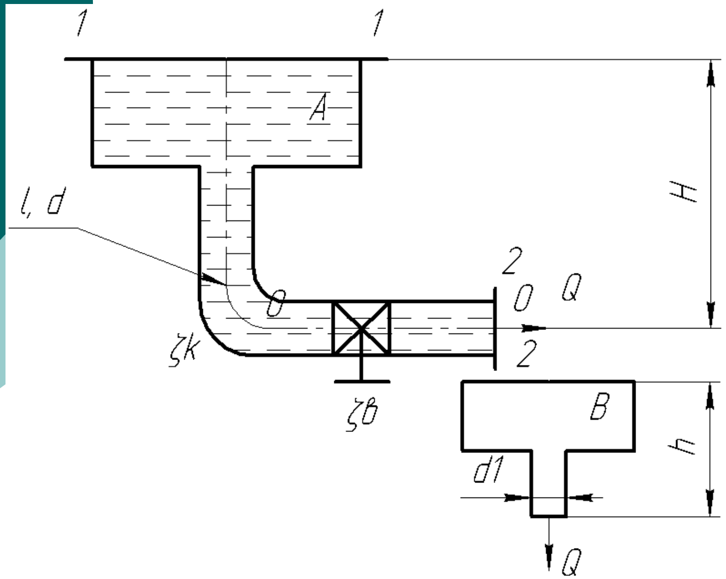
При выборе скорости потока жидкости в трубопроводах гидроприводов следует учитывать, что с увеличением скорости потока уменьшаются масса и стоимость трубопроводов и соединений, но возрастают потери давления из-за преодоления гидравлических сопротивлений, увеличивается опасность возникновения кавита-ции во всасывающей гидролинии насоса и гидравлических ударов

Расчет трубо-проводов

- Задачи первого типа (поиск потребного напора)
- Задачи второго типа (нахождение расхода)
- Задачи третьего типа (нахождение диаметра)

Задачи 1-го типа (поиск потребного напора)

$$d = d_1 = 80\text{мм};\ h = 1{,}5\text{м};\ L = 2l = 10\text{м};\ \mu = 0{,}82;\ \zeta_к = 0{,}3;\ \zeta_в = 4;\ \frac{\Delta}{d} = 0{,}01$$



1) Определяем расход:

$$Q = \mu f\sqrt{2gh} = 0{,}82\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}08^2}{4}\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5} = 0{,}0223 \text{ м}^3/\text{с}$$

2) Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + \sum h_{1-2}$$

$$p_1 = 0;\quad z_1 = H;\quad V_1 = 0;$$
$$p_2 = 0;\quad z_2 = 0;$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$H = 0{,}0827\left(\lambda\frac{l}{d} + \sum\zeta\right)\frac{Q^2}{d^4}\qquad \sum\zeta = \zeta_{вх} + \zeta_к + \zeta_в = 0{,}5 + 0{,}3 + 4 = 4{,}8$$

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4\cdot 0{,}0223}{3{,}14\cdot 0{,}08^2} = 4{,}44 \text{ м/с}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{4{,}44\cdot 0{,}08}{1\cdot 10^{-6}} = 355200$$

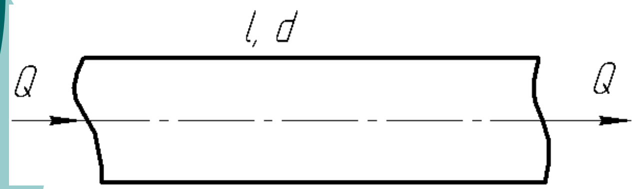
$$\mathrm{Re}\frac{\Delta}{d} = 355200\cdot 0{,}01 = 355$$

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0{,}25} = 0{,}11\cdot\left(0{,}01 + \frac{68}{355200}\right)^{0{,}25} = 0{,}035$$

$$\boxed{H = 0{,}0827\left(0{,}035\frac{10}{0{,}08} + 4{,}8\right)\frac{0{,}0223^2}{0{,}08^4} = 9{,}2 \text{ м}}$$

Задачи 2-го типа (нахождение расхода)

Определить расход Q, протекающий в трубе, если $l=200$ м; $d=100$ мм; $\Delta=0{,}1$ мм; $H=10$ м; в трубе протекает вода с вязкостью 1сСт.



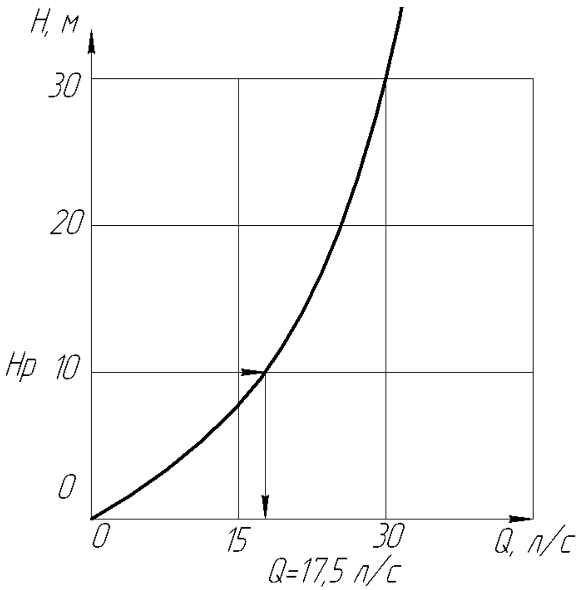
$$H_p = f(Q) = 0{,}0827\left(\lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta\right)\frac{Q^2}{d^4}$$

Нахождение расхода

Найдем объемный расход графо-аналитическим методом. Для этого определим для трех разных расходом значения H_n.

Порядок значения величины расходов определим из условия:

$$Q=\mu f\sqrt{2gH}=\mu\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gH}=0{,}82\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}1^2}{4}\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 10}=0{,}09 \text{ м}^3\text{/с=90 л/с}$$



Q, л/с	V, м/с	Re	$\mathrm{Re}\frac{\Delta}{d}$	λ	H, м
0	0	0	0	-	0
15	1,91	191000	191	0,0211	7,8
30	3,82	382000	382	0,0204	30,4

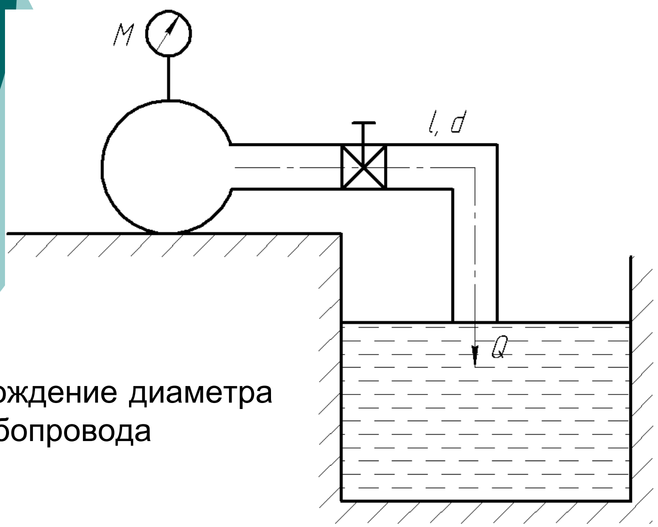
$V=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\cdot 15\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot 0{,}1^2}=1{,}91$ м/с; $\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{1{,}91\cdot 0{,}1}{1\cdot 10^{-6}}=191000$; $\mathrm{Re}\frac{\Delta}{d}=191000\cdot\frac{0{,}1}{100}=191$.

$$\lambda=0{,}11\left(\frac{\Delta}{d}+\frac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0{,}25}=0{,}11\cdot\left(0{,}001+\frac{68}{191000}\right)^{0{,}25}=0{,}0211$$

$$H=0{,}0827\frac{\lambda l Q^2}{d^5}=0{,}0827\cdot\frac{0{,}0211\cdot 200\cdot 0{,}015^2}{0{,}1^5}=7{,}8 \text{ м}$$

Задачи 3-го типа (нахождение диаметра трубопровода)

С помощью насоса необходимо наполнить резервуар объемом $W = 36$ м³, за $t = 30$ мин. Длина подводящего трубопровода $l = 45$ м. Необходимо найти диаметр трубопровода, если: $p_М = 245$ кПа; $\zeta_в = 4$. Коэффициент трения λ определить по зависимости: $\lambda = \dfrac{0,02}{d^{0,33}}$.



Нахождение диаметра трубопровода

1)Задачи данного типа решаются графо-аналитически по схеме:

$$d \to V \to \mathrm{Re} \to \lambda \to H.$$

Задаются тремя разными диаметрами затем рассчитывают H, и строят зависимость $H = f(d)$.

$$H = 0,0827\left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta\right)\frac{Q^2}{d^4}.$$

2) Определяем объемный расход, с которым необходимо заполнять резервуар:

$$Q = \frac{W}{t} = \frac{36}{30 \cdot 60} = 0,02 \text{ м}^3/\text{с}.$$

3) Определяем располагаемый напор:

$$H_p = \frac{p_М}{\rho g} = \frac{245 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9,81} = 25 \text{ м}.$$

d, мм	λ	H, м
20	0,074	35000
60	0,051	110
80	0,0464	25,1
100	0,043	8

Расчет одного значения расхода $d = 20$ мм

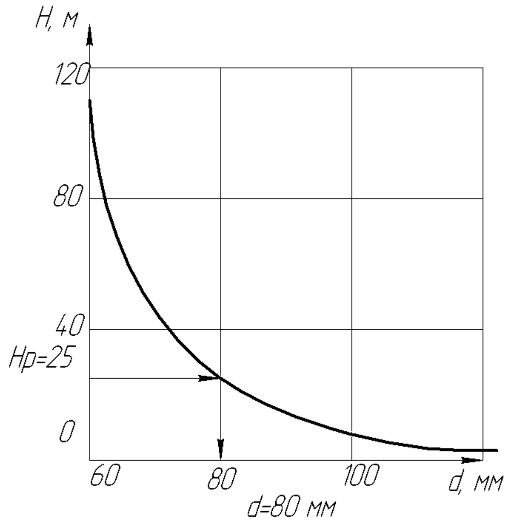
$$\sum \zeta = \zeta_в + \zeta_{вых} = 4 + 1 = 5;$$

$$\lambda = \frac{0,02}{d^{0,33}} = \frac{0,02}{0,02^{0,33}} = 0,074.$$

Тогда,

$$H = 0,0827\left(0,074\frac{45}{0,02} + 5\right)\frac{0,02^2}{0,02^4} = 35000 \text{ м}.$$

Строим график зависимости $H_p = f(d)$:

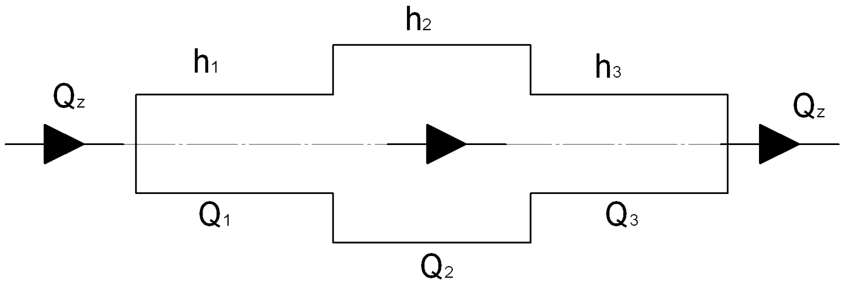


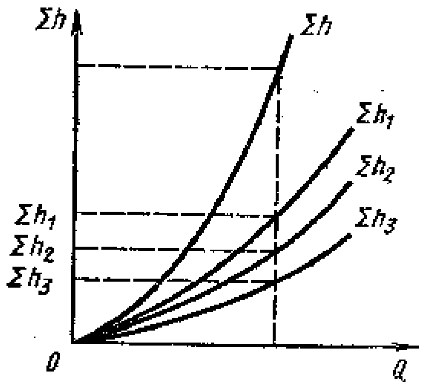
Расчет сложных трубопроводов

Сложным называется трубопровод, состоящий из отдельных участков простых трубопроводов, соединенных различными способами (последовательно, параллельно, смешанно).

Для решения задачи на сложный трубопровод необходимо заменить его <u>эквивалентным</u> ему простым. Эквивалентный – т.е. трубопровод, по которому течет тот же самый расход, и который имеет те же самые потери.

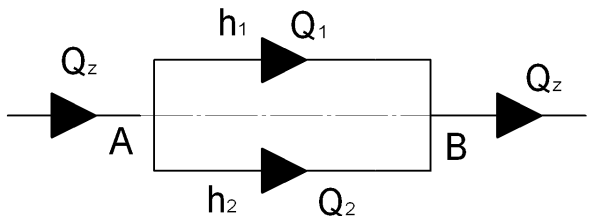
Последовательное соединение

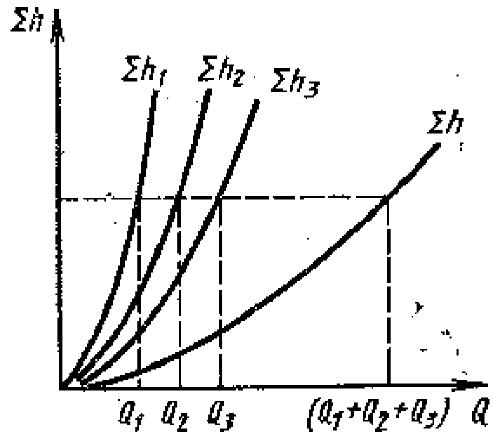




$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_z; \\ h_1 + h_2 + h_3 = \sum h_z. \end{cases}$$

Параллельное соединение





$$\begin{cases} Q_z = Q_1 + Q_2 + Q_3; \\ \sum h_z = h_1 = h_2 = h_3. \end{cases}$$

Замену сложного трубопровода эквивалентными ему простым начинают с параллельных соединений.