Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

Т. В. Гаврилова, С. О. Шиндерук

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ К ПРАКТИЧНИМ ЗАНЯТТЯМ

Розділ «Механіка»

Під загальною редакцією д-ра техн. наук,
професора Батигіна Ю.В.

Кафедра фізики

Практичне заняття 1. Кінематика поступального руху

Довідковий матеріал

1**. Середня швидкість**

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

де $\Delta \vec{r}$ – переміщення матеріальної точки за інтервал часу Δt.

Середня шляхова швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

де ΔS – шлях, що пройшла точка за інтервал часу Δt**.**

Миттєва швидкість

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\, v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z,$$

де $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекції швидкості на вісі координат.

Модуль швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

2. **Миттєве прискорення**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\, a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z,$$

де $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$, $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ – проекції прискорення $\vec{a}$ на вісі координат.

Модуль прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$**.**

Для криволінійного руху прискорення: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$:

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2},$$

де R – радіус кривизни в даній точці траєкторії.

3. **Шлях** у загальному випадку (S_0 и v_0 – початкові шлях і швидкість)

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \left(v_0 + v(t)\right) dt$$

4. **Кінематичне рівняння рівномірного прямолінійного руху** (v = const і a = 0):

$x = x_0 + vt$, де x_0 – початкова координата, t – час.

Кінематичне рівняння рівноприскореного прямолінійного руху (a = const): $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, де v_0 – початкова швидкість, t – час.

<u>Приклад №1</u>. Рух матеріальної точки задано рівнянням $\vec{r}(t)=\vec{i}\left(A+Bt^2\right)+\vec{j}Ct$, де A=10 м, B= – 5 м/с^2, C=10 м/с. Знайти вираз для швидкості $\vec{v}(t)$ і прискорення $\vec{a}(t)$. Для моменту часу t=1с обчислити: 1) модуль швидкості v; 2) модуль прискорення a; 3) модуль тангенціального прискорення a_τ; 4) модуль нормального прискорення a_n.

<u>Дано:</u>

$\vec{r}(t)=\vec{i}\left(A+Bt^2\right)+\vec{j}Ct$
A = 10 м
B = – 5 м/с^2
C = 10 м/с
t = 1с

$\vec{v}(t)-?$ $\vec{a}(t)-?$ $v-?$
$a-?$ $a_\tau-?$ $a_n-?$

СІ

<u>Рішення:</u>

По визначенню миттєвої швидкості

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}\cdot 2Bt+\vec{j}\cdot C$$

и миттєвого прискорення

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{i}\cdot 2B.$$

Модуль швидкості

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4B^2t^2+C^2},$$

при t = 1с:

$$v=\sqrt{4(-5)^2\cdot 1^2+10^2}=14{,}1(\text{м/с}).$$

Модуль прискорення при t=1 с:

$$|\vec{a}|=|2B|=|2\cdot(-5)|=10\ (\text{м/с}^2).$$

По визначенню тангенціального прискорення

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{4B^2t^2+C^2}=\frac{4B^2t}{\sqrt{4B^2t^2+C^2}},$$

при t=1 с:

$$a_\tau=\frac{4(-5)^2\cdot 1}{\sqrt{4(-5)^2\cdot 1^2+10^2}}=0{,}71\,(\text{м/с}^2).$$

Нормальне прискорення при t = 1с:

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{10^2+0{,}71^2}=10{,}02(\text{м/с}^2).$$

Приклад №2. Точка рухається по прямій згідно рівнянню $x=At+Bt^3$, де A=6 м/с, B = – 0,125 м/с^3. Визначити середню шляхову швидкість <v> точки в інтервалі часу від t_1=2 с до t_2=6 с.

Дано:	СІ	Рішення:
$x=At+Bt^3$ $A=6$ м/с $B=-0{,}125$ м/с^3 $t_1=2$ с $t_2=6$ с $v-?$		Середня шляхова швидкість $$\langle v\rangle=\frac{S}{t_2-t_1},$$ де S – шлях, який пройшла точка. По рівнянню руху визначимо миттєву швидкість точки $$v=\frac{dx}{dt}=A+3Bt^2.$$

Знайдемо, в який момент часу швидкість дорівнює нулю:

$$v=6-0{,}375t_0{}^2=0;$$

$$t_0=\sqrt{6/0{,}375}=4(\text{с}).$$

До зупинки від $t_1=2$ с до $t_0=4$с точка проходить шлях:

$$S_1=\left|x(t_0)-x(t_1)\right|=\left|(At_0+Bt_0{}^3)-(At_1+Bt_1^3)\right|=$$

$$=\left|A(t_0-t_1)+B(t_0^3-t_1^3)\right|=\left|6\cdot(4-2)-0{,}125\cdot(4^3-2^3)\right|=5(\text{м}).$$

Після зупинки від $t_0=4$с до $t_2=6$с шлях точки:

$$S_2=\left|x(t_2)-x(t_0)\right|=\left|(At_2+Bt_2^3)-(At_0+Bt_0^3)\right|=$$

$$=\left|6\cdot(6-4)-0{,}125\cdot(6^3-4^3)\right|=7(\text{м}).$$

Середня шляхова швидкість:

$$\langle v\rangle=\frac{S_1+S_2}{t_2-t_1}=\frac{5+7}{6-2}=3(\text{м/с}).$$

Приклад №3. Рух точки по криволінійній траєкторії задано рівняннями $x=A_1t^3$ и $y=A_2t$, де A_1=l м/с^3, A_2=2 м/с. Знайти рівняння траєкторії точки, її швидкість v і повне прискорення a в момент часу t=0,8 с.

Дано:	СІ	Рішення:
$t = 0{,}8c$ $x = A_1t^3$ $y = A_2t$ A_1 = l м/с^3 A_2 = 2 м/с		Для знаходження рівняння траєкторії виключимо час: $$t = \frac{y}{A_2}.$$ Підставляючи у вираз для x, одержимо: $$x = A_1\left(\frac{y}{A_2}\right)^3, \text{ або } A_2^3x - A_1y^3 = 0.$$
$f(x)$ – ? v – ? a –?		

З урахуванням чисельних значень A_1 и A_2 рівняння траєкторії приймає вигляд

$$8x - y^3 = 0.$$

Швидкість точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

де v_x и v_y – проекції швидкості на вісі x и y. Знайдемо їх:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3A_1t^2; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = A_2,$$

тоді швидкість

$$v = \sqrt{\left(3A_1t^2\right)^2 + A_2^2}.$$

Проекції прискорення на вісі x и y:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6A_1t; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0.$$

Прискорення точки

$$a = a_x = 6A_1t.$$

Обчислення:

$$v = \sqrt{\left(3\cdot1\cdot0{,}8^2\right)^2 + 2^2} = 2{,}77\left(\text{м/с}\right),$$

$$a = 6\cdot1\cdot0{,}8 = 4{,}8(\text{м/с}^2).$$

Приклад №4. Гоночний автомобіль рухається на прямолінійній ділянці траєкторії так, що його прискорення зростає лінійно і за перші 10 с досягає значення 5 м/с^2. Нехтуючи його власними розмірами і масою, визначити в кінці 10-ій секунди: 1) швидкість автомобіля; 2) пройдений їм шлях.

Дано:	СІ	Рішення:
$t = 0{,}8c$ $x = A_1 t^3$ $y = A_2 t$ $A_1 = 1$ м/с^3 $A_2 = 2$ м/с ——— $v - ?\ a - ?$		Оскільки прискорення зростає лінійно, то

$$a(t) = k \cdot t,$$

і невідомий коефіцієнт пропорційності:

$$k = \frac{a(t)}{t} = \frac{5}{10} = 0{,}5 \text{ (м/с).}$$

За умовою рух прямолінійний, отже, швидкість

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t k \cdot t\,dt = \left.\frac{k \cdot t^2}{2}\right|_0^t = \left.\frac{k \cdot t^2}{2}\right|_{k=0,5} = \frac{t^2}{4}.$$

Пройдений шлях прямолінійного руху буде дорівнювати:

$$S(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \frac{t^2}{4}\,dt = \frac{1}{4} \cdot \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^t = \frac{t^3}{12}.$$

Обчислення:
швидкість автомобіля:

$$v(10) = \frac{1}{4} \cdot 10^2 = 25 \text{(м/с);}$$

пройдений шлях:

$$S(10) = \frac{1}{12} \cdot 10^3 = 83\frac{1}{3} \text{(м).}$$

Практичне заняття 2. Кінематика обертального руху

Довідковий матеріал

1. **Середня кутова швидкість**

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

де $\Delta\varphi$ – зміна кута повороту за інтервал часу Δt.

Миттєва кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

2. **Миттєве кутове прискорення**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

3. **Частота обертання**

$$n = N/t \quad \text{або} \quad n = 1/T,$$

де N – число обертів, що здійснюються тілом за час t; T – період обертання (час одного повного обороту).

4. **Кінематичне рівняння рівномірного обертання** (ω=const и ε=0):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

де φ_0 – початкове кутове переміщення; t – час.

Кінематичне рівняння рівнозмінного обертання (ε=const):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість; t – час.

Кутова швидкість тіла при рівнозмінному обертанні $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

5. **Зв'язок між лінійними і кутовими величинами,** що характеризують обертання матеріальної точки:

шлях, що пройшла точка по дузі кола радіусом R при повороті на кут φ

$$S = \varphi R;$$

лінійна швидкість точки

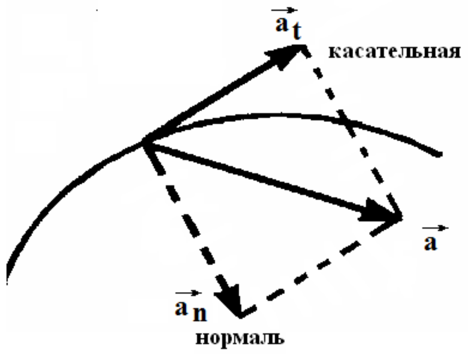
$$v = \omega R, \quad \vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}];$$

тангенціальне прискорення точки

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\vec{r}]:$$

нормальне прискорення точки

$$a_n = \omega^2 R, \quad \vec{a}_n = -[\omega^2\vec{r}].$$



<u>**Приклад №1.**</u> Автомобіль рухається по заокругленню шосе, що має

радіус кривизни R = 25 м. Рівняння руху автомобіля $S(t) = A + Bt + Ct^2$, де A = 5м, B = 15м/с, C = –1 м/с^2. Знайти: швидкість v автомобіля, його тангенціальне, нормальне і повне прискорення в момент часу t = 6 с.

Дано:	Рішення:
R=25 м $S(t)=A+B\cdot t+C\cdot t^2$ A=5м B=15м/с C= – 1м/с^2 t=6 с	Знаючи рівняння руху, знайдемо швидкість, взявши першу похідну від координати за часом: $$v = \frac{dS(t)}{dt} = B + 2C \cdot t.$$ Підставимо в цей вираз значення B, C, t і проведемо обчислення:
a– ? a_τ – ? a_n – ?	v = 15+2·(–1)·6=3(м/с).

Тангенціальне прискорення знайдемо, взявши першу похідну від швидкості за часом:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2C.$$

Підставимо значення C, одержимо $a_\tau = 2(-1) = -2(\text{м}/\text{с}^2)$.

Нормальне прискорення визначається по формулі:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Підставляючи знайдене значення швидкості і задане значення радіусу кривизни траєкторії, проведемо обчислення:

$$a_n = \frac{3^2}{25} = 0,36(\text{м}/\text{с}^2).$$

Модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}.$$

Чисельно

$$a = \sqrt{2^2 + 0,36^2} = 2,03(\text{м/с}^2).$$

<u>Приклад №2</u>. Трекові модель автомобіля обертається на прив'язі з частотою 50 Гц. Після припинення тяги, модель, зробивши 500 оборотів, зупинилася. Нехтуючи власними розмірами і масою моделі автомобіля, визначити момент зупинки і кутове прискорення, якщо вважати, що гальмування є рівнозмінним.

Дано:	Рішення:
$\nu_0 = 50$ Гц. $N = 500$ ε = const $\nu_к = 0$	Оскільки гальмування приймається рівнозмінним, то кут повороту $$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad (1)$$
ε – ? t_k –?	где $\omega_0 = 2\pi \cdot \nu_0$ – початкова кутова частота обертання. Кінцеве значення кута – $\varphi_k = 2\pi \cdot N$ відповідає кінцевої кутової швидкості $$\omega_k = 2\pi \cdot \nu_k = 0.$$

зі співвідношення – $\omega_k = \omega_0 - \varepsilon \cdot t_k$ знайдемо t_k – момент зупинки:

$$t_k = \frac{\omega_0}{\varepsilon} . \quad (2)$$

Таким чином, із виразу (1) для кінцевого значення кута повороту

$$2\pi N = 2\pi\nu_0 \cdot t_k - \frac{\varepsilon \cdot {t_k}^2}{2},$$

із урахуванням (2) одержимо

$$2\pi N = 2\pi\nu_0 \cdot \frac{2\pi\nu_0}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2\pi\nu_0}{\varepsilon}\right)^2,$$

звідки отримаємо формулу для кутового прискорення

$$\varepsilon = \frac{\pi {\nu_0}^2}{N}.$$

Чисельно

$$\varepsilon = \frac{\pi \cdot 50^2}{500} = 5\pi = 15,7 (\text{рад/с}^2),$$

$$t_k = \frac{2\pi\nu_0}{\varepsilon} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50}{5 \cdot \pi} = 20 (\text{с}).$$

<u>Приклад №3.</u> Пропелер літака, який робить n_0 = 1200 об/хв, після вимкнення двигуна зупиняється через t = 8 с. Скільки оборотів зробив пропелер за цей час, якщо вважати його обертання рівносповільненим?

Дано:	СІ	Рішення:
n_0 = 1200 об/хв t = 8 с n = 0 ε = const	20об/с	При рівносповільненому русі кутова швидкість і кут повороту змінюються за законами відповідно
N_1– ?		$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot t, \quad (1)$$ $$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad (2)$$ де $\omega_0 = 2\pi \cdot n_0$ – початкова кутова частота обертів.

У момент зупинки при t_1 кутова швидкість тіла $\omega = 2\pi \cdot n = 0$. Підставляючи цей вираз в рівняння (1), отримаємо

$$0 = 2\pi \cdot n_0 - \varepsilon \cdot t_1,$$

відкіля $\varepsilon = \frac{2\pi \cdot n_0}{t_1}$.

Якщо позначити число зроблених пропелером за час t_1 оборотів через N_1, то кут повороту за той же час дорівнює

$$\varphi_1 = 2\pi \cdot N_1.$$

Підставляючи знайдені значення ε и φ_1 в рівняння (2), одержимо вираз

$$2\pi \cdot N_1 = 2\pi \cdot n_0 \cdot t_1 - \frac{2\pi \cdot n_0}{t_1} \cdot \frac{t_1^2}{2} = \pi \cdot n_0 t_1,$$

з якого маємо

$$N_1 = \frac{n_0}{2} \cdot t_1.$$

Чисельно:

$$N_1 = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80.$$

<u>Приклад №4.</u> Знайти закон обертання тіла навколо осі, якщо відомі наступні дані: кутова швидкість змінюється пропорційно t_2, початковий кут повороту, для заданого моменту часу t_1 = 3 з кутове прискорення

Дано:	Рішення:
$\omega \sim t^2$ $\varphi_0 = 2$рад $t_1 = 3$ с $\varepsilon_1 = -5\pi\,\text{с}^{-2}$	За умовою завдання модуль кутової швидкості змінюється пропорційно t^2. Позначаючи невідомий коефіцієнт пропорційності буквою κ, маємо $$\omega = \kappa t^2. \quad (1)$$ Знайдемо ε, беручи похідні за часом від обох частин рівності (1), $$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2\kappa t. \quad (2)$$
$\varphi(t)$ – ?	

Визначимо коефіцієнт κ із умови, що при $t_1 = 3$ **с** кутове прискорення $\varepsilon_1 = -5\pi\,\text{с}^{-2}$:

$$-5\pi = 2 \cdot \kappa \cdot 3,$$

тоді $\kappa = -\frac{5}{6}\pi$.

Подставляючи значення κ в рівняння (1), одержимо:

$$\omega = -\frac{5}{6} \cdot \pi \cdot t^2.$$

Урахуємо, що $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, і будемо мати:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{5}{6} \cdot \pi \cdot t^2.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на dt і інтегруючи, знаходимо:

$$\varphi = -\frac{5}{18} \cdot \pi \cdot \mathrm{t}^3 + \mathrm{C}.$$

У початковий момент при $t = 0$, $\varphi_0 = 2$ рад, тоді константа С = 2.

Таким чином, закон обертання тіла навколо вісі має вигляд:

$$\varphi = -\frac{5}{18} \cdot \pi \cdot \mathrm{t}^3 + 2.$$

Практичне заняття 3. Закони динаміки поступального ружу

Довідковий матеріал

Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона) в векторній формі:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \qquad \text{або} \qquad m\vec{a}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i,$$

де $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$ – геометрична сума сил, які діють на матеріальну точку; m – маса; a – прискорення; $\vec{p}=m\vec{v}$ – імпульс; N – число сил, які діють на матеріальну точку;

в координатній формі (скалярній):

$$ma_x=\sum_{i=1}^{N}F_{xi}\,;\; m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{xi}\,;$$

$$ma_y=\sum_{i=1}^{N}F_{yi}\,;\; m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{yi}\,;$$

$$ma_z=\sum_{i=1}^{N}F_{zi}\,; \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum_{i=1}^{N}F_{zi}\,,$$

де під знаком суми стоять проекції сил на відповідні осі координат.

Третій закон Ньютона

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}.$$

Сила гравітаційного притягання тіл

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2},$$

где G – гравітаційна стала, m_1 и m_2 – маси взаємодіючих тіл; r – відстань між ними.

Сила пружності (закон Гука)

$$\vec{F}_{\text{упр}}=-k\Delta\vec{r}\,,$$

де k – коефіцієнт пружності (жорсткість), $\Delta\vec{r}$ – абсолютна деформація.

Сила тертя ковзання

$$F_{\text{тр}}=\mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання; N – сила реакції опори.

Вага тіла – сила, діюча на опору або на підвіс $\vec{P}=-\vec{N}$.

Приклад №1. Матеріальна точка масою m = 2 кг рухається під дією деякої сили F згідно рівнянню $x = A+Bt+Ct^2+Dt^3$, де C = 1 м/с^2, D = – 0,2 м/с^3. Знайти значення цієї сили в моменти часу t_1 = 2 с и t_2 = 5 с. В який момент часу сила дорівнює нулю?

Дано:	Рішення:
m=2 кг $x=A+Bt+Ct^2+Dt^3$ C=1 м/с^2 t_1=2 с t_2=5 F=0	Знайдемо миттєву швидкість в довільний момент часу, продиференцирувавши координату x за часом: $$v=\frac{dx}{dt}=B+2Ct+3Dt^2.$$ Миттєве прискорення в довільний момент часу знайдемо, взявши похідну від швидкості за часом:
F_1 – ? F_2 – ? t – ?	

$$a=\frac{dv}{dt}=2C+6Dt.$$

Величину сили знайдемо за другим законом Ньютона:

$$F=ma=m(2C+6Dt).$$

Підставимо значення C, D і зробимо обчислення сили для моментів часу t_1=2 с и t_2=5 с:

$$F_1=2(2\times1+6(-0,2)2)=-0,8(\text{Н}),$$
$$F_2=2(2\times1+6(-0,2)5)=-8(\text{Н}).$$

Знак мінус вказує на те, що напрямок вектора сили F_1 і F_2збігається з негативним напрямком координатної осі, тобто рух точки в дані моменти є уповільненим.

Визначимо, в які моменти часу сила дорівнює нулю:

$$F=2C+6Dt=0,$$

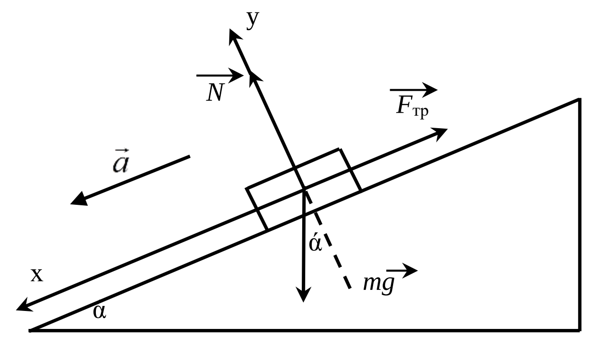
відкіля $t=-\dfrac{C}{3D}$.

Підставляючи значення C и D, одержимо:

$$t=-\frac{1}{3(-0,2)}=0,17(\text{с}).$$

<u>Приклад №2.</u> Знайти прискорення і вага тіла, скачується по похилій площині, що становить кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює μ.

<u>Дано:</u>	<u>Рішення</u>
α, μ	
A – ? P – ?	



Запишемо II закон Ньютона в векторній формі:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a}\,.$$

Спроектуємо рівняння на вісі *Ox* и *Oy:*

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{mp} = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}.$$

Використовуючи вираз для сили тертя $F_{\text{тр}} = \mu \cdot N$, перетворимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \mu N = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}.$$

З другого рівняння знаходимо силу реакції опори і відповідно вагу тіла

$$N = P = mg \cdot \cos\alpha\,.$$

Бачимо, що вага тіла на похилій поверхні менше сили тяжіння

З першого рівняння знаходимо прискорення

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,.$$

Очевидно, якщо $\mu = \operatorname{tg}\alpha$, то a = 0, отже, тіло покоїться або рухається рівномірно і прямолінійно.

Приклад №3. При падінні тіла з великої висоти його швидкість $v_{уст}$ при сталому русі досягає 80 м/с. Визначити час τ, протягом якого, починаючи від моменту початку падіння, швидкість стає рівною 1/2 $v_{уст}$. Силу опору повітря прийняти пропорційною швидкості тіла.

Дано:	Рішення:
$v_{уст}$ = 80 м/с v =1/2$v_{уст}$	На падаюче тіло діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила опору повітря $\vec{F}_с$.
τ - ?	Сила опору повітря за умовами завдання пропорційна швидкості тіла і протилежна їй за напрямком:

$$\vec{F}_с = -k\vec{v},$$

где k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від розмірів, форми тіла і від властивостей навколишнього середовища

Напишемо рівняння руху тіла відповідно до другого закону Ньютона у векторній формі:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_с.$$

Підставивши вираз для $\vec{F}_с$, одержимо

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}.$$

Спроектуємо всі векторні величини на вертикально спрямовану вісь і напишемо рівняння для проекцій:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Після розділення змінних отримаємо:

$$\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m}.$$

Виконаємо інтегрування, враховуючи, що при зміні часу від нуля до τ (шуканий час) швидкість зростає від нуля до 1/2$v_{уст}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}v_{уст}} \frac{dv}{mg - \mathrm{kv}} = \int_0^{\tau} \frac{dt}{m}.$$

Після інтегрування одержимо:

$$-\frac{1}{k}\ln\left(mg-kv\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}\mathrm{v}_{\text{уст}}}=\frac{\tau}{m}.$$

Підставами межі інтегрування в ліву частину рівності:

$$\frac{1}{k}\ln\frac{mg}{gm-\frac{1}{2}kv_{\text{уст}}}=\frac{\tau}{m}.$$

і знайдемо з отриманого виразу шуканий час:

$$\tau=\frac{m}{k}\ln\frac{mg}{mg-\frac{1}{2}kv_{\text{уст}}}.$$

Вхідний сюди коефіцієнт пропорційності k визначимо з наступних міркувань. При установленому русі (швидкість постійна) алгебраїчна сума проекцій (на вісь y) сил, що діють на тіло, дорівнює нулю, тобто

$mg — kv_{\text{уст}}=0$, відкіля $k=mg/v_{\text{уст}}$.

Підставимо знайдене значення k в отриману формулу для τ:

$$\tau=\frac{mv_{\text{уст}}}{mg}\ln\frac{mg}{mg-\frac{1}{2}\frac{mg}{v_{\text{уст}}}v_{\text{уст}}}.$$

Після скорочень і спрощень отримаємо

$$\tau=\frac{v_{\text{уст}}}{g}\ln 2.$$

Підставивши в цю формулу значення $v_{\text{уст}}$, g, ln2 і зробивши обчислення, отримаємо τ=5,66 с.

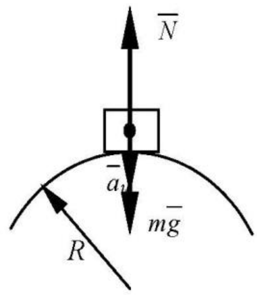
<u>Приклад №4.</u> Автомобіль з вантажем масою 5 т проходить по опуклому мосту зі швидкістю 21,6 км/год. З якою силою він тисне на середину моста, якщо радіус кривизни моста 50 м?

<u>Дано:</u>

m = 5 т = 5 10^3 кг
v = 21,6 км ч = 6 м/с
R = 50 м

P – ?

<u>Рішення:</u>



По 3-му закону Ньютона вага тіла $\vec{P}$ дорівнює силі реакції опори $\vec{N}$

$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Визначимо N із 2-го закону Ньютона в проекції на вертикальну вісь

$$mg - N = ma.$$

Врахуємо, що при рівномірному русі по колу прискорення є нормальним, направлено до центру кола і визначається за формулою

$$a = \frac{v^2}{R},$$

тоді

$$P = N = mg - m\frac{v^2}{R} = m(g - \frac{v^2}{R}).$$

Підставляючи чисельні дані, отримуємо

$$P = 5 \cdot (10 - \frac{6^2}{50}) = 46{,}4\ 10^3 (\text{Н}).$$

Спостерігаємо, що вага автомобіля зменшується порівняно з випадком руху тіла по горизонтальній площині.

Практичне заняття 4. Робота, потужність, енергія.

Довідковий матеріал

Робота, що здійснюється постійною силою,

$$A = F\Delta r\cos\alpha ,$$

де α – кут між напрямками векторів сили і переміщення.

Робота, що здійснюється змінною силою

$$A = \int_L F(r)\cos\alpha dr ,$$

де інтегрування ведеться уздовж траєкторії, що визначається L.

Середня потужність за інтервал часу Δt

$$\langle N\rangle = \frac{A}{\Delta t} .$$

Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt} \qquad \text{або} \qquad N = Fv\cos\alpha ,$$

де dA – работа, що здійснюється за інтервал часу dt.

Кінетична енергія матеріальної точки (тіла), що рухається поступально

$$W_\text{К} = \frac{mv^2}{2} \qquad \text{або} \qquad W_\text{К} = \frac{p^2}{2m} ,$$

Потенційна енергія тіла $W_\text{п}$ і сила, що діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням $\vec{F} = -\text{grad}W_\text{П}$,

або $\vec{F} = -(\vec{i}\,\frac{\partial W_\text{П}}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial W_\text{П}}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial W_\text{П}}{\partial z})$, $F = -\frac{\partial W_\text{П}}{\partial r}$.

Потенційна енергія пружно деформованого тіла (стислій або розтягнутої пружини)

$$W_\text{П} = \frac{kx^2}{2} .$$

Потенційна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (або тел) масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані r один від одного

$$W_\text{П} = -G\frac{m_1 m_2}{r} .$$

Потенційна енергія тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння,

$$W_\text{П} = mgh ,$$

де h– висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий рівень для відліку потенційної енергії

Приклад №1. Яку роботу потрібно зробити, щоб підняти вантаж масою 30 кг на висоту 10 м з прискоренням 0,5 м/с^2?

Дано:	Рішення:
m = 30 кг h = 10 м a =0,5 м/с^2	Робота постійної сили, спрямованої уздовж переміщення, дорівнює $A = F\Delta S = Fh.$
***A* – ?**	

По ІІ закону Ньютона в проекції на вертикальну вісь:

$$F - mg = ma,$$

відкіля

$$F = ma + mg.$$

Формула для роботи приймає вигляд:

$$A = m(a+g)h.$$

Обчислення:

$$A = 30(0,5+9,8)\cdot 10 = 3090\,(\text{Дж})$$

Приклад №2. Матеріальна точка масою m=2 кг рухалась під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі OX відповідно до рівняння $x=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, де B = – 2 м/с, C = 1 м/с^2, D = – 0,2 м/с^3. Знайти потужність N, під дією сили в момент часу t_1=2 с и t_2=5 с.

Дано:	Рішення:
m=2 кг $x=A+Bt+Ct^2+Dt^3$ B = – 2 м/с C=1 м/с^2 D= – 0,2 м/с^3 t_1=2 с t_2=5 с	Для визначення потужності скористаємося формулою $N=\vec{F}\cdot\vec{v}.$ Знайдемо миттєву швидкість в довільний момент часу, продиференцировавши координату x за часом: $v=\dfrac{dx}{dt}=B+2Ct+3Dt^2.$
N_1 – ? N_2 – ?	

Миттєве прискорення в довільний момент часу знайдемо, взявши похідну від швидкості v за часом:

$$a=\frac{dv}{dt}=2C+6Dt$$

Силу визначимо по другому закону Ньютона

$$F=ma=m(2C+6Dt).$$

Таким чином, отримаємо вираз для потужності у вигляді:

$$N=m(2C+6Dt)(B+2Ct+3Dt^2).$$

Чисельно для моменту t_1 = 2с:

$$N_1=2(2\cdot 1-6\cdot 0,2\cdot 2)(-2+2\cdot 1\cdot 2-3\cdot 0,2\cdot 2^2)=0,32(\text{Вт}),$$

для моменту t_2 = 5с:

$$N_2=2(2\cdot 1-6\cdot 0,2\cdot 5)(-2+2\cdot 1\cdot 5-3\cdot 0,2\cdot 5^2)=56(\text{Вт}).$$

<u>Приклад №3.</u> Кінетична енергія тіла, кинутого вертикально вгору, в момент кидання дорівнює 200 Дж. Визначити, до якої висоти від поверхні землі може піднятися тіло, якщо його маса дорівнює 800 м.

Дано:	Рішення:
$W_{К1}$= 200 Дж m = 800 г=0,8 кг h_1 = 0	По теоремі о кінетичній енергії $A=\Delta W=W_{К2}-W_{К1}$,
h_2 – ?	де робота проти сили тяжіння $A=mg(h_2-h_1)$.

В максимальній точці підйому v_2 = 0, $W_{К2}$ = 0, відкіля

$$W_{К1}=mgh_2,$$

Таким чином, максимальна висота підйому тіла

$$h_2=\frac{W_{К1}}{mg}.$$

Чисельно:

$$h_2=\frac{200}{0,8\cdot 9,8}\approx 25\,(\text{м}).$$

Приклад №4. Куля масою 9 г вилітає з гвинтівки зі швидкістю v = 650 м/с. На відстані 400 м від місця пострілу швидкість кулі стає рівною v = 390 м/с. Яку частину від своєї початкової кінетичної енергії втратила куля? Знайдіть роботу сил опору.

Дано:	Рішення:
m = 9 г = $9\cdot10^{-3}$ кг v_0 = 650 м/с S = 400 м v = 390 м/с	По теоремі о кінетичній енергії $A_с = \Delta W_К = W_К - W_{К0} = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{mv_0^{\,2}}{2}$.
$\dfrac{\Delta W_К}{W_{К0}} - ?\ A_с - ?$	Визначимо шукане відношення $\dfrac{\lvert\Delta W_К\rvert}{W_{К0}} = \dfrac{\lvert mv_0^2 - mv^2\rvert}{mv_0^2} = 1 - \dfrac{v^2}{v_0^{\,2}}.$

Чисельно

$$\frac{\Delta W_К}{W_{К0}} = 1 - \frac{390^2}{650^2} = 0,64\ .$$

Робота сил опору

$$A_с = \frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = \frac{9\cdot10^{-3}}{2}\left(390^2 - 650^2\right) = -1220\left(\text{Дж}\right).$$

Пример №5. У циліндричної бочці знаходиться 200 л води. Висота стовпа води в бочці 1 м. Знайдіть зміну потенційної енергії води після її витікання: а) на поверхню Землі; б) на поверхню Місяця.

Дано:	Рішення:
V = 200 л = 0,2 м^3 H = 1 м а) $g_З$ = 9,8 м/с^2 б) $g_Л$ = 1,6 м/с^2 ρ = 10^3 кг/м^3	Зміна потенційної енергії $\Delta W_П = W_{П2} - W_{П1}$ дорівнює роботе сили тяжіння, що береться з протилежним знаком $A = -mgS$, де S в даному випадку – зміна положення центру мас води у бочці.
$\Delta W_П - ?$	

Завдяки однорідності тіла $S = 0,5h$. Ураховуючи, що $m = \rho V$, одержимо

$$\Delta W_П = -0,5\rho Vgh.$$

Підставляючи чисельні дані, знайдемо

а) $\Delta W_П$ = – 980 Дж, б) $\Delta W_П$ = – 160 Дж.

Практичне заняття 5. Динаміка обертального руху твердого тіла

Довідковий матеріал

Момент сили $\vec{F}$ **,** що діє на тіло:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right].$$

Момент інерції відносно осі обертання:

а) матеріальної точки

$$I = mr^2,$$

де m – маса точки; r – її відстань від осі обертання;

б) суцільного твердого тіла

$$I = \int r^2 dm.$$

Теорема Штейнера. Момент інерції тіла відносно довільної осі:

$$I = I_0 + ma^2,$$

де I_0 – момент інерції тіла відносно осі, що проходить скрізь центр тяжіння тіла паралельно заданої осі; a – відстань між осями; m – маса тіла.

Момент імпульсу тіла, що обертається відносно довільної осі:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{або} \quad \vec{L} = \left[\vec{r}\vec{p}\right].$$

Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі:

$$\vec{M}dt = d\left(I\vec{\omega}\right).$$

При постійному моменту інерції:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

де ε – кутове прискорення.

Робота постійного моменту сили *M,* що діє на тіло, яке обертається:

$$A = M\varphi,$$

де φ – кут повороту тіла.

Миттєва потужність тіла при обертанні:

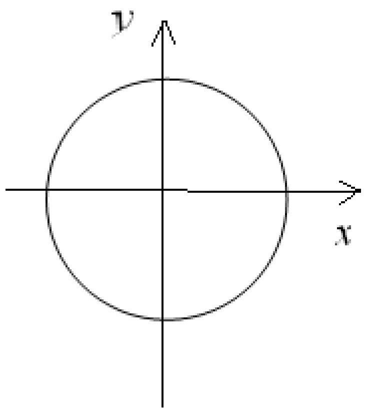
$$N = M\omega.$$

Кінетична енергія тіла, що обертається:

$$W_K = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Приклад №1. Визначте момент інерції I_0 кільця масою m = 50 г і радіусом R = 10 см щодо осі, яка лежить в площині кільця і дотичній до нього.

Дано:	СІ	Рішення:
m = 50 г	0,05 кг	
R = 10 см	0,1 м	
$I_0 - ?$		



Моменти інерції відносно осей x, y, z, що проходять через центр мас кільця пов'язані співвідношенням $I_x + I_y = I_z$ (вісь z перпендикулярна площині кільця).

Тоді в силу симетрії:

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2}, \text{ де } I_z = mR^2 = I_c.$$

По теоремі Штейнера момент інерції відносно вісі, що проходить скрізь точку 0, дорівнює:

$$I_0 = I_{yc} + mR^2, \text{тобто}$$

$$I_0 = mR^2/2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Чисельно

$$I_0 = 0{,}05 \cdot 0{,}1^2 \cdot \frac{3}{2} = 7{,}5 \cdot 10^{-4} (\text{кг м}^2).$$

Приклад №2. Вал масою m = 100 кг і радіусом R = 5 см обертався з частотою n = 8 с$^{-1}$. До циліндричної поверхні вала притиснули гальмівну колодку з силою F = 40 Н, під дією якої вал зупинився через t = 10 с. Визначити коефіцієнт тертя μ.

Дано:	СІ	Рішення:
m=100 кг R=5 см n = 8с$^{-1}$ F=40 Н t = 10 с μ – ?	 0,05м	Кутова швидкість обертання валу $\omega = 2\pi n$. Через час t кутова швидкість стала дорівнює нулю, і кутове прискорення вала набуде вигляду $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}$. (1)

Сила тертя, яка діє на вал,

$$F_{\text{тр}} = \mu F .$$

Момент цієї сили

$$M = \mu FR$$

повідомляє валу кутове прискорення. Відповідно до основного закону динаміки обертального руху маємо

$$M = I\varepsilon ,$$

де I – момент інерції вала, $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Тоді маємо

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{\mu FR}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2\mu FR}{mR^2} . \quad (2)$$

Прирівнявши праві частини (1) і (2), отримаємо:

$$\frac{2\pi n}{t} = \frac{2\mu FR}{mR^2} ,$$

відкіля коефіцієнт тертя

$$\mu = \frac{\pi nmR}{Ft} .$$

Обчислення

$$\mu = \frac{3{,}14 \cdot 8 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{40 \cdot 10} = 0{,}314.$$

Приклад №3. Маховик обертається за законом, вираженого рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де A = 2 рад, B = 32 рад/с, C = – 4 рад/с^2. Знайти середню потужність <N>, що розвивається силами, що діють на маховик при його обертанні до зупинки, якщо його момент інерції I = 100 кг·м^2.

Дано:	СІ	Рішення:
$\varphi = A + Bt + Ct^2$ A = 2 рад B = 32 рад/с C = –4 рад/с^2 $\omega = 0$ I = 100 кгм^2		
$\langle N \rangle - ?$		

Середня потужність при обертальному русі

$$\langle N \rangle = M \langle \omega \rangle, \tag{1}$$

де середня кутова швидкість

$$\langle \omega \rangle = \frac{\omega_0 + \omega_к}{2}. \tag{2}$$

Знайдемо вираз для кутової швидкості:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct, \tag{3}$$

тоді $\omega_0 = B;\ \omega_к = 0$ (за умовою).

Момент сили визначимо з ІІ закону Ньютона для обертального руху:

$$M = I\varepsilon, \tag{4}$$

де $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C.$ (5)

З урахуванням (2) – (5) знайдемо вираз для середньої потужності:

$$\langle N \rangle = I\varepsilon \frac{\omega_0 + \omega_k}{2} = I \cdot 2C \cdot \frac{B}{2} = ICB.$$

Чисельно

$$\langle N \rangle = 100 \cdot 4 \cdot 32 = 12800\ (Дж)$$

або $\langle N \rangle = 12{,}8$ кДж.

Приклад №4. Обруч і суцільний циліндр, що мають однакову масу m = 2 кг, котяться без ковзання з однаковою швидкістю v = 5 м / с. Знайти кінетичні енергії $W_{К1}$ і $W_{К2}$ цих тіл.

Дано:	СІ	Рішення:
$m_1 = m_1 = m = 2$ кг $v = 5$ м/с		Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання, $$W_К = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$ де $v_C = v$ – швидкість центру мас тіла, $\frac{I\omega^2}{2}$ – кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр мас.
$W_{К1}$ – ? $W_{К2}$ – ?		

Для даної задачі використовуємо формули для моментів інерції обруча і суцільного циліндра в вигляді.

$$I_1 = mR_1^2,\ I_2 = \frac{1}{2}mR_2^2,$$

тоді

$$W_{К1} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2},$$

$$W_{К2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}.$$

Врахуємо також, що кутова швидкість і лінійна пов'язані співвідношенням, $\omega = v / R,$ тоді

$$W_{К1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR_1^2 v^2}{2R_1^2} = mv^2,$$

$$W_{К2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mR_2^2 v^2}{2R_2^2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Чисельно:

$$W_{K1} = 2 \cdot 5^2 = 50(\text{Дж}),\, W_{K2} = \frac{3}{4} 2 \cdot 5^2 = 37{,}5(\text{Дж}).$$

Практичне заняття 6. Закони збереження

Довідковий матеріал

1. **Закон збереження імпульсу**

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const},$$

де N – число матеріальних точок (або тіл), що входять в систему.

2. **Закон збереження енергії**

$$W_\text{К} + W_\text{П} = \text{const}.$$

Швидкості тіл після абсолютно не пружного удару

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

швидкості тіл після абсолютно пружного удару

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2},$$

де m_1 и m_2 – маси тіл; v_1 и v_2 – їх швидкості до удару.

3. Закон збереження моменту імпульсу

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const},$$

де $\vec{L}_i$ – момент імпульсу i-го тіла, що входить в систему.

Закон збереження моменту імпульсу для двох взаємодіючих тіл

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = I_1'\omega_1' + I_2'\omega_2',$$

де $I_1, I_2, \omega_1, \omega_2$ – моменти інерції і кутові швидкості тіл до взаємодії; $I_1', I_2', \omega_1', \omega_2'$ – ті ж величини після взаємодії.

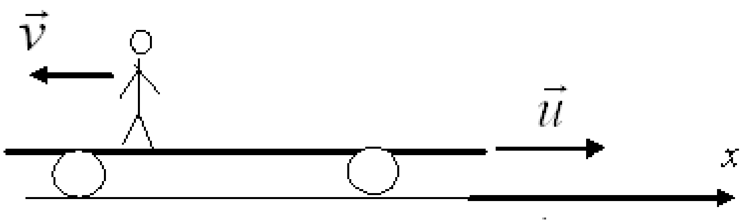
Закон збереження моменту імпульсу для одного тіла, момент інерції якого змінюється,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

де I_1 и I_2 – початковий і кінцевий моменти інерції;
ω_1 і ω_2 – початкова і кінцева кутові швидкості тіла.

Приклад №1. На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки, забезпеченою легкими колесами. На одному кінці дошки стоїть людина. Маса людини M = 60 кг, маса дошки m = 20 кг. З якою швидкістю і (щодо підлоги) буде рухатися візок, якщо людина піде уздовж дошки зі швидкістю v (відносно дошки)? Масою коліс знехтувати. Тертя у втулках не враховувати.

Дано:	СІ	Рішення:
M = 60 кг M = 20 кг v = 1 м/с u – ?		До початку руху людини сумарний імпульс системи дорівнює нулю. Після початку руху людини відносно дошки зі швидкістю v візок буде рухатися зі швидкістю u щодо підлоги, спрямованій в протилежну сторону.



Результуюча швидкість людини щодо підлоги дорівнює $v - u$, і закон збереження імпульсу в проекціях на вісь x набуває вигляду

$$0 = mu - M\left(v - u\right).$$

Розкриваючи дужки, отримуємо

$$mu - Mv + Mu = 0,$$

відкіля

$$u = \frac{Mv}{M + m}.$$

Підставимо чисельні значення

$$u = \frac{60 \cdot 1}{60+20} = 0,75 (\text{м/с}).$$

<u>Приклад №2.</u> Два непружних кулі масами m_1 = 2 кг і m_2 = 3 кг рухаються зі швидкостями відповідно v_1 = 8 м/с і v_1 = 4 м/с. Визначити збільшення ΔU внутрішньої енергії куль при їх зіткненні в двох випадках: 1) менша куля наганяє більшу; 2) кулі рухаються назустріч один одному.

<u>Дано:</u>

m_1 = 2кг
m_2 = 3кг
v_1 = 8 м/с
v_2 = 4 м/с

ΔU_1 – ? ΔU_2 –?

<u>Рішення:</u>

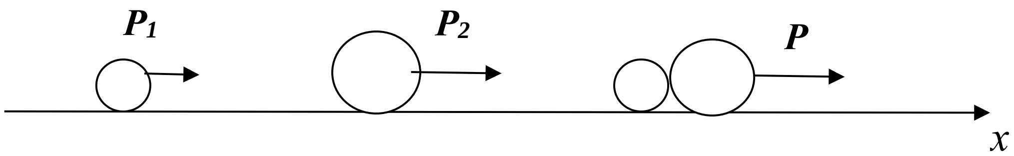
Для не пружного удару використовуємо закон збереження імпульсу

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v} \qquad (1)$$

і закон збереження енергії

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} + \Delta U . \qquad (2)$$

1). При русі куль в одному напрямку x:



З 1-го рівняння знайдемо швидкість після взаємодії

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2}.$$

і підставляємо в (2). Знайдемо зміну кінетичної енергії, яка пішла на збільшення внутрішньої енергії системи ΔU_1:

$$\Delta U_1 = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)}{2}\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)^2}.$$

Після перетворень:

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2}\left(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - \frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)} \right).$$

Чисельно:

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2}\left(2\cdot 8^2 + 3\cdot 4^2 - \frac{\left(2\cdot 8 + 3\cdot 4\right)^2}{\left(2+3\right)} \right) = 9,6(\text{Дж})$$

2). При русі куль назустріч одна одній.

Змінюючи знак при швидкості другого тіла на протилежний, одержимо:

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{\left(m_1 v_1 - m_2 v_2\right)^2}{\left(m_1 + m_2\right)} \right).$$

Чисельно:

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2}\left(2\cdot 8^2 + 3\cdot 4^2 - \frac{\left(2\cdot 8 - 3\cdot 4\right)^2}{\left(2+3\right)} \right) = 86,4(\text{Дж}).$$

Бачимо, що в другому випадку втрата кінетичної енергії на внутрішню енергію значно більша, ніж у попередньому.

Приклад №3. На рейках стоїть платформа, на якій закріплено знаряддя без противідкатного пристрою так, що стовбур його розташований в горизонтальному положенні. Із знаряддя роблять постріл уздовж залізничної колії. Маса m_1 снаряда дорівнює 10 кг і його швидкість u_1 = 1 км/с. На яку відстань l відкотиться платформа після пострілу, якщо коефіцієнт опору f = 0,002, $M_{пл}$ = 20 т.

Дано:	СІ
m_1 = 10 кг	
u_1 = 1 км/с	10^3м/с
f = 0,002	
$M_{пл}$ = 20 т	2 10^4 кг
l – ?	

Рішення:

Згідно із законом збереження енергії кінетична енергія платформи, отримана при пострілі, буде дорівнює роботі з подолання сили опору

$$W_к = A = F_{сопр}\cdot l\text{, де } F_{сопр} = f\cdot M_{пл}\cdot g.$$

Кінетичну енергію платформи після пострілу визначимо, використовуючи закон збереження імпульсу:

$$0 = m_1 u_1 - M_{\text{пл}} u \, ,$$

відкіля швидкість платформи:

$$u = \frac{m_1 u_1}{M_{\text{пл}}} \, .$$

і її кінетична енергія

$$W_{\text{к}} = \frac{M_{\text{пл}} u^2}{2} = \frac{M_{\text{пл}}}{2} \left(\frac{m_1 u_1}{M_{\text{пл}}} \right)^2 = \frac{(m_1 u_1)^2}{2 M_{\text{пл}}} \, ,$$

таким чином:

$$l = \frac{W_{\text{к}}}{F_{\text{сопр}}} = \frac{\dfrac{(m_1 u_1)^2}{2 M_{\text{пл}}}}{f \cdot M_{\text{пл}} \cdot g} = \frac{(m_1 u_1)^2}{2 M_{\text{пл}}{}^2 \cdot f \cdot g} \, .$$

Підставимо чисельні значення:

$$l = \frac{(10 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (2 \cdot 10^4)^2 \cdot 0{,}002 \cdot 10} = 6{,}25 (\text{м}).$$

<u>Приклад №4.</u> Платформа у вигляді диска радіусом R = 1,5 м і масою m_1 = 180 кг обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою n = 10 хв$^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина масою m_2 = 60 кг. Яку лінійну швидкість відносно підлоги приміщення буде мати людина, якщо вона перейде на край платформи?

Дано:	СІ
R = 1,5 м	
m_1 = 180 кг	
n = 10 хв$^{-1}$	600 с$^{-1}$
m_2 = 60 кг	
v – ?	

Рішення:

По закону збереження моменту імпульсу

$$\left(I_1 + I_2 \right) \omega = \left(I_1 + I_2' \right) \omega' \, ,$$

де I_1 – момент інерції платформи;

I_2 – момент інерції людини, що стоїть в центрі платформи;

ω – кутова швидкість платформи з людиною, що стоїть в центрі платформи;

I_2' – момент інерції людини, що стоїть на краю платформи;

ω' – кутова швидкість платформи з людиною, що стоїть на краю платформи.

Лінійна швидкість людини, що стоїть на краю платформи, пов'язана з кутовою швидкістю співвідношенням

$$v = \omega' R.$$

Визначивши звідси ω' і підставивши отриманий вираз в формулу закону збереження моменту імпульсу, матимемо:

$$v = (I_1+I_2)\omega R/(I_1+I'_2).$$

Момент інерції платформи розраховуємо як для диска; отже,

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2.$$

Момент інерції людини розраховуємо як для матеріальної точки, тому

$$I_2=0,\ I'_2=m_2R^2.$$

Кутова швидкість платформи до переходу людини дорівнює $\omega=2\pi n$.

Замінивши у формулі швидкості величини I_1, I_2, I'_2. та ω їх виразами, одержимо

$$v = \frac{\frac{1}{2} m_1 R^2}{\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2} 2\pi n R = \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} 2\pi n R.$$

Зробивши підстановку значень m_1, m_2, n, R и π, знайдемо лінійну швидкість людини:

$$v = \frac{180}{180 + 2 \cdot 60} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \frac{10}{60} 1{,}5 = 0{,}94 \text{ (м/с)}.$$

Практичне заняття 7. Механічні коливання

Довідковий матеріал

Рівняння гармонійних коливань:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

де x – зміщення точки від положення рівноваги; t– час;

A, ω, φ – відповідно амплітуда, кутова частота, початкова фаза;

$(\omega t + \varphi)$ – фаза коливань в момент часу t.

Циклічна частота коливань:

$$\omega = 2\pi\nu \qquad \text{або} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

де v и T – частота і період коливань.

Швидкість і прискорення точки що коливається

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \qquad a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

Період коливань тіла, яке підвішене на пружині (пружинний маятник)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

де m – маса тіла; k – жорсткість пружини.

Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де l – довжина маятника; g– прискорення вільного падіння.

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

де I – момент інерції тіла, що коливається щодо осі коливань;

a – відстань центру мас маятника від осі коливань.

Повна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання,

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

<u>Приклад №1</u>. Матеріальна точка масою m = 5 г виконує гармонійні коливання з частотою ν = 0,5 Гц. Амплітуда коливань A = 3 см. Визначити: 1) максимальну швидкість точки, 2) максимальну силу F_{max}, що діє на точку; 3) повну енергію W точки.

Дано:	СІ	Рішення:
A =3 см m=5 г ν= 0,5Гц	0,03 м 5 10^{-3} кг	Складемо рівняння гармонійних коливань $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, де $\omega = 2\pi\nu$, тобто для даної задачі $x = 0,03\cos(\pi t + \varphi)$.
v_{max} – ? F_{max} – ? W – ?		

Знайдемо вираз для швидкості:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.03\pi\sin(\pi t + \varphi).$$

Максимальна швидкість точки дорівнюватиме

$$v_{max} = 0,03\pi = 0,0952 \text{ м/с}.$$

Для визначення максимальної сили знайдемо спочатку вираз для прискорення точки:

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.03\pi^2\cos(\pi t + \varphi),$$

тоді

$$F_{max} = ma_{max} = m\cdot 0,03\pi^2 = 5\ 10^{-3}\cdot 0,03\cdot 3,14^2 = 1,510^{-3} (\text{Н}).$$

Повну енергію точки обчислимо за формулою:

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{mA^2(2\pi\nu)^2}{2} = 2mA^2(\pi\nu)^2.$$

Чисельно:

$$W = 2\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot 0,03^2\cdot(3,14\cdot 0,5)^2 = 22,1\cdot 10^{-6}(\text{Дж}).$$

Приклад №2. Вантаж масою 1 кг, підвішений до пружини з жорсткістю 100 Н/м, робить коливання з амплітудою 10 см. Напишіть формулу $F_x(t)$, яка має залежність сили пружності від часу. Знайдіть найбільше значення сили пружності і значення сили пружності через 1/6 періоду.

Дано:	СІ	Рішення:
A = 10 см m=5 кг k = 100 Н/м $t_1 = T/6$	0,01 м	Для знаходження залежності $Fx(t)$ скористаємося законом Гука: $$F_x = -kx.$$ Враховуючи, що $$x = A\sin\omega t \text{ і } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$ получимо
$F_x(t)$ – ? F_{max} – ? $F_x(t_1)$ – ?		

$$F_x = -kA\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t. \qquad (1)$$

Тоді

$$F_x = -100\cdot 0,1\sin\sqrt{\frac{100}{1}}t$$

або

$$F_x = -10\sin 10t.$$

Максимальне значення сили буде в тому випадку, якщо $\sin 10t$ буде максимальним, тобто рівним одиниці, отже,

$$F_{max} = 10\text{ Н}.$$

Знайдемо $F_x(t_1)$ при $t_1 = T/6$. Для цього підставимо $t_1 = T/6$ в рівняння (1), ураховуючи, що $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

В результаті отримаємо:

$$F_x = -10\sin\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6} = -10\sin\frac{\pi}{3} = -5\sqrt{3}(\text{Н}).$$

<u>Приклад №3.</u> Людина масою m = 80 кг гойдається на гойдалках. Амплітуда його коливання A = 1 м. За Δt = 1 хв він здійснює N = 15 коливань. Знайдіть кінетичну енергію при фазі $\Phi = \pi/3$ рад.

Дано:	СІ	Рішення:
A = 1м m = 80кг $\Phi = \pi/3$ рад Δt = 1 хв N = 15	 60 с	Для знаходження кінетичної енергії при фазі Ф = π/3 рад скористаємося формулою $$W_к = \frac{mA^2v^2}{2}.$$
$W_к$ – ?		

Враховуючи, що при $x = A\sin\omega t$ швидкість визначається за формулою

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t,$$

де $\Phi = \omega t$, получимо:

$$W_к = \frac{mA^2\omega^2\cos^2\Phi}{2}.$$

Для знаходження циклічної частоти скористаємося формулами:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ і } T = \frac{\Delta t}{N},$$

тоді $\omega = \dfrac{2\pi N}{\Delta t}$ і отже

$$W_к = \frac{2\pi^2 N^2 mA^2\cos^2\Phi}{\Delta t^2}.$$

Підставимо чисельні дані

$$W_к = \frac{2\cdot 3{,}14^2\cdot 15^2\cdot 80\cdot 1^2\cdot\cos^2(\pi/3)}{60^2} = 25{,}6(\text{Дж}).$$

Приклад №4. Математичний маятник довжиною l_1 = 40 см і фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня довжиною l_2 = 60 см синхронно коливаються біля однієї і тієї ж горизонтальній осі. Визначити відстань a центру мас стержня від осі коливань.

Дано:	СІ
l_1=40 см	0,4м
l_2=60 см	0,6 м
a – ?	

Рішення:

Маятники коливаються синхронно, тобто

$$T_1 = T_2,$$

де T_1 – період коливань математичного маятника:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \tag{1}$$

T_2 – період коливань фізичного маятника:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}, \tag{2}$$

де I – момент інерції фізичного маятника відносно вісі коливань;
m – маса.

По теоремі Штейнера $I = I_0 + ma^2$, де I_0 – момент інерції відносно вісі, що проходить через центр тяжіння, $I_0 = \frac{1}{12} m l_2^2$, тоді

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12} m l_2^2 + ma^2}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2^2 + 12a^2}{12ga}}. \tag{3}$$

Приравнюючи правіе частини (1) и (3), одержимо:

$$2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2^2 + 12a^2}{12ga}}.$$

Після перетворень отримуємо рівняння

$$12a^2 - 12 l_1 a + l_2^2 = 0,$$

рішення якого після підстановки чисельних даних має вигляд:

$$a = \frac{6 \cdot 0,4 \pm \sqrt{36 \cdot 0,4^2 - 12 \cdot 0,6^2}}{12} = 0,2 \pm 0,1 \ (\text{м}).$$

Одержимо два рішення: $a_1 = 0,1$ м и $a_2 = 0,3$ м.

Практичне заняття 8. Згасаючі і вимушені коливання. Механічні хвилі

Довідковий матеріал

1. Рівняння згасаючих коливань

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi),$$

де $A(t)$ – амплітуда згасаючих коливань в момент часу t;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, циклічна частота, де δ – коефіцієнт згасання.

Залежність амплітуди затухаючих коливань від часу

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t},$$

де A_0 – амплітуда коливань в момент часу t=0.

Логарифмічний декремент згасання

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

2. Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

де F_0 – амплітудне значення сили, що вимушує, ω – її частота,

ω_0 – власна частота коливальної системи.

Резонансна частота і резонансна амплітуда вимушених коливань

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \ \text{ і } \ A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

3. Рівняння плоскої біжучої хвилі

$$s(x,t) = A\cos(\omega t - kx).$$

Довжина хвилі і хвильове число

$$\lambda = vT,\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}.$$

<u>Приклад №1</u>. Амплітуда згасаючих коливань маятника за час t_1 = 5 хв зменшилася в два рази. За якийсь час t_2, рахуючи від початкового моменту, амплітуда зменшиться у вісім разів?

Дано:	СІ	Рішення:
t_1 = 5 хв	300 с	Амплітуда згасаючих коливань змінюється з часом за законом
$A_0/ A_1 = 2$		$$A(t) = A_0 e^{-\delta t},$$
$A_0 / A_2 = 8$		
t_2 – ?		де δ – коефіцієнт згасання,

відкіля

$$A_0 / A(t) = e^{\delta t}.$$

Прологарифмуємо:

$$\ln(A_0 / A(t)) = \delta t.$$

Для моментів часу t_1 и t_2 маємо

$$\ln(A_0 / A_1) = \delta t_1, \qquad (1)$$

$$\ln(A_0 / A_2) = \delta t_2. \qquad (2)$$

Розділивши (2) на (1), одержимо:

$$\frac{\ln(A_0 / A_2)}{\ln(A_0 / A_1)} = \frac{t_2}{t_1},$$

відкіля маємо:

$$t_2 = \frac{\ln(A_0 / A_2)}{\ln(A_0 / A_1)} t_1.$$

Чисельно:

$$t_2 = \frac{\ln 8}{\ln 2} \cdot 300 = \frac{3 \cdot \ln 2}{\ln 2} \cdot 300 = 900(\text{с}) = 15(\text{хв}).$$

Приклад №2. Амплітуда коливань маятника довжиною l = 1 м за час t = 10 хв зменшилася в два рази. Визначити логарифмічний декремент коливань θ.

Дано:	СІ	Рішення:
l = 1 м		Логарифмічний декремент загасання θ
t = 10 хв	600с	визначимо із співвідношення
A_0 / A = 2		
θ – ?		

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T,$$

де δ – коефіцієнт згасання, T – період коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Амплітуда згасаючих коливань змінюється з часом за законом

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t},$$

відкіля:

$$\delta = \frac{\ln(A_0 / A)}{t}$$

І тоді одержимо

$$\theta = \frac{2\pi}{t}\ln\frac{A_0}{A}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Чисельний підрахунок:

$$\theta = \frac{2\cdot 3{,}14}{600}\ln 2\sqrt{\frac{1}{9{,}8}} = 2{,}3\cdot 10^{-2}.$$

Приклад №3. Підвіска автомобіля робить коливання при наявності амортизатора (демпфуючий пристрій) за законом: $x(t)=A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t)$ з амплітудою A_0 = 0,01 м, власною частотою ν_0 = 100 Гц и коефіцієнтом згасання δ = 0,5с$^{-1}$. Записати рівняння руху підвіски, яке здійснюється під дією сили, що змушує $F(t)=10\sin(2\pi\cdot 50t)$. Знайти амплітуду вимушених коливань підвіски, визначити резонансну частоту коливань, обчислити амплітуду при резонансі. Маса підвіски складає m= 5кг.

Дано:	СІ	Рішення:
A_0 = 0,01 м ν_0 = 100 Гц δ = 0,5 с$^{-1}$ m = 5 кг $F(t)=10\sin(2\pi\cdot 50t)$		Рівняння руху підвіски, що здійснюється під дією сили, що вимушує, має вигляд
A – ? $\nu_{рез}$ – ? $A_{рез}$ – ?		

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi),$$

де

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}.$$

Для визначення резонансних значень амплітуди і частоти скористаємося формулами:

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2},$$

$$A_{рез}=\frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}},$$

де F_0 = 10 Н, $\omega_0=2\pi\nu_0, \omega=2\pi\cdot 50$ с$^{-1}$.

Знайдемо чисельні значення шуканих величин

$$A=\frac{10}{5\sqrt{\left((2\pi\cdot 100)^2-(2\pi\cdot 50)^2\right)^2+4\cdot 0,5^2(2\pi\cdot 50)^2}}\approx 0,01\cdot 10^{-3}(\text{м}).$$

$$\nu_{рез}=\frac{\omega_{рез}}{2\pi}=\sqrt{(2\pi\cdot 100)^2-2\cdot 0,5^2}\,/\,2\pi\approx 100(\text{Гц}).$$

$$A_{рез}=\frac{10}{2\cdot 0,5\cdot 5\sqrt{(2\pi\cdot 100)^2-0,5^2}}\approx 0,003(\text{м}).$$

Приклад №4. Визначити, на скільки резонансна частота відрізняється від частоти $\nu_0 = 1$ кГц власних коливань системи, що характеризується коефіцієнтом загасання $\delta = 400$ с$^{-1}$.

Дано:	СІ	Рішення:
$\nu_0 = 1$ кГц	10^3 Гц	Резонансна частота системи визначається у вигляді $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$,
$\delta = 400$ с$^{-1}$		де $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ – власна циклічна частота системи.
$\Delta\nu$ – ?		

Маємо

$$2\pi\nu_{рез} = \sqrt{4\pi^2\nu_0^2 - 2\delta^2}$$

або

$$\nu_{рез} = \sqrt{\nu_0^2 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}}\,.$$

Шукана різниця частот буде мати вигляд

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu_{рез} = \nu_0 - \sqrt{\nu_0^2 - \frac{\delta^2}{2\pi^2}} = \nu_0\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{2\pi^2\nu_0^2}}\right).$$

Чисельно:

$$\Delta\nu = 10^3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{400^2}{2\cdot 3{,}14^2\cdot 10^6}}\right) = 1(\text{Гц})$$

Задачі для самостійного рішення

Практичне заняття 1.

1. Три чверті свого шляху автомобіль пройшов зі швидкістю $v_1 = 60$ км / год, решту шляху – зі швидкістю $v_2 = 80$ км / год. Яка середня шляхова швидкість <v> автомобіля?

2. Три чверті свого часу автомобіль пройшов зі швидкістю $v_1 = 60$ км/год, решту шляху – зі швидкістю $v_2 = 80$ км / год. Яка середня шляхова швидкість <v> автомобіля?

3. Рух двох матеріальних точок виражаються рівняннями$x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$, $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $A_1 = 20$ м, $A_2 = 2$ м,

$B_1=B_2=2$ м/с, $C_1 = -4$ м/с^2, $C_2=0{,}5$ м/с^2. В який момент часу t швидкості цих точок будуть однаковими? Визначити швидкості v_1 і v_2 та прискорення a_1 і a_2 точок в цей момент.

4. Дві матеріальні точки рухаються відповідно до рівнянь: $x_1=A_1t+B_1t^2+C_1t^3$, $x_2=A_2t+B_2t^2+C_2t^3$, де $A_1=4$ м/с,$B_1=8$ м/с^2, $C_1= -16$ м/с^3, $A_2=2$ м/с, $B_2= -4$ м/с^2, $C_2=1$м/с^3. В який момент часу t прискорення цих точок будуть однакові? Знайти швидкості v_1 і v_2 точок в цей момент.

5. Камінь кинули вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0=20$ м/с. Через якийсь час камінь буде знаходитися на висоті $h = 15$м? Знайти швидкість v каменю на цій висоті. Опором повітря знехтувати, прийняти $g=10$ м/с^2.

6. Точка рухається по прямій задано рівнянням $x=At+Bt^2$, де $A=2$ м/с, $B= -0{,}5$ м/с^2. Визначити середню шляхову швидкість $\langle v \rangle$ руху точки в інтервалі часу від $t_1=1$ с до $t_2=3$ с.

7. Рух точки в інтервалі часу від $R=4$ м задано рівнянням $S=A+Bt+Ct^2$, де $A=10$ м, $B=-2$ м/с, $C=1$ м/с^2. Знайти тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне a прискорення точки в момент часу $t=2$с.

8. По дузі кола радіусом $R = 10$ м рухається точка. В деякий момент часу нормальне прискорення точки $a_n = 4{,}9$ м / с2; в цей момент вектори повного і нормального прискорень утворюють кут $\varphi = 60$ °. Знайти швидкість v і тангенціальне прискорення точки.

<u>Практичне заняття 2.</u>

1 Трекова модель автомобіля обертається на прив'язі з частотою $\nu_0 = 50\,\text{Гц}$. Після припинення тяги модель, зробивши $N = 500$ обертів, зупинилась. Нехтуючи власними розмірами і масою моделі автомобіля, визначити її початкову частоту обертання – ω_0 і кінцевий кут повороту $-\varphi_k$, якщо вважати, що гальмування є рівносповільненим.

2. Колесо обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon = 2$ рад / с^2. Через час $t = 0{,}5$ с після початку руху повне прискорення колеса $a = 14{,}6$ см / с^2. Знайти радіус колеса.

3. Знайти кутову швидкість ω: а) добового обертання Землі; б) годинникової стрілки на годиннику; в) хвилинної стрілки на годиннику.

4. Знайти кутову ω і лінійну v швидкості штучного супутника Землі, що рухається по круговій орбіті з періодом обертання $T = 88$ хв. Відомо, що його орбіта розташована на відстані $h = 200$ км від поверхні Землі.

5. Знайти кутове прискорення ε колеса, якщо відомо, що через час $t = 1$ с після початку руху вектор повного прискорення а точки, що лежить на ободі, становить кут $\varphi = 60$ з вектором її лінійної скорості v.

6. Колесо радіусом $R = 5$ см обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу дається рівнянням $\varphi(t)=A+B\cdot t+C\cdot t^2+ D\cdot t^3$, де

D = 1 рад/с^3. Для точок, що лежать на ободі колеса знайти приріст модуля тангенціального прискорення Δa_τ за одиницю часу.

7. Знайти радіус R колеса, що обертається, якщо відомо, що лінійна швидкість точки, яка лежить на ободі v_1 в 2,5 рази більше лінійної швидкості v_2 точки, яка лежить на відстані r =5 см ближче до вісі колеса.

Практичне заняття 3.

1. Підвішене до динамометру тіло масою m = 2 кг піднімається вертикально вгору. Що покаже динамометр при підйомі з прискоренням a = 2 м/с^2; при рівномірному підйомі?

2. Похила площина, що утворює кут α = 25 ° з площиною горизонту, має довжину l = 2 м. Тіло, рухаючись рівно прискорено, зісковзнуло з цієї площини за час t = 2 с. Визначити коефіцієнти тертя μ тіла об площину.

3. Автоцистерна з гасом рухається з прискоренням a = 0,7 м / с2. Під яким кутом α до площини горизонту розташований рівень гасу в цистерні?

4. Автомобіль йде по заокругленню шосе, радіус R кривизни якого дорівнює 200 м. Коефіцієнт тертя μ коліс об покриття дороги дорівнює 0,1 (ожеледь). При якій швидкості v автомобіля почнеться його занос?

5. Два бруска масами m_1=l кг і m_2=4 кг, з’єднані шнуром, лежать на столі. З яким прискоренням a рухатимуться бруски, якщо до одного з них прикласти силу F = 10 Н, спрямовану горизонтально? Яка буде сила натягу T шнура, що з'єднує бруски, якщо сілу F = 10 Н докласти до першого бруска? до другого бруска? Тертям знехтувати.

6. Диск радіусом R = 40 см обертається навколо вертикальної осі. На краю диска лежить кубик. Беручи коефіцієнт тертя μ = 0,4, знайти частоту п обертання, при якій кубик зісковзне з диска.

7. Катер масою m = 2 т з двигуном потужністю N = 50 кВт розвиває максимальну швидкість $v_{\max}$ = 25 м / с. Визначити час τ, протягом якого катер після вимкнення двигуна втратить половину своєї швидкості. Прийняти, що сила опору руху катера змінюється пропорційно квадрату швидкості.

8. З вертольота, який нерухомо висить на деякій висоті над поверхнею Землі, скинутий вантаж масою m = 100 кг. Вважаючи, що сила опору повітря змінюється пропорційно швидкості, визначити, через який проміжок часу Δt прискорення a вантажу буде дорівнює половині прискорення вільного падіння. Коефіцієнт опору k = 10 кг / с.

Практичне заняття 4.

1. Яку роботу виконує двигун автомобіля масою 1,3 т при рушанні з

місця на перших 75 м шляху, якщо цю відстань автомобіль проходить за 10 с, а коефіцієнт опору двигуна дорівнює 0,05?

2. Підйомний кран приводиться в дію двигуном потужністю 10 кВт. Скільки часу буде потрібно для доставки на висоту 50 м вантажу масою 2 т, якщо ККД двигуна 75%?

3. Яку роботу треба зробити, щоб розтягнути пружину жорсткістю 40 кН / м на 0,5 см?

4. Імпульс тіла дорівнює 8 кг м / с, а кінетична енергія – 16 Дж. Знайти масу і швидкість тіла.

5. Ковзаняр масою 60 кг, що стоїть на льоду, ловить м'яч масою 0,5 кг, який летить горизонтально зі швидкістю 20 м / с. На яку відстань відкотиться людина з м'ячем по горизонтальній поверхні льоду, якщо коефіцієнт тертя 0,05?

6. Знайти потенційну і кінетичну енергію тіла масою 3 кг, падаючого вільно з висоти 5 м, на відстані 2 м від поверхні Землі.

7. Камінь кинули вертикально вгору зі швидкістю 10 м / с. На якій висоті кінетична енергія каменю буде дорівнює його потенційної енергії?

Практичне заняття 5.

1. Визначити момент інерції I матеріальної точки масою m = 0,3 кг відносно осі, віддаленої від точки на відстань r = 20 см.

2. Дві маленьких кульки масою m = 10 г кожен скріплені тонким невагомим стрижнем довжиною l = 20 см. Визначити момент інерції I системи щодо осі, перпендикулярної стрижню, яка проходить через центр мас.

3. Діаметр диска d = 20 см, маса m = 800 кг. Визначити момент інерції I діска щодо осі, що проходить через середину одного з радіусів перпендикулярно площині диска.

4. Через блок, який має форму диска, перекинутий шнур. До кінців шнура прив'язали важки масою m_1 = 100 г і m_1 = 110 г. З яким прискоренням a рухатимуться важки, якщо маса m блоку дорівнює 400 г? Тертя при обертанні блоку мізерно мало.

5. Маховик у вигляді диска масою m = 80 кг і радіусом R = 30 см знаходиться в стані спокою. Яку роботу A_1 потрібно зробити, щоб повідомити маховику частоту n = 10 $с^{-1}$? Яку роботу A_2 довелося б зробити, якби при тій же масі диск мав меншу товщину, але вдвічі більший радіус?

6. Маховик обертається за законом, який виражається рівнянням $\varphi=A+Bt+Ct^2$, де A = 2 рад, B = 16 рад/с, C= – 2 рад/$с^2$. Момент інерції I маховіка дорівнює 50 кг $м^2$. Знайти закони, за якими змінюються обертальний момент M і N. Чому дорівнює потужність в момент часу t = 3 с?

7. Куля масою m = 10 г летить зі швидкістю v = 800 м / с, обертаючись

близько поздовжньої осі з частотою n = 3000 с$^{-1}$. Беручи кулю за циліндр діаметром d = 8 мм, визначити повну кінетичну енергію $W_к$ кулі.

8. Визначити лінійну швидкість v центра кулі, що скотилася без ковзання з похилої площині висотою h = 1 м.

Практичне заняття 6.

1. Куля масою m_1, що рухається горизонтально з деякою швидкістю v_1, зіткнувся з нерухомим шаром масою m_2. Кулі абсолютно пружні, удар прямий. Яку частку своєї кінетичної енергії першу кулю передав другому?

2. Снаряд масою m = 10 кг мав швидкістю v = 200 м / с у верхній точці траєкторії. У цій точці він розірвався на дві частини. Менша масою m_1 = 3 кг отримала швидкість u_1 = 400 м / с в початковому напрямі. Знайти швидкість u_2 другої відразу після розриву.

3. Два вантажу масами m_1 = 10 кг і m_2 = 15 кг підвішені на нитках довжиною l = 2 м так, що вантажі стикаються між собою. Менший вантаж був відхилений на кут φ = 60 ° і відпущений. Визначити висоту h, на яку піднімуться обидва вантажу після удару. Удар вантажів вважати не пружним.

4. Молот масою m_1 = 200 кг падає на поковку, маса m_2, яка разом з ковадлом дорівнює 2500 кг. Швидкість v_1 молота в момент удару дорівнює 2 м/с. Знайти: 1) кінетичну енергію $W_{К1}$ молота в момент удару; 2) енергію $W_{К2}$, передану фундаменту; 3) енергію $W_к$, витрачену на деформацію поковки; 4) коефіцієнт корисної дії η (ККД) удару молота. Удар молота по поковці розглядати як не пружний.

5. Визначити лінійну швидкість v центру кулі, що скотилася без ковзання з похилій площині висотою $h = 1$ м.

6. Олівець довжиною l = 15 см, поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову ω і лінійну v швидкості буде мати в кінці падіння:

1) середина олівця? 2) верхній його кінець? Вважати, що тертя настільки велике, що нижній кінець олівця не прослизає.

7. Платформа, що має форму диска, може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина масою m_1 = 60 кг. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде уздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться у вихідну точку на платформі? Маса m_2 платформи дорівнює 240 кг. Момент інерції I людини розраховувати як для матеріальної точки.

Практичне заняття 7

1. Підвіска автомобіля робить вільні коливання в відсутності демпфірування за законом: $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ з амплітудою A = 0,01 м,

частотою ν = 100 Гц. Знайти прискорення руху підвіски і діючу силу, якщо її маса становить m = 5 кг.

2. Точка виконує гармонічні коливання. найбільше зміщення x_{max} точки рівно 10 см, найбільша швидкість v_{max}=20 см/с. Знайти кутову частоту ω коливань і максимальне прискорення точки.

3. Грузик масою m = 250 г, підвішений до пружини, коливається по вертикалі з періодом T = 1с. Визначити жорсткість k пружини.

4 Гиря масою m = 2,5 кг, підвішена до пружини, коливається по вертикалі з амплітудою A = 4 см. Визначити повну енергію W коливань гирі, якщо жорсткість k пружини дорівнює 1 кН/м.

5. Математичний маятник довжиною l = 1 м встановлений в ліфті. Ліфт піднімається з прискоренням a = 2,5 м/с^2. Визначити період T коливань маятника.

6. Однорідний диск радіусом R = 30 см коливається близько горизонтальної осі, що проходить через циліндричну поверхню диска. Який період T його коливань?

7. Диск радіусом r = 24 см коливається близько горизонтальної осі, що проходить через середину одного з радіусів перпендикулярно площині диска. Визначити приведену довжину L і період T коливань такого маятника.

8. Фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня довжиною l = 120 см коливається близько горизонтальної осі, що проходить перпендикулярно стрижню через точку, віддалену на деяку відстань a від центру мас стержня. При якому значенні a період T коливань має найменше значення?

Практичне заняття 8

1. За час t = 8 хв амплітуда згасаючих коливань маятника зменшилася в 3 рази. Визначити коефіцієнт загасання δ.

2. При затухаючих коливаннях матеріальної точки амплітуда в початковий момент часу A_0 = 2 см, а через t_1 = 4 с – амплітуда A_1 = 0,7 см. Визначте через скільки секунд амплітуда стане A_2 = 0,4 см.

3. Тіло масою m = 1 г здійснює затухаючі коливання з частотою ω = 3,14 с$^{-1}$. Протягом часу t = 50 с тіло втратило 80% своєї енергії. Визначте коефіцієнт загасання і коефіцієнт опору середовища.

4. Підвіска автомобіля робить коливання при наявності амортизатора (демпфуючий пристрій) за законом: з амплітудою A_0 = 0,01 м, власною частотою ν_0 = 100 Гц. Записати рівняння руху підвіски, що здійснюється під дією сили, що вимушує. Знайти амплітуду вимушених коливань підвіски, визначити резонансну частоту коливань, обчислити амплітуду при резонансі. Маса підвіски складає m = 5 кг.

5. Визначте довжину хвилі при частоті ν = 200 Гц, якщо швидкість поширення хвиль v = 340 м/с.

6. Визначте швидкість звуку у воді, якщо джерело, яке коливається з періодом T = 0,002 с, збуджує в воді хвилі довжиною λ = 2,9 м.