

Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Т. В. Гаврилова, О. Ф. Єрєміна, О. О. Степанов, С. О. Шиндерук,
Є. О. Чаплигін

ФІЗИКА
МЕХАНІКА
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА
Профільний курс

*Під загальною редакцією д-ра техн. наук,
професора Батигіна Ю.В.*

Харків
ХНАДУ
2014

УДК 53
ББК 22.3
Ф – 11

Рецензенти:

О. Л. Григор'єв, доктор технічних наук, професор
(Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»)
К. Е. Немченко, доктор фізико-математичних наук, професор
(Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна).
В. П. Ольшанський, доктор фізико-математичних наук, професор
(Харківський національний технічний університет сільського господарства
ім. П. Василенко)

Гаврилова Т. В., Єрьоміна О. Ф, Степанов О. О., Шиндерук С. О.,
Чаплигін Є. О. Фізика: Навчальний посібник. – Харків: ХНАДУ, 2014. –
277 с. – Укр. мовою.

Навчально - методичний посібник є профільним підручником, який відповідає програмі підготовки спеціалістів у вищих технічних навчальних закладах напряму підготовки "Будівництво". Містить у собі питання курсу фізики, викладені із сучасних позицій, питання і задачі для самостійного рішення, а також весь необхідний довідковий матеріал. Призначений для студентів, аспірантів та викладачів технічних університетів

Рис. 129. Табл. 5. Бібліогр. 11 найм.

Учебно - методическое пособие является профильным учебником, который соответствует программе подготовки специалистов в высших технических учебных заведениях направления подготовки "Строительство". Включает в себя вопросы курса физики, изложенные с современных позиций, вопросы и задачи для самостоятельного решения, а также весь необходимый справочный материал. Предназначен для студентов, аспирантов и преподавателей технических университетов

Рис. 129. Табл. 5. Библиогр. 11 назв.

© Чаплигін Є. О., Барбашова М. В.,
Аргун Щ. В., Гаврилова Т. В., Гнатов А.
В., Степанов О. О.

© ХНАДУ, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

ВВЕДЕННЯ

РОЗДІЛ 1. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1.1. КІНЕМАТИКА

1.1.1. Основні поняття кінематики

1.1.2. Кінематика поступального руху. Вектор переміщення. Шлях.

1.1.3. Швидкість

1.1.4. Прискорення

1.1.5. Обертальний рух

1.2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І ТІЛА, ЩО РУХАЄТЬСЯ ПОСТУПАЛЬНО

1.2.1. Закони Ньютона

1.2.2. Імпульс тіла

1.2.3. Види взаємодій. Гравітаційне тяжіння

1.2.4. Пружні сили

1.2.5. Сили тертя

1.3. РОБОТА. ПОТУЖНІСТЬ. ЕНЕРГІЯ

1.3.1. Робота

1.3.2. Потужність. ККД

1.3.3. Механічна енергія. Кінетична енергія

1.3.4. Потенційна енергія

1.3.5. Закон збереження енергії

1.3.6. Пружний та непружний удари

1.4. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

1.4.1. Момент інерції

1.4.2. Момент сили і момент імпульсу

1.4.3. Основний закон динаміки обертового руху

1.4.4. Закон збереження моменту імпульсу

1.5. ЕЛЕМЕНТИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ МЕХАНІКИ. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

1.5.1. Принцип відносності Галилея. Перетворення Галилея

1.5.2. Спеціальна теорія відносності. Постулати Ейнштейна

- 1.5.3. Перетворення Лоренца. Кінематичні наслідки СТВ
- 1.5.4. Релятивістська динаміка
- 1.5.5. Інваріанти СТВ
- 1.5.6. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції
- 1.5.7. Елементи загальної теорії відносності
- 1.6. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИКИ
 - 1.6.1. Центр мас
 - 1.6.2. Умова рівноваги тіл
 - 1.6.3. Прості механізми
- 1.7. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ
 - 1.7.1. Тиск в рідині або газі
 - 1.7.2. Рух рідин або газів. Рівняння Бернуллі
 - 1.7.2. В'язкість (внутрішнє тертя)
 - 1.7.3. Ламінарна і турбулентна течія
- 1.8. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ
 - 1.8.1. Гармонійні коливання
 - 1.8.2. Маятники
 - 1.8.3. Згасаючі коливання
 - 1.8.4. Вимушені коливання
 - 1.8.5. Механічні хвилі. Звук

РОЗДІЛ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

- 2.1. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ
 - 2.1.1. Рівняння стану ідеального газу
 - 2.1.2. Основне рівняння молекулярно – кінетичної теорії газів
 - 2.1.3. Наслідки з основного рівняння
 - 2.1.4. Закон Дальтона
- 2.2. ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ СТАТИСТИКИ
 - 2.2.1. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями. Закон Максвелла
 - 2.2.2. Барометрична формула. Розподіл Больцмана
 - 2.2.3. Броунівський рух
- 2.3. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В ТЕРМОДИНАМІЧНО НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМАХ
 - 2.3.1. Рівноважний і нерівноважний стан
 - 2.3.2. Теплопровідність
 - 2.3.3. Дифузія

2.3.4. Внутрішнє тертя (в'язкість)

2.3.5. Вакуум

2.4. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

2.4.1. Число ступенів свободи молекул. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи

2.4.2. Перший початок термодинаміки

2.4.3. Робота газу при зміні його об'єму

2.4.4. Теплоємність

2.5. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРШОГО ПОЧАТКУ ТЕРМОДИНАМІКИ ДО ІЗОПРОЦЕСІВ

2.5.1. Ізохорний процес $V = \text{const}$

2.5.2. Ізобарний процес $p = \text{const}$

2.5.3. Ізотермічний процес $T = \text{const}$

2.5.4. Адіабатимчний і політропний процеси

2.5.5. Круговий процес (цикл). Оборотні і необоротні процеси.

2.6. ЕНТРОПІЯ

2.6.1. Статистичне тлумачення ентропії і її зв'язок з термодинамічною ймовірністю

2.6.2. Рівняння стану для конденсованих середовищ

2.7. ДРУГИЙ І ТРЕТІЙ ПОЧАТОК ТЕРМОДИНАМІКИ

2.7.1. Другий початок термодинаміки

2.7.2. Третій початок термодинаміки

2.7.3. Теплові двигуни і холодильні машини

2.7.4. Цикл Карно і його ККД для ідеального газу

2.8. ТЕРМОДИНАМІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ

2.8.1. Внутрішня енергія

2.8.2. Вільна енергія

2.8.3. Ентальпія

2.8.4. Термодинамічний потенціал Гіббса

2.9. РЕАЛЬНІ ГАЗИ

2.9.1. Сили і потенційна енергія міжмолекулярної взаємодії

2.9.2. Рівняння Ван - дер -Ваальса

2.9.3. Ізотерми Ван -дер -Ваальса та їх аналіз

2.10. ЗМІНА ТЕМПЕРАТУРИ ПРИ РОЗШИРЕННІ ГАЗІВ.

ЕФЕКТ ДЖОУЛЯ - ТОМСОНА

2.10.1. Внутрішня енергія реального газу

2.10.2. Ефект Джоуля - Томсона

2.10.3. Зрідження газів. Практичне використання ефекту Джоуля – Томсона

2.11. РІДИНИ

2.11.1 Властивості рідин

2.11.2. Поверхневий натяг

2.11.3. Тиск під викривленою поверхнею рідини

2.11.4. Капілярні явища

2.11.5. Капілярне зчеплення

2.11.6. Залежність коефіцієнта поверхневого натягу від температури і властивостей речовини

2.12. ТВЕРДІ ТІЛА

2.12.1. Кристалічні і аморфні тіла

2.12.2. Класифікація кристалів за типом зв'язків

2.12.3. Дефекти в кристалах

2.12.4. Рідкі кристали

2.12.5. Випаровування, сублімація, плавлення та кристалізація

2.13. ТЕПЛОВІ ВЛАСТИВОСТІ ТВЕРДИХ ТІЛ

2.13.1. Теплоємність твердих тіл

2.13.2 Теплопровідність твердих тіл

2.13.3 Теплове розширення твердих тіл

2.14. ФАЗОВІ РІВНОВАГИ І ПЕРЕТВОРЕННЯ

2.14.1. Поняття фази і фазового переходу

2.14.2. Фазові перетворення реального газу

2.14.3. Рівняння Клапейрона – Клаузіуса і фазова діаграма для перетворення рідина - газ ($P \leftrightarrow G$)

2.14.4. Рівняння Клайперона – Клаузіуса і фазова діаграма для перетворення тверде тіло – рідина ($T \leftrightarrow P$)

2.14.5. Рівняння Клайперона - Клаузіуса і фазова діаграма для перетворення тверде тіло – газ ($T \leftrightarrow G$)

2.14.6. Потрійна точка. Діаграма стану

2.15. РОЗЧИНИ

2.15.1. Визначення та основні кількісні характеристики розчинів

2.15.2. Принцип Ле - Шательє – Брауна і стійкість термодинамічної рівноваги

2.15.3. Розчинність тіл

2.15.4. Закон Рауля

2.15.5. Закон Генрі

2.15.6. Осмос. Осмотичний тиск.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

ДОДАТОК

ПЕРЕДМОВА

Одна з основних проблем, що існує в даний час у вищій школі - це підвищення якості підготовки фахівців. Удосконалювати підготовку інженерів високого класу - задача великого державного значення. При підготовці кваліфікованих фахівців не повинна ущемлятися і загальна задача освіти - усебічний розвиток особистості людини.

Загальна фізика відноситься до найбільш важливих курсів вищої школи. В обсязі знань, накопичених людством, фізиці належить виняткове місце. В умовах науково-технічного прогресу надзвичайно зростає роль фізики не тільки як технічної науки, що народжує нові наукові напрямки і цілі галузі виробництва, але і як науки фундаментальної, світоглядній. Тільки фундаментальна, зокрема загальнофізична і математична освіта здатна виробити сучасне наукове мислення, що дозволяє успішно вирішувати будь-які наукові і технічні проблеми, висунуті практикою.

Виникають питання: яке місце займає фізика в ряді наук? Навіщо потрібна фізика інженеру? Своїм змістом фізика переконує в тім, що вона потрібна інженеру завжди. Говорячи це, ми маємо на увазі не тільки те, що інженер повинний бути ознайомлений з тими окремими явищами і законами, з якими він безпосередньо зустрічається у своїй практичній діяльності. Таке твердження було б саме собою очевидним. Інженеру потрібно широке володіння цим предметом у його сукупності; йому потрібно знання фізики самої по собі як цільної дисципліни, а не тільки в залежності від поточних застосувань. Можна сміливо затверджувати, що фізика - це фундаментальна основа для теоретичної підготовки інженера, без якої його успішна діяльність неможлива.

Даний курс є компактним, але при цьому дає цільне представлення про основні закони і поняття сучасної фізики, їхнього взаємозв'язку і походженні. Відмінною рисою книги є те, що дано представлення про ряд істотних розділів і підходів сьогоденної фізики, і в першу чергу, мова йде про додатки фізики до сучасних технологій.

Безумовно, фізика є найбільш блискучим досягненням людської наукової думки, проте людина постійно учиться, щоб розуміти себе і

навколишній світ. І дотепер фізика допомагає цьому краще, ніж інші аналітичні спеціальні науки.

ВВЕДЕННЯ

Народженню фізики ми зобов'язані древнім грекам. Фалес, Геракліт, Демокрит, Платон, Аристотель, Евклід, Архімед - ця плеяда блискучих вчених заклала ті основи, на яких і зараз ґрунтується строга будівля фізики. Вони ввели такі поняття, як атом, маса, електрон, протон; навіть назви таких сучасних наук, як математика, механіка, фізика, географія, біологія. Грецьким мислителям ми зобов'язані також важливою ідеєю: про можливість об'єктивного пізнання природи.

Однак, перший підручник фізики – «Фюзіс» (від грецького φύσις (physis): природа), написаний Аристотелем ще в IV віці до н.е. по сучасним уявленням був схожий на філософський трактат і включав в себе міркування про предмет, час, місце і рух взагалі.

Дамо визначення фізики на даному етапі розвитку природничих наук. **Фізика – наука, що вивчає найбільш прості, але, поряд с тим, найбільш загальні закономірності явищ природи, властивості і будову матерії і закони її руху.**

Із визначення фізики як науки випливає *фундаментальність* виучуваних фізикою законів, тобто ствердження, що без фізики не можуть існувати інші природничі і технічні науки. У той же час ці закони є *елементарними*, тому фізика не може витіснити інші науки.

По суті фізика виросла із філософії і по сей день тісно з нею пов'язана. У визначенні фізики ми бачимо такі терміни як матерія, форми її руху. Філософія дає таке визначення матерії: «*матерія – це об'єктивна реальність, яка існує поза і незалежно від людського свідoctва і яка відображається ним*». *Рух – це форма існування матерії. Фізика вивчає таку основну форму матерії, як системи неживої природи. Формами руху матерії в системах неживої природи є: 1) просторове переміщення (механічний рух); 2) рух елементарних частинок і полів (електромагнітні, гравітаційні, сильні і слабкі взаємодії); 3) зміни в структурі макротіл (теплові процеси, зміна агрегатних станів речовини, звукові коливання).*

Крупні відкриття в галузі фізики завжди одержували філософське обміркування. С другого боку, основні закони філософії,

такі як: єдність і боротьба протилежностей, перехід кількості у якість, розвиток пізнання по спіралеподібному закону мали підтвердження у законах фізичних.

Задачею фізики являється створення опитним шляхом у нашій свідомості такої фізичної картини навколишнього світу, яка найбільш повно відтворювала б властивості цього світу. *Шлях пізнання* або ж метод пізнання включає в себе такі ступені як: спостереження, експеримент, створення фізичного закону, створення фізичної теорії, опитне підтвердження (практика). Ми бачимо, що цей шлях починається і закінчується опитом, бо сама наука *фізика є наукою опитною*. Усі фізичні теорії спираються на опит, і тільки опит є критерієм їх правильності.

Фізичний опит або експеримент відрізняється від спостереження тим, що при експерименті усі виміри можуть бути проведені неодноразово при обліку всіх впливів на досліджувану систему. При цьому підвищення точності вимірів поширює можливості пізнання світу і тому є дуже важливою науковою и технічною проблемою.

На основі результатів фізичних експериментів формулюються *фізичні закони*, тобто чисельні співвідношення між *фізичними величинами*, які являються мірою той чи іншої властивості природного явища. Закони вказують нам, як треба змінювати умови, в яких існують явища, щоб досягнути потрібних результатів; таким чином мають дуже велике практичне значення. З іншого боку, один або декілька законів дозволяють уяснити сутність явища, а їх узагальнення приводить до створення *теорії явища*.

В своїй практичній діяльності люди проводили різні виміри фізичних величин, починаючи с давніх часів. З розвитком науки розроблювалися нові засоби вимірювання і застосовувалися нові одиниці вимірювання.

Виміряти фізичну величину – це означає порівняти її з однорідною величиною, умовно прийнятою за одиницю вимірювання. Сукупність незалежно обраних основних одиниць і утворених за їх допомогою похідних одиниць називається *системою одиниць*. Згідно рішення XI Генеральної конференції по мірам и вагам у 1960 році була прийнята Міжнародна система одиниць (скорочено СІ), до *основних одиниць* якої належать: м (метр, одиниця довжини l або s), кг (кілограм, одиниця маси m), с (секунда, одиниця часу t), моль (одиниця кількості речовини ν), К (кельвін, одиниця температури T), А (ампер, одиниця сили струму I), кд (кандела,

одиниця сили світла $I_{\text{св}}$). *Додаткові одиниці*: рад (радіан, одиниця плоского кута α або φ), ср (стерадіан, одиниця тілесного кута Ω).

Одиниці всіх інших фізичних величин утворюються шляхом математичних дій над основними і додатковими одиницями з використанням визначальних формул величин.

Треба відзначити, що кожен фізичний закон має відповідну сферу застосування, яка задається: а) визначенням допустимих меж змін фізичних величин, що входять в формулювання закону; б) найбільшою допустимою точністю вимірів цих величин; в) просторістю кругу фізичних явищ, для яких закон має сенс. Фізичні закони, які мають найбільш широку сферу застосування, називають *фундаментальними*. До них належать, наприклад, закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу, закон всесвітнього тяжіння, закон Кулона.

Багато законів часткового характеру можуть бути виведені із фундаментальних законів, наприклад, закони І. Кеплера із закону збереження моменту імпульсу. Однак, більшість фізичних законів, що застосовуються фізиками та інженерами, не можуть бути виведеними із одних тільки фундаментальних законів без деяких додаткових умов. Це виходить з того, що в реальному фізичному світі зв'язки між явищами настільки складні і багатообразні, що охопити все неможливо ні практично, ні навіть теоретично.

У таких випадках на допомогу приходять фізичні моделі. *Моделлю* зветься *абстрактна система, яка являється спрощеною копією досліджуваної реальної фізичної системи*. При цьому модельна система повинна: а) мати сферу застосування, в якій властивості моделі з даною точністю співпадають із властивостями реальної системи; б) допускати досить простий математичний опис. Прикладами таких моделей є матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, нестислива рідина та інші, з якими ми познайомимось у відповідних розділах курсу фізики.

Розвиток фізики привів к необхідності застосування математичного апарату. При цьому необхідно відзначити, що використання того чи іншого розділу математики диктується зазвичай опитними фактами. Дійсно, опитний факт безперервності простору і часу привів до необхідності використання диференційного обчислювання, евклідовість простору – до введення векторної алгебри тощо. Таким чином, ми маємо принципову різницю поміж

математичними науками, які мають справу з абстрактними об'єктами, і фізикою, яка вивчає реальний світ.

Сучасну фізику поділяють на дві частини: *класичну і квантову*. кожна з яких, в свою чергу, містить *релятивістську і нерелятивістську* частину. Класична фізика описує *макроскопічні* явища, а саме такі, що мають місце з дуже великою кількістю атомів або молекул в областях, які перебільшують розміри атомів і молекул на декілька порядків, тобто починаючи приблизно з $10^{-8} - 10^{-7}$ м і простираючись до 10^{26} м, що відповідає розміру видимої частини Всесвіту. Квантова фізика досліджує явища, що протікають в мікроскопічних областях, які можуть бути порівняні з атомними розмірами і навіть значно меншими ($10^{-9} - 10^{-18}$ м). Якщо класична фізика нараховує чимало століть своєї історії, то квантова фізика є молодого наукою, день народження якої співпадає з початком двадцятого віку.

Поділ на релятивістську і нерелятивістську фізику здійснюється по величині швидкості тіла v , яка порівнюється із швидкістю світла у вакуумі ($c = 2,99792458 \cdot 10^8$ м/с). Якщо $v \ll c$, ми маємо справу з нерелятивістськими об'єктами, якщо ж $v \leq c$, то з релятивістськими. Нагадаємо, що швидкість світла у вакуумі являється найвищою швидкістю, знайденою людством у природі.

Нарешті, відзначимо, що, не дивлячись на такий розподіл фізики на частини, вона зостається єдиною наукою, бо між її частинами є внутрішній логічний зв'язок. Так, при малих швидкостях, релятивістська фізика переходить у нерелятивістську, а при збільшенні маси частинок квантова фізика переходить у класичну.

РОЗДІЛ 1

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1.1. КІНЕМАТИКА

1.1.1. Основні поняття кінематики

Механіка - розділ фізики, в якому вивчається механічний рух.

Механічний рух - зміна положення даного тіла (або його частин) відносно інших тіл.

Основною задачею механіки є визначення положення тіла у даний момент часу із заданими початковими умовами.

Механіка має два розділи; кінематика і динаміка.

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчаються механічні рухи тіл в часі і не розглядаються які-небудь впливи на ці тіла інших тіл або полів.

В розділі механіка застосовується дві моделі. *Матеріальною точкою* називається тіло, розмірами якого в даній задачі можна знехтувати. *Абсолютно тверде тіло* (тверде тіло) – тіло, що ні при яких умовах не може деформуватися, й відстань між двома точками цього тіла залишається постійною.

Будь-який рух твердого тіла можна представити як комбінацію поступального й обертового рухів.

Поступальний рух твердого тіла – рух, при якому будь-яка пряма, жорстко пов'язана з тілом, що рухається, залишається паралельною своєму первісному положенню. Для опису такого руху достатньо простежити за рухом однієї точки.

Обертальний рух твердого тіла – рух, при якому всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній і тій же прямій, називаній *віссю обертання*. На відміну від поступального руху, різні точки твердого тіла рухаються по-різному, тому його обертальний рух не можна охарактеризувати рухом якоїсь однієї точки.

Рух тіла відбувається в просторі й у часі, які є формами існування матерії. *Простір* характеризується такими властивостями,

як однорідність, ізотропність, тривимірність, а *рух* має властивості однорідності і односпрямованості.

Для визначення положення тіла у даний момент часу *вводиться система відліку*, тобто сукупність тіла відліку і системи координат, яка повинна бути забезпечена годинником, що відлічує проміжки часу від довільно обраного початкового моменту часу. Тіло, по відношенню до якого розглядається даний механічний рух, називається *тілом відліку*.

1.1.2. Кінематика поступального руху. Вектор переміщення. Шлях

Положення точки в просторі:

а) визначається координатами (3-ма , 2 - ма або однією в залежності від виду руху);

б) може бути задане радіусом - вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (1.1.1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори напрямів (орти); x, y, z — координати точки.

Вектором переміщення $\Delta\vec{r}$ матеріальної точки називається спрямований відрізок прямої, що сполучає початкове положення тіла з його кінцевим положенням, тобто переміщення точки характеризується напрямком, в якому вона рухається.

Вектор переміщення - різниця радіус-векторів, що характеризують кінцеве і початкове положення точки, яка рухається в протязі певного проміжку часу (рис. 1.1.1).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1.1.2)$$

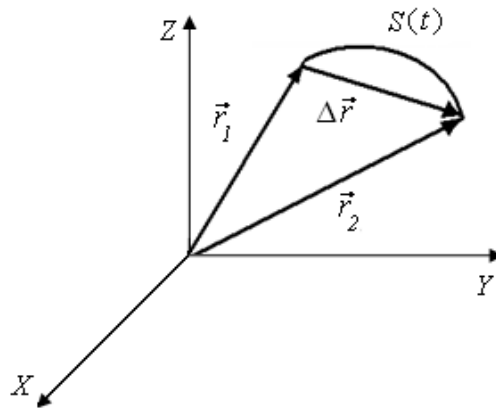


Рис. 1.1.1. Шлях і вектор переміщення матеріальної точки

Траєкторією називається лінія, по якій рухається точка. Траєкторія руху матеріальної точки задається рівняннями руху:

у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$;

в скалярній формі 1) $x = f_1(t)$; 2) $y = f_2(t)$; 3) $z = f_3(t)$.

По виду траєкторії розрізняють *прямолінійний* рух і *криволінійний*.

Довжина траєкторії точки являє собою величину *пройденого шляху* S . Шлях $S(t)$ - скалярна величина.

1.1.3. Швидкість

Середньою швидкістю за проміжок часу називається фізична величина, що дорівнює відношенню вектора переміщення точки до тривалості проміжку часу

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (1.1.3)$$

де $\Delta \vec{r}$ - переміщення матеріальної точки за інтервал часу Δt .

Середня шляхова швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (1.1.4)$$

де ΔS - шлях, пройдений точкою за інтервал часу Δt .

Миттєва швидкість – це ліміт, до якого наближається середня швидкість, якщо Δt наближається до нуля, тобто похідна від радіус - вектора за часом.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z, \quad (1.1.5)$$

де $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ - проекції швидкості на осі координат.

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.1.6)$$

Одиниця виміру швидкості – м/с.

1.1.4. Прискорення

Похідну швидкості за часом, яка є другою похідною за часом від радіус-вектора, називають *миттєвим прискоренням* точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \quad (1.1.7)$$

де $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ - проекції прискорення $\vec{a}$ на осі координат. Вектор прискорення $\vec{a}$ спрямований вздовж вектора прирощення швидкості $d\vec{v}$.

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (1.1.8)$$

Одиниця виміру прискорення – м/с².

Роздивимось деякі приклади кінематичних рівнянь, тобто залежностей координати руху від часу.

При *рівномірному прямолінійному* русі $\vec{v} = \text{const}$ і $a = 0$.

Кінематическое рівняння рівномірного руху матеріальної точки вздовж осі x

$$x = x_0 + vt, \quad (1.1.9)$$

де x_0 – початкова координата; t – час.

Нехай тіло рухається прямолінійно з постійним прискоренням a . Цей важливий випадок, що часто зустрічається, носить назву

рівноприскореного або рівносповільненого руху (залежно від знака прискорення). Кінематичне рівняння рівнозмінного руху ($a = \text{const}$) уздовж осі x

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (1.1.10)$$

де v_0 – початкова швидкість; t – час.

Швидкість точки при рівнозмінному русі

$$v = v_0 + at. \quad (1.1.11)$$

При криволінійному русі прискорення можна представити як суму нормальної і тангенціальної складових (рис. 1.1.2).

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (1.1.12)$$

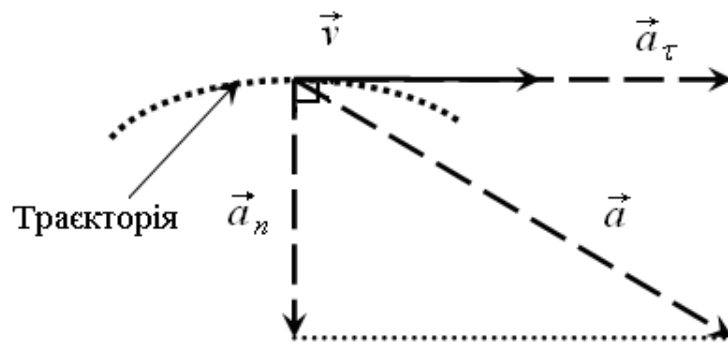


Рис. 1.1.2. Зв'язок повного $\vec{a}$, нормального $\vec{a}_n$ и тангенціального $\vec{a}_\tau$ прискорень

Модулі цих прискорень

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad (1.1.13)$$

де R – радіус кривизни в даній точці траєкторії.

1.1.5. Обертальний рух

Рух точки по колу є складовою частиною обертального руху. Поряд з вектором переміщення в цьому випадку зручно розглядати вектор елементарного повороту тіла $d\vec{\phi}$ (або кутове переміщення).

Вектор $d\vec{\phi}$ має бути спрямованим уздовж осі обертання так, щоб з його кінця обертання було видно рух тела проти напрямку руху годинникової стрілки (*правило правого гвинта*). Напрямок вектора повороту тіла пов'язується з напрямом обертання, тобто, $d\vec{\phi}$ є не істинним вектором, а псевдовектором. Вимірюється кут повороту в радіанах.

Для характеристики швидкості і напрямку обертання служить кутова швидкість. *Кутовою швидкістю* називають вектор $\vec{\omega}$, який чисельно дорівнює першій похідній від кута повороту за часом

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}. \quad (1.14)$$

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ спрямована уздовж осі обертання у напрямку, що визначається за правилом правого гвинта, та є псевдовектором (рис. 1.1.3).

Аксіальні вектори $d\vec{\phi}$ і $\vec{\omega}$ не мають певних точок докладання, вони можуть відкладатися з будь-якої точки осі обертання.

Модуль кутової швидкості визначається як

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}. \quad (1.15)$$

Одиниця виміру кутової швидкості - радіан в секунду (рад/с).

Довжина дуги dl пов'язана з кутом повороту співвідношенням

$$dl = R \cdot d\phi, \quad (1.16)$$

де R – радіус обертання.

Обертання з постійною за величиною кутовою швидкістю ω зветься *рівномірним*. Час, за який точка, що рівномірно обертається, робить повний оборот, тобто повертається на кут 2π , називається *періодом руху* T

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.17)$$

Частотою обертання називається величина, яка дорівнює числу обертів, що здійснює тіло за одиницю часу:

$$n = N/t, \quad (1.18)$$

або

$$n=1/T, \quad (1.19)$$

де N – число оборотів, що здійснюються тілом за час t ; T – період обертання.

Для характеристики швидкості зміни вектора кутової швидкості при нерівномірному обертанні вводиться вектор кутового прискорення. *Кутове прискорення* - це похідна за часом від вектора кутової швидкості (відповідно друга похідна за часом від кута повороту)

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (1.20)$$

або

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}. \quad (1.21)$$

Одиниця виміру кутового прискорення - рад/с².

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі, то вектор $\vec{\varepsilon}$ спрямований в ту ж сторону, що і $\vec{\omega}$, при прискореному обертанні ($\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$), і в протилежну - при уповільненому обертанні ($\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$).

Кинематичне рівняння рівнозмінного обертання ($\varepsilon = \text{const}$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (1.22)$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість; t - час

Кутова швидкість тіла при рівнозмінному обертанні

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.23)$$

Зв'язок між лінійними і кутовими величинами (рис.1.1.3), що характеризують обертання твердого тіла, виражається такими формулами:

шлях, пройдений довільною точкою тіла по дузі кола радіусом R , при повороті тіла на кут φ

$$S = \phi R; \quad (1.24)$$

лінійна швидкість точки

$$v = \omega R, \quad \vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]; \quad (1.25)$$

тангенціальне прискорення точки

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \vec{r}]; \quad (1.26)$$

нормальне прискорення точки

$$a_n = \omega^2 R, \quad \vec{a}_n = -[\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]. \quad (1.27)$$

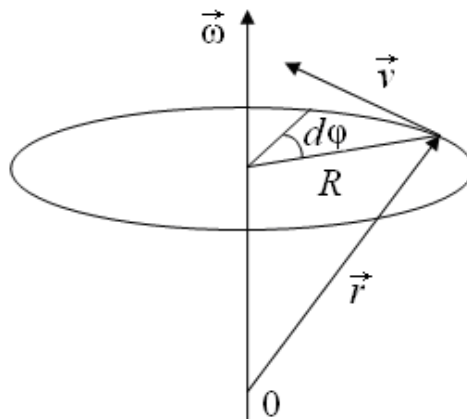


Рис. 1.1.3. Зв'язок між лінійними і кутовими характеристиками руху

Завдання для самоконтролю

1. Дві прямі дороги перетинаються під кутом $\alpha = 60^\circ$. Від перехрестя по них видаляються машини: одна зі швидкістю $v_1 = 60$ км/год, інша зі швидкістю $v_2 = 80$ км/год. Визначити швидкості v' і v'' , з котрими одна машина віддаляється від іншої. Перехрестя машини пройшли одночасно.

Відповідь: $v' = 122$ км/год; $v'' = 72,2$ км/год.

2. Рух матеріальної точки задано рівнянням $\vec{r}(t) = \vec{i}(A + Bt^2) + \vec{j}Ct$, де $A = 10$ м, $B = -5$ м/с², $C = 10$ м/с. Знайти вирази для швидкості і прискорення. Для моменту часу $t = 1$ с обчислити: 1) модуль швидкості; 2) модуль прискорення; 3) модуль тангенціального прискорення; 4) модуль нормального прискорення.

Відповідь: 1) 14,1 м/с; 2) 10 м/с²; 3) 7,07 м/с²; 4) 7,07 м/с².

3. Знайти радіус колеса, що рівномірно обертається, якщо лінійна швидкість точки, що лежить на ободі, в 2,5 рази більше лінійної швидкості точки, що лежить на 5 см ближче до осі колеса.

Відповідь: 8,33 см

4. Колесо автомашини обертається рівноприскорено. Зробивши $N = 50$ повних обертів, воно змінило частоту обертання від $n_1 = 4 \text{ с}^{-1}$ до $n_2 = 6 \text{ с}^{-1}$. Визначити кутове прискорення ε і час обертання Δt колеса.

Відповідь: 1,26 рад/с², 10с.

5. Автомобіль рухається по заокругленню шосе, що має радіус кривизни $R=50$ м. Рівняння руху автомобіля має вигляд $S(t)=A+Bt+Ct^2$, де $A=10$ м, $B=10$ м/с, $C= - 0,5$ м/с². Знайти швидкість v автомобіля, його тангенціальне a_τ , нормальне a_n . і повне a прискорення в момент часу $t = 5$ с.

Відповідь: $v=5$ м/с; $a_\tau= - 1$ м/с²; $a_n=0,5$ м/с²; $a=1,12$ м/с².

1.2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І ТІЛА, ЩО РУХАЄТЬСЯ ПОСТУПАЛЬНО

1.2.1. Закони Ньютона

Динаміка - це розділ механіки, в якому вивчаються причини появи прискорення і розглядаються способи його обчислення.

Закони динаміки були відкриті 1687 р великим вченим І.Ньютоном (1642 – 1727). Сформульовані ним закону динаміки лежать в основі так званої класичної механіки. Закони Ньютона слід розглядати як узагальнення дослідних фактів. Висновки класичної механіки справедливі тільки при русі тіл з малими швидкостями, значно меншими швидкості світла c .

Основне завдання динаміки - визначення положення тіл в певний момент часу за відомими початковим положенням тіла, початковий швидкості і силам, діючим на тіло.

Інерція - явище збереження стану руху або спокою при відсутності зовнішніх впливів.

Принцип відносності Галілея: Всі інерційні системи повністю рівноправні щодо причин прискорень. У всіх інерційних системах відліку закони класичної динаміки мають один і той же вигляд.

Перший закон Ньютона: Будь-яка матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху (по відношенню

до інерціальної системи відліку) до тих пір, поки зовнішні впливи не змінять цього стану.

Інерціальні системи відліку - системи відліку, щодо яких тіло при компенсації зовнішніх впливів рухається рівномірно і прямолінійно (наприклад, геоцентрична і геліоцентрична системи).

Маса - це позитивна скалярна фізична величина, одна з основних характеристик матерії, визначає її інерційні та гравітаційні властивості. При однаковому впливі з боку оточуючих тіл одне тіло може швидко змінювати свою швидкість, а інше в тих же умовах - значно повільніше. Прийнято говорити, що друге з цих двох тіл має більшу інертність, або, іншими словами, друге тіло має більшу масу.

Маса тіла є адитивною величиною, незалежною від положення тіла у просторі і швидкості тіла. У Міжнародній системі одиниць (СІ) маса тіла вимірюється в *кілограмах* (кг).

Сила - це векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, в результаті якого тіло набуває прискорення або змінює форму і розміри. Сила $\vec{F}$ повністю задана, якщо вказані її модуль F , напрямління в просторі і точка докладання. Пряма, уздовж якої спрямована сила, називається лінією дії сили.

В загальному випадку сила залежить від положення тіла у просторі і від швидкості тіла. Сили підкоряються *принципу суперпозиції*.

Якщо на дане тіло діє одночасно кілька сил, то їх дію тіло можна замінити дією однієї сили - рівнодіючої

$$\vec{F}_{\text{рівн}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2.1)$$

Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона).

Рівнодіюча сил, прикладених до тіла, дорівнює добутку маси тіла на надане йому прискорення.

У векторній формі

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (2.2)$$

де $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ - геометрична сума сил, що діють на матеріальну точку; m - маса, $\vec{a}$ - прискорення; N - число сил, діючих на точку;
в координатній формі

$$ma_x = \sum_{i=1}^N F_{xi}; ma_y = \sum_{i=1}^N F_{yi}; ma_z = \sum_{i=1}^N F_{zi}, \quad (2.3)$$

де під знаком суми стоять проекції сил на відповідні осі координат.

Напрямок прискорення завжди збігається з напрямком рівнодійної сили.

Якщо векторна сума сил, що діють на тіло, дорівнює нулю, тіло або покоїться, або рухається рівномірно і прямолінійно.

Сила в Міжнародній системі одиниць вимірюється в *ньютон*ах (Н). Сила в 1 Н надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с².

Третій закон Ньютона. Тіла діють один на одного з силами, спрямованими уздовж однієї і тієї ж прямої, рівними за абсолютним значенням і протилежними за напрямком. Сили прикладені до різних тіл і мають одну природу (рис. 1.2.1).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.4)$$

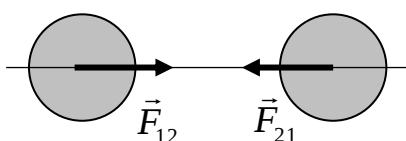


Рис. 1.2.1. Сили при взаємодії двох тіл

Закони Ньютона справедливі тільки в інерційних системах відліку.

1.2.2. Імпульс тіла

Імпульс (кількість руху) тіла – векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.5)$$

Напрямок вектора імпульсу збігається з напрямком вектора швидкості. Одиниця виміру імпульсу - кг·м/с.

Рівняння руху матеріальної точки може бути представлено у вигляді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (2.6)$$

або

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F} \Delta t, \quad (2.7)$$

де $\vec{F} \Delta t$ – імпульс сили, тобто добуток сили на час її дії.

Зміна кількості руху пропорційна прикладеній рушійній силі і відбувається по напрямку тієї прямої, по якій ця сила діє.

Закон збереження імпульсу.

Геометрична сума імпульсів тіл, що складають замкнуту систему, залишається постійною при будь-яких взаємодіях тіл цієї системи між собою

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const} \quad (2.8)$$

або

$$\sum_{i=1}^N m \vec{v}_i = \text{const}, \quad (2.9)$$

де N - число матеріальних точок (або тіл), що входять до системи.

Замкнута система - система тіл, для якої рівнодіюча зовнішніх сил дорівнює нулю.

Закон збереження імпульсу є наслідком **однорідності простору**: при паралельному перенесенні у просторі замкнутої системи тіл як цілого її фізичні властивості не змінюються (не залежать від вибору положення початку координат інерціальної системи відліку).

На дії закону збереження імпульсу заснований реактивний рух. У ракеті при згорянні палива газів, нагріті до високої температури, викидаються з сопла з великою швидкістю щодо ракети. Позначимо масу викинутих газів через m , а масу ракети після витікання газів через M . Тоді для замкнутої системи «ракета + газів» на підставі закону збереження імпульсу можна записати

$$V = -\frac{m}{M} u, \quad (2.10)$$

де V – швидкість ракети після витікання газів.

У даному випадку передбачається, що початкова швидкість ракети дорівнювала нулю. Отримана формула для швидкості ракети

справедлива лише за умови, що вся маса згорілого палива викидається з ракети одночасно. Насправді витікання відбувається поступово протягом всього часу прискореного руху ракети. Кожна наступна порція газу викидається з ракети, яка вже придбала деяку швидкість.

Для отримання точної формули процес закінчення газу з сопла ракети потрібно розглянути більш детально. Нехай ракета в момент часу t має масу m і рухається зі швидкістю $\vec{v}$ (рис. 1.2.2).

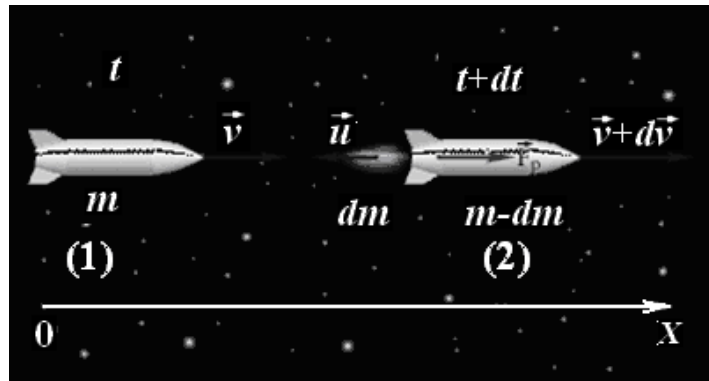


Рис. 1.2.2. Реактивний рух

Протягом малого проміжку часу dt з ракети буде викинута деяка порція газу з відносною швидкістю $\vec{u}$. Ракета в момент $t+dt$ буде мати швидкість $\vec{v} + d\vec{v}$, а її маса стане рівною $m+dm$, де $dm < 0$. Маса викинутих газів буде, очевидно, дорівнювати $-dm > 0$. Швидкість газів в інерціальній системі OX дорівнюватиме $\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u}$. Застосуємо закон збереження імпульсу. У момент часу $t+dt$ імпульс ракети дорівнює $(m+dm)(\vec{v} + d\vec{v})$, а імпульс газів, що випускаються, дорівнює $(-dm)(\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u})$. У момент часу t імпульс всієї системи дорівнював $m\vec{v}$. Припускаючи, що система «ракета + гази» замкнена, можна записати:

$$m\vec{v} = (m+dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u}). \quad (2.11)$$

Розкриваючи дужки, отримаємо після скорочення

$$m d\vec{v} = \vec{u} dm \quad (2.12)$$

або

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m} \vec{u}. \quad (2.13)$$

За допомогою математичної операції інтегрування з цього співвідношення можна отримати формулу для кінцевої швидкості $\vec{v}$ ракети:

$$\vec{v} = \ln \frac{m_0}{m} \cdot \vec{u}, \quad (2.14)$$

де $\frac{m_0}{m}$ - відношення початкової та кінцевої мас ракети. Ця формула називається *формулою Ціолковського*. З неї випливає, що кінцева швидкість ракети може бути більше, ніж швидкість витікання газів. Але це може бути досягнуто тільки шляхом витрати значної маси палива, що становить більшу частку первісної маси ракети.

1.2.3. Види взаємодій. Гравітаційне тяжіння

Будь-який рух тіла визначається чотирма фундаментальними взаємодіями в міру зростання: гравітаційним; слабким; електромагнітним; сильним.

Усі механічні явища в макросвіті визначаються електромагнітними і гравітаційними взаємодіями.

Центральними називаються сили, які всюди спрямовані уздовж прямих, що проходять через одну і ту ж нерухому точку - центр сил, і залежать тільки від відстані до центру сил.

Як показує порівняння, гравітаційні сили є слабкіші з усіх фундаментальних взаємодій, однак вони мають властивості адитивності (сумуються) і досягають значних величин в космічному масштабі (тяжіння Місяця, будова Сонячної системи і т.п.). Разом з кулонівськими силами, які визначають взаємодію між електричними зарядами, гравітаційні сили являються *фундаментальними*.

Закон всесвітнього тяжіння, відкритий І.Ньютоном у 1667 році, має вигляд

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.15)$$

де F - сила взаємного тяжіння двох матеріальних точок ; m_1 і m_2 - їх маси; r - відстань між точками; G - гравітаційна стала, яка чисельно дорівнює силі взаємодії двох матеріальних точок масою 1 кг кожна, що знаходяться на відстані 1 м одна від одної; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

У написаній формі закон всесвітнього тяжіння можна також застосовувати до взаємодії сферичних тіл, маса яких розподілена сферично симетрично. У цьому випадку r є відстань між центрами мас сфер.

Маса тіла є не тільки мірою інертності тіла, але і мірою його гравітаційних взаємодій.

Сила тяжіння F_T - сила, що діє на тіло масою m , яке перебуває на відстані h від поверхні Землі

$$F_T = G \frac{M_3 m}{(R_3 + h)^2} = mg, \quad (2.16)$$

де g - прискорення вільного падіння. (Без урахування обертання Землі та її сплюснутості біля полюсів при $h \ll R_3$ $g = 9,8 \text{ м/с}^2$).

1.2.4. Пружні сили

Роздивимось деякі сили, які являються наслідками фундаментальних сил. К ним належать сили пружності, сили тертя, деякі інші.

При деформації тіла виникає сила, яка прагне відновити колишні розміри і форму тіла. Ця сила виникає внаслідок електромагнітної взаємодії між атомами і молекулами речовини. Її називають силою пружності.

Сила пружності - сила, що виникає при деформації тіла і спрямована протилежно напрямку зміщення частинок при деформації.

Під деформаціями ми розуміємо будь-які зміни розмірів і форми тіла. Вони бувають двох видів.

Пластичні деформації - такі деформації, які не зникають після припинення дії зовнішніх сил.

Пружні деформації - такі деформації, які зникають після припинення дії зовнішніх сил.

Найпростішим видом деформації є деформації розтягування і стиснення (рис. 1.2.3). Зовнішня сила $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{пр}}$.

При малих деформаціях ($|x| \ll l$) сила пружності пропорційна деформації тіла і спрямована в бік, протилежний напрямку переміщення частинок тіла при деформації

$$F_x = F_{\text{пр}} = -kx. \quad (2.17)$$

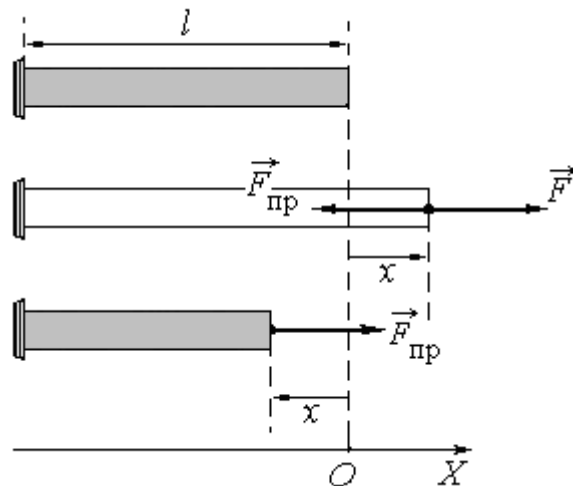


Рис. 1.2.3. Деформація розтягування ($x > 0$) і стиснення ($x < 0$)

Співвідношення (2.17) виражає експериментально встановлений закон Гука. Коефіцієнт k називається жорсткістю тіла. В системі СІ жорсткість вимірюється в ньютонах на метр (Н/м). Жорсткість залежить від форми і розмірів тіла, а також від його матеріалу.

Для деформації розтягування або стиснення закон Гука прийнято записувати в іншій формі. Введемо відносну деформацію при поздовжньому розтягуванні або стисненні тіла у вигляді

$$\varepsilon = \frac{x}{l_0}, \quad (2.18)$$

де ε – відносне подовження (стиск); x – абсолютне подовження; l_0 – початкова довжина тіла.

Нормальна напруга характеризує дію сили на дане тіло

$$\sigma = \frac{F_{\text{пр}}}{S}, \quad (2.19)$$

де $F_{\text{пр}}$ – пружна сила, перпендикулярна поперечному перерізу; S – площа цього перерізу, $[\sigma] = \text{Н/м}^2$.

Тоді закон Гука можна сформулювати так: відносна деформація ε пропорційна напрузі σ :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (2.20)$$

Коефіцієнт E в цій формулі називається модулем Юнга. Модуль Юнга залежить тільки від властивостей матеріалу і не залежить від розмірів і форми тіла. Модуль Юнга різних матеріалів змінюється в широких межах. Для сталі, наприклад, $E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, а для гуми $E \approx 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, тобто на п'ять порядків менше.

Закон Гука може бути узагальнений і на випадок більш складних деформацій. Наприклад, при деформації вигину пружна сила пропорційна прогину стрижня, кінці якого лежать на двох опорах (рис. 1.2.4).

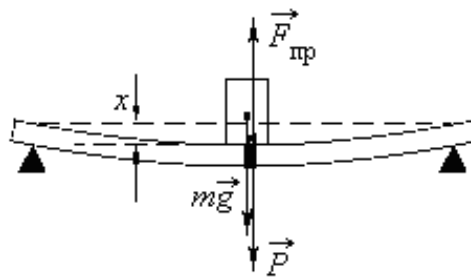


Рис. 1.2.4. Деформація вигину.

Пружну силу, діючу на тіло з боку опори (або підвісу), називають силою реакції опори. При зіткненні тіл сила реакції опори спрямована перпендикулярно поверхні зіткнення. Тому її часто називають силою нормального тиску. Якщо тіло лежить на горизонтальному нерухомому столі, сила реакції опори спрямована вертикально вгору і врівноважує силу тяжіння: $\vec{N} = -m\vec{g}$. Сила, з якою тіло діє на стіл, є вага тіла P .

В. загальному випадку, вагою називають силу, з якою тіло внаслідок притягання до Землі діє на опору, (або підвіс), що втримує тіло від вільного падіння.

У техніці часто застосовуються спіралеподібні пружини (рис. 1.2.5). При розтягуванні або стисненні пружин виникають пружні сили, які також підпорядковуються закону Гука. Коефіцієнт k

називають жорсткістю пружини. У межах застосовності закону Гука пружини здатні сильно змінювати свою довжину. Тому їх часто використовують для вимірювання сил. Пружину, розтягання якої градують в одиницях сили, називають динамометром. Слід мати на увазі, що при розтягуванні або стисненні пружини в її витках виникають складні деформації кручення і вигину.

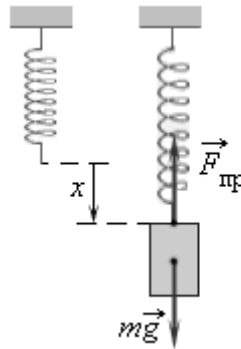


Рис. 1.2.5. Деформація розтягування пружини.

На відміну від пружин і деяких еластичних матеріалів (гума) деформація розтягу або стиску пружних стрижнів (або дротів) підкоряються лінійному закону Гука в дуже вузьких межах. Для металів відносна деформація $\varepsilon = \frac{x}{l_0}$ не повинна перевищувати 0,01.

При великих деформаціях виникають незворотні явища (плинність) і руйнування матеріалу.

Приклади сил пружності

Сила реакції опори N – сила пружності, що діє на тіло з боку опори перпендикулярно до її поверхні.

Сила натягу (F_H або T) – сила пружності, що діє на тіло з боку нитки або пружини.

Вага тіла P – сумарна сила пружності, що діє при наявності сили тяжіння на всі опори, підвіси.

За III законом Ньютона: $\vec{P} = -\vec{N}$.

1.2.5. Сили тертя

Сили тертя – сили, які виникають при зіткненні поверхонь тіл, що перешкоджають їх відносному переміщенню, і спрямовані уздовж поверхні зіткнення. Вони мають електромагнітної природу.

Сила тертя спокою F_{T0} – сила тертя, що перешкоджає виникненню руху одного тіла по поверхні іншого. У стані спокою $\vec{F}_{\partial 0} = -\vec{F}$.

$$F_{T0} = \mu_0 N, \quad (2.21)$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя спокою, N – сила нормального тиску.

Сила тертя ковзання – сила тертя, що виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого, завжди спрямована в бік, протилежний відносної швидкості тіл, що стикаються

$$F_T = \mu N, \quad (2.22)$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання. На рис. 1.2.6 представлена залежність сили тертя від прикладеної сили ($F_{\partial \partial 0 \max}$ – максимальне значення сили тертя спокою).

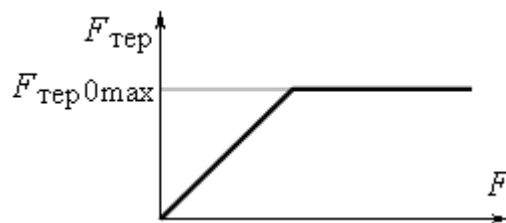


Рис. 1.2.6 – **Сила тертя спокою і сила тертя ковзання**

Коефіцієнти тертя - безрозмірні величини, які залежать від виду матеріалів тіл і характеру поверхонь, що труться

Завдання для самоконтролю

1. Похила площина, що утворює кут $\alpha = 25^\circ$ з площиною горизонту, має довжину $l = 2$ м. Тіло, що рухалось рівноприскорено, зісковзнуло з цієї площини за час $t = 2$ с. Визначити коефіцієнти тертя μ тіла про площину.

Відповідь: 0,35

2. Автомобіль з вантажем масою 5 т проходить по випуклому мосту зі швидкістю 36 км/год. З якою силою він тисне на середину мосту, якщо радіус кривизни моста 50 м?

Відповідь: 39 кН.

3. Автоцистерна з гасом рухається з прискоренням $a = 0,7 \text{ м/с}^2$. Під яким кутом α до площини горизонту розташований рівень гасу в цистерні?

Відповідь: $\approx 4^\circ$

4. Автомобіль йде по заокругленню шосе, радіус R кривизни якого дорівнює 200 м. Коефіцієнт тертя μ коліс об покриття дороги дорівнює 0,1 (ожедь) . При якій швидкості v автомобіля почнеться його занос?

Відповідь: 14 м/с.

5. Автопоїзд, що рухається з постійною швидкістю 0,2 м/с, завантажують щебенем. Швидкість завантаження постійна і становить 200 кг/с. Знайти силу тяги двигуна автопоїзда.

Відповідь: 40 Н.

1.3. РОБОТА. ПОТУЖНІСТЬ. ЕНЕРГІЯ

1.3.1. Робота

Роботою A , яку здійснює постійна сила F , називається фізична величина, що дорівнює добутку модулів сили і переміщення, помноженому на косинус кута α між векторами сили і переміщення

$$A = F \Delta r \cos \alpha \quad (3.1)$$

де α – кут між напрямками векторів сили і переміщення.

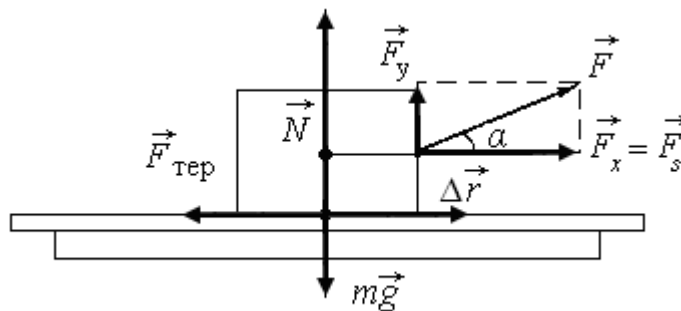


Рис. 1.3.1. Робота сили

Робота є скалярною величиною. Вона може бути як позитивною ($0 \leq \alpha < 90^\circ$), так і негативною ($90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$). При $\alpha = 90^\circ$ робота, що здійснюється силою F , дорівнює нулю.

В системі СІ робота вимірюється в джоулях (Дж). Джоуль дорівнює роботі, яку здійснює сила в 1Н на переміщенні 1 м у напрямку дії сили: $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}$.

Робота, що здійснюється змінною силою,

$$A = \int_L F(r) \cos \alpha dr, \quad (3.2)$$

або

$$A = \int_L \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}, \quad (3.3)$$

де інтегрування ведеться уздовж траєкторії, що позначається L .

Графічно робота визначається площею криволінійної фігури під графіком $F_s(x)$

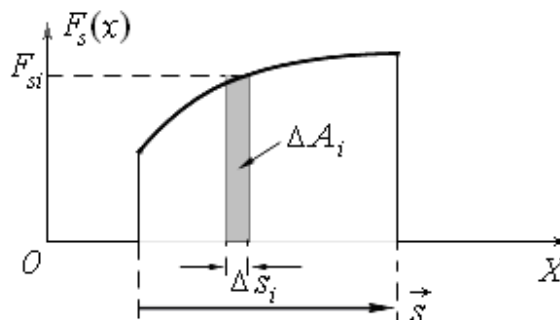


Рис. 1.3.2. Графічне визначення роботи

Прикладом сили, модуль якої залежить від координати, може служити сила пружності пружини, що підкоряється закону Гука. Для того, щоб розтягнути пружину, до неї потрібно прикласти зовнішню силу, модуль якої пропорційний подовженню пружини. Залежність модуля зовнішньої сили від координати x зображується на графіку прямою лінією (рис. 1.3.3).

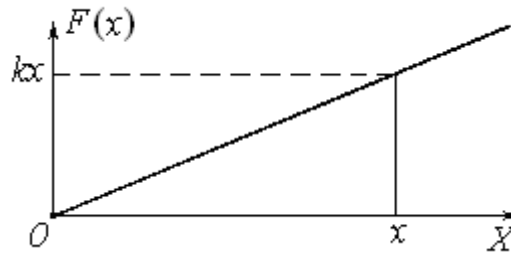


Рис. 1.3.3. Залежність модуля зовнішньої сили від координати при розтягуванні пружини

За площею трикутника на рис. 1.3.3 можна визначити роботу, яка виконана зовнішньою силою, прикладеною до вільного кінця пружини

$$A = \frac{kx^2}{2} \quad (3.4)$$

Цією ж формулою виражається робота, здійснена зовнішньою силою при стисненні пружини. В обох випадках робота пружної сили дорівнює по модулю роботі зовнішньої сили і протилежна їй за знаком.

1.3.2. Потужність. ККД

Щоб характеризувати швидкість здійснення роботи, використовують поняття *потужності*.

Середня потужність $\langle N \rangle$ - фізична величина, що визначається відношенням роботи ΔA , яку здійснюють силою або системою сил протягом кінцевого проміжку часу Δt , до цього проміжку часу:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Потужність (миттєва потужність) N – фізична величина, що дорівнює межі, до якої прагне середня потужність при нескінченім зменшенні проміжку часу Δt

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad (3.6)$$

де dA - робота, що здійснюється за проміжок часу dt .

Важливою формулою для роботи є формула, що дає змогу зв'язати роботу, прикладену силу і швидкість тіла

$$N = Fv \cos \alpha. \quad (3.7)$$

Одиниця потужності - *ват* (Вт): 1Вт - потужність, при якій за час 1с відбувається робота 1Дж: 1Вт = 1Дж/с.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) - відношення корисної роботи (потужності) до витраченої, визначається у процентах.

$$\eta = \frac{A_{\Pi}}{A_3} \cdot 100\% = \frac{N_{\Pi}}{N_3} \cdot 100\%. \quad (3.8)$$

1.3.3. Механічна енергія. Кінетична енергія

Енергія – скалярна величина, що являється єдиною мірою різних форм руху матерії і мірою переходу руху матерії з одних форм в інші.

Механічна енергія W характеризує рух і взаємодії тіл та є функцією швидкостей і взаємного розташування тіл. Вона дорівнює сумі кінетичної (W_K) і потенційної (W_{Π}) енергій. Одиниця виміру кінетичної і потенційної енергії - *джоуль* (Дж).

$$W = W_K + W_{\Pi} \quad (3.9)$$

Кінетична енергія матеріальної точки або тіла є мірою їх механічного руху, яка залежить від швидкості їх руху в даній інерційній системі відліку. Кінетична енергія матеріальної точки (або тіла) масой m , що рухається поступально зі швидкістю v

$$W_K = \frac{mv^2}{2}, \quad (3.10)$$

або

$$W_K = \frac{p^2}{2m}, \quad (3.11)$$

де p – імпульс тіла.

Теорема про кінетичну енергію: зміна кінетичної енергії тіла при його переході з одного стану руху в інше дорівнює роботі всіх сил, діючих на тіло

$$A = \Delta W_K = W_{K2} - W_{K1} \quad (3.12)$$

або

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (3.13)$$

де m - маса тіла; v_1 і v_2 – відповідно швидкість у стані 1 і у стані 2.

Кінетична енергія тіла масою m , що рухається зі швидкістю v , дорівнює роботі, яку повинна зробити сила, діюча на тіло, що покоїться, щоб надати йому цю швидкість.

1.3.4. Потенційна енергія

Механічне взаємодія може здійснюватися як між безпосередньо контактуючими тілами (наприклад, при ударі, терті, тиску один на одного і т. п.), так і між віддаленими тілами. Особлива форма матерії, що зв'язує частинки речовини в єдині системи і передає з кінцевою швидкістю дію одних частинок на інші, називається *фізичним полем* або просто *полем*. Взаємодія між віддаленими тілами здійснюється за допомогою пов'язаних з ними гравітаційних і електромагнітних полів. Якщо на частинку у кожній точці простору діє деяка сила, то говорять, що ця частинка знаходиться у *силовому полі*. Наприклад, поблизу від поверхні Землі частинка знаходиться у полі сил тяжіння - у кожній точці простору на неї діє сила mg .

Поле, діюче на матеріальну точку, називається *стаціонарним* полем, якщо воно не змінюється з плином часу.

Силоне поле називається *однорідним*, якщо сили, що діють на тіло в кожній точці поля, однакові за величиною і напрямком.

Силоне поле називається *потенційним*, а діючі у ньому сили - *консервативними*, якщо робота цих сил при переміщенні матеріальної точки залежить тільки від початкового і кінцевого положення точок в просторі і не залежить від форми траєкторії. Консервативними силами є сили тяжіння, пружності. Робота, що здійснюється під дією консервативних сил, у разі руху частинки по замкненому колу дорівнює нулю

$$A = \oint_L F(r) \cos \alpha dr = 0. \quad (3.14)$$

Усі центральні сили консервативні. Механічні системи, на тіла яких діють лише консервативні сили (внутрішні та зовнішні), називаються консервативними системами.

Потенційною енергією називається частина механічної енергії, що залежить від взаємного розташування частин системи і від положення системи в зовнішньому силовому полі. Потенційна енергія системи, подібно кінетичній енергії, є функцією стану системи.

Потенційна енергія тіла в даній точці - скалярна величина, що дорівнює роботі, яку здійснюють консервативні сили при переміщенні тіла з цієї точки в точку, прийняту за нуль відліку потенційної енергії. Знак потенційної енергії та її абсолютна величина залежать від вибору нульового рівня. Якщо тіло переходить з точки 1 у точку 2, робота сил поля дорівнює різниці значень потенційної енергії у цих точках

$$A = -\Delta W_{\text{і}} = W_{\text{і} 1} - W_{\text{і} 2}. \quad (3.15)$$

Потенційна енергія тіла $W_{\text{П}}$ і сила $\vec{F}$, що діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням

$$\vec{F} = -\text{grad} W_{\text{П}} \quad (3.16)$$

або

$$\vec{F} = -(\vec{i} \frac{\partial W_{\text{і}}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial W_{\text{і}}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial W_{\text{і}}}{\partial z}), \quad (3.17)$$

де - $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ одиничні вектори (орти). В окремому випадку, коли поле сил має сферичну симетрію (як, наприклад, гравітаційне поле),

$$F = -\frac{\partial W_{\text{П}}}{\partial r}. \quad (3.18)$$

Для прикладу отримаємо формулу потенційної енергії гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (або тіл) масами m_1 і m_2 , що знаходяться на відстані r одна від одної.

Сила взаємного тяжіння двох матеріальних точок

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.19)$$

тоді прирощення потенційної енергії при зміні відстані між частинками від r_1 до r_2 буде дорівнювати

$$\Delta W_{\text{і}} = W_{\text{і} 2} - W_{\text{і} 1} = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G \frac{m_1 m_2}{r_1} - G \frac{m_1 m_2}{r_2}. \quad (3.20)$$

Потенційна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок масами m_1 і m_2 (або куль з масою, яка розподілена сферично симетрично), що знаходяться на відстані r один від одного

$$W_{\text{П}} = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \text{const}. \quad (3.21)$$

Якщо потенційну енергію нескінченно віддалених один від одного матеріальних точок прийняти рівною нулю, то $\text{const}=0$.

Потенційна енергія тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння

$$W_{\text{і}} = mgh \quad (3.22)$$

де h – висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий для відліку потенційної енергії.

Ця формула справедлива за умови $h \ll R$, де R – радіус Землі.

Потенційна енергія пружно деформованого тіла (стислої або розтягнутої пружини)

$$W_{\text{і}} = \frac{kx^2}{2}, \quad (3.23)$$

де k – жорсткість, x – абсолютна деформація.

1.3.5. Закон збереження енергії

Закон збереження енергії в механіці виконується в замкненій системі, в якій діють тільки консервативні сили, і записується у вигляді

$$W_{\text{К}} + W_{\text{П}} = \text{const}. \quad (3.24)$$

Повна механічна енергія замкненої системи тіл, що взаємодіють консервативними силами, залишається незмінною.

Це - фундаментальний закон природи. Він є слідством однорідності часу - інваріантності фізичних законів щодо вибору початку відліку часу.

Якщо система тіл не замкнена, її повна механічна енергія змінюється на величину роботи зовнішньої сили.

В системі, в якій діють також неконсервативні сили, наприклад, сили тертя, повна механічна енергія системи не зберігається. *Дисипативні системи* - системи, в яких механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в інші (немеханічні) форми енергії.

Однак при "зникненні" механічної енергії завжди виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду. Таким чином, енергія ніколи не зникає і не з'являється знову, вона лише перетворюється з одного виду в інший. В цьому полягає фізична сутність закону збереження і перетворення енергії - сутність незнищенності матерії та її руху.

1.3.6. Пружний та непружний удари

Удар - явище зміни швидкостей тіл за дуже малий проміжок часу при їх зіткненні.

Пряма, яка проходить через точку дотику тіл і нормальна до поверхні їхнього зіткнення, називається *лінією удару*. Удар називається *центральним*, якщо тіла до удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їх центри мас.

Абсолютно пружний удар – зіткнення двох тіл, в результаті якого в обох взаємодіючих тілах не залишається ніяких деформацій і вся кінетична енергія, якою володіли тіла до удару, після удару знову перетворюється в кінетичну енергію. Для абсолютно пружного удару виконуються закон збереження імпульсу і закон збереження кінетичної енергії (рис. 1.3.4).

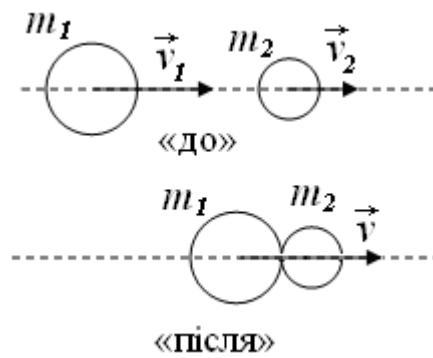


Рис. 1.3.4. Абсолютно пружний удар

Застосовуючи закони збереження енергії та імпульсу до прямого пружного удару куль, отримуємо формули швидкостей куль після абсолютно пружного удару

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.25)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad (3.26)$$

де m_1 і m_2 - маси куль; v_1 і v_2 - їх швидкості до удару

При *абсолютно непружному ударі* відбувається втрата кінетичної енергії, після удару тіла рухаються як єдине ціле із загальною швидкістю (рис. 1.3.5). Деформація тіл після удару зберігається.

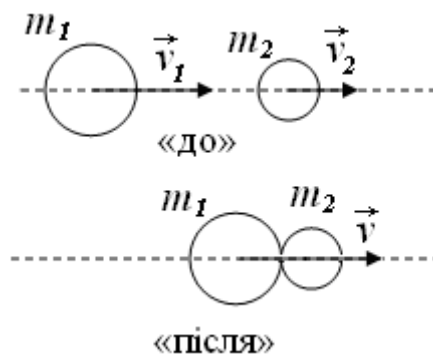


Рис. 1.3.5. Абсолютно непружний удар

Із закону збереження імпульсу отримуємо формулу швидкості куль після абсолютно непружного удару

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.27)$$

Внаслідок деформації відбувається «втрата» кінетичної енергії, що перейшла в теплову або інші форми енергії. Ця «втрата» є різницею кінетичної енергії тіл до і після удару:

$$\Delta W_{\text{Е}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (3.28)$$

Однак слід відзначити, що така «втрата» енергії часто буває корисною, так, наприклад, при забиванні палі, при ковці виробів, тощо.

Завдання для самоконтролю

1. Обчислити роботу A , здійснену на шляху $S=12$ м рівномірно зростаючою силою, якщо на початку шляху сила $F_1 = 10$ Н, в кінці шляху $F_2 = 46$ Н.

Відповідь: 336 Дж.

2. Матеріальна точка масою $m = 2$ кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі Ox згідно рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с², $D = -0,2$ м/с³. Знайти потужність N , що розвиває сила в момент часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с.

Відповідь: 0,32 Вт, 56 Вт.

3. Мотоцикліст їде по горизонтальній дорозі. Яку найменшу швидкість v він повинен розвинути, щоб, виключивши мотор, проїхати по треку, що має форму «мертвої петлі» радіусом $R = 4$ м? Тертям і опором повітря знехтувати.

Відповідь: 14 м/с.

4. Автомобіль масою 8 т рухається зі швидкістю 36 км/год. Знайти гальмівний шлях на горизонтальній ділянці шляху, а також на підйомі і на спуску, якщо крутизна ухилу $\text{tg}\alpha = 0,07$. Силу опору у всіх випадках вважати рівною 25 кН.

Відповідь: 16 м; 13 м; 21 м.

5. Дві непружних кулі масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 3$ кг рухаються зі швидкостями відповідно $v_1 = 8$ м/с і $v_2 = 4$ м/с. Визначити збільшення ΔU внутрішньої енергії куль при їх зіткненні в двох випадках: 1) менша куля наганяє більшу; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

Відповідь: 1) 9,6 Дж; 2) 86,4 Дж.

1.4. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

1.4.1. Момент інерції

При розгляданні складного руху абсолютно твердого тіла ми користуємося можливістю представити цей рух як накладання поступального руху і обертального руху навколо нерухомої осі.

Момент інерції тіла – міра інертності твердих тіл при обертальному русі.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання називається добуток маси цієї точки на квадрат відстані від осі:

$$J = mr^2, \quad (4.1)$$

де m – маса точки; r – її відстань від осі обертання.

Моментом інерції системи відносно осі обертання називається фізична величина, що дорівнює сумі творів мас матеріальних точок системи на квадрати їх відстаней до даної осі

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2, \quad (4.2)$$

де Δm_i – маса i –го елемента тіла; r_i – відстань цього елемента від осі обертання; n – число елементів тіла.

У разі суцільного абсолютно твердого тіла ця сума зводиться до інтегралу

$$J = \int r^2 dm, \quad (4.3)$$

де інтегрування проводиться за обсягом тіла.

Якщо тіло однорідне, тобто його густина ρ однакова по всьому об'єму, то $dm = \rho dV$, і

$$J = \rho \int r^2 dV, \quad (4.4)$$

де V – об'єм тіла.

Одиниця виміру моменту інерції - $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Момент інерції – величина адитивна: момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює сумі моментів інерції частин тіла

відносно тієї ж вісі.

Якщо відомий момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас, то момент інерції відносно будь-якої іншої паралельної вісі визначається теоремою Штейнера:

момент інерції тіла J щодо довільної вісі дорівнює моменту його інерції відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла J_0 , та добутку маси тіла на квадрат відстані d між осями:

$$J = J_0 + md^2. \quad (4.5)$$

Момент інерції визначається формою і розмірами тіл. Значення моментів інерції для деяких тіл (тіла вважаються однорідними, m – маса тіла) наведені в таблиці 1.4.1.

Таблиця 1.4.1

Моменти інерції тіл правильної геометричної форми

Тіло	Вісь , щодо якої визначається момент інерції	Формула моменту інерції
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l	Проходить через центр ваги стрижня перпендикулярно стрижню	$J = \frac{1}{12} ml^2$
	Проходить через кінець стрижня перпендикулярно стрижню	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R і масою m	Проходить через центр перпендикулярно площини підстави	$J = mR^2$
Круглий однорідний диск (циліндр) радіусом R і масою m	Проходить через центр диска перпендикулярно площини підстави	$J = \frac{1}{2} mR^2$
Однорідний куля масою m і радіусом R	Проходить через центр кулі	$J = \frac{2}{5} mR^2$

1.4.2. Момент сили і момент імпульсу

Для характеристики зовнішньої механічної дії на тіло, що приводить до зміни обертального руху тіла, вводять поняття моменту сили. Моментом сили відносно точки O називається векторна величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора, проведеного з точки O в точку A прикладення сили, на силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (4.6)$$

Модуль моменту сили $M = Fr \sin \alpha = Fl$, де $l = r \sin \alpha$ – плече сили – найкоротша відстань між лінією дії сили і точкою O ; α – кут між $\vec{r}$ і $\vec{F}$ (рис. 1.4.1).

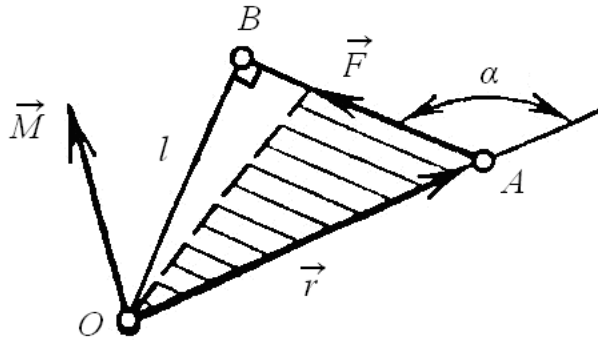


Рис. 1.4.1. До визначення моменту сили

Моментом сили відносно нерухомої осі z називається скалярна величина M_z , що дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту сили, знайденого щодо довільної точки O даної осі z .

Момент сили $\vec{F}$, що діє на тіло, щодо осі обертання

$$M = F_{\perp} l, \quad (4.7)$$

де $F_{\perp}$ - проекція сили $\vec{F}$ на площину, перпендикулярну осі обертання; l – плече сили (найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили).

Одиниця виміру моменту сили - Н·м.

Моментом імпульсу відносно нерухомої точки O називається фізична величина, яка визначається векторним добутком

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]. \quad (4.8)$$

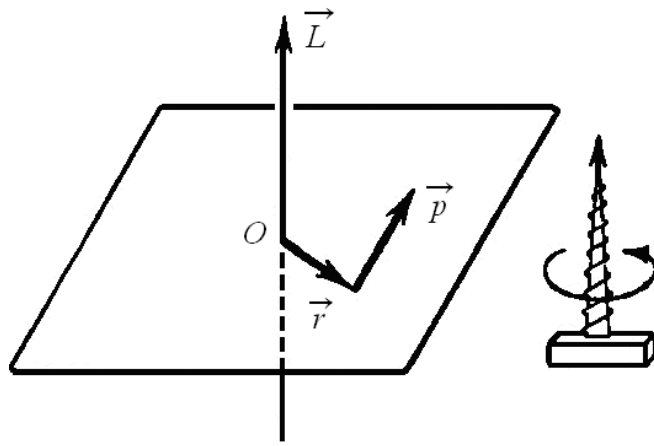


Рис. 1.4.2. До визначення моменту імпульсу

Моментом імпульсу відносно нерухомої осі z називається скалярна величина L_z , що дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу, визначеного відносно довільної точки O даної осі. Значення моменту імпульсу L_z не залежить від положення точки O на осі z .

При обертанні абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі z кожна точка тіла рухається по колу постійного радіуса r зі швидкістю, перпендикулярній радіусу (рис. 1.4.2). Момент імпульсу окремої частинки дорівнює $L_i = m_i v_i r_i$ і спрямований по осі в сторону, яка визначається правилом правого гвинта (збігається з напрямком вектора кутової швидкості ω).

Моментом імпульсу твердого тіла відносно якої-небудь осі називається сума моментів імпульсу окремих частинок

$$L = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = J_z \omega. \quad (4.9)$$

Таким чином, момент імпульсу тіла, що обертається, відносно осі z

$$L = J_z \omega. \quad (4.10)$$

Момент імпульсу вимірюється в $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

1.4.3. Основний закон динаміки обертального руху

Якщо взяти похідну від моменту імпульсу (1.4.8) за часом, отримуємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r}, \vec{p}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{v}, \vec{p}] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \quad (4.11)$$

З урахуванням того, що $\vec{v} \parallel \vec{p}$, будемо мати $[\vec{v}, \vec{p}] = 0$. За другим законом Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, тому маємо:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (4.12)$$

Це рівняння носить назву *основного рівняння обертального руху*. Воно виконується як для однієї матеріальної точки, так і для будь-якого абсолютно твердого тіла, оскільки таке тіло можна вважати таким, що складається з багатьох матеріальних точок.

У разі постійного моменту інерції основне рівняння динаміки обертового руху приймає вид

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \quad (4.13)$$

де ε - кутове прискорення.

Елементарна робота моменту сили M при повороті тіла на кут $d\varphi$ може бути обчислена за формулою

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}. \quad (4.14)$$

Робота постійного моменту сили M , який діє на тіло, що обертається

$$A = M\Delta\varphi, \quad (4.14)$$

де $\Delta\varphi$ - кут повороту тіла.

Миттєва потужність P , що розвивається при обертанні тіла

$$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}. \quad (4.15)$$

Кінетична енергія тіла, що обертається

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (4.16)$$

Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання, складається з енергії поступального і обертального рухів

$$W_K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (4.17)$$

де v_C - швидкість центру мас тіла; $\frac{J\omega^2}{2}$ - кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр мас.

1.4.4. Закон збереження моменту імпульсу

У замкнутій системі $\vec{M} = 0$, отже, і $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, тобто $\vec{L} = \text{const}$

Закон збереження моменту імпульсу: момент імпульсу замкнутої системи зберігається, тобто не змінюється з часом

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \text{const}, \quad (4.18)$$

де $\vec{L}_i$ - момент імпульсу i -го тіла що входить до складу системи.

Це - фундаментальний закон природи. Він є наслідком ізотропності простору (інваріантності фізичних законів щодо вибору напрямку осей координат системи відліку).

Закон збереження моменту імпульсу для двох взаємодіючих тіл

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J'_1\omega'_1 + J'_2\omega'_2 \quad (4.19)$$

де $J_1, J_2, \omega_1, \omega_2$ - моменти інерції і кутові швидкості тіл до взаємодії; $J'_1, J'_2, \omega'_1, \omega'_2$ - ті ж величини після взаємодії.

Закон збереження моменту імпульсу для одного тіла, момент інерції якого змінюється

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \quad (4.20)$$

де J_1 і J_2 - початковий і кінцевий моменти інерції; ω_1 і ω_2 - початкова і кінцева кутові швидкості тіла.

Завдання для самопідготовки

1. Через блок, що має форму диска, перекинутий шнур. До кінців шнура прив'язали важелі масою $m_1 = 100$ г і $m_2 = 110$ м. З яким

прискоренням a будуть рухатися важелі, якщо маса m блоку дорівнює 400 г? Тертя при обертанні блоку мізерно мало.

Відповідь: 0,24 м/с².

2. Вал масою $m = 100$ кг і радіусом $R = 5$ см обертався з частотою $n = 8$ с⁻¹. До циліндричної поверхні вала притиснули гальмівну колодку з силою $F = 40$ Н, під дією якої вал зупинився через $t = 10$ с. Визначити коефіцієнт тертя μ .

Відповідь: 0,31.

3. Визначити лінійну швидкість v центру кулі, що скотилася без ковзання з похилої площини висотою $h = 1$ м.

Відповідь: 3,74 м/с.

4. Куля масою $m = 10$ кг і радіусом $R = 20$ см обертається навколо осі, що проходить через його центр. Рівняння обертання кулі має вигляд $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де $B = 4$ рад/с², $C = -1$ рад/с³. Знайти закон зміни моменту сил, що діють на кулю. Визначити момент сил M у момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: -0,64 Н·м.

1.5. ЕЛЕМЕНТИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ МЕХАНІКИ. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

1.5.1. Принцип відносності Галилея. Перетворення Галилея

Для рішення задач, пов'язаних із переходом від однієї системи відліку до іншої, у класичній нерелятивістській фізиці застосовується *принцип відносності Галилея*: всі інерційні системи повністю рівноправні щодо причин прискорень. У всіх інерційних системах відліку закони класичної механіки мають один і той же вигляд.

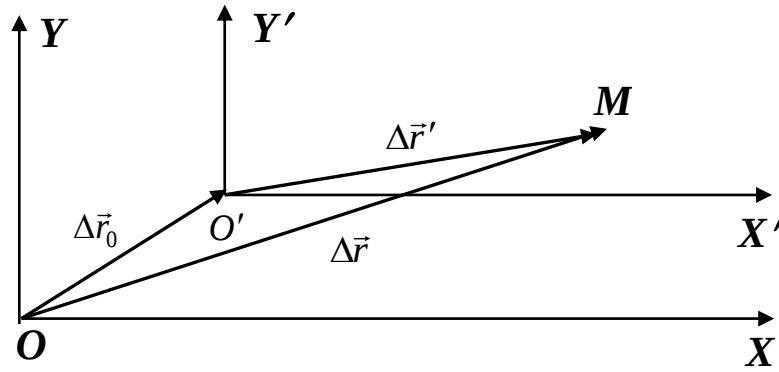


Рис. 1.5.1. Рухома і нерухома системи відліку

Роздивимося две інерціальні системи відліку. На рис. 5.1 представлені: $K(XOY)$ – нерухома система координат; $K'(X'O'Y')$ – система координат, пов'язана зі спостерігачем на тілі, що переміщується щодо системи координат $K(XOY)$.

Радіус-вектор точки M в нерухомій системі $\vec{r}$ пов'язаний з радіусом-вектором $\vec{r}'$ у рухомій системі співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0, \quad (5.1)$$

де $\vec{r}_0$ – радіус-вектор початку координат системи K' відносно системи K . Припускаючи, що система K' рухається відносно системи K з постійною швидкістю ($\vec{u} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \text{const}$), а також, що згідно Галілею *хід часу не залежить від відносного руху систем відліку*, будемо мати перетворення, які мають назву *перетворень координат Галілея*. В скалярній формі:

$$\begin{aligned} x &= x' + u_x \\ y &= y' + u_y \\ z &= z' + u_z \\ t &= t' \end{aligned} \quad (5.2)$$

Диференціюючи рівняння (5.2) по часу, одержимо зв'язок між швидкостями тіл у системах K і K' , що відомий як формула додавання швидкостей у класичній механіці

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (5.3)$$

Аналогічно, застосувавши операцію диференціювання до рівняння (5.3), будемо мати

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (5.4)$$

Відсіля витікає, що прискорення будь-якого тіла у всіх системах відліку, які рухаються друг відносно друга рівномірно і прямолінійно, виявляються одними й тими же. А поскільки основне рівняння механіки (2.2) вміщує тільки прискорення, то стає очевидним, що і сили, які діють на тіло у різних інерціальних системах, однакові. Тобто, рівняння класичної нерелятивістської механіки не змінюються при переході від однієї інерціальної системи до іншої, і *ніякими механічними опитами неможливо встановити, знаходиться ця система в стані спокою чи рухається прямолінійно і рівномірно.*

1.5.2. Спеціальна теорія відносності. Постулати Ейнштейна

Релятивістська фізика відмовилася від трактовки Галилея часу, як абсолютно протікаючого у всіх системах. Створена А. Ейнштейном у 1905 році спеціальна теорія відносності (СТВ) пов'язала в єдине ціле простір і час. Основу цієї теорії утворюють два постулати.

Перший постулат Ейнштейна (принцип відносності).

Усі закони природи інваріантні (незмінні) стосовно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Перший постулат – це узагальнення принципу відносності класичної механіки (принципу відносності Галілея) на всі процеси в природі, інакше кажучи, всі інерціальні системи відліку еквівалентні (рівноправні) по своїх фізичних властивостях, тобто ніякі опити в принципі не дозволяють виділити ні одну з них як переважну – абсолютну.

Другий постулат Ейнштейна (принцип сталості швидкості світла).

Швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача й однакова у всіх інерціальних системах відліку.

Другий постулат стверджує, що сталість швидкості світла – фундаментальна властивість природи. Якщо всі інші швидкості змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, то швидкість світла у вакуумі – величина інваріантна

(незмінна).

Всі положення СТВ базуються на експерименті і блискуче підтверджуються експериментом. Так, другий постулат А. Ейнштейн сформулював на основі опитів Майкельсона – Морлі (1881-1887 р.), які з'ясували, що немає різниці між часом розповсюдження світла паралельно і перпендикулярно к напрямку руху Землі.

1.5.3. Перетворення Лоренца. Кінематичні наслідки СТВ

Аналіз постулатів СТВ свідчить, що перетворення Галилея несумісні з ними. Так, закони класичної електродинаміки, сформульовані Дж. Максвелом, виявилися неінваріантними щодо перетворень Галилея, тобто мали різний вигляд у різних ІСВ; класичний закон додавання швидкостей не відповідав другому постулату Ейнштейна тощо.

Як було з'ясовано, перетворення, які б задовольняли постулатам СТВ, були знайдені Г.А.Лоренцом у 1904 році, але їх фізична суть була розкрита Ейнштейном.

Припустимо, що система відліку K' рухається відносно системи K зі швидкістю u , яка спрямована уздовж загальної для обох систем осі x . Тоді перехід від інерціальної системи K до іншої ІСВ K' здійснюється за допомогою перетворень Лоренца у такому вигляді

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}, \quad (5.5)$$

$$y' = y, \quad z' = z, \quad (5.6)$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}. \quad (5.7)$$

Перетворення Лоренца симетричні і відрізняються знаком при u , якщо роздивляється перехід від системи K' до системи K .

Перетворення Лоренца задовольняють принципу відповідності, тобто при $\beta = u^2 / c^2 \ll 1$ переходять у перетворення координат Галилея.

При $u > c$ перетворення Лоренца втрачають сенс, тобто рух фізичних тіл із швидкістю, що перебільшує швидкість світла

неможливий.

Просторові і часові перетворення не являються незалежними. Перетворення Лоренца зв'язують просторові координати і час в одне нерозривне ціле, утворюючи так званий *чотиривимірний простір-час*.

Перерахуємо наслідки, які випливають із перетворень Лоренца.

Відносність одночасності.

Роздивимось випадок, коли у системі K дві події A і B відбуваються в одній і тій же точці ($x_A = x_B$) одночасно ($t_A = t_B$). Для даних умов, відповідно до перетворень Лоренца, $x'_A = x'_B$ і $t'_A = t'_B$, тобто ці події в системі K' є одночасними й просторово співпадаючими.

Якщо в системі K події просторово роз'єднані ($x_A \neq x_B$), але одночасні ($t_A = t_B$), то, відповідно до перетворень Лоренца, ці події в системі K' , залишаючись просторово роз'єднаними ($\tilde{o}'_A \neq \tilde{o}'_B$), виявляються й неодночасними ($t'_A \neq t'_B$).

Поняття одночасності подій відносні, тобто залежить від системи відліку.

Довжина тіл у різних системах відліку (лоренцеве скорочення довжини).

Нехай тіло (стрижень) рухається разом з системою K' відносно системи K з швидкістю u вздовж осі x . В системі відліку K' , щодо якої стрижень покоїться, його власна довжина $l_0 = x'_2 - x'_1$ (стрижень розташований уздовж осі x). Згідно перетворень Лоренца в системі K , щодо якої стрижень рухається його довжина

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}. \quad (5.8)$$

Таким чином, довжина стрижня, що рухається, менше довжини, обмірюваної в системі, щодо якої він знаходиться у спокої (менше власної довжини) і в різних інерціальних системах відліку різна. Із рівнянь (5.3) виходить, що поперечні розміри тіла не залежить від швидкості руху й однакові у всіх інерціальних системах відліку.

Лоренцеве скорочення довжини – ефект кінематичний і взаємний: якщо в системах K і K' є два однакових стрижні, то з погляду кожної з них коротше той стрижень, що рухається щодо неї.

Тривалість подій у різних системах відліку (релятивістське

вповільнення часу).

Якщо в системі відліку K' (вона рухається щодо системи K зі швидкістю u вздовж осі x) інтервал часу між двома подіями, що відбуваються в одній і тій же точці, дорівнює $\tau_0 = t'_2 - t'_1$, то інтервал часу між цими подіями в системі K ($\tau = t_2 - t_1$) згідно перетворень Лоренца дорівнює

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - u^2 / c^2}. \quad (5.9)$$

Таким чином, тривалість події, що відбувається в деякій точці, найменша в тієї інерціальній системі відліку, щодо якої ця система нерухлива. Отже, годинники, що рухаються відносно інерціальної системи відліку, ідуть повільніше годинників, що знаходяться у спокої.

Цей ефект кінематичний і взаємний: якщо з точки погляду K -системи повільніше йдуть годинники K' -системи, то з точки погляду K' -системи, навпаки, повільніше йдуть годинники K -системи (причому в тім же відношенні).

Релятивістський закон додавання швидкостей.

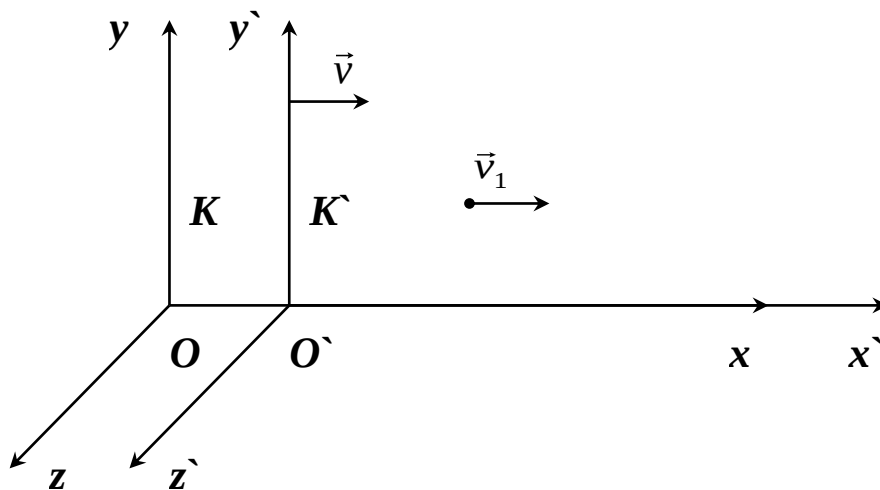


Рис. 1.5.2. Рух тіла у системах відліку K і K'

Нехай тіло рухається уздовж осі x' K' -системи зі швидкістю v_1 (рис. 1.5.2). В свою чергу система K' рухається щодо системи K зі швидкістю u . Вісі x і x' збігаються, а вісі y і y' , z і z' паралельні. Із перетворень Лоренца отримуємо:

$$v_2 = \frac{v_1 + u}{1 + \frac{v_1 u}{c^2}}, \quad (5.10)$$

де v_1 – швидкість тіла відносно K' ; v_2 – швидкість цього ж тіла відносно K .

Якщо $u \ll c$ і $v_1 \ll c$, то

$$v_2 = v_1 + u \quad (5.11)$$

і ми маємо закон додавання швидкостей у класичній механіці.

Якщо світловий імпульс у K' -системі рухається уздовж вісі x' зі швидкістю $v_1 = c$, то в системі відліку K

$$v_2 = c. \quad (5.12)$$

Тобто з перетворень Лоренца витікає, що *неможливо досягнути швидкості більшої, ніж швидкість світла у вакуумі ні в якому випадку.*

1.5.4. Релятивістська динаміка

Релятивістський імпульс

В релятивістській динаміці, як і в механіці Ньютона, імпульс матеріальної частинки відіграє важливу роль. Він також пропорційний її масі і співпадає по напрямку із її швидкістю $\vec{v}$. Однак, на різницю від ньютонівської механіки *релятивістський імпульс* є нелінійною функцією швидкості, а саме

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad (5.13)$$

де m_0 – так звана маса спокою.

У граничному випадку, коли $v \ll c$, визначення релятивістського імпульсу переходить у відоме визначення для нерелятивістського імпульсу $\vec{p} = m_0 \vec{v}$.

Основний закон релятивістської механіки

На підставі закону збереження релятивістського імпульсу можна

встановити основний закон релятивістської динаміки у вигляді

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right). \quad (5.14)$$

Це рівняння в такому виді, де праворуч знаходиться похідна від релятивістського імпульсу, задовольняє першому постулату Ейнштейна.

На відміну від нерелятивістського визначення сили ми бачимо, що напрямок сили у загальному випадку не збігається з напрямком прискорення. Дійсно, рівняння (5.14) можна записати таким чином

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

де позначено $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

Кінетична і повна енергія тіла (частинки)

Виконання законів збереження імпульсу і енергії сумісне з релятивістськими уявленнями о просторі і часі тільки тоді, коли повна енергія тіла приймає вигляд

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = mc^2. \quad (5.15)$$

Повна енергія в різних системах відліку різна.

Якщо тіло нерухомо, то його енергія

$$E_0 = m_0 c^2, \quad (5.16)$$

де E_0 – енергія спокою, яка не залежить від вибору ІСВ.

Класична нерелятивістська механіка енергію спокою не враховує, вважаючи, що при $v = 0$ енергія тіла у стані спокою дорівнює нулю.

Повна енергія у вигляді (5.15) – це сума кінетичної енергії й енергії спокою тіла (частинки). В повну енергію й енергію спокою не входить потенційна енергія тіла в зовнішньому силовому полі.

Формули (5.15) і (5.16) демонструють нерозривний зв'язок між енергією як мірою руху і масою як мірою кількості матерії, що підкреслює єдність матерії та руху як форми її існування.

Кінетична енергія тіла (частинки) дорівнює

$$E_k = E - E_0 = m_0 c^2 \left(1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (5.17)$$

Нескладно довести, що при $v \ll c$ формула (5.17) переходить у формулу для визначення кінетичної енергії поступального руху частинки у нерелятивістському випадку.

Повна енергія частинки і її імпульс пов'язані співвідношенням

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (5.18)$$

або в скалярному вигляді

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (5.19)$$

1.5.5. Інваріанти СТВ

Створювач спеціальної теорії відносності А. Ейнштейн називав свою теорію «теорією інваріантів». Дійсно, у класичній нерелятивістській фізиці існують чимало фізичних величин, які не змінюються при переході від однієї ІСВ до іншої, тобто являються інваріантами; наприклад, просторові і часові інтервали двох подій, маса. Виявляється, що і в релятивістській фізиці при $v \leq c$ такі інваріанти теж існують, і вони ілюструють ще більш глибокий зв'язок між фізичними величинами і явищами.

По-перше, інваріантом являється універсальна швидкість поширення взаємодій, що дорівнює швидкості світла у вакуумі

$$c = \text{invar.}$$

По-друге, інваріантами предстають поперечні координати і розміри тіл (відносно руху, див. (5.6)):

$$y' = y, \quad \Delta y' = \Delta y = \text{invar}$$

$$z' = z, \quad \Delta z' = \Delta z = \text{invar}$$

По-третє, інваріантною кінематичною величиною є *просторово-часовий інтервал між двома подіями*

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2} = \text{invar}, \quad (5.20)$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta l^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$.

Нарешті, відмітимо, що важливим динамічним інваріантом являється енергія спокою

$$E_0 = m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - p^2 c^2} = \text{invar}. \quad (5.21)$$

1.5.6. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції

Спеціальна теорія відносності охоплює тільки інерціальні системи відліку (ІСВ). Однак, в реальному середовищі, яке оточує людину, в основному, *існують системи відліку, що рухаються з прискоренням, тобто являються неінерціальними* системами відліку (НСВ). Опит показує, що рух тела (поступальний, обертальний або складний) і його траєкторія може суттєво відрізнитися при розгляданні відносно ІСВ і НСВ.

Звісно, що закони Ньютона виконуються тільки в ІСВ. Для того, щоб другий закон Ньютона у звичайному вигляді застосувати в НСВ, приходить вводити деякі сили особого роду – так звані сили інерції.

Сили інерції повинні бути такими, щоб разом із силами $\vec{F}$, обумовленими дією тіл одне на одне, вони надавали тілу прискорення $\vec{a}'$, яким воно володіє в НСВ. Тоді II закон Ньютона буде мати вигляд

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{з}_1}, \quad (5.22)$$

або враховуючи, що $\vec{F} = m\vec{a}$ ($\vec{a}$ - прискорення в ІСВ), маємо

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{\text{з}_1}, \quad (5.23)$$

де $\vec{F}_{\text{з}_1} = -m\vec{a} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]] - m[\vec{\mathcal{E}}] - 2m[\vec{\omega}\vec{v}']$ - сила інерції, яка складається із додатків, обумовлених відповідно лінійним прискоренням, обертальним рухом, обертальним рухом с прискоренням, а також силою Коріоліса (останній додаток), що виникає при рухові об'єкту в НСВ зі швидкістю $\vec{v}'$.

Враховуючи, що сили інерції спричиняються не взаємодією тіл, а прискореним рухом НСВ, вони с точки зору ньютонівської механіки являються *фіктивними* і не підкоряються III закону Ньютона.

Сили інерції для тіл в НСВ є зовнішніми, тому в НСВ не виконуються закони збереження (НСВ вважається незамкнутою системою).

Сили інерції пропорційні масам тіл, тобто надають рівним масам однакові прискорення, і цим самим вони *аналогічні силам гравітаційної взаємодії*. Так, наприклад, ніяким експериментом усередині ракети людина не може з'ясувати, чи рухається система у однорідному полі тяжіння Землі з вимкнутими двигунами, чи, знаходячись у відкритому космосі, рухається з прискоренням $\vec{a}_0 = -\vec{g}$.

Взагалі, згідно *локальному принципу еквівалентності*, усі фізичні явища у полі сил тяготіння протікають цілковито також, як і у відповідному полі сил інерції, якщо напруженості обох полів у відповідних точках простору співпадають, а інші початкові умови для тіл, що розглядаються, однакові.

Відмітимо, що термін локальний означає, що принцип справедлив тільки для малої області простору, де виконується умова $F_{\text{гп}} = \text{const}$.

Порівняння гравітаційної і інертної маси експериментально розглядалось починаючи з 1887 року (опити Етвеша) і до наших днів. З'ясовано, що з відносною похибкою, яка дорівнює 10^{-12} , ми можемо зтверджувати – ці маси є тотожними.

1.5.7. Елементи загальної теорії відносності

Щоб перейти від формулювання локального принципу еквівалентності до необмеженого простору А. Ейнштейн створив польову теорію тяжіння – загальну теорію відносності (ЗТВ).

Він запропонував нову модель Всесвіту, яка являла собою викривлений чотиривимірний простір-час і не володіла такими властивостями як однорідність і ізотропність. На основі такої моделі Ейнштейн сформулював узагальнений принцип відносності як *перший постулат ЗТВ*.

1. Будь-які явища природи однакові у всіх системах відліку (ІСВ та НСВ).

Другий постулат ЗТВ є спільним із СТВ.

2. Швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача й однакова у всіх системах відліку.

ЗТВ (сучасна теорія тяжіння) являє собою єдину теорію простору, часу і тяжіння. Згідно неї геометричні властивості

простору-часу залежать від розподілу у просторі тяготіючих мас і їх руху. Тіла, які створюють гравітаційне поле, «викривляють» реальний тривимірний простір і по-різному змінюють ход часу у різних його точках, тобто викликають відхилення його властивостей від властивостей плоского простору.

Рух тіл у полі тяжіння виявилось можливим роздивлятися як рух по інерції, але у викривленому чотиривимірному неевклідовому просторі-часі, метрикою якого є геометрія Лобачевського-Рімана.

Можно показати, що ньютонівська механіка є часним випадком ЗТВ при малих швидкостях $v \ll c$ і слабких полях.

Нарешті, відзначимо деякі наслідки ЗТВ, які підтверджені експериментально:

- червоне зміщення або розбігання галактик;
- прецесія орбіт планет;
- відхилення променя світла поблизу Сонця;
- сповільнення часу в сильних гравітаційних полях.

Завдання для самоконтролю.

1. В чому полягає різниця між перетвореннями Галілея і Лоренца?

2. Користуючись перетвореннями Лоренца, виведіть релятивістський закон додавання швидкостей.

3. Доведіть, що при малих швидкостях ($v \ll c$) вираз для релятивістської кінетичної енергії співпадає з класичним виразом.

4. Що таке сили інерції? Які вони мають властивості?

5. Сформулюйте локальний принцип еквівалентності.

6. При якій швидкості ІСВ розміри тіла в напрямку руху скорочуються удвічі?

Відповідь: 0,86c.

7. Визначте імпульс частинки масою спокою 100 г у двох випадках: 1) швидкість частинки 2 м/с; 2) швидкість частинки $2,7 \cdot 10^8$ м/с.

Відповідь: 0,2 кг·м/с; $0,45 \cdot 10^8$ кг·м/с.

1.6. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИКИ

1.6.1. Центр мас

Статика - частина механіки, в якій вивчається рівновага тіл.

Центром мас тіла називають точку перетину прямих, уздовж яких мають бути спрямовані сили, щоб тіло двигалось поступально. Положення центру мас системи задається радіус-вектором $\vec{r}_C$, який визначається наступним чином:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}, \quad (6.1)$$

де m_i - маса i -тої частинки; $\vec{r}$ - радіус -вектор, що визначає положення цієї частинки; m - маса системи.

Координати центру мас дорівнюють проекціям на координатні осі:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (6.2)$$

В однорідному полі сил тяжіння (поблизу поверхні Землі) центр мас збігається з центром ваги системи.

1.6.2. Умови рівноваги тіл

Щоб тіло, яке не обертається, перебувало в рівновазі, необхідно, щоб рівнодіюча сил, прикладених до тіла, дорівнювала нулю, або щоб сума проекцій прикладених до тіла сил на будь-яку вісь дорівнювала нулю

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F}_i = 0. \quad (6.3)$$

Якщо тіло може обертатися щодо деякої осі, то для його рівноваги недостатньо рівності нулю рівнодіючої всіх сил.

Тіло, здатне обертатися навколо закріплення осі, перебуває у рівновазі, якщо алгебраїчна сума проекцій моментів прикладених до нього сил відносно цієї осі дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = 0. \quad (6.4)$$

У загальному випадку, коли тіло може рухатися поступально й обертатися, для рівноваги необхідно виконання обох умов: рівність нулю рівнодіючої сили і рівність нулю суми всіх моментів сил.

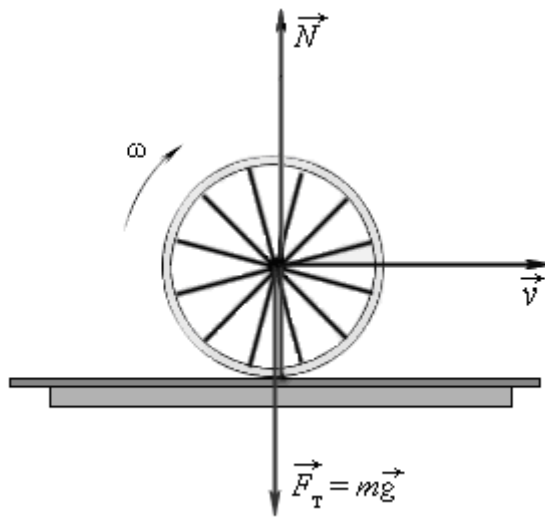


Рис. 1.6.1. Кочення колеса по горизонтальній поверхні. Рівнодіюча сила і момент сил дорівнюють нулю

Обидві ці умови не є достатніми для спокою. Колесо, яке котиться по горизонтальній поверхні - приклад байдужої рівноваги (рис. 6.1). Якщо колесо зупинити в будь-якій точці, воно виявиться в рівноважному стані. Поряд з байдужою рівновагою в механіці розрізняють стан стійкої і нестійкої рівноваги

Стан рівноваги називається *стійким*, якщо при малих відхиленнях тіла від цього стану виникають сили або моменти сил, що прагнуть повернути тіло в рівноважний стан (рис. 6.2).

При малому відхиленні тіла зі стану *нестійкої* рівноваги виникають сили або моменти сил, які прагнуть видалити тіло від положення рівноваги.

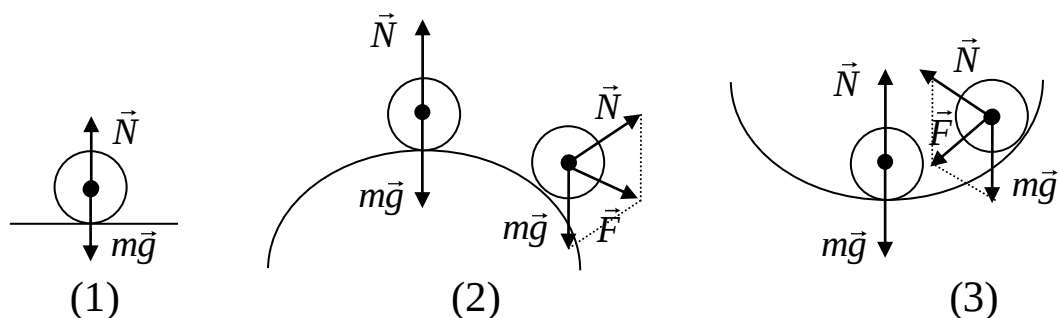


Рис.1.6.2. Різні види рівноваги кулі на опорі:

1 – байдужа рівновага, 2 – нестійка рівновага, 3 – стійка рівновага

Для тіла, яке має нерухому вісь обертання, можливі всі три види рівноваги. Байдужа рівновага виникає, коли вісь обертання проходить через центр мас. При стійкій і нестійкій рівновазі центр мас

знаходиться на вертикальній прямій, що проходить через вісь обертання. При цьому, якщо центр мас знаходиться нижче осі обертання, стан рівноваги виявляється стійким. Якщо ж центр мас розташований вище осі – стан рівноваги нестійкий (рис. 1.6.3).

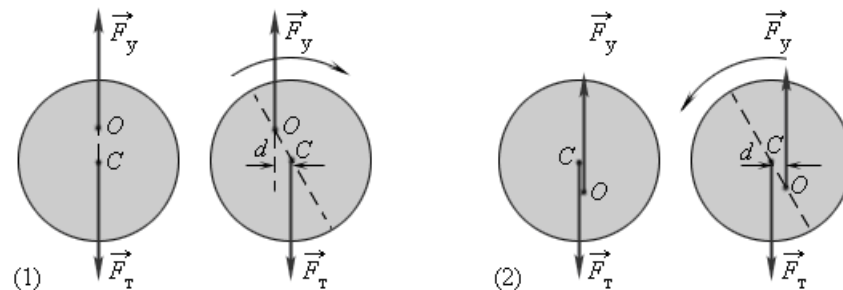


Рис. 1.6.3. Стійка (1) і нестійка (2) рівновага однорідного круглого диска, закріпленого на осі O ; точка C – центр маси диска; F_T - сила тяжіння; F_y - пружна сила осі; d – плече

Особливим випадком є рівновага тіла на опорі. У цьому випадку пружна сила опори прикладена не до однієї точки, а розподілена по підставі тіла. Тіло знаходиться в рівновазі, якщо вертикальна лінія, проведена через центр мас тіла, проходить через площу опори, тобто у середині контуру, утвореного лініями, що з'єднують точки опори. Якщо ж ця лінія не перетинає площину опори, то тіло перекидається.

1.6.3. Прості механізми

Прості механізми дозволяють, виробляючи роботу, отримати виграш у силі, тобто зменшити прикладену силу P за рахунок збільшення переміщення S («золоте» правило механіки).

Важелі (рис. 1.6.4) – тверді тіла, які обертаючись навколо нерухомої осі, дають виграш у силі.



Рис. 1.6.4. Сили, що діють на плечі важеля

Важіль знаходиться в рівновазі, якщо плечі діючих на нього сил

обернено пропорційні значенням сил: $\frac{P}{F} = \frac{S_1}{S_2}$.

Блоки

Нерухомий блок (рис. 1.6.5) являє собою рівноплечий важіль ($d_1 = d_2$). Він не дає виграшу в силі, $F = P$, але дозволяє змінити її напрямок.

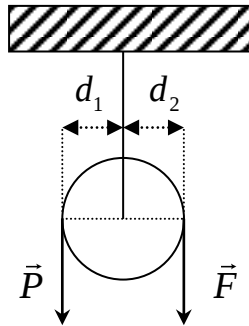


Рис. 1.6.5. Нерухомий блок

Рухомий блок (рис. 1.6.6) – важіль, у якого одне плече d_1 в 2 рази більше іншого d_2 . Дає виграш у силі в 2 рази.

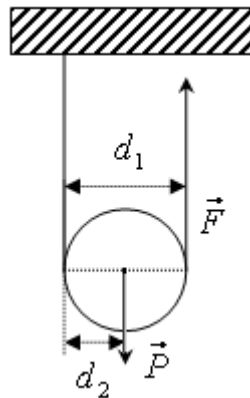


Рис. 1.6.6. Рухомий блок

При використанні простих механізмів виграшу в роботі не отримують відповідно до закону збереження енергії.

Завдання для самоконтролю

1. Маса автомобіля 3,6 т. Його центр ваги ділить відстань між осями коліс на відрізки, що знаходяться у відношенні 1:3. Знайти

силу тиску кожної колісної пари на дорогу.

Відповідь: 8,82 кН; 26,46 кН.

2. Визначити, якої максимальної маси вантаж може переносити підйомний кран і силу тиску його на землю. Проти вага масою $M = 10$ т знаходиться на стрілі крана на відстані $a = 4$ м від вертикальної стійки. Вантаж підвішений на відстані $b = 10$ м від стійки. Масою крана можна знехтувати.

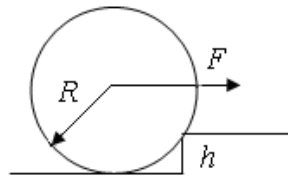
Відповідь: 4 т; 137,2 кН.

3. Передня колісна пара трактора тисне на ґрунт силою 7,5 кН, а задня - силою 2,8 кН. Визначити силу тяжіння трактора і відстань від передньої осі до центра ваги, якщо відстань між осями дорівнює 2170 мм.

Відповідь: 10 кН; 0,6 м.

4. Важкий металевий каток асфальтоукладача необхідно підняти на сходинку висоти h . Визначити найменшу силу F , яку необхідно для цього прикласти до центру катка в горизонтальному напрямку, якщо каток має масу m і радіус R , причому $R > h$.

Відповідь:



1.7. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ.

1.7.1. Тиск в рідині або газі

Основною відмінністю рідин від твердих (пружних) тіл є здатність легко змінювати свою форму. Частини рідини можуть вільно зрушуватися, ковзаючи один щодо одного. При цьому рідина приймає форму судини, в який вона налита. У рідину, як і в газоподібне середовище, можна занурювати тверді тіла. На відміну від газів рідини практично нестисливі.

На тіло, занурене в рідину або газ, діють сили, розподілені по поверхні тіла. Для опису таких розподілених сил вводиться нова фізична величина – тиск.

Тиск визначається як відношення модуля сили $\vec{F}$, що діє перпендикулярно поверхні, до площі S цієї поверхні:

$$p = \frac{F}{S}. \quad (7.1)$$

В системі СІ тиск вимірюється в паскалях (Па): 1 Па дорівнює тиску, створюваному силою 1 Н, що рівномірно розподілена по нормальній до неї поверхні площею 1 м² (1 Па = 1 Н/м²).

Французький учений Б.Паскаль (1623 – 1662) в середині XVII століття емпірично встановив закон, названий *законом Паскаля*: Тиск в рідині або газі передається у всіх напрямках однаково і не залежить від орієнтації площини, на яку вона діє.

Тиск рідини на дно або бічні стінки судини залежить від висоти стовпа рідини. Сила тиску на дно циліндричної посудини висоти h і площі основи S дорівнює вазі стовпа рідини mg , де $m = \rho ghS$ - маса рідини в посудині, ρ - густина рідини, отже

$$p = \frac{\rho h S g}{S} = \rho g h. \quad (7.2)$$

Такий же тиск на глибині h відповідно до закону Паскаля рідина робить і на бічні стінки судини. Тиск стовпа рідини $\rho g h$ називають *гідростатичним тиском*. Через різницю тисків у рідині на різних рівнях виникає виштовхуюча, або архимедова, сила $\vec{F}_A$. Рис. 1.7.1 ілюструє появу сили Архімеда.

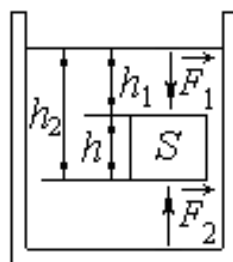


Рис. 1.7.1. Виштовхуюча або архимедова сила.

У рідину занурено тіло у вигляді прямокутного паралелепіпеда висотою h і площею підстави S .

Різниця тисків на нижню і верхню межі є

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g h. \quad (7.3)$$

Тому виштовхуюча сила буде спрямована вгору, і її модуль дорівнюватиме

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g h, \quad (7.4)$$

де V - об'єм витісненої тілом рідини, а ρV - її маса.

Архимедова сила, що діє на занурене в рідину (або газ) тіло, дорівнює вазі рідини (або газу), витісненої тілом. Це твердження, що зветься *законом Архімеда*, справедливе для тіл будь-якої форми.

Із закону Архімеда випливає, що якщо середня густина тіла ρ_t більше густини рідини (або газу) ρ , тіло буде опускатися на дно. Якщо ж $\rho_t < \rho$, тіло буде плавати на поверхні рідини. Обсяг зануреної частини тіла буде такий, що вага витісненої рідини дорівнюватиме вазі тіла. Для підйому повітряної кулі в повітрі його вага повинна бути менше ваги витісненого повітря. Тому повітряні кулі заповнюють легкими газами (воднем, гелієм) або нагрітим повітрям.

З виразу для повного тиску в рідині $p = p_0 + \rho g h$ витікає, що в сполучених посудинах будь-якої форми, заповнених однорідною рідиною, тиск в будь-якій точці на одному і тому ж рівні однаковий. Якщо обидві судини (у виді вертикально розташованих циліндрів) закрити поршнями, то за допомогою зовнішніх сил, що прикладені до поршнів, в рідині можна створити великий тиск p . Цей тиск у багато разів перевищує гідростатичний тиск $\rho g h$ в будь-якій точці системи. Тоді можна вважати, що у всій системі установлюється однаковий тиск p . Якщо поршні мають різні площі S_1 і S_2 , то на них з боку рідини діють різні сили $F_1 = p S_1$ і $F_2 = p S_2$. Такі ж по модулю, але протилежно направлені зовнішні сили повинні бути прикладені до поршнів для утримання системи в рівновазі. Таким чином,

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{или} \quad F_2 = F_1 \frac{S_1}{S_2}. \quad (7.5)$$

Якщо $S_2 \gg S_1$, то $F_2 \gg F_1$. Пристрої такого роду називають *гідравлічними машинами* (рис. 1.7.2).

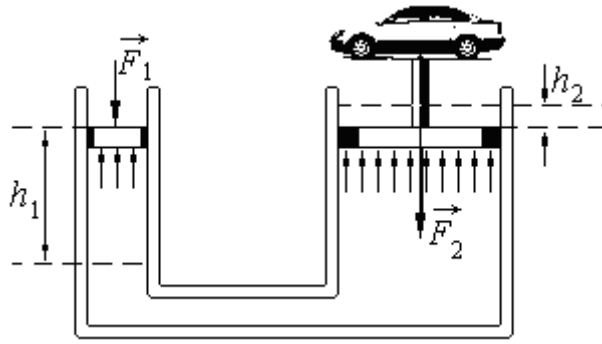


Рис. 1.7.2. Гідравлічна машина

Вони дозволяють отримати значний виграш в силі. Якщо поршень у вузькому циліндрі переміститься вниз під дією зовнішньої сили F_1 на відстань h_1 , то поршень в широкому циліндрі переміститься на відстань $h_2 = h_1 \frac{S_2}{S_1}$, піднімаючи важкий вантаж.

Таким чином, виграш у силі в n раз обов'язково супроводжується таким же програшем у відстані. При цьому твір сили на відстань залишається незмінним: $F_1 h_1 = F_2 h_2$. Це правило виконується для будь-яких ідеальних машин, в яких не діють сили тертя. Воно називається «золотим правилом механіки».

Гідравлічні машини для підйому вантажів називаються домкратами. Вони широко застосовуються також як гідравлічні преси. В якості рідини зазвичай використовуються мінеральні масла.

1.7.2. Рух рідин або газів. Рівняння Бернуллі

Рух рідин або газів являє собою складне явище. Для його опису використовуються різні спрощуючі припущення (моделі). У простій моделі рідина (або навіть газ) передбачається *нестисливими* і ідеальними (тобто без внутрішнього тертя між рухомими шарами). При русі ідеальної рідини не відбувається перетворення механічної енергії у внутрішню, тому виконується закон збереження механічної енергії. Наслідком цього закону для стаціонарного потоку ідеальної і нестислої рідини є рівняння, що було одержано Д. Бернуллі (1700-1782). *Стаціонарним* прийнято називати такий потік рідини, в якому не утворюються вихори. У стаціонарному потоці частки рідини переміщуються по незмінним в часі траєкторіях, які називаються лініями струму. Досвід показує, що стаціонарні потоки виникають тільки при досить малих швидкостях руху рідини.

Розглянемо стаціонарний рух ідеальної нестисливої рідини по трубі змінного перерізу (рис. 1.7.3). Різні частини труби можуть знаходитися на різних висотах.

За проміжок часу Δt рідина в трубі перетином S_1 переміститься на $l_1 = v_1 \Delta t$, а в трубі перетином S_2 - на $l_2 = v_2 \Delta t$, де v_1 і v_2 - швидкості частинок рідини в трубах. Якщо рідина нестислива, то об'єм рідини, яка пропливла через перетини S_1 і S_2 , однаковий, тобто

$$l_1 S_1 = l_2 S_2, \text{ або } v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

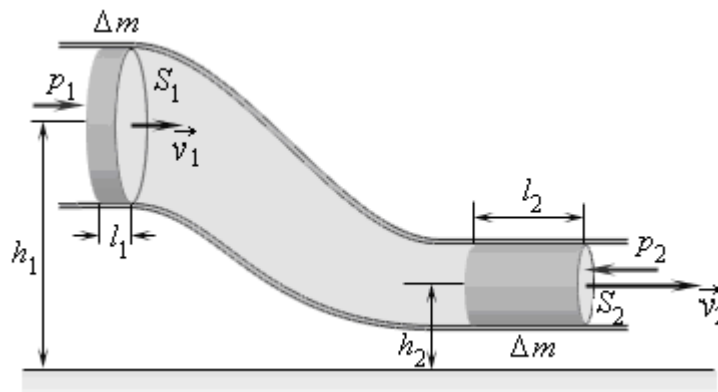


Рис. 1.7.3. Течія ідеальної рідини по трубі змінного перерізу

Таким чином, при переході рідини з ділянки труби з великим перетином на ділянку з меншим перетином швидкість течії зростає, тобто рідина рухається з прискоренням. Отже, на рідину діє сила. У горизонтальній трубі ця сила може виникнути тільки через різницю тисків у широкій і вузькій ділянках труби. Тиск у широкій ділянці труби має бути більше, ніж в вузькій ділянці. Якщо ділянки труби розташовані на різній висоті, то прискорення рідини викликається спільною дією сили тяжіння і сили тиску.

Так як рідина передбачається ідеальною, то вона тече по трубі без тертя. Тому до її течії можна застосувати закон збереження механічної енергії.

При переміщенні рідини сили тиску здійснюють роботу

$$A = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (7.6)$$

Зміни, що відбулися за час Δt в виділеній частині рідини, укладеної між перетинами S_1 і S_2 в початковий момент часу, при стаціонарному перебігу зводяться до переміщення маси рідини $\Delta m = \rho \Delta V$ (ρ - густина рідини) з однієї частини труби перетином S_1 в іншу частину перетином S_2 (затемненні обсяги на рис. 1.7.4). Закон

збереження механічної енергії для цієї маси має вигляд

$$W_2 - W_1 = A = (p_1 - p_2)\Delta V, \quad (7.7)$$

де W_1 і W_2 - повні механічні енергії маси Δm в поле тяжіння

$$W_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1; \quad W_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2. \quad (7.8)$$

Тоді отримуємо

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (7.9)$$

Це і є *рівняння Бернуллі*. З нього випливає, що сума

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} \quad (7.10)$$

залишається незмінною вздовж всієї труби. Величина p – статичний тиск в рідині. Рівняння Бернуллі виражає закон збереження енергії стосовно до сталої течії ідеальної рідини.

З рівняння Бернуллі випливає, що тиск в рідині, що тече по горизонтальній трубі змінного перерізу, більше в тих перетинах потоку, в яких швидкість її руху менша, і навпаки, тиск менше в тих перетинах, в яких швидкість більше.

1.7.3. В'язкість (внутрішнє тертя)

В'язкість (внутрішнє тертя) – це властивість реальних рідин чинити опір переміщенню однієї частини рідини щодо іншої.

При переміщенні одних шарів реальної рідини щодо інших виникають сили внутрішнього тертя, спрямовані по дотичній до поверхні шарів. Дія цих сил виявляється в тому, що з боку шару, що рухається швидше, на шар, що рухається повільніше, діє прискорююча сила. З боку ж шару, що рухається повільніше, на шар, що рухається швидше, діє гальмівна сила.

Сила внутрішнього тертя F тим більше, чим більше площа поверхні шару S , і залежить від того, наскільки швидко змінюється швидкість течії рідини при переході від шару до шару.

Нехай є два шари, що віддалені один від одного на відстані Δx і

рухаються зі швидкостями v_1 і v_2 . При цьому $v_1 - v_2 = \Delta v$. Величина $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ називається градієнтом швидкості. Вона показує, як швидко змінюється швидкість при переході від шару до шару в напрямку x , перпендикулярному напрямку руху шарів.

Модуль сили внутрішнього тертя буде дорівнювати:

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S, \quad (7.11)$$

де η – коефіцієнт пропорційності, що залежить від природи рідини, і називається динамічною в'язкістю (або просто в'язкістю).

Одиниця в'язкості – паскаль·секунда (Па·с). 1 Па·с дорівнює динамічній в'язкості середовища, в якому при ламінарній течії і градієнті швидкості з модулем, рівним 1 м/с на 1 м, виникає сила внутрішнього тертя 1 Н на 1 м² поверхні торкання шарів (1 Па·с = 1 Н·с/м²).

Експериментально для визначення в'язкості рідини можна використовувати метод Стокса, заснований на вимірюванні швидкості невеликих тіл сферичної форми, що повільно рухаються в рідині

1.7.4. Ламінарна і турбулентна течія

Існує два режими течії рідин.

Течія називається *ламінарною*, якщо вздовж струму кожен виділений тонкий шар ковзає щодо сусідніх, не змішуючись з ними. Ламінарна течія рідини спостерігається при невеликих швидкостях її руху. Зовнішній шар рідини, що примикає до поверхні труби, в якій вона тече, через дію сил молекулярного зчеплення прилипає до неї і залишається нерухомим. Швидкості наступних шарів тим більше, чим більше їх відстань до поверхні труби, і найбільшу швидкість має шар, який рухається уздовж осі труби.

Течія називається *турбулентною* (вихровою), якщо вздовж потоку відбувається інтенсивне утворення вихрів і перемішування рідини. При турбулентній течії частки рідини набувають складові швидкостей, перпендикулярні до течії, тому вони можуть переходити з одного шару в інший. Швидкість частинок рідини швидко зростає в міру віддалення від поверхні труби, потім змінюється досить незначно. Оскільки частки рідини переходять з одного шару в інший,

то їх швидкості в різних шарах мало відрізняються. Через великий градієнт швидкостей у поверхні труби відбувається утворення вихорів.

Характер течії визначається безрозмірною величиною Re , яку називають числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho \bar{v} \cdot d}{\eta} = \frac{\bar{v} \cdot d}{\nu}, \quad (7.12)$$

де η - кінематична в'язкість; ρ - густина рідини; $\bar{v}$ - середня по перерізу труби швидкість рідини; d - характерний лінійний розмір, наприклад, діаметр труби.

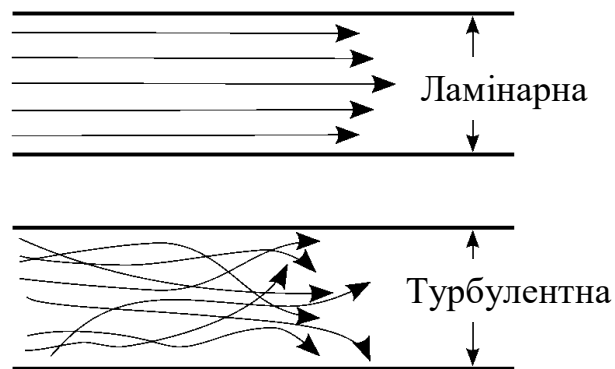


Рис. 1.7.4. Ламінарна і турбулентна течія рідини

При малих значеннях числа Рейнольдса ($Re \leq 1000$) спостерігається ламінарна течія, перехід від ламінарної течії до турбулентної відбувається в області $1000 \leq Re \leq 2000$, а при $Re \geq 2300$ (для гладких труб) течія - турбулентна. Якщо число Рейнольдса однаково, то режим течії різних рідин (газів) в трубах різних перетинів однаковий.

На закінчення слід зазначити, що всі висновки аналізу будуть справедливими не тільки для рідин, але і газів. Це означає, що подібному розгляду можна піддати і питання оптимальної побудови форми автомобільного кузова з точки зору аеродинамічного обтікання. Практично, в першу чергу, це досягнення максимуму швидкості і економічності сучасного автомобіля.

Завдання для самоконтролю

1. Чим обумовлений гідростатичний тиск?
2. Яку рідину вважають ідеальною і нестисливою?

3. Що визначає число Рейнольдса?

4. Суцільне однорідне тіло, занурене у рідину з густиною ρ_1 , важить P_1 , а в рідину з густиною ρ_2 - P_2 . Знайти густину речовини тіла.

Відповідь: $\rho = \frac{P_2 \rho_1 - P_1 \rho_2}{P_2 - P_1}$.

5. Дерев'ний брусок квадратного перерізу з ребром a , масою m і довжиною l занурений у воду вертикально. Однак, він відразу переходить у горизонтальний стан. Поясніть явище.

6. Залізобетонна паля мосту через річку забита у дно. Чи діє на неї сила Архімеда?

7. Із труби перерізом $S_1 = 20 \text{ см}^2$ б'є вертикально угору водяний струмінь. Знайти переріз струменя на висоті $h = 20 \text{ м}$ над отвором труби. Расход води із труби дорівнює $Q = 50 \text{ г/с}$.

Відповідь: 33 см^2 .

1.8. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

1.8.1. Гармонійні коливання

Коливання - рухи, що мають той або інший ступень повторюваності в часі.

Коливання називаються періодичними, якщо значення фізичних величин, що змінюються в процесі коливання, повторюються через рівні проміжки часу.

Період коливання T - найменший проміжок часу, після закінчення якого повторюються значення всіх величин, що характеризують коливальний рух. За цей час відбувається одне повне коливання.

Частота періодичних коливань ν - число повних коливань, які відбуваються за одиницю часу (за 1 с). Одиниця виміру частоти - **герц (Гц)**. Один герц - це частота таких коливань, при яких за одну секунду відбувається одне повне коливання: $1 \text{ Гц} = 1/\text{с}$.

Частота коливань пов'язана з періодом коливань T співвідношеннями

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (8.1)$$

Циклічна, або кругова частота коливань

$$\omega = 2\pi\nu, \text{ або } \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (8.2)$$

Вільні коливання - коливання, що виникають у системі (що не піддається дії змінних зовнішніх сил), в результаті якого-небудь одноразового початкового відхилення цієї системи від стану стійкої рівноваги. Необхідні умови для виникнення вільних коливань:

- наявність енергії, надлишкової в порівнянні з енергією системи в положенні стійкої рівноваги;
- наявність інертності;
- робота сили тертя в системі повинна бути значно менше надлишкової енергії.

Коливання називаються *гармонійними*, якщо фізична величина, що коливається, змінюється з часом за законом:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (8.3)$$

або

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (8.4)$$

де x - зміщення точки, що коливається, від положення рівноваги; t - час; A - амплітуда коливання; ω - кутова частота; φ_0 - початкова фаза.

Можно показати, що вирази (8.3) і (8.4) задовляють диференційному рівнянню у вигляді

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (8.5)$$

Фаза коливання - величина, що визначає значення $\omega t + \varphi_0$ в даний момент часу.

Початкова фаза - фаза в початковий момент часу, тобто фаза коливань в момент $t = 0$.

Амплітуда коливання A - найбільше абсолютне значення фізичної величини, що коливається (максимальне зміщення від положення рівноваги).

Циклічна частота, частота і період задаються параметрами системи, тоді як амплітуда і початкова фаза – початковими умовами.

Швидкість точки в довільний момент часу знайдемо, взявши першу похідну від x по формулі (8.4) за часом

$$V = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8.6)$$

Максимальне значення швидкості (амплітуда швидкості) дорівнює $V_{\max} = \omega A$.

Прискорення точки

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (8.7)$$

Максимальне значення прискорення (амплітуда прискорення) дорівнює: $a_{\max} = \omega^2 A$.

Сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює:

$$F = ma = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (8.8)$$

Порівнявши з (8.4), отримаємо

$$F = -m\omega^2 x. \quad (8.9)$$

Отже, сила пропорційна зміщенню матеріальної точки з положення рівноваги і спрямована в протилежний бік. Така залежність сили від зміщення характерна для пружної сили. Тому сили іншої фізичної природи, що задовольняють того ж виду залежності, називаються *квазіпружними*.

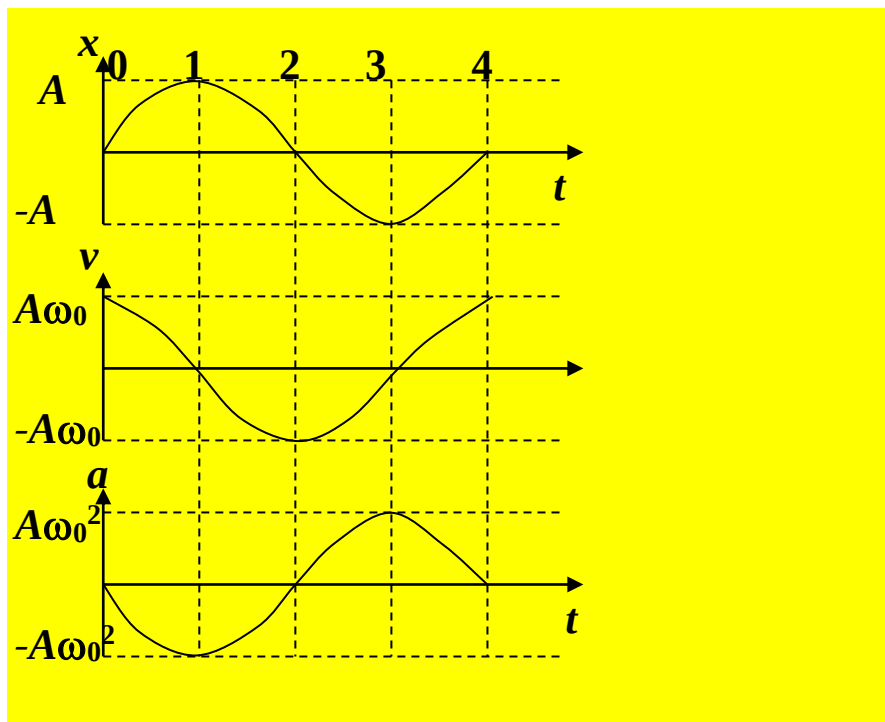


Рис. 1.8.1. Залежності кінематичних характеристик від часу

При вільних механічних коливаннях кінетична і потенційна енергії змінюються періодично. При максимальному відхиленні тіла від положення рівноваги його швидкість дорівнює нулю, а отже, і кінетична енергія звертається в нуль. У цьому положенні потенційна енергія тіла, що коливається, досягає максимального значення. Для вантажу на горизонтально розташованій пружині потенційна енергія - це енергія пружних деформацій пружини. Для математичного або фізичного маятника - це енергія в полі тяжіння Землі.

Коли тіло при своєму русі проходить через положення рівноваги, його швидкість максимальна. У цей момент воно має максимальну кінетичну і мінімальну потенційну енергію. Збільшення кінетичної енергії відбувається за рахунок зменшення потенційної енергії. При подальшому русі починає збільшуватися потенційна енергія за рахунок убутку кінетичної енергії і т. д.

Таким чином, при гармонійних коливаннях відбувається періодичне перетворення кінетичної енергії в потенційну і навпаки.

Повна енергія матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання,

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2}. \quad (8.10)$$

1.8.2. Маятники

Пружинний маятник - це тіло, що підвішене на пружині. Період коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (8.11)$$

де m - маса тіла; k - жорсткість пружини.

Математичним маятником називається матеріальна точка, підвішена на невагомую нерозтяжної нитки, яка здійснює коливання у вертикальній площині під дією сили тяжіння (у цьому випадку матеріальна точка - тіло, розміри якого малі порівняно з довжиною нитки).

Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (8.12)$$

де l - довжина маятника; g - прискорення вільного падіння.

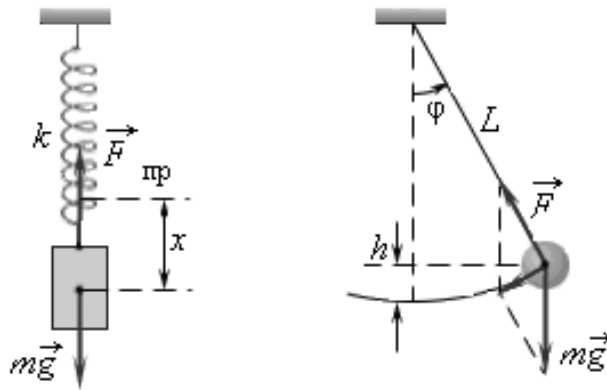


Рис. 1.8.1. Пружинний і математичний маятники

Фізичний маятник - тверде тіло, що має можливість здійснювати коливання відносно горизонтальної осі, яка не проходить через центр ваги тіла.

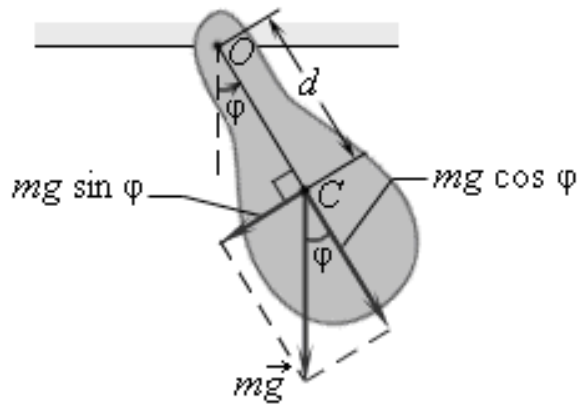


Рис.1.8.2. Фізичний маятник

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (8.13)$$

де J - момент інерції тіла, що коливається, відносно осі коливань; d - відстань центру мас маятника від осі коливань.

Період *крутильних* коливань тіла, підвішеного на пружній нитці

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}, \quad (8.14)$$

де J - момент інерції тіла відносно осі, що збігається з пружною ниткою; k - жорсткість пружної нитки, що дорівнює відношенню пружного моменту, який виникає при закручуванні нитки, до кута, на який нитка закручується.

1.8.3. Згасаючі коливання

Згасаючими коливаннями називаються коливання, енергія яких зменшується з плином часу.

Рівняння затухаючих коливань

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi), \quad (8.15)$$

де $A(t)$ - амплітуда згасаючих коливань в момент часу t ; ω - їх циклічна частота.

Циклічна частота згасаючих коливань знаходиться за формулою

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (8.16)$$

де δ - коефіцієнт загасання ($[\delta] = 1/\text{с}^2$).

Залежність амплітуди згасаючих коливань від часу

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}, \quad (8.17)$$

де A_0 - амплітуда коливань у момент $t = 0$.

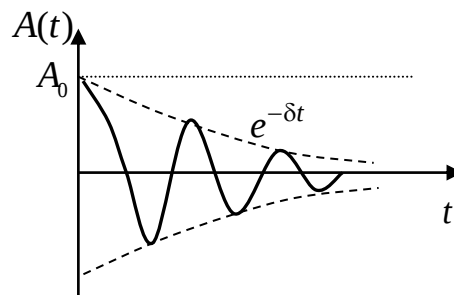


Рис. 1.8.3. Графік згасаючих коливань

Параметрами згасаючих коливань також являються:

- час релаксації $\tau = 1/\delta$ - час, за який амплітуда коливань зменшується у $e \approx 2,718$ разів;
- декремент загасання $\Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$;
- логарифмічний декремент загасання $\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$.

Останні два параметри характеризують ступінь зменшення амплітуди за період. Енергетичні втрати коливальної системи характеризуються її *добротністю*, яка визначається відношенням набутої енергії до середнього значення втраченої за період

$$Q = 2\pi \frac{W}{\langle W_d \rangle} = \frac{\pi}{\delta T}.$$

1.8.4. Вимушені коливання

Вимушеними коливаннями називаються незгасаючі коливання системи, які викликаються дією на неї зовнішніх сил $F(t)$, що періодично змінюються з плином часу: $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

Вимушені гармонійні коливання відбуваються за законом

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (8.18)$$

Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad (8.19)$$

де F_0 - амплітудне значення сили, що змушує.

Резонанс

Резонанс - явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні циклічної частоти змушуючої сили до значенню резонансної частоти.

I випадок.

Відсутність загасання (тертя немає, ідеальний випадок) $\delta = 0$. У цьому випадку резонансна частота збігається з частотою власних коливань $\omega = \omega_{\text{рез}} = \omega_0$; амплітуда коливань необмежено розтає: $A \rightarrow \infty$.

II випадок.

Загасання існує. У цьому випадку резонансна частота визначається за формулою

$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad (8.20)$$

резонансна амплітуда

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (8.21)$$

Чим менше тертя, тим більше амплітуда вимушених коливань при резонансі.

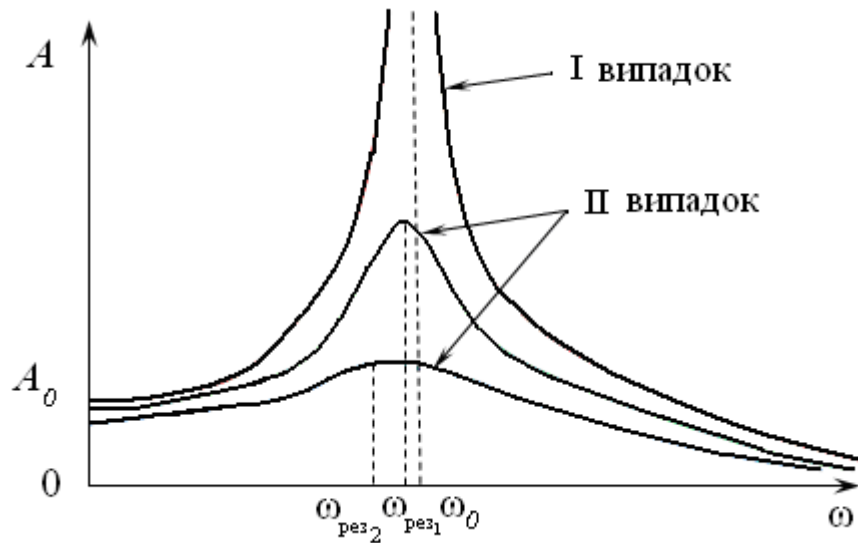


Рис. 1.8.4. Залежність амплітуди від частоти при резонансі

Резонансна частота і резонансна амплітуда вимушених коливань

1.8.5. Механічні хвилі. Звук

Якщо в якому-небудь місці твердого, рідкого або газоподібного середовища порушені коливання частинок, то внаслідок взаємодії атомів і молекул середовища коливання починають передаватися від однієї точки до іншої з кінцевою швидкістю. Процес поширення коливань в середовищі називається *хвилею*.

Механічні хвилі бувають різних видів. Якщо у хвилі частинки середовища отримують зміщення в напрямку, перпендикулярному напрямку поширення, то хвиля називається *поперечною*. Прикладом хвилі такого роду можуть служити хвилі, що біжать по натягнутому гумовому джгуту (рис.8.5) або по струні.

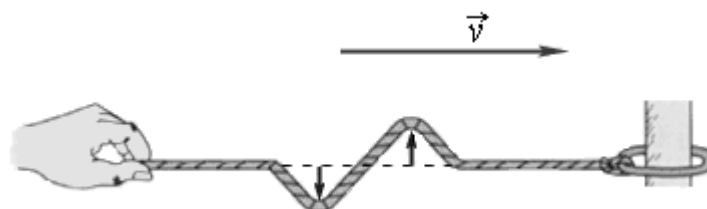


Рис. 1.8.5. Поширення поперечного хвильового імпульсу по натягнутому гумовому джгуту

Якщо зсув частинок середовища відбувається в напрямі поширення хвилі, то хвиля називається *поздовжньою*. Хвилі в пружному стрижні (рис. 8.6), або звукові хвилі в газі є прикладами таких хвиль.

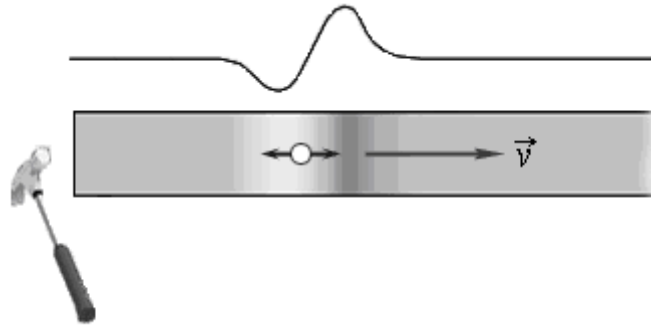


Рис. 1.8.6. Поширення поздовжнього хвильового імпульсу по пружному стрижню

Хвилі на поверхні рідини мають як поперечну, так і поздовжню компоненти.

Як в поперечних, так і в поздовжніх хвилях перенесення речовини в напрямі поширення хвилі не відбувається. У процесі поширення частки середовища лише здійснюють коливання біля положень рівноваги. Однак хвилі переносять енергію коливань від однієї точки середовища до іншої.

Характерною особливістю механічних хвиль є те, що вони поширюються в матеріальних середовищах (твердих, рідких або газоподібних). Існують хвилі, які здатні поширюватися і в порожнечі (наприклад, світлові хвилі). Для механічних хвиль обов'язково потрібно середовище, що має здатність запасати кінетичну і потенційну енергію. Отже, середовище повинно мати інертні і пружні властивості. У реальних середовищах ці властивості розподілені по всьому об'єму. Так, наприклад, будь-який малий елемент твердого тіла має масу і пружність. У найпростішій одновимірній моделі тверде тіло можна представити як сукупність кульок і пружинок (рис. 8.7).

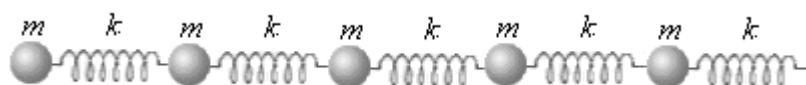


Рис. 1.8.7. Простіша одновірна модель твердого тіла

У цій моделі інертні і пружні властивості розділені. Кульки володіють масою m , а пружинки - жорсткістю k . За допомогою такої простої моделі можна описати поширення поздовжніх і поперечних хвиль в твердому тілі. В поздовжніх хвилях кульки випробовують зміщення вздовж ланцюжка, а пружинки розтягуються або стискаються. Така деформація називається деформацією розтягування або стиснення. В рідинах або газах деформація такого роду супроводжується ущільненням або розрідженням.

Поздовжні механічні хвилі можуть поширюватися в будь-яких середовищах - твердих, рідких і газоподібних.

Якщо в одновимірній моделі твердого тіла один або кілька кульок змістити в напрямку, перпендикулярному ланцюжку, то виникне деформація зсуву. Деформовані при такому зміщенні пружини будуть прагнути повернути зміщені частинки в положення рівноваги. При цьому на найближчі незсунені частинки будуть діяти пружні сили, які прагнуть відхилити їх від положення рівноваги. В результаті уздовж ланцюжка побіжить поперечна хвиля.

В рідинах і газах пружна деформація зсуву не виникає. Якщо один шар рідини чи газу змістити на деяку відстань щодо сусіднього шару, то ніяких дотичних сил на межі між шарами не з'явиться. Сили, що діють на межі рідини і твердого тіла, а також сили між сусідніми шарами рідини завжди спрямовані по нормалі до кордону - це сили тиску. Те ж відноситься до газоподібному середовищі. Отже, поперечні хвилі не можуть існувати в рідкому або газоподібному середовищах.

Значний інтерес для практики представляють прості *гармонійні* або *синусоїдальні* хвилі. Вони характеризуються амплітудою A коливання частинок, частотою ν і довжиною хвилі λ . Синусоїдальні хвилі поширюються в однорідних середовищах з деякою постійною швидкістю V .

Зміщення $y(x,t)$ частинок середовища з положення рівноваги в синусоїдальній хвилі залежить від координати x на осі Ox , вздовж якої поширюється хвиля, і від часу t за законом:

$$y(x,t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{V} \right) = A \cos (\omega t - kx), \quad (8.22)$$

де $k = \frac{\omega}{V}$ - так зване хвильове число, $\omega = 2\pi\nu$ - кругова або циклічна частота.

Довжиною хвилі λ називають відстань між двома сусідніми точками, що коливаються в однакових фазах. Відстань, рівну довжині хвилі λ , хвиля пробігає за період T , отже, $\lambda = VT$, де V - швидкість поширення хвилі.

Звернемо увагу на те, що рівняння

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + kx) \quad (8.23)$$

описує синусоїдальну хвилю, що поширюється в напрямку, протилежному напрямку осі Ox , зі швидкістю $V = \frac{\omega}{k}$.

В *біжучій* синусоїдальній хвилі кожна частка середовища здійснює гармонійні коливання з деякою частотою ω . Тому, як і у випадку простого коливального процесу, середня потенційна енергія, що запасена в деякому обсязі середовища, дорівнює середній кінетичній енергії в тому ж обсязі і пропорційна квадрату амплітуди коливань. Звідси випливає, що при поширенні біжучої хвилі виникає потік енергії, пропорційний швидкості хвилі і квадрату її амплітуди.

Якщо хвилі, що біжать по струні в зустрічних напрямках, мають синусоїдальну форму, то за певних умов вони можуть утворити *стоячу хвилю*.

Нехай струна довжини l закріплена так, що один з її кінців знаходиться в точці $x = 0$, а другий - в точці $x_1 = L$ (рис. 8.8). В струні створено натяг T .

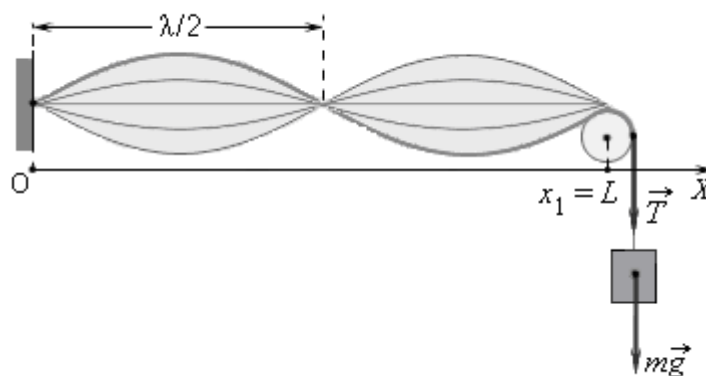


Рис. 1.8.8. Виникнення стоячої хвилі в струні, що закріплена на обох кінцях

По струні одночасно поширюються в протилежних напрямках дві хвилі однієї і тієї ж частоти: $y_1(x, t) = A \cos(\omega t + kx)$ – хвиля, що біжить справа наліво; $y_2(x, t) = -A \cos(\omega t - kx)$ – хвиля, що біжить зліва направо. У точці $x = 0$ (один із закріплених кінців струни) падаюча

хвиля y_1 в результаті відображення породжує хвилю y_2 . При відбитті від нерухомо закріпленого кінця відбита хвиля виявляється в протифазі з падаючою. Згідно з принципом суперпозиції, який є експериментальним фактом, коливання, викликані зустрічними хвилями в кожній точці струни, складаються. Таким чином, результуюче коливання в кожній точці дорівнює сумі коливань, викликаних хвилями y_1 і y_2 окремо. Отже,

$$y=y_1(x, t) + y_2(x, t) = (-2A\sin \omega t) \cdot \sin kx \quad (8.24)$$

Це і є стояча хвиля. В стоячій хвилі існують нерухомі точки, які називаються *вузлами*. Посередині між вузлами знаходяться точки, які коливаються з максимальною амплітудою. Ці точки називаються *пучностями*. Відстань між сусідніми вузлами або сусідніми пучностями дорівнює $\lambda/2$ і називається довжиною стоячої хвилі.

Обидва нерухомих кінця струни повинні бути вузлами. Наведена вище формула задовольняє цій умові на лівому кінці ($x=0$). Для виконання цієї умови і на правому кінці ($x=L$) необхідно, щоб $kL = n\pi$, де n - будь-яке ціле число. Це означає, що стояча хвиля в струні виникає не завжди, $L = n \frac{\lambda_n}{2}$ а тільки в тому випадку, якщо довжина L струни дорівнює цілому числу довжин півхвиль

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad (8.21)$$

або

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \quad (8.22)$$

Набору значень λ_n довжин хвиль відповідає набір можливих частот ν_n :

$$\nu_n = \frac{V}{\lambda_n} = n \frac{V}{2L} = n\nu_1, \quad (8.23)$$

де V - швидкість поширення поперечних хвиль по струні. Кожна з частот ν_n і пов'язаний з нею тип коливання струни називається

нормальною модою. Найменша частота ν_1 називається основною частотою, всі інші називаються гармоніками. На рис.1.8.8 зображена нормальна мода для $n = 2$.

В стоячій хвилі немає потоку енергії. Коливальна енергія, ув'язнена в відрізку струни між двома сусідніми вузлами, не транспортується в інші частини струни. У кожному такому відрізку відбувається періодичне (двічі за період T) перетворення кінетичної енергії в потенційну і назад як у звичайній коливальній системі. Але на відміну від вантажу на пружині або маятника, у яких є єдина власна частота, струна має нескінченне число власних (резонансних) частот ν_n .

Звуковими хвилями або просто *звуком* прийнято називати хвилі, що сприймаються людським вухом. Діапазон звукових частот лежить в межах приблизно від 20 Гц до 20 кГц. Хвилі з частотою менше 20 Гц називаються *інфразвуком*, а з частотою більше 20 кГц - *ультразвуком*. Хвилі звукового діапазону можуть розповсюджуватися не тільки в газі, а й в рідині (поздовжні хвилі) і в твердому тілі (поздовжні і поперечні хвилі). Однак хвилі в газоподібному середовищі - середовищі нашого існування - становлять особливий інтерес. Вивченням звукових явищ займається розділ фізики, який називають *акустикою*.

При сприйнятті різних звуків людське вухо оцінює їх передусім за *рівнем гучності*, що залежить від потоку енергії або інтенсивності звукової хвилі. Вплив звукової хвилі на барабанну перетинку залежить від *звукового тиску*, тобто амплітуди p_0 коливань тиску у хвилі. *Поріг чутності* відповідає значенню p_0 порядку 10^{-5} Па. При такому слабкому звуці молекули повітря коливаються в звуковій хвилі з амплітудою всього лише 10^{-9} м! *Больовий поріг* відповідає значенню p_0 порядку 10 Па. Таким чином, людське вухо здатне сприймати хвилі, в яких звуковий тиск змінюється в мільйон разів.

Ще однією характеристикою звукових хвиль, визначальною їх слухове сприйняття, є *висота звуку*. Коливання в гармонійній звуковій хвилі сприймаються людським вухом як музичний тон. Коливання високої частоти сприймаються як звуки високого тону, коливання низької частоти - як звуки низького тону. Звуки, що видаються музичними інструментами, а також звуки людського голосу можуть сильно відрізнятися за висотою тону і за діапазоном частот. Так, наприклад, діапазон найбільш низького чоловічого голосу - баса - простягається приблизно від 80 до 400 Гц, а діапазон

високого жіночого голосу - сопрано - від 250 до 1050 Гц.

Діапазон звукових коливань, відповідний зміни частоти коливань в два рази, називається *октавою*. Голос скрипки, наприклад, перекриває приблизно три з половиною октави (196-2340 Гц), а звуки піаніно - сім з гаком октав (27,5-4186 Гц).

Коли говорять про частоту звуку, видаваного струнами будь-якого струнного музичного інструменту, то мається на увазі частота ν_1 основного тону. Але в коливаннях струн можуть бути присутні і гармоніки, частоти ν_n яких задовольняють співвідношенню: $\nu_n = n\nu_1$, ($n = 1, 2, 3 \dots$). Тому струна, що звучить, може випромінювати цілий спектр хвиль з кратними частотами. Амплітуди A_n цих хвиль залежать від способу порушення струни (смичок, молоточок); вони визначають музичне забарвлення звуку або *тембр*.

Завдання для самопідготовки

1. Визначити максимальні значення швидкості і прискорення точки, що здійснює гармонічні коливання з циклічною частотою $\omega = \pi / 2 \text{ с}^{-1}$ і амплітудою $A = 3 \text{ см}$.

Відповідь: 4,71 см/с, 7.40 см/с².

2. Точка виконує гармонічні коливання. Найбільше зміщення $x_{\max}$ точки дорівнює 10 см, найбільша швидкість $v_{\max} = 20 \text{ см / с}$. Знайти циклічну частоту ω коливань і максимальне прискорення точки.

Відповідь: 2 с⁻¹, 40см/с².

3. Коливання матеріальної точки масою $m = 0,1 \text{ г}$ відбуваються згідно рівняння $x = A \cos \omega t$, де $A = 5 \text{ см}$; $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$. Визначити максимальні значення повертаючої сили $F_{\max}$ і кінетичної енергії $W_{\max}$.

Відповідь: 2мН, 50мкДж

4. Математичний маятник довжиною $l_1 = 40 \text{ см}$ і фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стержня довжиною $l_2 = 60 \text{ см}$ синхронно коливаються відносно однієї і тієї ж горизонтальної осі. Визначити відстань a центру мас стержня від осі коливань.

Відповідь: 10см

5. Амплітуда затухаючих коливань маятника за час $t_1 = 5 \text{ хв}$ зменшилася в два рази. За який час t_2 , рахуючи від початкового моменту, амплітуда зменшиться у вісім разів?

Відповідь: 15хв

РОЗДІЛ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

2.1. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

2.1.1. Рівняння стану ідеального газу

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовини, виходячи з молекулярно - кінетичних уявлень. За цими уявленнями, будь-яке тіло (тверде, рідке або газоподібне) складається з великої кількості молекул або атомів. Цілий ряд явищ доводить, що ці частинки перебувають у хаотичному безперервному русі. Приклади цього: розширення газу в посудині, випаровування рідини, дифузія і т. п.

Молекулярно - кінетична теорія пояснює властивості тіл, які спостерігаються на досліді (тиск, температура і т. д.), як сумарний результат взаємодії молекул. При цьому, якщо в механіці вивчалася найпростіша форма руху - відносне переміщення тіл, то в молекулярній фізиці вивчається молекулярний рух, що не зводиться до механічного. Незважаючи на те, що кожна частинка рухається за законами механіки, властивості величезних зібрань молекул не можуть бути пояснені тільки найпростішими механічними закономірностями. Тому, для опису закономірностей молекулярного руху використовуються методи статистичної фізики, що описують не рух окремих молекул, а лише такі середні величини, які характеризують рух величезної сукупності частинок. Залежно від агрегатного стану (газ, рідина, тверде тіло), речовина по-різному веде себе при зовнішніх впливах. Отже, при цьому діють міжмолекулярні сили, тобто сили взаємного притягання і відштовхування між частинками. Ці сили діють на мізерно малих відстанях близько двох - трьох діаметрів молекул і з збільшенням відстані убуюють до нуля.

Таким чином, вивчаючи властивості речовини, необхідно, крім теплового хаотичного руху, враховувати міжмолекулярні сили.

Вивчення основних уявлень молекулярної фізики проведемо на найпростішій моделі - *ідеальному газі*. Ідеальний газ являє собою

сукупність матеріальних точок, які не взаємодіють між собою і володіють лише кінетичної енергією.

Сукупність усіх властивостей тіла буде називатися *станом тіла*. Величини, що характеризують стан тіла і змінюються під впливом зовнішніх умов, називаються *параметрами стану*. Стан даної маси ідеального газу характеризується трьома параметрами: об'ємом V ($[V] = \text{м}^3$), температурою T ($[T] = \text{К}$), і тиском p ($[p] = \text{Па}$).

Якщо температура в різних точках тіла неоднакова, то цьому тілу не можна приписати певну температуру. Такий стан називається *нерівноважним*. Це ж відноситься і до тиску. Якщо тіло надати самому собі і ізолювати від інших тіл, то ці параметри вирівнюються.

Стан системи, при якому всі параметри системи мають певні значення, що залишаються при зміні зовнішніх умов постійними як завгодно довго, називається *рівноважним станом*.

Зв'язок між параметрами стану встановлюється рівнянням стану ідеального газу. Виведемо це рівняння на основі експериментальних газових законів.

Розглянемо загальний випадок зміни стану газу, коли постійною залишається лише маса газу m . Для цього об'єднаємо закон Гей - Люссака ($p = \text{const}$) і Бойля - Маріотта ($T = \text{const}$) і розглянемо процес переходу газу з одного стану в інший за схемою: спочатку ізотермічний перехід із стану 1 в стан 1', а потім изохоричний перехід зі стану 1' в стан 2. У стані 1 параметри газу p_1, V_1, T_1 , в стані 2 - p_2, V_2, T_2 (рис. 1.1).

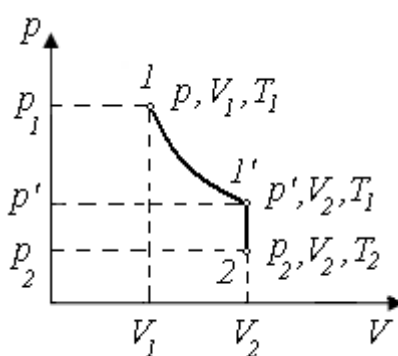


Рис. 2.1.1. Перехід газу зі стану 1 у стан 2

Точки системи, що перебуває в станах 1 і 1', лежать на одній і тій же ізотермі, тому на підставі закону Бойля - Маріотта можна записати:

$$p_1 V_1 = p' V_2 \quad (1.1)$$

Точки, що визначають стан 1' і 2, належать одній ізохорі. Тому:

$$\frac{p'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1.2)$$

Виключимо тиск p' з (1.1) і (1.2) отримаємо:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Узагальнюючи, отримаємо *об'єднаний газовий закон Клапейрона*:

$$\frac{pV}{T} = \text{const} = C \quad (1.3)$$

Тут C - постійна для даної маси газу величина.

Для визначення постійної C скористаємося законом Авогадро, згідно з яким грам - молекули всіх газів займають при однакових умовах (однакових температурах, тиску) один і той же об'єм. Звідси випливає, що якщо кількість газу дорівнює одному молю, то C для всіх газів буде однаковою. Вважаючи у рівнянні (1.3) $C = R$, можна для одного молю газу записати:

$$\frac{pV_\mu}{T} = R \quad (1.4)$$

де V_μ - об'єм одного молю, R - *універсальна газова стала*. Підрахуємо в системі СІ величину універсальної газової сталої R , виходячи з умов нормального стану газу: $p = 1,01 \cdot 10^5$ Па; $V_\mu = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м³/моль;
 $T = 273$ К.

$$R = \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}}{273 \text{ К}} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Узагальнимо рівняння (1.4) на випадок довільної маси газу m . У цій масі міститься $\frac{m}{\mu}$ молей газу. Відповідно, у стільки ж разів зростає величина p . Тому, для довільної маси ідеального газу маємо:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (1.5)$$

Це і є *рівняння стану ідеального газу*, що включає всі параметри стану газу. Воно відоме як *рівняння Менделєєва - Клапейрона*.

2.1.2. Основне рівняння молекулярно - кінетичної теорії газів

Це рівняння встановлює зв'язок між макроскопічними параметрами (тиском газу в посудині) і мікроскопічним параметром - середньою кінетичною енергією газових молекул. При цьому молекули газу вважаються пружними кульками.

Якщо вважати зіткнення молекул газу зі стінками абсолютно пружним, то тиск на стінки посудини визначиться ударами частинок, які відскакують від стінок без зміни величини швидкості. Внаслідок хаотичності руху частинок, число частинок що вдаряються і їх швидкості будуть різні в окремі моменти часу. З молекулярно - кінетичної точки зору тиск, який чиниться газом на стінки посудини, являє собою середній імпульс сили від ударів молекул газу, що припадає в одиницю часу на одиницю площі стінки.

Виведення рівняння наближений і використовує ряд припущень:

- рух молекул газу відбувається тільки в трьох взаємно перпендикулярних напрямках. Це допущення трохи знижує число молекул, які співударяються зі стінкою;
- у кожному з напрямків рухається $1/3$ всіх молекул;
- при кожному ударі молекул газу зі стінкою вони передають стінці імпульс.

При цьому вважається, що рух молекули нормальний до стінки і удар абсолютно пружний. Насправді ж швидкості молекул можуть бути спрямовані і під кутом до стінки посудини. Це припущення, таким чином, завищує результат.

Строгий математичний підхід показує, що ці припущення як би компенсують одне одну, тому результат в наближеному підході виходить правильний.

Подумки виділимо всередині газу об'єм у вигляді куба зі стороною a . Для визначення тиску газу на стінки посудини розглянемо результат ударів об стінку молекул, що рухаються в напрямку осі x (рис. 1.2).

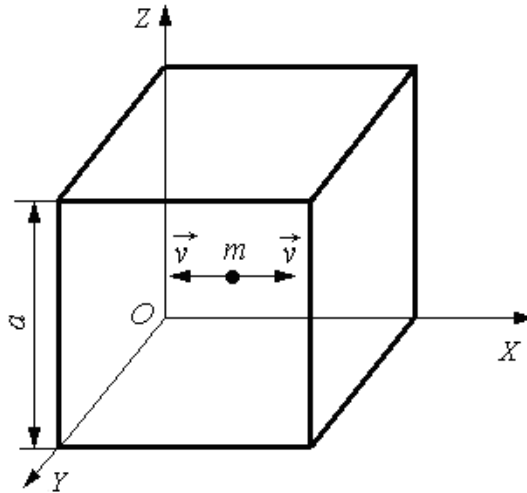


Рис. 2.1.2. Об'єм газу у вигляді куба

Спочатку визначимо силу від удару однієї молекули об стінку, скориставшись законами класичної механіки, а потім оцінимо середню силу удару за одиницю часу всіх молекул, що рухаються вздовж осі x .

На основі другого закону Ньютона визначимо імпульс, одержаний стінкою при зіткненні з нею молекули газу. Імпульс сили, що діє на матеріальну точку, дорівнює зміні її кількості руху:

$$F\Delta t = \Delta(mv) \quad (1.6)$$

Зміна кількості руху точки за 1 секунду чисельно визначає силу, що діє на неї :

$$F = \Delta(mv). \quad (1.7)$$

При пружному ударі частинки об стінку перпендикулярно до неї, чисельне значення швидкості зберігається, а напрям цієї швидкості змінюється на протилежний, тобто зміна імпульсу частинки визначиться так:

$$\Delta(mv) = -mv - mv = -2mv \quad (1.8)$$

При цьому внаслідок третього закону Ньютона стінка отримує при ударі кожної частинки імпульс:

$$p' = 2mv \quad (1.9)$$

Нехай в посудині міститься N молекул, причому зіткнення між ними не враховуються. Якщо за один удар молекула передає стінці імпульс $2mv$, то сумарний імпульс, одержаний стінкою за 1 секунду, визначиться добутком імпульсу від одного удару на число ударів z в секунду, тобто

$$p'z = 2mvz \quad (1.10)$$

Підрахуємо величину z . Розглянемо тільки ті молекули, які переносяться в об'ємі у напрямку осі x від лівої грані до правої, і назад. Час між двома ударами з правою гранню:

$$\tau = \frac{2a}{v}, \quad (1.11)$$

де v - швидкість молекули, а число зіткнень в 1 секунду:

$$z = \frac{1}{\tau},$$

тобто

$$z = \frac{v}{2a}. \quad (1.12)$$

Тоді сила удару однієї молекули об стінку за 1 секунду дорівнює:

$$F = 2mv \frac{v}{2a} = \frac{mv^2}{a} \quad (1.13)$$

Однак за 1 секунду по праву грань вдаряється $N' = \frac{N}{3}$ всіх молекул, і середня сила удару за 1 секунду всіх N' молекул буде:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \frac{mv_1^2}{a} + \frac{mv_2^2}{a} + \dots + \frac{mv_i^2}{a} + \dots + \frac{mv_{N'}^2}{a} = \\ &= \frac{m}{a} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_i^2 + \dots + v_{N'}^2). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Так як молекули володіють різними швидкостями, а число молекул величезна, то можна ввести поняття про *середній квадрат*

швидкості (середньоквадратична швидкість) і середньої кінетичної енергії поступального руху молекули :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N'} v_i^2}{N'} ; \quad \langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N'} \frac{mv_i^2}{2}}{N'}. \quad (1.15)$$

Підставивши (1.15) в (1.14), отримаємо :

$$\langle F \rangle = \frac{m \langle v^2 \rangle}{a} N' = \frac{2}{3} \frac{N}{a} \langle E_{\text{пост}} \rangle$$

Тоді середній тиск p об стінку буде:

$$p = \frac{\langle F \rangle}{a^2} = \frac{2}{3} \frac{N}{a^3} \langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle,$$

де - $n = \frac{N}{a^3}$ - число частинок в одиниці об'єму, а $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ - середня кінетична енергія поступального руху молекул газу.

Таким чином:

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle \quad (1.16)$$

є *основне рівняння молекулярно - кінетичної теорії газів*, яке встановлює зв'язок між макроскопічними параметром - тиском і мікроскопічним - середньої кінетичної енергією молекул газу.

2.1.3. Наслідки з основного рівняння

Встановимо зв'язок між середньою кінетичною енергією молекул і абсолютною температурою газу.

Перетворимо формулу основного рівняння (1.16), помноживши ліву і праву її частини на об'єм одного молю газу:

$$pV_{\mu} = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle V_{\mu}. \quad (1.17)$$

nV_{μ} - число частинок в одному молі, яке дорівнює числу Авогадро N_A , тобто $nV_{\mu} = N_A$.

$$pV_{\mu} = \frac{2}{3} < E_{\text{ном}} > N_A \quad (1.18)$$

Порівняємо отриману формулу з формулою

$$pV_{\mu} = RT.$$

Тоді

$$\frac{2}{3} N_A < E_{\text{ном}} > = RT,$$

а звідси

$$\frac{2}{3} < E_{\text{ном}} > = \frac{R}{N_A} T. \quad (1.19)$$

З урахуванням, того, що відношення двох постійних $\frac{R}{N_A} = k$ являє собою *постійну Больцмана*, перепишемо співвідношення (1.19) таким чином:

$$< E_{\text{ном}} > = \frac{3}{2} kT, \quad (1.20)$$

тобто середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу пропорційна абсолютній температурі.

Молекулярно - кінетичне тлумачення термодинамічної температури: *термодинамічна температура з точністю до постійного множника $(3/2)k$ дорівнює середньої кінетичної енергії поступального руху молекул.*

1. Величину сталої Больцмана легко підрахувати, підставивши значення констант :

$$k = \frac{8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})}{6,02 \cdot 10^{23} 1/\text{моль}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

З формули (1.20) витікає фізичний зміст абсолютної температури: *вона є кількісною мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул.*

Як впливає з формули (1.20), при температурі, що дорівнює нулю, кінетична енергія молекул також дорівнює нулю. Однак це не означає, що припиняється всякий рух молекул газу. При низьких температурах електрони продовжують рух навколо ядер. Таким чином, абсолютний нуль означає не відсутність руху, а такий стан речовини, при якому подальше зменшення інтенсивності теплового руху внаслідок віддачі його енергії оточуючим тілам, неможливий. Тому, при низьких температурах, коли зменшується вплив теплового руху на процеси, що протікають в речовині, можна чекати виникнення нових властивостей і явищ (надпровідність, надплинність).

Кінетична енергія поступального руху всіх частинок N_A , що містяться в одному молі газу, визначиться так:

$$\langle E_\mu \rangle = N_A \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} RT. \quad (1.21)$$

Для довільної маси газу m , що містить (m/μ) молей:

$$\langle E \rangle = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} pV. \quad (1.22)$$

2. Отримаємо тепер співвідношення, що пов'язує величину середнього тиску газу з його температурою. У формулу основного рівняння (1.16) підставимо значення кінетичної енергії з формули (1.20):

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{3}{2} kT = nkT, \quad (1.23)$$

тобто тиск газу пропорційний його температурі.

2.1.4. Закон Дальтона

Припустимо, що є газова суміш яка в одиниці об'єму містить n_1 молекул одного газу, n_2 - другого, n_3 - третього і т.д. Всього є N типів молекул. Так, наприклад, повітря складається з молекул кисню, азоту, вуглекислого газу і т.д.

Тоді загальне число молекул в одиниці об'єму дорівнює:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_N. \quad (1.24)$$

Підставимо значення n у формулу (1.23):

$$p = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_N)kT. \quad (1.25)$$

Розкриваючи дужки, одержимо:

$$n_1 kT = p_1, \quad n_2 kT = p_2. \quad (1.26)$$

Тиски $p_1, p_2, \dots, p_N$ називаються *парціальними тисками*.

Тиск, обумовлений молекулами якого-небудь одного газу за умови, що тільки молекули цього газу присутні в посудині в тій кількості, в якій вони присутні у суміші, називаються парціальним тиском.

Формулу (1.25) перепишемо у вигляді:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N = \sum_{i=1}^N p_i. \quad (1.27)$$

Формула (6.27) виражає закон Дальтона: *тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, які створюють суміш.*

Завдання для самоконтролю

1. Який сенс вкладається в поняття «термодинамічний стан тіла»? Які параметри стану Ви знаєте?
2. Визначити густину суміші, що складає з 4 г водню і 32г кисню, при температурі $t = 7^\circ \text{C}$ і тиску $p = 93 \text{ кПа}$.
Відповідь: $0,48 \text{ кг/м}^3$
3. У колбі об'ємом $V = 100 \text{ см}^3$ знаходиться газ при температурі $T = 300\text{K}$. Наскільки знизиться тиск газу в колбі, якщо внаслідок витоку з колби вийде $N = 10$ молекул?
Відповідь: $4,14 \text{ кПа}$
4. При русі посудини з газом щодо деякої системи відліку середня швидкість руху молекул газу щодо цієї системи відліку буде більше, ніж у випадку, коли посудина нерухома. Чи не спричинить за собою рух посудини збільшення температури газу?
5. Газ знаходиться у посудині, температура стінок якої відрізняється від температури самого газу. У якому випадку тиск газу на стінки посудини буде більше: коли температура стінок вище температури газу або коли вона буде нижче температури газу.

2.2. ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

2.2.1. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями. Закон Максвелла

При виведенні основного рівняння МКТ молекулам ставили різні швидкості. У результаті багаторазових зіткнень швидкість кожної молекули змінюється за модулем і напрямком. Однак через хаотичного руху молекул всі напрямки руху є рівноімовірними, тобто в будь-якому напрямку в середньому рухається однакове число молекул.

Згідно молекулярно - кінетичної теорії, як би не змінювалися швидкості молекул при зіткненнях, середня швидкість молекул в газі, що знаходиться в стані рівноваги при $T=const$ залишається постійною.

Це пояснюється тим, що в газі, що знаходиться в стані рівноваги, встановлюється деякий стаціонарний розподіл молекул за швидкостями який не змінюється з часом, і який підпорядковується цілком певному статистичному закону. Цей закон теоретично виведений Максвеллом.

При виведенні закону розподілу молекул за швидкостями Максвелл припускав:

- 1). газ складається з дуже великого числа тотожних молекул;
- 2). молекули перебувають у стані хаотичного теплового руху при однаковій температурі;
- 3). силові поля на газ не діють.

Закон Максвелла описується деякою функцією $f(v)$ яка називається *функцією розподілу молекул за швидкостями*. Якщо розбити діапазон швидкостей молекул на малі інтервали, які дорівнюють dv , то на кожен інтервал швидкості припадатиме деяке число молекул $dN(v)$, що мають швидкість, укладену в цьому інтервалі.

Функція $f(v)$ визначає відносне число молекул $dN(v)/N$, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v+dv$, тобто $dN(v)/N = f(v) dv$ звідки

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N \cdot dv} \quad (2.1)$$

Застосовуючи методи теорії ймовірностей, Максвелл знайшов функцію $f(v)$, тобто закон про розподіл молекул ідеального газу за швидкостями:

$$f(v) = 4 \pi \left(\frac{m_0}{2 \pi kT} \right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot \exp \left[-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right] \quad (2.2)$$

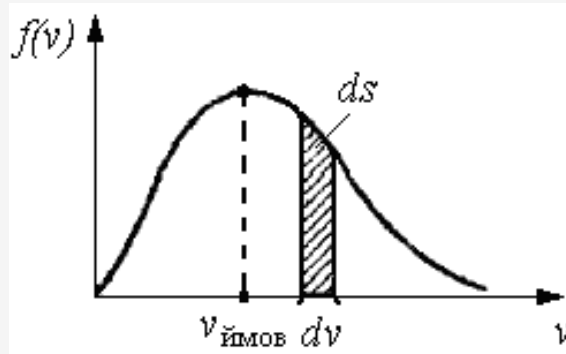


Рис. 2.2.1. Графік функції $f(v)$

Конкретний вид функції залежить від роду газу (від маси молекули) і від параметра стану (від температури). Так як при зростанні швидкості v множник

$$\exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

зменшується швидше, ніж зростає множник v^2 , то функція починаючись від нуля, досягає максимуму при $v_{\text{в}}$ і потім асимптотично прагне до нуля. Крива несиметрична відносно $v_{\text{в}}$. Відносне число молекул $dN(v)/N$, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v+dv$, знаходиться як площа заштрихованої смужки.

Площа, яка обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці. Це означає, що функція $f(v)$ задовольняє умові нормування:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

Швидкість, при якій функція розподілу молекул ідеального газу за швидкостями максимальна, називається *найбільш ймовірною швидкістю* $v_{\text{в}}$.

Значення найбільш ймовірної швидкості можна знайти, диференціюючи співвідношення (2.2) по аргументу v та прирівнявши результат нулю, тобто використовуючи умову для максимуму виразу

$$\frac{d}{dv} \left[v^2 \exp \left[-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right] \right] = 2v \left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \exp \left[-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right] = 0$$

Значення $v=0$ і $v=\infty$ відповідають мінімумам виразу (2.2), а значення v , при якому вираз в дужках стає рівним нулю, і є шукана найбільш ймовірна швидкість v_B .

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad (2.3)$$

З формули (2.3) випливає, що при підвищенні температури максимум функції розподілу молекул за швидкостями зміститься вправо (значення найбільш вірогідної швидкості стає більше, рис. 2.2). Однак площа, обмежена кривою, залишається незмінною, тому при підвищенні температури крива розподілу молекул за швидкостями буде розтягуватися і знижуватися.

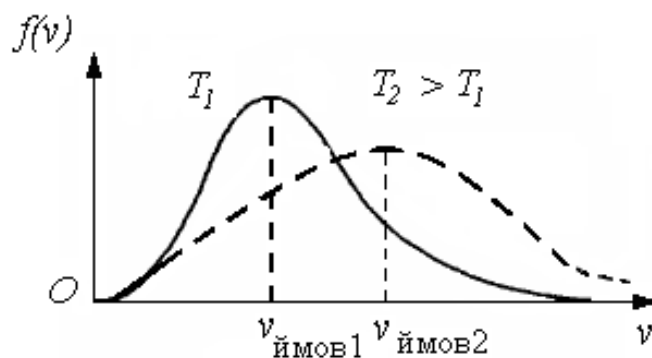


Рис. 2.2.2. Зміна виду функції $f(v)$ в залежності від температури

Середня швидкість молекул $\langle v \rangle$ (середня арифметична швидкість) визначається за формулою:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

Підставляючи сюди $f(v)$ і інтегруючи, отримаємо

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \quad (2.4)$$

Таким чином, маємо швидкості, що характеризують стан газу:
1) найбільш ймовірна

$$v_g = \sqrt{2RT / \mu}$$

2) середня

$$\langle v \rangle = \sqrt{8RT / (\pi \mu)} = 1,13 v_g$$

3) середня квадратична

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3RT / \mu} = 1,22 v_g$$

Виходячи з розподілу молекул за швидкостями

$$dN(v) = N 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi \cdot kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) dv \quad (2.5)$$

можна знайти розподіл молекул газу за значеннями кінетичної енергії ϵ .

Перейдемо від змінної v до змінної $\epsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$.

Якщо підставити в (2.5) $v = \sqrt{2\epsilon / m_0}$ і $dv = (2m_0 \epsilon)^{-1/2} d\epsilon$,
то отримаємо:

$$dN(\epsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} \exp \left(-\frac{\epsilon}{kT} \right) d\epsilon = N f(\epsilon) d\epsilon$$

де $dN(\epsilon)$ - число молекул, що мають кінетичну енергію поступального руху, укладену в інтервалі від ϵ до $\epsilon + d\epsilon$.

Таким чином, функція розподілу молекул по енергіях теплового руху

$$f(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} \exp \left(-\frac{\epsilon}{kT} \right),$$

звідки середня кінетична енергія $\langle \varepsilon \rangle$ молекул ідеального газу

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) d\varepsilon = \frac{3}{2} kT.$$

2.2.2. Барометрична формула. Розподіл Больцмана

При виведенні основного рівняння МКТ газів і максвеллівського розподілу молекул за швидкостями передбачалося, що на молекули газу зовнішні сили не діють, тому молекули рівномірно розподілені за об'ємом.

Однак молекули будь-якого газу знаходяться в потенційному полі тяжіння Землі. Тяжіння, з одного боку, і тепловий рух молекул - з іншого, призводять до деякого стаціонарного стану газу, при якому тиск газу з висотою убиває.

Виведемо закон зміни тиску з висотою, припускаючи, що

- 1) полі тяжіння однорідно, 2) температура постійна і 3) маса всіх молекул однакова.

При зростанні висоти на невелику величину dx (рис. 2.2.) тиск зменшується на малу величину $dp = -\rho g dx$, де ρ - густина газу, $\rho = m_0 n$, m_0 - маса молекули. Зручно виразити густину газу через макропараметри - температуру і тиск. Для цього скористаємося формулою $p = nkT$, тоді $\rho = \frac{m_0 p}{kT}$, а $dp = -\frac{m_0 p g}{kT} dx$.

Розділимо змінні величини у останній формулі, тобто $\frac{dp}{p} = -\frac{m_0 g}{kT} dx$. Інтегруючи одержуємо: $\ln p = -\frac{m_0 g}{kT} x + \ln C$, де C - постійна інтегрування, яку знаходимо з умови: при $x = 0$ і $C = p_0$. тоді

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{m_0 g x}{kT} \text{ або } \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{m_0 g x}{kT}.$$

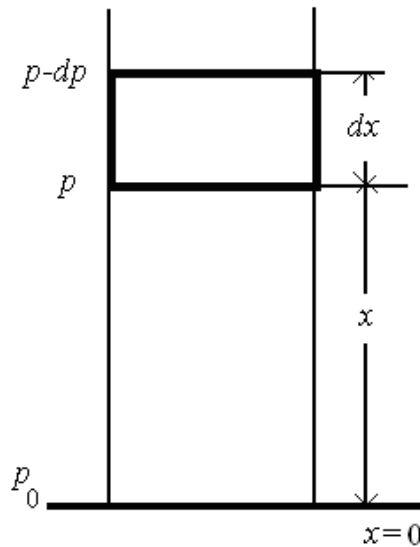


Рис. 2.2.2. Зміна тиску газу в залежності від висоти

Після потенціювання одержимо *барометричну формулу*

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g x}{kT}}. \quad (2.6)$$

Враховуючи, що маса молекули може бути виражена через молярну масу і число Авогадро $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$, а $N_A k = R$, показник експоненти можна записати через молярну масу і універсальну газову сталу:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g x}{RT}} \quad (2.7)$$

Так як при постійній температурі $p \sim n$, то можна отримати співвідношення для *розподілу Больцмана*:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g x}{RT}} \text{ або } n = n_0 e^{-\frac{m_0 g x}{kT}}$$

Чисельник показника експоненти являє собою потенційну енергію частинки, що знаходиться в полі сили тяжіння, а знаменник пропорційний тепловій енергії. Розподіл Больцмана справедливий, якщо частинка перебуває в будь-якому потенційному полі, тому можна позначити потенційну енергію частинки через $W_{\text{п}}(x)$. Тоді розподіл Больцмана буде мати вигляд

$$n = n_0 e^{-\frac{W_{\pi}(x)}{kT}} \quad (2.7)$$

Розподіл Больцмана - це розподіл частинок по потенційним енергіям. Потенційна енергія залежить від вибору початку відліку, і може бути виражена як $W_{\pi}(x) = W_{\pi 0} + \Delta W_{\pi 0}(x)$. Тут $W_{\pi 0}$ - потенційна енергія частинок на початку відліку, $W_{\pi}(x)$ - потенційна енергія в положенні x , $\Delta W_{\pi 0}(x)$ - зміна потенційної енергії, або інтервал потенційних енергій що розглядається. Число частинок, потенційні енергії яких лежать в малому інтервалі $\Delta W_{\pi}(x)$ від $W_{\pi 0}$ до $W_{\pi}(x)$, згідно (2.7), дорівнює:

$$\Delta n = n_0 e^{-\frac{W_{\pi 0}}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta W_{\pi}}{kT}} \right)$$

Частка частинок, потенційні енергії яких лежать в малому інтервалі $\Delta W_{\pi}(x)$ поблизу $W_{\pi}(x)$ визначається співвідношенням:

$$\frac{\Delta n}{n_0} = e^{-\frac{W_{\pi 0}(x)}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta W_{\pi}(x)}{kT}} \right)$$

Звідси видно, що частка частинок $\frac{\Delta n}{n_0}$, потенційна енергія яких лежить в заданому ΔW_{π} із зростанням інтервалу W_{π} зменшується, а з ростом інтервалу ΔW_{π} поблизу деякого значення енергії W_{π} збільшується.

При великому числі частинок n_0 і нескінченно малому інтервалі енергій dW_{π} частка частинок $\frac{\Delta n}{n_0}$, потенційна енергія яких лежить в в інтервалі dW_{π} поблизу потенційної енергії W_{π} , має сенс ймовірності того, що будь-яка частинка може мати потенційну енергію в зазначеному інтервалі поблизу заданого значення потенційної енергії.

2.2.3. Броунівський рух

Важливе значення має експериментальне підтвердження отриманих розподілів. Серед експериментів, які підтверджують висновки МКТ про хаотичний (тепловий) рух атомів і молекул

першим можна назвати броунівський рух. Броунівський рух – це рух частинок, зважених в рідині або газі, під дією некомпенсованих ударів молекул рідини або газу. Інтенсивність цього руху підвищується із зростанням температури середовища, із зменшенням в'язкості і розмірів частинок (розміром близько 1мкм), зважених у газі чи рідині. (незалежно від їх хімічної природи). Згодом з'ясувалося, що броунівський рух зважених частинок викликається ударами молекул середовища, в якому частинки зважені. Так як молекули рухаються хаотично, то броунівські частинки отримують поштовхи з різних сторін, тому і роблять рух настільки химерної форми.

Таким чином, броунівський рух є підтвердженням висновків МКТ про хаотичний (тепловий) рух атомів і молекул.

Завдання для самоконтролю

1. Розподіл Максвелла допускає скільки завгодно великі швидкості. Як це узгодити з кінцевістю повної кінетичної енергії молекул газу?
2. Поясніть, якими особливостями розподілу Максвелла обумовлюється те, що середня величина абсолютної швидкості менше, ніж найімовірніша, але більше, ніж корінь квадратний з середньоквадратичної швидкості.
3. Розподіл Больцмана застосовується для випадку потенційних полів. Що ви можете сказати про розподіл частинок у непотенційних полях?
4. У скільки разів середня квадратична швидкість $\langle v \rangle$ молекул кисню більше середньої квадратичної швидкості порошинки гіпсоцементу масою $m = 10$ г, що знаходиться серед молекул кисню?
Відповідь: $1,37 \cdot 10^7$
5. Чому дорівнюють ймовірність достовірної події і ймовірність неможливої події?
6. Середня квадратична швидкість руху молекул у верхніх шарах атмосфери відповідає температурі $T = 1000\text{K}$. Однак термометр в цих шарах показує дуже низьку температуру. Як пояснити цей факт?

2.3. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В ТЕРМОДИНАМІЧНО НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМАХ

2.3.1. Рівноважний і нерівноважний стан

Рівноважний стан газу в молекулярно - кінетичної теорії розглядається як стан повної хаотичності руху молекул, розподіл яких за швидкостями підпорядковується закону Максвелла.

Будь-яке *нерівноважний стан* газу завжди пов'язаний з порушенням повної хаотичності руху і максвеллівського розподілу молекул за швидкостями. Основною особливістю нерівноважних станів є прагнення газу мимоволі переходити до рівноважного стану. Це обумовлено хаотичним тепловим рухом молекул з безперервними зіткненнями їх одна з одною, що і призводить до постійного перемішування молекул, зміни їх швидкостей та енергії. Час, протягом якого система досягає рівноважного стану, називають *часом релаксації*. Час релаксації різному щодо різних параметрів, за якими система може відхилятися від рівноважного стану.

Взаємодії молекул, їх зіткнення, є тим механізмом, який приводить систему (газ) в рівноважний стан. В ідеальному газі зіткнення відбуваються в основному між парами молекул, одночасним зіткненням трьох і більше молекул можна знехтувати.

Вивести систему, що представляє собою ідеальний газ, з рівноважного стану можна, наприклад, нагріванням однієї частини газу, тобто порушити теплову рівновагу. Якщо газ після цього надати самому собі, то через деякий час температура знову стане однаковою у всіх частинах газу. Це вирівнювання відбувається завдяки безперервному тепловому руху молекул. У нагрітій частині більше швидких молекул, що мають велику теплову енергію, ніж в інших частинах газу, тому швидкі молекули переходять туди, де їх менше, таким чином, їх число стає рівним всюди. Одночасно відбувається переміщення молекул і в нагріту область, завдяки зіткненням, так що число частинок в одиниці об'єму в середньому не змінюється. Відбувається тільки перенесення енергії з тієї частини газу, де вона більше, туди, де вона менше. Цей процес називається *теплопровідністю*.

Якщо систему вивести з рівноваги, додавши домішка іншого газу, так, щоб при однакових в усьому об'ємі тиску і температурі, концентрація домішки в одній частині була вище, ніж у всіх інших,

то через певний час система перейде в рівноважний стан за рахунок переміщення молекул домішки з області з більшою концентрацією в область з меншою концентрацією. У даному процесі, який називається *дифузією*, відбувається перенесення маси домішки. Час релаксації системи в цьому випадку не дорівнює часу релаксації системи, яка прагне до теплової рівноваги.

Рівновага газу може бути порушено, якщо однієї з його частин надана швидкість, відмінна від швидкості течії сусідніх частин. У цьому випадку через деякий час, завдяки перенесенню імпульсу упорядкованого руху від більш швидких шарів до менш швидких, швидкості шарів вирівнюються. Цей процес називається *в'язкістю* (*внутрішнім тертям*).

Всі ці процеси можна розглядати як явища переносу, підходячи до їх вивчення з формальної сторони однаково: виділяючи величину яка переноситься, виділяючи причину перенесення, вводячи рівняння переносу і часи релаксації.

Встановлення в газі максвеллівського розподілу молекул за швидкостями при переході його в рівноважний стан завжди пов'язано з направленим перенесенням маси, імпульсу і енергії. Отже процеси перенесення маси, імпульсу і енергії в газі називають *явищами переносу*.

Строгі методи розрахунку явища переносу досить складні, тому надалі можна обмежитися лише наближеним розрахунком цих явищ, що дозволяє виявити основні властиві їм закономірності.

Таким чином, до явищ переносу відносять *внутрішнє тертя*, або *в'язкість*, *теплопровідність* і *дифузію* газів. В'язкість обумовлена перенесенням імпульсу, теплопровідність - *кінетичної енергії* і дифузія - *маси молекул*.

Спочатку ці три явища досліджувалися експериментальним шляхом. При цьому вдалося, не вникаючи в молекулярний механізм явищ переносу, встановити дослідні закони, яким вони підкоряються.

Розглянемо послідовно явища теплопровідності, дифузії і в'язкості в газі, та обмежимося розглядом одновимірного переносу. Систему відліку вибираємо так, щоб вісь z була орієнтована в напрямку переносу.

2.3.2. Теплопровідність

У тому випадку коли в одній області газу середня кінетична енергія молекул більше, ніж в іншій, то з плином часу внаслідок постійних зіткнень молекул відбувається процес вирівнювання середніх кінетичних енергій молекул, тобто іншими словами, вирівнювання температур.

Якщо шари газу мають різну температуру, то в газі виникає перенесення тепла від більш нагрітого шару до менш нагрітого, тобто має місце явище теплопровідності. Припустимо, що температура газу змінюється тільки в напрямку осі z (рис. 3.1).

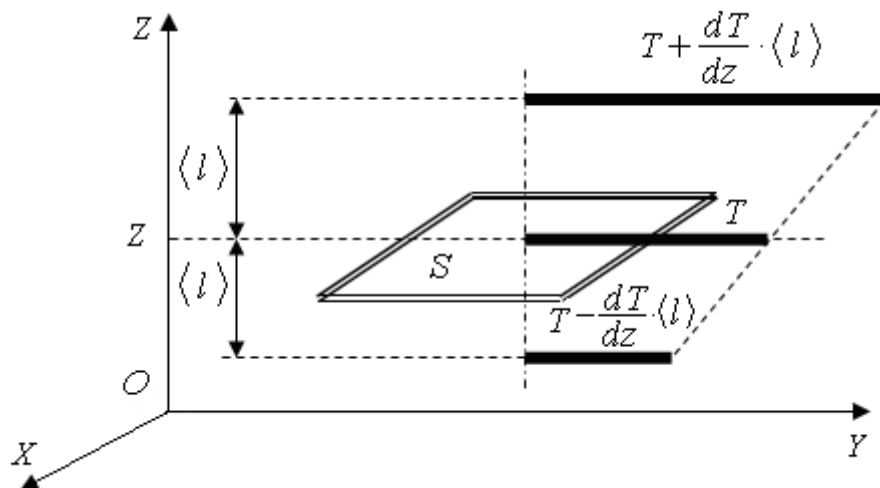


Рис. 2.3.1. Теплопровідність газу

Експериментально встановлено, що в цьому випадку теплопровідність газу визначається формулою Фур'є

$$dQ = \chi \frac{dT}{dz} \cdot S \cdot dt \quad (3.1)$$

де dQ - кількість теплоти, яку переносно за час dt через площину S , розташовану перпендикулярно осі z ; $\frac{dT}{dz}$ - градієнт температури газу; χ - коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом теплопровідності. Він залежить від властивостей газу і тих умов, при яких знаходиться газ.

У шарі з великою температурою, молекули газу мають б більшу середню кінетичну енергію, ніж у шарі з меншою температурою. Потрапляючи при хаотичному русі в цей шар, вони при зіткненнях з іншими молекулами шару передають їм надлишок своєї енергії і тим самим збільшують його температуру. Навпаки, молекули, що потрапляють з шару з меншою температурою в шар з більшою

температурою, будуть збільшувати в ньому свою енергію за рахунок інших молекул шару і тим самим будуть знижувати його температуру. Тому в молекулярно - кінетичної теорії перенесення кількості теплоти dQ через площину S розглядається, як перенесення через цю площину середньої кінетичної енергії хаотичного руху молекул.

Припишемо молекулам, що пролітають площину S знизу вгору, середню енергію, відповідну температурі $\left(T - \langle l \rangle \frac{dT}{dz}\right)$, у площині $(z - \langle l \rangle)$, а молекулам, що летять зверху вниз, значення енергії, яке визначається температурою $\left(T + \langle l \rangle \frac{dT}{dz}\right)$, у площині $(z + \langle l \rangle)$. Тут $\langle l \rangle$ - середня довжина вільного пробігу молекул.

Як відомо, середня кінетична енергія молекули газу пов'язана з його температурою співвідношенням $\langle \epsilon_k \rangle = \frac{3}{2} kT$. Тому вгору через площину S з нижнього шару однією молекулою в середньому переноситься енергія $\frac{3}{2} k \left(T - \langle l \rangle \frac{dT}{dz}\right)$, а назад $\left(-\frac{3}{2} kT\right)$. Відповідно з верхнього більш гарячого шару вниз переноситься енергія $\frac{3}{2} k \left(T + \langle l \rangle \frac{dT}{dz}\right)$, а назад $\left(\frac{3}{2} kT\right)$.

Різниця цих величин, яка дорівнює $3k \frac{dT}{dz} \langle l \rangle$, являє собою середню енергію, що переноситься однією молекулою, яка перелітає з шару у шар.

При невеликій різниці у температурі шарів газу можна вважати, що добуток числа n молекул в одиниці об'єму газу на середню швидкість $\langle v \rangle$ молекул для обох шарів приблизно однаковий. Тоді число молекул, що пролітають в одному напрямку через площину S в одиницю часу, дорівнює

$$\frac{1}{6} n \langle v \rangle S.$$

Таким чином, кількість середньої кінетичної енергії хаотичного руху молекул, яка перенесена через площину S за час dt , тобто тепло, яке переноситься, дорівнює

$$dQ = 3k \frac{dT}{dz} \langle l \rangle \cdot \frac{1}{6} n \langle v \rangle S dt \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) являє собою закон Фур'є.

Порівнюючи отримане співвідношення з емпіричною формулою (3.1), неважко знайти, що коефіцієнт теплопровідності дорівнює

$$\chi = \frac{1}{2} k \cdot n \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \quad (3.3)$$

Це співвідношення можна перетворити, якщо ввести питому теплоємність c_v . Оскільки $(\frac{3}{2} k \cdot T \cdot n)$ є, очевидно, середня енергія молекул в одиниці об'єму газу, то кількість теплоти, необхідне для нагрівання одиниці об'єму газу на один градус при постійному об'ємі, дорівнює $\frac{3}{2} k \cdot n$. Оскільки маса одиниці об'єму газу дорівнює його густині ρ , то питома теплоємність газу

$$c_v = \frac{3}{2} k \cdot n \cdot \frac{1}{\rho},$$

Звідки $k \cdot n = \frac{2c_v \rho}{3}$. Підставивши це у формулу (3.3), отримаємо

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle c_v \quad (3.4)$$

Коефіцієнт теплопровідності χ не залежить від тиску газу. Крім того, χ зростає при збільшенні температури пропорційно $\sqrt{T}$.

Якщо ввести поняття густини теплового потоку j_E , то закон Фур'є буде мати вигляд

$$j_E = -\chi \frac{dT}{dz} \quad (3.5)$$

Потік j_E - величина, що визначається енергією, яку переносять молекули у формі теплоти в одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну осі z . Знак мінус показує, що в явищі теплопровідності енергія переноситься в напрямку убутання температури, тобто j_E і $\frac{dT}{dz}$ мають протилежні знаки. Звідки можна визначити, що коефіцієнт теплопровідності чисельно дорівнює густині теплового потоку при градієнті температури, який дорівнює одиниці.

Діючи аналогічним чином можна знайти основні співвідношення для явищ дифузії та внутрішнього тертя.

2.3.3. Дифузія

Явище дифузії полягає в тому, що відбувається довільне проникнення і перемішування частинок двох дотичних газів, рідин і навіть твердих тіл; дифузія зводиться до обміну мас частинок цих тіл, виникає і триває, поки існує градієнт густини.

Під час становлення МКТ з питання дифузії виникли протиріччя. Так як молекули рухаються з величезними швидкостями, дифузія повинна відбуватися дуже швидко. Але відомо якщо відкрити в кімнаті посудину з пахучою речовиною, то запах поширюється досить повільно. Однак суперечності тут немає. Молекули при атмосферному тиску володіють малою довжиною вільного пробігу і, стикаючись з іншими молекулами, мають невелике переміщення у даному напрямку.

Явище дифузії для хімічно однорідного газу підпорядковується закону Фіка:

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dz} \quad (3.6)$$

де j_m - густина потоку маси - величина, яка визначається масою речовини, що дифундує в одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну осі z ; D - коефіцієнт дифузії; $\frac{d\rho}{dz}$ - градієнт густини, який дорівнює швидкості зміни густини на одиницю довжини z .

Знак мінус показує, що перенесення маси відбувається в напрямку убуття густини: j_m і $\frac{dp}{dz}$ - мають протилежні знаки.

Коефіцієнт дифузії D чисельно дорівнює густині потоку маси при градієнті густини, що дорівнює одиниці.

Можна показати, що згідно кінетичної теорії газів

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle . \quad (3.7)$$

2.3.4. Внутрішнє тертя (в'язкість)

Механізм виникнення внутрішнього тертя між паралельними шарами газу (рідини), що рухаються з різними швидкостями, полягає в тому, що завдяки хаотичному тепловому руху молекул відбувається обмін між шарами, в результаті чого імпульс шару, що рухається швидше, зменшується, а що рухається повільніше - збільшується, що призводить до гальмування шару, що рухається швидше, і прискоренню шару, що рухається повільніше.

Сила внутрішнього тертя між двома шарами підпорядковується закону Ньютона:

$$F = \eta \cdot \left| \frac{dv}{dz} \right| \cdot S \quad (3.8)$$

де – η динамічна в'язкість (в'язкість); $\frac{dv}{dz}$ - градієнт швидкості, що показує бистроту зміни швидкості в напрямку, перпендикулярному напрямку руху шарів; S - площа, на яку діє сила.

Взаємодію двох шарів згідно з другим законом Ньютона можна розглядати як процес, при якому від одного шару до іншого в одиницю часу передається імпульс, за модулем рівний діючій силі. Тоді співвідношення (3.8) можна представити у вигляді

$$j_F = -\eta \frac{dv}{dz}, \quad (3.9)$$

причому

$$j_F = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

де j_F - густина потоку імпульсу - величина, яка визначається повним імпульсом, що переноситься в одиницю часу в позитивному напрямку осі через одиничну площадку, перпендикулярну осі z ; $\frac{dv}{dz}$ - градієнт швидкості.

Знак мінус вказує, що імпульс переноситься в напрямку убуття швидкості: j_F і $\frac{dv}{dz}$ - мають протилежні знаки.

Коефіцієнт динамічної в'язкості чисельно дорівнює густині потоку імпульсу при градієнті швидкості, рівному одиниці; вона обчислюється за формулою

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \quad (3.10)$$

З порівняння формул (3.5), (3.6) і (3.9), що описують явища переносу, випливає, що закономірності всіх явищ переносу подібні між собою.

Ці закони були встановлені задовго до того, як вони були обґрунтовані і виведені з МКТ, яка дозволила встановити, що зовнішня схожість їх математичних виразів обумовлена спільністю молекулярного механізму перемішування молекул в процесі їх хаотичного руху і зіткнень одна з одною, який лежить в основі явищ теплопровідності, дифузії і внутрішнього тертя.

Але необхідно відмітити, що закони Фур'є, Фіка і Ньютона не розкривають молекулярно - кінетичного сенсу коефіцієнтів η , λ і D . Співвідношення для коефіцієнтів переносу виводяться з кінетичної теорії. Формули (3.5), (3.6) і (3.9), зв'язують коефіцієнти переносу та характеристики теплового руху молекул.

Таблиця 2.3.1

Порівняльні характеристики явищ переносу

Явище	Величина, яка переноситься	Рівняння переносу	Формула для коефіцієнта переносу
-------	----------------------------	-------------------	----------------------------------

Дифузія	Маса	$dM = D \frac{d\rho}{dz} \cdot S \cdot dt$	$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle$
В'язкість	Імпульс	$dp = \eta \frac{du}{dz} \cdot S \cdot dt$	$\eta = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle$
Теплопровідність	Енергія у формі тепла	$dQ = \chi \frac{dT}{dz} \cdot S \cdot dt$	$\chi = \frac{1}{3} \rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \cdot c_v$

Порівнюючи формули для коефіцієнтів переносу (таблиця 3.1.) можна знайти слідуючі співвідношення між ними:

$$\eta = \rho \cdot D \quad \text{та} \quad \frac{\chi}{\eta \cdot c_v} = 1$$

2.3.5. Вакуум

Якщо з посудини відкачано газ, то при фіксованій температурі по мірі зниження тиску число зіткнень молекул одна з одною зменшується, що призводить до збільшення їх довжини вільного пробігу. При досить великому розрідженні зіткнення між молекулами відносно рідкісні, тому основну роль грають зіткнення молекул зі стінками посудини. *Вакуумом називається стан газу, при якому середня довжина вільного пробігу $\langle l \rangle$ порівнянна або більше характерного лінійного розміру посудини d , в якій газ знаходиться.*

Залежно від співвідношення $\langle l \rangle$ і d розрізняють такі види вакууму:

$\langle l \rangle \ll d$ – низький;

$\langle l \rangle \leq d$ – середній

$\langle l \rangle > d$ – високий;

$\langle l \rangle \gg d$ – надвисокий

Поняття вакууму відносно. Чим більше лінійні розміри посудини з газом, тим при менших тисках в ньому створюються умови вакууму.

При нормальних атмосферних умовах, тобто $p = 10^5$ Па (середня довжина вільного пробігу $\langle l \rangle \approx 10^{-8}$ м), умови вакууму дотримуються лише в дуже малих об'ємах з лінійними розмірами порядку 10^{-8} м, а при тисках $p \approx 10^{-3}$ Па (форвакуум), середня довжина вільного пробігу $\langle l \rangle \approx 1$ м, а значить, умови вакууму дотримуються в досить великих об'ємах.

Питання створення вакууму мають велике значення у техніці, так як, наприклад, у багатьох сучасних електронних приладах використовуються електронні пучки, формування яких можливе лише в умовах вакууму. Для отримання різних ступенів розрідження застосовуються вакуумні насоси. В даний час застосовуються вакуумні насоси, що дозволяють отримати попереднє розрідження (форвакуум) до тиску приблизно 0,13 Па, а також вакуумні насоси та лабораторні пристосування, які дозволяють отримати тиск до 1,11 пПа (10^{-14} мм рт. ст.).

Завдання для самоконтролю

1. Чим пояснити, що всі явища переносу протікають повільно, хоча всі вони відбуваються завдяки швидким рухам молекул?
2. Накресліть хід графіка залежності добутку $l \cdot p$ (довжина вільного пробігу на тиск) від зміни тиску газу p .
3. Один з методів розділення суміші газів на компоненти полягає у використанні дифузії через пористу перегородку. Які властивості молекул використовуються при цьому?
4. Чому при виготовленні посудин Дьюара (колб для термосів) на час відкачування повітря з простору між стінками посудини поміщають в піч з температурою 300-400 ° С?
5. Металева нитка натягнута по осі циліндричної трубки, розділеної непроникною перегородкою на дві частини, в яких знаходиться один і той же газ при різному тиску. Якщо пропускати струм по нитці, то вона в одній частині трубки світиться, а в іншій - ні. В якій частині нитка світиться?

2.4. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

2.4.1. Число ступенів свободи молекул. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи

Важливою характеристикою термодинамічної системи є її *внутрішня енергія* U - енергія хаотичного (теплого) руху мікрочастинок системи (молекул, атомів, електронів, ядер і т.д.) і енергія взаємодії цих частинок.

З цього визначення випливає, що до внутрішньої енергії не відносяться кінетична енергія руху системи як цілого і потенційна енергія системи в зовнішніх полях.

Внутрішня енергія - однозначна функція термодинамічного стану, тобто у кожному стані система має цілком певну внутрішню енергію (вона не залежить від того, як система прийшла в даний стан).

Це означає, що при переході системи з одного стану в інший зміна внутрішньої енергії визначається тільки різницею значень внутрішньої енергії цих станів і не залежить від шляху переходу.

Число ступенів свободи i - це число незалежних змінних (координат), які повністю визначають положення системи в просторі.

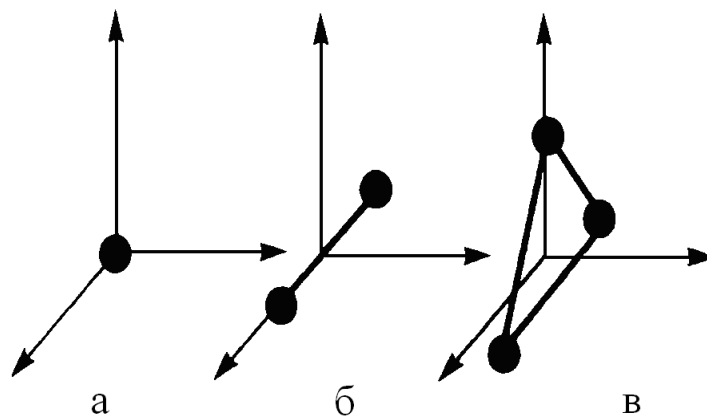


Рис. 2.4.1. Число ступенів свободи молекул

У ряді задач молекулу одноатомного газу (рис. 4.1а) розглядають як матеріальну точку, якій приписують три ступені свободи поступального руху – $i = 3$.

При цьому енергію обертального руху можна не враховувати, тобто с точки зору моменту інерції для матеріальної точки $r \rightarrow 0$, $J = mr^2 \rightarrow 0$, $T_{\text{вр}} = J\omega^2/2 \rightarrow 0$.

В класичній механіці молекула двохатомного газу розглядається як сукупність двох матеріальних точок жорстко зв'язаних між собою зв'язком який не деформується (рис. 4.1б). Ця система окрім трьох ступенів свободи поступального руху має ще дві ступені обертального руху. Таким чином, двохатомна молекула газу має п'ять ступенів свободи – $i = 5$.

Трьохатомна (рис. 4.1в) і багатоатомна нелінійні молекули мають шість ступенів свободи: три поступальних і три обертальних.

Природно, що жорсткого зв'язку між атомами не існує. Тому для реальних молекул необхідно враховувати також ступені свободи коливального руху.

Незалежно від загального числа ступенів свободи молекул три ступені свободи завжди поступальні. Жодна з поступальних ступенів свободи не має переваги перед іншими, тому на кожну з них припадає в середньому однакова енергія, яка дорівнює

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{1}{2} kT$$

У класичній статистичній фізиці розглядається закон Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями свободи молекул: *для статистичної системи, що перебуває в стані термодинамічної рівноваги, на кожну поступальну і обертальну ступені свободи припадає в середньому кінетична енергія, яка дорівнює $\frac{1}{2}kT$, а на кожну з коливальних ступенів свободи - в середньому енергія, яка дорівнює kT .*

Коливальна ступінь "володіє" удвічі більшою енергією тому, що на неї доводиться не тільки кінетична енергія (як у випадку поступального і обертального рухів), а й потенційна енергія, причому середні значення кінетичної і потенційної енергій однакові.

Таким чином, середня енергія молекули:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де i - сума кількості поступальних, кількості обертальних і подвоєної кількості коливальних ступенів свободи молекули:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2i_{\text{колив}}.$$

У класичній теорії розглядають молекули з жорстким зв'язком між атомами; для них i збігається з числом ступенів свободи молекули.

Так як в ідеальному газі взаємна потенційна енергія молекул дорівнює нулю (молекули між собою не взаємодіють), то внутрішня енергія, віднесена до одного молю газу, буде дорівнювати сумі кінетичних енергій N_A молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} R T$$

Внутрішня енергія для довільної маси m газу:

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R T = \nu \frac{i}{2} R T$$

2.4.2. Перший початок термодинаміки

Розглянемо термодинамічну систему, для якої механічна енергія не змінюється, а змінюється лише її внутрішня енергія. Внутрішня енергія системи може змінюватися в результаті різних процесів, наприклад, здійснення над системою роботи або надання їй теплоти. Так, якщо опускати поршень у циліндр, в якому знаходиться газ, то ми стискаємо цей газ, в результаті чого його температура підвищується, тобто тим самим змінюється (збільшується) внутрішня енергія газу. З іншого боку, температуру газу і його внутрішню енергію можна збільшити за рахунок надання йому деякої кількості теплоти - енергії, переданої системі зовнішніми тілами шляхом теплообміну (процес обміну внутрішніми енергіями при контакті тіл з різними температурами).

Таким чином, можна говорити о двох формах передачі енергії від одних тіл до інших: о роботі і теплоті. Енергія механічного руху може перетворюватися в енергію теплового руху, і навпаки.

У цих перетвореннях виконується закон збереження і перетворення енергії; стосовно до термодинамічних процесів цим законом і є перший початок термодинаміки, встановлений в результаті узагальнення багатоміжових дослідних даних.

Припустимо, що деяка система (газ, розташований у циліндрі під поршнем), володіючи внутрішньою енергією U_1 , отримала деяку кількість теплоти Q і, перейшовши у новий стан, що характеризується внутрішньою енергією U_2 , здійснила роботу A над зовнішнім середовищем, тобто проти зовнішніх сил.

Кількість теплоти вважається позитивною, коли вона підводиться до системи, а робота - позитивною, коли система робить її проти зовнішніх сил.

Дослід показує, що відповідно до закону збереження енергії при будь-якому способі переходу системи з першого стану в другий зміна внутрішньої енергії

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

буде однаковою і дорівнювати різниці між кількістю теплоти Q яка отримана системою, і роботою A яка виконується системою проти зовнішніх сил:

$$Q = \Delta U + A \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) виражає перший початок термодинаміки: *теплота, що надається системі, витрачається на зміну її внутрішньої енергії і на здійснення нею роботи проти зовнішніх сил.*

Вираз (4.1) в диференціальній формі буде мати вигляд

$$\Delta Q = dU + \Delta A \quad (4.2)$$

де dU - нескінченно мала зміна внутрішній енергії системи;

ΔA - елементарна робота;

ΔQ - нескінченно мала кількість теплоти.

У цьому виразі dU є повним диференціалом, а ΔA й ΔQ не є такими.

З формули (4.1) випливає, що в СІ кількість теплоти виражається в тих же одиницях, що робота і енергія, тобто в джоулях (Дж).

Якщо система періодично повертається в первинний стан, то зміна її внутрішньої енергії $dU = 0$.

Тоді, згідно першому початку термодинаміки, $A = Q$.

Іншими словами, вічний двигун першого роду - періодично діючий двигун, який здійснював би більшу роботу, ніж надана йому ззовні енергія, неможливий.

2.4.3. Робота газу при зміні його об'єму

Для розгляду конкретних процесів знайдемо в загальному вигляді зовнішню роботу, що здійснюються газом при зміні його об'єму.

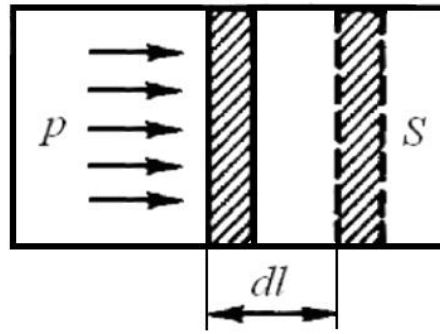


Рис.2.4.1. Процес розширення газу у циліндрі

Розглянемо газ, що знаходиться під поршнем в циліндричній посудині. Якщо газ, розширюючись, пересуває поршень на нескінченно малу відстань dl , то виконує над ним роботу

$$\Delta A = Fdl = p dSdl = p dV$$

де S - площа поршня, $Sdl = dV$ зміна об'єму системи.

Таким чином,

$$\Delta A = p dV \quad (4.3)$$

Повну роботу A , вчинену газом при зміні його об'єму від V_1 до V_2 знаходимо інтегруванням формули (4.3):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (4.4)$$

Результат інтегрування визначається характером залежності між тиском і об'ємом газу. Знайдене для роботи вираз (4.4) справедливо при будь-яких змінах об'єму твердих, рідких і газоподібних тіл.

Оскільки геометричний зміст визначеного інтегралу – це площа. То вироблену при тому чи іншому процесі роботу можна зобразити графічно у вигляді площі за допомогою кривої в координатах p, V

Нехай зміна тиску газу при його розширенні зображується кривою на рис. 4.2. При збільшенні об'єму на dV вчинена газом робота дорівнює $p dV$ тобто визначається площею смужки з основою заштрихованої на малюнку dV . Тому повна робота, що здійснюються газом при розширенні від об'єму V_1 до об'єму V_2 визначається *площею*, обмеженою віссю абсцис, кривою $p = f(V)$ і прямими V_1 і V_2 .

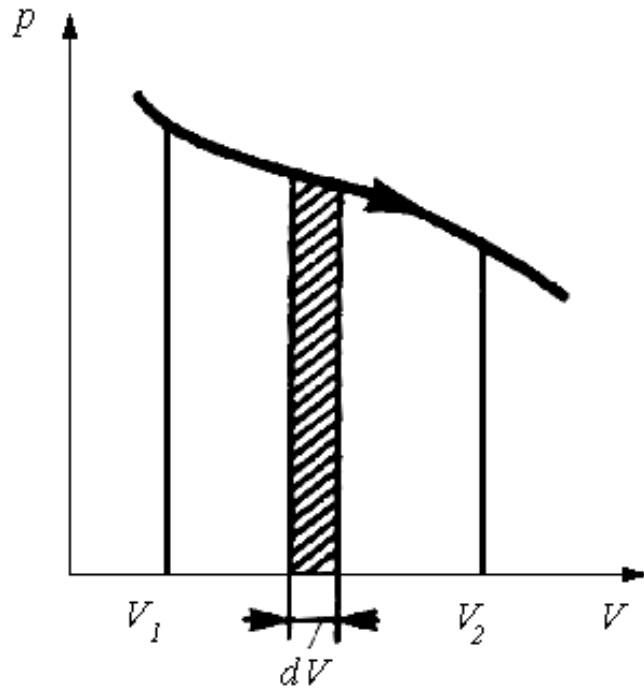


Рис. 2.4.2. Графічне зображення роботи

Графічно можна зображати тільки рівноважні процеси - процеси, які складаються з послідовності рівноважних станів. Вони протікають так, що зміна термодинамічних параметрів за кінцевий проміжок часу нескінченно мала.

Усі реальні процеси - нерівноважні (вони протікають з кінцевою швидкістю).

Але в ряді випадків неравновісність реальних процесів можна нехтувати (чим повільніше протікає процес, тим він ближче до рівноважного). Всі розглянуті в подальшому процеси будуть рівноважними.

2.4.4. Теплоємність

Теплоємність – фізична величина, чисельно рівна відношенню кількості теплоти ΔQ , наданої тілу, до зміни температури ΔT тіла в термодинамічному процесі:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \quad (4.5)$$

Одиниця теплоємності: джоуль на кельвін (Дж/К).

Питома теплоємність речовини - величина, яка дорівнює кількості теплоти, необхідної для нагрівання 1 кг речовини на 1 К

$$c = \frac{\Delta Q}{m \cdot dT}. \quad (4.5)$$

Одиниця питомої теплоємності - джоуль на кілограм - кельвін (Дж/(кг·К)).

Молярна теплоємність - величина, рівна кількості теплоти, необхідної для нагрівання 1 молю речовини на 1 К

$$C_m = \frac{\Delta Q}{\nu \cdot dT}, \quad (4.6)$$

де $\nu = \frac{m}{\mu}$ – кількість речовини.

Одиниця молярної теплоємності - джоуль на моль - кельвін (Дж/(моль К)).

Питома теплоємність пов'язана з молярною C_m співвідношенням:

$$C_m = c \cdot \mu \quad (4.7)$$

де μ - молярна маса речовини.

Розрізняють теплоємності при постійному об'ємі і постійному тиску, якщо в процесі нагрівання речовини його об'єм або тиск підтримується постійним.

Запишемо вираз першого початку термодинаміки (4.1) для 1 молю газу з урахуванням формул (4.3) і (4.5):

$$C_m dT = dU_m + p dV_m \quad (4.8)$$

Якщо газ нагрівається при постійному об'ємі, то робота зовнішніх сил дорівнює нулю і надана газу ззовні теплота йде тільки на збільшення його внутрішньої енергії:

$$C_v = \frac{dU_m}{dT} \quad (4.9)$$

тобто молярна теплоємність газу при постійному об'ємі C_v дорівнює зміні внутрішньої енергії 1 молю газу при підвищенні його

температури на 1К. Якщо зміна внутрішньої енергії dU_m 1 молю газу,

$$dU_m = \frac{i}{2} R dT$$

тоді

$$C_V = \frac{iR}{2} \quad (4.10)$$

Якщо газ нагрівається при постійному тиску, то вираз (4.8) можна записати у вигляді

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{pdV_m}{dT}$$

Враховуючи, що $\frac{dU_m}{dT}$ не залежить від виду процесу (внутрішня енергія ідеального газу не залежить ні від p , ні від V , а визначається лише T температурою) і завжди дорівнює C_V , і диференціюючи рівняння Клапейрона-Менделєєва по T (при $p=\text{const}$), знаходимо

$$pdV_m = R dT$$

звідки

$$C_p = C_V + R \quad (4.11)$$

Рівняння (4.11) називається *рівнянням Майєра*; воно показує, що завжди C_p більше C_V на величину універсальної газової сталої R .

Це пояснюється тим, що при нагріванні газу при постійному тиску потрібна ще додаткова кількість теплоти на здійснення роботи розширення газу, так як сталість тиску забезпечується збільшенням об'єму газу. Використавши (4.10), вираз (4.11) можна записати у вигляді

$$C_p = \frac{i+2}{2} R \quad (4.12)$$

З формул (4.10) і (4.11) випливає, що молярні теплоємності визначаються лише числом ступенів свободи і не залежать від

температури. Це твердження МКТ справедливо в досить широкому інтервалі температур лише для одноатомних газів.

Вже у двоатомних газів число ступенів свободи, що міститься в теплоємності, залежить від температури. Молекула двоатомного газу володіє трьома поступальними, двома обертальними і однією коливальною ступенями свободи.

За законом рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи (3 поступальних, 2 обертальних і 1 коливальна) для кімнатних температур

$$C_V = \frac{7R}{2}$$

З якісної експериментальної залежності від температури T молярної теплоємності C_V водню (див. рис. 2.4.3), випливає, що C_V залежить від температури:

при низькій температурі (близько 50 К) - $C_V = \frac{3R}{2}$,

при кімнатній $C_V = \frac{5R}{2}$ - (замість розрахункової $C_V = \frac{7R}{2}$),

і при дуже високій температурі - $C_V = \frac{7R}{2}$.

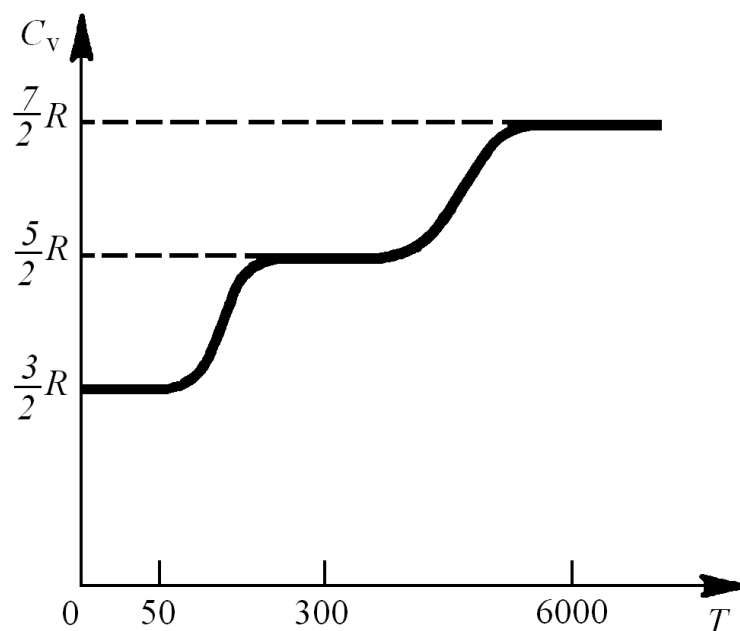


Рис. 2.4.3. Графік залежності молярної теплоємності C_V водню від температури T

Це можна пояснити, якщо припустити, що при низьких температурах спостерігається тільки поступальний рух молекул, при кімнатних - додається їх обертання, а при високих - до цих двох видів руху додається ще коливання молекул.

Розбіжність теорії та експерименту неважко пояснити. Справа в тому, що при обчисленні теплоємності треба враховувати квантування енергії обертання і коливань молекул (можливі не будь-які обертальні і коливальні енергії, а лише певний дискретний ряд значень енергій). Якщо енергія теплового руху недостатня, наприклад, для порушення коливань, то ці коливання не вносять свого вкладу в теплоємність (відповідна ступінь свободи "заморожується" - до неї не застосовується закон рівного розподілення енергії). Цим пояснюється, що теплоємність молю двоатомного газу - водню - при кімнатній температурі дорівнює $5R/2$ замість $7R/2$.

Аналогічно можна пояснити зменшення теплоємності при низькій температурі ("заморожуються" обертальні ступені свободи) і збільшення при високій ("збуджуються" коливальні ступені свободи).

Завдання для самоконтролю

1. Чому в термодинамічних завданнях потрібно розглядати процеси, які протікають нескінченно повільно, хоча реальні процеси протікають з кінцевою швидкістю?
2. Чим пояснити залежність молярних теплоємностей (C_p і C_v) для багатоатомних газів від температури?
3. Чи можливо, щоб $C_p = C_v$? Чи може величина C_p або C_v мати негативне значення або бути рівний нулю?
4. Вкажіть критерій «замерзання» ступенів. Які ступені свободи порушені у молекул азоту и кисню в повітрі при нормальних умовах? Яка величина енергії припадає на коливальну ступінь свободи?
5. Чи мають будь-який вплив на величину тиску газу внутрішні ступені свободи молекул и атомів?

2.5. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРШОГО ПОЧАТКУ

ТЕРМОДИНАМІКИ ДО ІЗОПРОЦЕСІВ

2.5.1. Ізохорний процес $V = \text{const.}$

Серед рівноважних процесів, що відбуваються з термодинамічними системами, виділяються ізопроееси, при яких один з основних параметрів стану системи зберігається сталим

Діаграма цього процесу (ізохора) в координатах p, V зображується прямою, паралельною осі ординат (рис. 5.1), де процес 2-1 є ізохорне нагрівання, а 2-3 - ізохорне охолодження. При ізохорному процесі газ не виконує роботи над зовнішніми тілами, тобто

$$\Delta A = p dV = 0$$

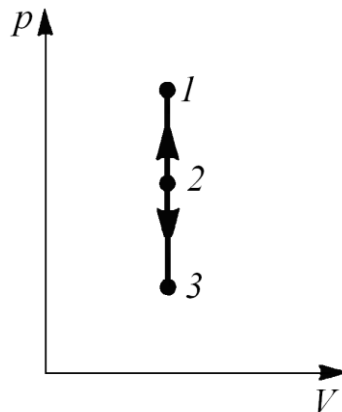


Рис. 2.5.1. Ізохорний процес

З першого початку термодинаміки для ізохорного процесу впливає, що вся теплота, що додається газу, йде на збільшення його внутрішньої енергії:

$$\Delta Q = dU$$

Відповідно до формули (4.9)

$$dU_m = C_V \cdot dT$$

Тоді для довільної маси газу отримаємо

$$\Delta Q = dU = \frac{m}{\mu} C_V \cdot dT \quad (5.1)$$

2.5.2. Ізобарний процес $p = \text{const}$

Діаграма цього процесу (ізобара) в координатах p, V зображується прямою, паралельною вісі V

При ізобарному процесі робота газу при збільшенні об'єму від V_1 до V_2 дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \quad (5.2)$$

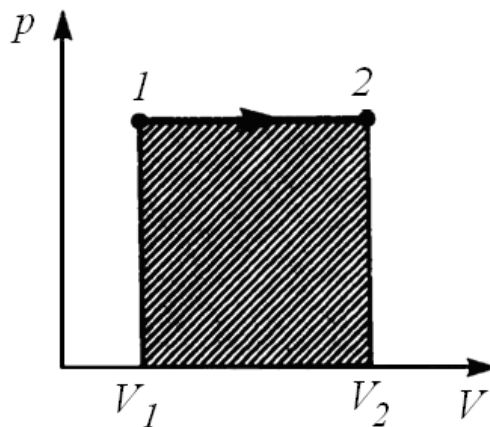


Рис. 2.5.2. Робота при ізобарному процесі

і визначається площею заштрихованого прямокутника (рис. 5.2). Якщо використовувати рівняння Клапейрона - Менделєєва для обраних двох станів, то

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2.$$

Звідки

$$V_2 - V_1 = \frac{mR}{\mu \cdot p} (T_2 - T_1).$$

Тоді вираз (5.2) для роботи ізобарного розширення прийме вигляд

$$A = \frac{mR}{\mu} (T_2 - T_1). \quad (5.3)$$

З цього виразу випливає фізичний зміст молярної газової сталої R : якщо $T_2 - T_1 = 1K$, то для 1 молю газу $R = A$, тобто R чисельно дорівнює роботі ізобарного розширення 1 молю ідеального газу при нагріванні його на 1K.

У ізобарному процесі при доданні газу масою m кількості теплоти $\Delta Q = \frac{m}{\mu} C_p \cdot dT$, його внутрішня енергія зростає на величину

$dU = \frac{m}{\mu} C_v \cdot dT$. При цьому газ здійснює роботу, яка визначається виразом

$$dA = \frac{mR}{\mu} dT$$

2.5.3. Ізотермічний процес $T = \text{const}$

Ізотермічний процес описується законом Бойля - Маріотта:
 $pV = \text{const}$

Діаграма цього процесу (ізотерма) в координатах p, V являє собою гіперболу, розташовану на діаграмі тим вище, чим вище температура, при якій відбувається процес.

Сходячі з попередніх співвідношень робота ізотермічного розширення газу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Так як при $T = \text{const}$ внутрішня енергія ідеального газу не змінюється:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_v dT = 0,$$

то з першого початку термодинаміки виходить, що для ізотермічного процесу

$$\Delta Q = \Delta A,$$

тобто вся кількість теплоти, що надається газу, витрачається на вчинення ним роботи проти зовнішніх сил:

$$A = Q = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (5.4)$$

Отже, для того щоб при розширенні газу температура не знижувалася, до газу протягом ізотермічного процесу необхідно підводити кількість теплоти, еквівалентне зовнішній роботі розширення.

2.5.4. Адіабатичний і політропний процеси

Адіабатичним називається процес, при якому відсутній теплообмін ($\Delta Q = 0$) між системою і навколишнім середовищем.

До адіабатичних процесів можна віднести всі швидкоплинні процеси. Наприклад, процес поширення звуку в середовищі, так як швидкість поширення звукової хвилі настільки велика, що обмін енергією між хвилею і середовищем відбутися не встигає. Адіабатичні процеси застосовуються в ДВС (розширення і стиснення горючої суміші в циліндрах), в холодильних приладах і т.д.

З першого початку термодинаміки для адіабатичного процесу випливає, що

$$\Delta A = -dU, \quad (5.5)$$

тобто зовнішня робота відбувається за рахунок зміни внутрішньої енергії системи.

Використовуючи вирази (5.2) і (5.3), для довільної маси газу перепишемо рівняння (5.5) у вигляді

$$pdV = -\frac{m}{\mu} C_V dT. \quad (5.6)$$

Якщо продиференціювати рівняння стану для ідеального газу

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

отримаємо

$$pdV + Vdp = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (5.7)$$

Виключимо з (5.6) і (5.7) температуру T

$$\frac{pdV + Vdp}{pdV} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V}.$$

Розділивши змінні і враховуючи, що $C_p - C_V = \gamma$, знайдемо $\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$.

Інтегруючи це рівняння в межах від p_1 до p_2 і відповідно від V_1 до V_2 , а потім потенціюючи, прийдемо до виразу

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad \text{або} \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Так як стани 1 і 2 вибрані довільно, то можна записати

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (5.8)$$

Отриманий вираз є *рівняння адіабатичного процесу*, який називається також *рівнянням Пуассона*.

Для переходу до змінних p, T або T, V виключимо з (5.8) за допомогою рівняння Клапейрона – Менделєєва $pV = \frac{m}{\mu} RT$ відповідно тиск або об'єм:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (5.9)$$

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (5.10)$$

Вирази (5.8) - (5.10) являють собою рівняння адіабатичного процесу. У цих рівняннях безрозмірна величина

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{(i+2)}{i} \quad (5.11)$$

називається *показником адіабати* (або коефіцієнтом Пуассона).

Для одноатомних газів (Ne, He тощо), які досить добре відповідають умові ідеальності, $i = 3$ і $\gamma = 1,67$; для двоатомних газів (H_2 , N_2 , O_2 та інші) - $i = 5$ і $\gamma = 1,4$.

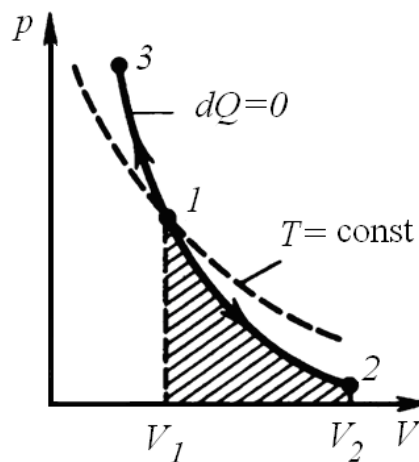


Рис. 5.3. Порівняння графіків ізотермічного та адіабатичного процесів

Значення γ , обчислені за формулою (5.11), добре підтверджуються експериментом.

Діаграма адіабатичного процесу (адіабата) в координатах p, V зображується гіперболою (рис. 5.3). На малюнку видно, що адіабата $pV^{\gamma} = \text{const}$ більш крута ніж, ізотерма $pV = \text{const}$.

Це пояснюється тим, що при адіабатичному стисненні 1-3 збільшення тиску газу обумовлено не тільки зменшенням його об'єму, як при ізотермічному стисненні, але і підвищенням температури.

Обчислимо роботу, що здійснюються газом в адіабатичному процесі. Запишемо рівняння (5.5) у вигляді

$$\Delta A = -\frac{m}{\mu} C_V \cdot dT$$

Якщо газ адіабатично розширюється від об'єму V_1 до V_2 , то його температура зменшується від T_1 до T_2 , і робота розширення ідеального газу

$$A = -\frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) \quad (5.12)$$

Застосовуючи ті ж прийоми, що і при виведенні формули (5.9), вираз (5.12) для роботи при адіабатичному розширенні можна перетворити до вигляду

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Робота, що здійснюється газом при адіабатичному розширенні 1-2 (визначається площею, яка є заштрихованою на рис. 5.3), менше, ніж при ізотермічному. Це пояснюється тим, що при адіабатичному розширенні відбувається охолодження газу, тоді як при ізотермічному - температура підтримується постійною за рахунок припливу ззовні еквівалентної кількості теплоти.

Розглянуті ізохорний, ізобарний, ізотермічний і адіабатичний процеси мають спільну особливість - вони відбуваються при постійній теплоємності.

У перших двох процесах теплоємності відповідно рівні C_V і C_p ; в ізотермічному процесі ($dT = 0$) теплоємність дорівнює $+\infty$, в адіабатичному ($\Delta Q = 0$) теплоємність дорівнює нулю.

Процеси, в яких теплоємність залишається постійною, називаються *політропні*.

Виходячи з першого початку термодинаміки за умови сталості теплоємності ($C = \text{const}$), можна вивести рівняння політропи :

$$pV^n = \text{const}, \quad (5.13)$$

де $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$ - показник політропи. Очевидно, маємо:

при $C = 0 \rightarrow n = \gamma$ - рівняння адіабати;

при $C = \infty \rightarrow n = 1$ - рівняння ізотерми;

при $C = C_p \rightarrow n = 0$ - рівняння ізобари;

при $C = C_v \rightarrow n = +\infty$ - рівняння ізохори.

Таким чином, всі розглянуті процеси є окремими випадками політропного процесу.

2.5.5. Круговий процес (цикл). Оборотні і необоротні процеси

Круговим процесом (або циклом) називається процес, при якому система, пройшовши через ряд станів, повертається у початковий стан. На діаграмі процесів цикл зображується у вигляді замкнутої кривої (рис. 5.4).

Цикл, який виконується ідеальним газом, можна розбити на процеси розширення (1-2) і стиснення (2-1) газу.

Робота розширення (визначається площею фігури 1a2V₂V₁1) позитивна ($dV > 0$), робота стиснення (визначається площею фігури 2b1V₁V₂2) негативна ($dV < 0$).

Отже, робота, що здійснюється газом за цикл, визначається площею, яка охоплюється замкнутою кривою.

Якщо за цикл здійснюється позитивна робота

$$A = \oint p dV > 0$$

(цикл протікає за годинниковою стрілкою), то він називається *прямим* (рис. 5.4а), якщо за цикл здійснюється негативна робота

$$A = \oint p dV < 0$$

(цикл протікає проти годинникової стрілки), то він називається *зворотнім* (рис. 5.4б).

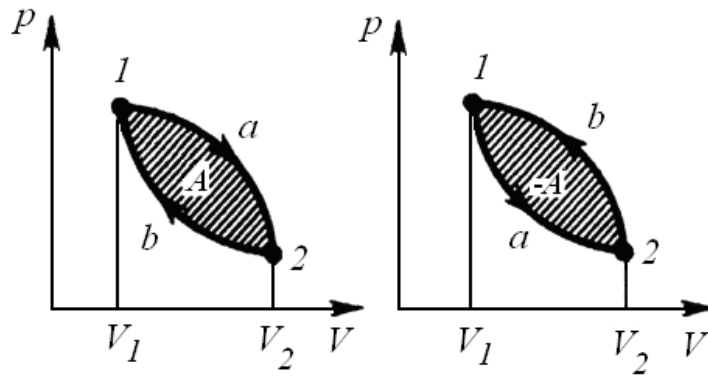


Рис. 2.5.4. Круговий процес: а – прямий цикл; б – зворотній цикл

Прямий цикл використовується в теплових двигунах - періодично діючих установках, які вчиняють роботу за рахунок одержання ззовні теплоти. Обратний/Зворотний цикл використовується в холодильних машинах - періодично діючих установках, в яких за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з більш високою температурою.

У результаті кругового процесу система повертається в початковий стан і, отже, повна зміна внутрішньої енергії газу дорівнює нулю. Тому перший початок термодинаміки для кругового процесу

$$Q = \Delta U + A = A_1, \quad (5.14)$$

тобто робота, що здійснюються за цикл, дорівнює кількості отриманої ззовні теплоти. Проте в результаті кругового процесу система може теплоту як отримувати, так і віддавати, тому $Q = Q_1 - Q_2$, де Q_1 - кількість теплоти, отримане системою, Q_2 - кількість теплоти, віддане системою.

Тому термічний коефіцієнт корисної дії для кругового процесу

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (5.15)$$

Термічний процес називається *оборотним*, якщо він може відбуватися як у прямому, так і в зворотному напрямку. Причому, якщо такий процес відбувається спочатку в прямому, а потім у зворотному напрямку і система повертається в початковий стан, то в навколишньому середовищі і в цій системі не відбувається ніяких змін.

Всякий процес, що не задовольняє цим умовам, є *незворотнім*. Будь-який рівноважний процес є оборотним. Оборотність рівноважного процесу, що відбувається в системі, впливає з того, що її будь проміжний стан є стан термодинамічної рівноваги; для нього "байдуже", йде процес у прямому чи зворотному напрямку. Реальні процеси супроводжуються дисипацією енергії (через тертя, теплопровідності і т.д.).

Оборотні процеси - це ідеалізація реальних процесів. Їх розгляд важливо з двох причин:

- багато процесів у природі і техніці практично оборотні;
- оборотні процеси є найбільш економічними.

Вони мають максимальний термічний коефіцієнт корисної дії, що дозволяє вказати шляхи підвищення ККД реальних теплових двигунів.

Завдання для самоконтролю

1. Покажіть, що теплоємність ідеального газу залежить від процесу зміни його стану.
2. Який загальний спосіб визначення рівняння процесу даного газу за заданим значенням теплоємності?
3. Які процеси зміни стану газу характеризуються негативною величиною теплоємності?
4. Сходячи з молекулярно - кінетичної картини зіткнення молекул зі стінками покажіть, що при адіабатичному стисненні газу він нагрівається. Спробуйте кількісно обчислити величину цього нагрівання в залежності від зміни об'єму.
5. Накреслити залежність теплоємності молекулярного водню від температури и поясніть цю залежність.

2.6. ЕНТРОПІЯ

2.6.1. Статистичне тлумачення ентропії і її зв'язок з термодинамічною ймовірністю

Поняття ентропії введено Р. Клаузіусом в 1865 р. Для з'ясування фізичного змісту цього поняття розглядають відношення теплоти Q , отриманої тілом в ізотермічному процесі, до температури T тіл які

віддають тепло. Це відношення називається *наведеною кількістю теплоти*.

Наведена кількість теплоти, що надається тілу на нескінченно малій ділянці процесу, дорівнює $\frac{\Delta Q}{T}$.

Теоретичний аналіз показує, що наведена кількість теплоти, що надається тілу в будь-якому *оборотному круговому процесі*, дорівнює нулю:

$$\oint \frac{\Delta Q}{T} = 0 \quad (6.1)$$

З рівності нулю інтеграла (6.1), взятого по замкнутому контуру, випливає, що підінтегральний вираз $\frac{\Delta Q}{T}$ є повний диференціал деякої функції, яка визначається тільки станом системи і не залежить від шляху, яким система прийшла в цей стан.

Таким чином,

$$\frac{\Delta Q}{T} = dS. \quad (6.2)$$

Функція стану, диференціалом якої є $\frac{\Delta Q}{T}$, називається *ентропією* і позначається S .

З формули (6.1) випливає, що для оборотних процесів зміна ентропії дорівнює нулю:

$$\Delta S = 0 \quad (6.3)$$

При цьому ентропія системи, що робить незворотний цикл, зростає:

$$\Delta S > 0 \quad (6.4)$$

Вирази (6.3) і (6.4) відносяться тільки до замкнутих систем, якщо ж система обмінюється з теплотою із зовнішнім середовищем, то її ентропія може поводитися будь-яким чином. Співвідношення (6.3) і (6.4) можна представити у вигляді нерівності Клаузіуса:

$$\Delta S \geq 0 \quad (6.5)$$

тобто ентропія замкнутої системи може або зростати (при необоротних процесах), або залишатися постійною (при оборотних процесах).

Якщо система здійснює рівноважний перехід зі стану 1 в стан 2, то, згідно (6.2), зміна ентропії

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\Delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \Delta A}{T}, \quad (6.6)$$

де підінтегральний вираз і межі інтегрування визначаються через величини, що характеризують досліджуваний процес. Фізичний зміст має не сама ентропія, а різниця ентропій.

Виходячи з виразу (6.6), знайдемо зміну ентропії в процесах ідеального газу. Так як

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT \quad \text{і} \quad \Delta A = p dV = \frac{m}{\mu} R T \frac{dV}{V},$$

то

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

або

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (6.7)$$

тобто зміна ентропії $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ ідеального газу при переході його із стану 1 в стан 2 не залежить від виду процесу переходу $1 \Rightarrow 2$.

Так як для адіабатичного процесу $\Delta Q = 0$ то й $\Delta S = 0$, отже, $S = \text{const}$, тобто адіабатичний оборотний процес протікає при постійній ентропії. Тому його часто називають ізоентропійним процесом.

З формули (6.7) випливає, що при ізотермічному процесі ($T_1 = T_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

при ізохоричному процесі ($V_1 = V_2$)

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Ентропія має властивість адитивності: ентропія системи дорівнює сумі ентропій тіл, що входять в систему. Властивістю адитивності володіють також внутрішня енергія, маса, об'єм (температура і тиск такою властивістю не володіють).

Розглянемо незворотний процес змішання двох різних ідеальних газів, що утворюють ізольовану систему. Спочатку один газ масою m_1 знаходиться при тиску p_0 і температурі T_0 в посудині об'ємом V_1 , а інший газ масою m_2 знаходиться при тому ж тиску p_0 і тій же температурі T_0 в посудині об'ємом V_2 . Судини теплоізолювані і з'єднані трубою з закритим краном. Якщо кран відкрити, то гази перемішаються: кожен з них розподілиться по всьому об'єму $V_1 + V_2$. При цьому температура і тиск в судинах не змінюються, тобто T_0 і p_0 .

Так як у даному процесі не змінюється температура, то не змінюється і внутрішня енергія кожного з ідеальних газів. Тому відповідно з визначенням ентропії в диференціальній формі

$$dS = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{dU + pdV}{T} = \frac{pdV}{T} = \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V}$$

Таким чином, зміна ентропії при змішанні газів складе

$$\Delta S = \frac{m_1}{\mu_1} R \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} + \frac{m_2}{\mu_2} R \int_{V_2}^{V_2+V_1} \frac{dV}{V} = R \left[\frac{m_1}{\mu_1} \ln \frac{V_1+V_2}{V_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \ln \frac{V_1+V_2}{V_2} \right] > 0.$$

Більш глибокий зміст ентропії розкривається в статистичній фізиці: ентропія зв'язується з термодинамічною ймовірністю стану системи.

Термодинамічна ймовірність W стану системи - це число способів, якими може бути реалізовано даний стан макроскопічної системи, або число мікростанів, які здійснюють даний макростан (за

визначенням $W \geq 1$, тобто термодинамічна ймовірність не є ймовірність в математичному сенсі).

Згідно Л. Больцману, ентропія системи і термодинамічна ймовірність пов'язані між собою таким чином:

$$S = k \ln W \quad (6.8)$$

де k - стала Больцмана.

Таким чином, ентропія визначається логарифмом числа мікростанів, за допомогою яких може бути реалізований даний макростан. Отже, *ентропія може розглядатися як міра ймовірності стану термодинамічної системи.*

Формула Больцмана (6.8) дозволяє дати ентропії наступне статистичне тлумачення: *ентропія є мірою неупорядкованості системи.*

Справді, чим більше число мікростанів, що реалізують даний макростан, тим більше ентропія.

У стані рівноваги - найбільш ймовірного стану системи - число мікростанів максимально, при цьому максимальна і ентропія.

Так як реальні процеси необоротні, то можна стверджувати, що всі процеси в замкнутій системі ведуть до збільшення ентропії - *принцип зростання ентропії.*

При статистичному тлумаченні ентропії це означає, що процеси в замкнутій системі йдуть в напрямку збільшення числа мікростанів, іншими словами, від менш імовірних станів до більш імовірних, до тих пір поки ймовірність стану не стане максимальною.

Зіставляючи вирази (6.5) і (6.8), бачимо, що ентропія і термодинамічна ймовірність замкнутої системи можуть або зростати (у разі необоротних процесів), або залишатися постійними (у разі оборотних процесів).

Ці твердження мають місце для систем, що складаються з дуже великого числа частинок, але можуть порушуватися в системах з малим числом частинок. Для "малих" систем можуть спостерігатися флуктуації, тобто ентропія і термодинамічна ймовірність станів замкнутої системи на певному відрізку часу можуть спадати, а не зростати, або залишатися постійними.

Другий приклад: посудину розділили перегородкою і всі молекули зібрані тільки в одній половинці. Далі видаляється перегородка і вивчається поширення газу в посудині.

Зворотний процес, в результаті якого газ мимовільно зібрався б в одній з половин судини, неможливий. Це обумовлено тим, що ймовірність стану, при якому молекули газу розподілені порівну між обома половинами судини, дуже велика, а ймовірність стану, при якому всі молекули газу перебували б в одній з половин судини, практично дорівнює нулю.

Слід розуміти, якщо система знаходиться в рівновазі, то параметри будуть постійними, а макростан - не змінюється. Разом з тим частинки, що утворюють систему, весь час переміщаються і змінюють свій імпульс в результаті зіткнень. Відповідно до цього мікростан системи весь час змінюється. Звідси випливає, що всякий макростан здійснюється різними способами, кожному з яких відповідає деякий мікростан системи. Число різних мікростанів, за допомогою яких здійснюється даний макростан, називається *статистичною вагою* макростану і позначається символом Ω або *термодинамічною ймовірністю* W .

Статистична вага зазвичай виражається величезними числами. Так, наприклад, для одного молю кисню при атмосферному тиску і кімнатній температурі $\Omega = 10^{6,5 \cdot 10^{24}}$.

Наприкінці додамо, що в основі статистичної фізики лежить припущення про те, що всі мікростани даної термодинамічної системи рівноймовірні. Звідси випливає, що ймовірність макростану пропорційна його статистичній вазі Ω .

2.6.2. Рівняння стану для конденсованих середовищ

Рідини і тверді тіла, на відміну від газів, мають власний об'єм і називаються *конденсованими середовищами*. Об'єм визначається розмірами молекул і силами молекулярної взаємодії. Він слабо змінюється в залежності від тиску і температури. Оскільки розміри молекул і міжмолекулярні сили специфічні для кожної системи, то універсального рівняння стану для конденсованих середовищ не існує.

Для чистих середовищ співвідношення між об'ємом, температурою і тиском можна виразити через коефіцієнт об'ємного розширення β і коефіцієнт ізотермічного стиснення K_T (ізотермічну стисливість). Коефіцієнт об'ємного розширення β визначає відносну зміну об'єму при зміні температури на 1К при постійному тиску і визначається формулою:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (6.9)$$

Коефіцієнт ізотермічного стиснення K_T показує відносну зміну об'єму при зміні тиску на одиницю величини при постійній температурі і визначається формулою:

$$K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (6.10)$$

Якщо об'єм розглядати як функцію тиску і температури $V=f(p,T)$, то диференціал об'єму буде визначатися формулою:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp = \beta V dT - K_T V dp \quad (6.11)$$

Рівняння (6.11) можна вважати рівнянням стану конденсованих середовищ в диференціальній формі. Якщо проінтегрувати його по температурі і тиску можна отримати рівняння стану в інтегральній формі.

Для твердих тіл і рідин β і K_T малі. Для рідин $\beta \sim 10^{-3} \div 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $K_T \sim 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$; для води $\beta = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $K_T = 4,96 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

Відмінною особливістю конденсованих середовищ є слабка залежність хімічного потенціалу та ентропії від тиску, отже, їх можна вважати функціями температури для даної кількості речовини. Якщо ентропію розглядати як функцію тиску і температури $S = f(p,T)$, то диференціал ентропії (або прирощення ентропії) буде мати вигляд:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp = \frac{v C_{\mu p}}{T} dT - \beta V dp \quad (6.12)$$

У інтегральній формі:

$$S(p, T) = S(0, 0) + v \int_0^T \frac{C_{\mu p}}{T} dT - \int_0^p \beta V dp \quad (6.13)$$

Так як β і V слабо змінюються залежно від тиску, третій доданок можна записати у вигляді добутку: $V \beta \cdot p$. При тисках $p \sim 10^5 \div 10^6 \text{ Па}$ цей член малий. Для води він приблизно дорівнює $3,6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, молярна теплоємність води при цих умовах приблизно

дорівнює 75 Дж/ моль·К. За нормальних умов ентропія одного моля води дорівнює 70 Дж/К. Подібно до того, як ми отримали співвідношення (6.11 - 6.13), можна отримати і інші термодинамічні функції.

Завдання для самоконтролю

1. Чи змінюється ентропія при адіабатичному процесі? Чи можна здійснити в якій-небудь системі круговий необоротний адіабатичний процес?
2. Яким чином можна вичислити зміну ентропії під час переходу системи з одного стану в інший?
3. Як можна трактувати зміну ентропії при змішуванні газів із статистичної точки зору?
4. Лід масою $m = 2$ кг при температурі $t = 0^\circ\text{C}$ був перетворений на воду тієї ж температури за допомогою пари, що має температуру $t = 100^\circ\text{C}$. Визначити масу m витраченого пара. Яке змінення ΔS ентропії системи лід - пар?
Відповідь: 251 г, 610 Дж/К
5. Кисень масою $m = 2$ кг збільшив свій об'єм в $n = 5$ разів один раз ізотермічно, інший - адіабатично. Знайти змінення ΔS ентропії в кожному із зазначених процесів.
Відповідь: 836 Дж/К

2.7. ДРУГИЙ І ТРЕТІЙ ПОЧАТОК ТЕРМОДИНАМІКИ

2.7.1. Другий початок термодинаміки

Перший початок термодинаміки, висловлюючи закон збереження і перетворення енергії, не дозволяє встановити напрямок протікання термодинамічних процесів.

Крім того, існує ряд процесів, що не суперечать першому початку термодинаміки, в яких енергія зберігається, а в природі вони не здійснюються.

Поява другого початку термодинаміки пов'язана з необхідністю дати відповідь на питання, які процеси в природі можливі, а які ні. Другий початок термодинаміки визначає напрямок протікання термодинамічних процесів.

Використовуючи поняття ентропії і нерівність Клаузиуса, другий початок термодинаміки можна сформулювати як закон зростання ентропії замкнутої системи при необоротних процесах: *будь-який незворотній процес в замкнутій системі відбувається так, що ентропія системи при цьому зростає.*

Більш коротке формулювання другого початку термодинаміки: *у процесах, що відбуваються в замкнутій системі, ентропія не убиває.*

Тут істотно, що мова йде про замкнуті системи, так як в незамкнутих системах ентропія може поводитися будь-яким чином (спадати, зростати, залишатися постійною). Крім того, ентропія залишається постійною в замкнутій системі тільки при оборотних процесах. При необоротних процесах в замкнутій системі ентропія завжди зростає.

Формула Больцмана (6.8) дозволяє пояснити зростання ентропії в замкнутій системі при необоротних процесах, яке постулюється другим початком: *зростання ентропії означає перехід системи з менш ймовірних в більш ймовірні стани.*

Таким чином, формула Больцмана дозволяє дати статистичне тлумачення другого початку термодинаміки. Воно, будучи статистичними законом, описує закономірності хаотичного руху великого числа частинок, які складають замкнуту систему.

Існують ще два формулювання другого початку термодинаміки:

- за У. Кельвіном (1851р.): *неможливий круговий процес, єдиним результатом якого є перетворення теплоти, отриманої від нагрівача, в еквівалентну їй роботу ;*
- за Р. Клаузіусом (1850р.): *неможливий круговий процес, єдиним результатом якого є передача теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого.*

Досить просто доводиться еквівалентність цих формулювань, якщо акцентувати увагу на слово «єдиним».

Теоретично показано, що якщо в замкнутій системі провести уявний процес, що суперечить другому початку термодинаміки у формулюванні Клаузіуса, то він супроводжується зменшенням ентропії.

Це ж доводить еквівалентність формулювання Клаузіуса (а отже, і Кельвіна) і статистичного формулювання, відповідно до якого ентропія замкнутої системи не може спадати.

У середині XIX століття виникла проблема так званої теплової смерті Всесвіту. Розглядаючи Всесвіт як замкнену систему і

застосовуючи до неї другий початок термодинаміки, Клаузіус звів його зміст до твердження, що ентропія Всесвіту повинна досягти свого максимуму. Це означає, що з часом всі форми руху повинні перейти в теплову. Перехід же теплоти від гарячих тіл до холодних призведе до того, що температура всіх тіл у Всесвіті зрівняється, тобто настане повна теплова рівновага і всі процеси у Всесвіті припиняться - настане теплова смерть Всесвіту.

Помилковість висновку про теплову смерть Всесвіту полягає в тому, що безглуздо застосовувати другий початок термодинаміки до незамкнених систем, наприклад, до такої безмежної і нескінченної системи, як Всесвіт.

2.7.2. Третій початок термодинаміки

Перші два начала термодинаміки дають недостатньо відомостей про поведінку термодинамічних систем при 0 К. Вони доповнюються третім початком термодинаміки або теоремою Нернста - Планка: *ентропія всіх тіл в стані рівноваги прагне до нуля в міру наближення температури до нуля Кельвіна:*

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

Так як ентропія визначається з точністю до адитивної сталої, то цю сталу зручно взяти рівною нулю. Зазначимо, однак, що це довільне припущення, оскільки ентропія по своїй суті завжди визначається з точністю до адитивної сталої.

З теореми Нернста - Планка випливає, що теплоємність C_V при абсолютному нулі дорівнює нулю.

2.7.3. Теплові двигуни і холодильні машини

Формулювання другого початку термодинаміки за Кельвіном, по суті стверджує, що вічний двигун другого роду - періодично діючий двигун, який здійснює роботу за рахунок охолодження одного джерела теплоти, - *неможливий*.

Двигун другого роду, будь він можливий, був би практично вічним. Охолодження, наприклад, води океанів на 1° дало б величезну енергію. Маса води в Світовому океані становить приблизно 10^{18} т, при охолодженні якої на 1 градус виділилося б

приблизно 10^{24} Дж теплоти, що еквівалентно повному спалюванню 10^{14} тон вугілля. Залізничний потяг, навантажений цією кількістю вугілля, розтягнувся б на відстань 10^{10} км, що приблизно збігається з розмірами Сонячної системи.

Принцип дії теплового двигуна наведено на рис. 7.1. Від термостата, який визначається, як термодинамічна система, яка може обмінюватися теплотою з тілами без зміни температури, з більш високою температурою T_1 , який називається *нагрівачем*, за цикл віднімається кількість теплоти Q_1 , а термостату з більш низькою температурою T_2 , який називається *холодильником*, за цикл передається кількість теплоти Q_2 . При цьому виконується робота $A = Q_1 - Q_2$.

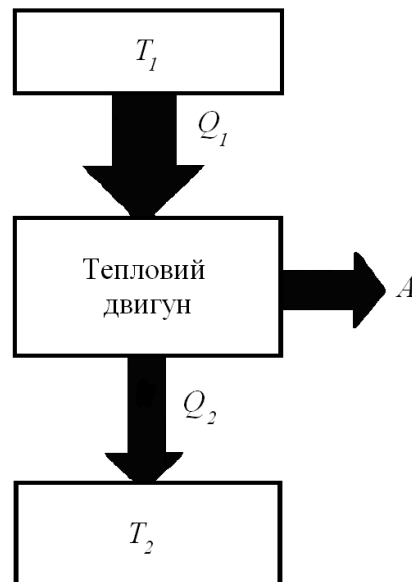


Рис. 2.7.1. Блок-схема теплового двигуна

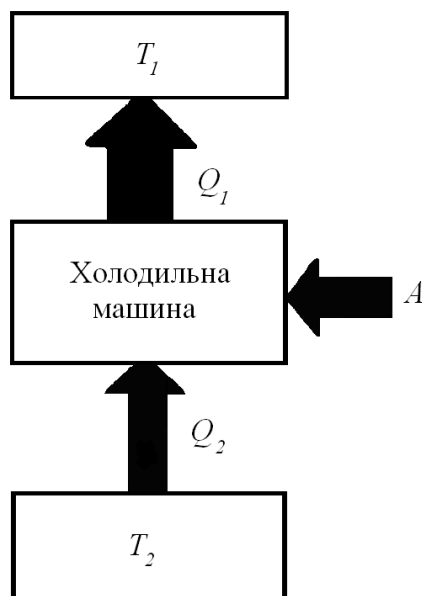


Рис. 2.7.2. Блок-схема холодильної машини

Процес, зворотний тому що відбувається в тепловому двигуні, використовується в холодильній машині, принцип дії якої представлений на рис. 7.2. Системою за цикл від термостата з більш низькою температурою T_2 віднімається кількість теплоти Q_2 , а віддається термостату з більш високою температурою T_1 кількість теплоти Q_1 . Для кругового процесу, згідно (5.14), $Q = A$.

Але, за умовою $Q = Q_2 - Q_1 < 0$, тому $A < 0$ і $Q_2 - Q_1 = -A$ або $Q_1 = Q_2 + A$, тобто кількість теплоти яка віддана системою джерелу теплоти Q_1 при більш високій температурі T_1 , більше кількості теплоти Q_2 , отриманої від джерела теплоти при більш низькій температурі T_2 на величину роботи A , яка виконується над системою.

Отже, без здійснення роботи не можна відбирати теплоту від менш нагрітого тіла і віддавати її більш нагрітому. Це твердження є не що інше, як другий початок термодинаміки у формулюванні Клаузіуса.

Однак другий початок термодинаміки не слід представляти таким, що воно зовсім забороняє перехід теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого. Адже саме такий перехід здійснюється в холодильній машині. Але при цьому треба пам'ятати, що зовнішні сили здійснюють роботу над системою, тобто цей перехід не є єдиним результатом процесу.

2.7.4. Цикл Карно і його ККД для ідеального газу

Щоб термічний коефіцієнт корисної дії теплового двигуна

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(Q_1 - Q_2)}{Q_1} \quad (7.1)$$

дорівнював 1, необхідне виконання умови $Q_2 = 0$, тобто тепловий двигун повинен мати тільки одне джерело теплоти, а це неможливо. Французький інженер Сааді Карно показав, що для роботи теплового двигуна необхідно не менше двох джерел теплоти з *різними температурами*.

Ще у 1924 році Карно вивів теорему, що носить його ім'я: з усіх *періодично діючих теплових машин, що мають однакові температури нагрівачів T_1 і холодильників T_2 , найбільшим ККД володіють оборотні машини*. При цьому ККД оборотних машин, що працюють при однакових температурах нагрівачів і холодильників рівні один одному і не залежать від природи робочого тіла (тіла, яке вчиняє круговий процес і обмінюється енергією з іншими тілами), а визначаються тільки температурами нагрівача і холодильника.

Цикл Карно зображений на рис. 7.3, де ізотермічні розширення і стиснення задані відповідними кривими 1-2 і 3-4, а адіабатичні розширення і стиснення - кривими 2-3 і 4-1.

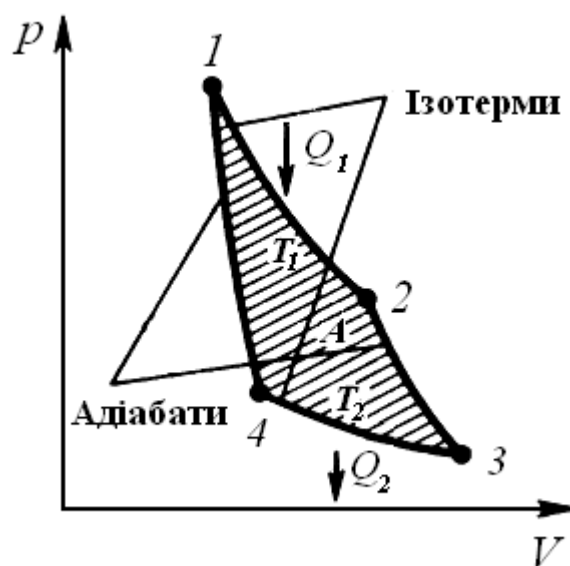


Рис. 2.7.3. Цикл Карно

При ізотермічному процесі $U = \text{const}$, тому кількість теплоти Q_1 , отримана газом від нагрівача, дорівнює роботі розширення A_{12} , яка здійснюється газом при переході зі стану 1 в стан 2:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1 \quad (7.2)$$

При адіабатичному розширенні 2-3 теплообмін з навколишнім середовищем відсутній і робота A_{23} розширення відбувається за рахунок зміни внутрішньої енергії:

$$A_{23} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$$

Кількість теплоти Q_2 , віддане газом холодильнику при ізотермічному стисненні, дорівнює роботі стиснення A_{34}

$$A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2 \quad (7.3)$$

Робота адіабатичного стиснення

$$A_{41} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}$$

Робота, що здійснюється в результаті кругового процесу,

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2.$$

Вона дорівнює площі, заштрихованій на рис. 7.3.

Для визначення термічного ККД циклу Карно будемо користуватися формулою (7.1). Застосувавши рівняння для адіабат 2-3 і 4-1, маємо

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \text{ і } T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1},$$

звідки

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (7.4)$$

Підставляючи (7.2) і (7.3) у формулу (7.1) та враховуючи (7.4), отримуємо

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (7.5)$$

Для циклу Карно ККД визначається тільки температурами нагрівача і холодильника. Для його підвищення необхідно збільшувати різницю температур нагрівача і холодильника.

Наприклад, при $T_1 = 400\text{K}$ і $T_2 = 300\text{K}$ маємо $\eta = 0,25$. Якщо ж температуру нагрівача підвищити на 100K , а температуру холодильника знизити на 50K , то $\eta = 0,5$.

ККД всякого реального теплового двигуна через тертя і неминучих теплових втрат набагато менше обчисленого для циклу Карно.

Таким чином, формулювання Карно можна вважати першою спробою доказати неможливість створення циклічного теплового двигуна, який би мав 100% ККД, тобто неможливість створення так званого *вічного двигуна другого роду*.

Теорема Карно послужила підставою для встановлення термодинамічної шкали температур. Порівнюючи ліву і праву частини формули (7.5), отримаємо

$$T_2 / T_1 = Q_2 / Q_1 \quad (7.6)$$

Для порівняння температур T_1 і T_2 двох тіл необхідно здійснити оборотний цикл Карно, в якому одне тіло використовується в якості нагрівача, інше - холодильника. З рівності (7.6) видно, що відношення температур тіл дорівнює відношенню відданої в цьому циклі кількості теплоти до отриманої.

Згідно з теоремою Карно, хімічний склад робочого тіла не впливає на результати порівняння температур, тому така термодинамічна шкала температур не пов'язана з властивостями якого-небудь певного термометричного тіла.

Однак, практично таким чином порівнювати температури важко, так як реальні термодинамічні процеси є незворотними.

Завдання для самоконтролю

1. У чому відмінність між оборотними і необоротними процесами? Чому всі реальні процеси необоротні?
2. Накресліть оборотний цикл Карно і виведіть вираз для його термічного коефіцієнта корисної дії.
3. У чому полягає другий закон термодинамік? Чим він доповнює перший початок термодинаміки?
4. Яке статистичне тлумачення другого закону термодинаміки і які межі його застосовності?
5. Чи залежить теплота, що відбирається у нагрівача, від маси робочого тіла?
6. Чи залежить робота, що здійснюється робочим тілом теплової машини за один цикл, від маси і теплоємності робочого тіла?
7. Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура охолоджувача дорівнює 290 К. У скільки разів збільшиться ККД циклу, якщо температура нагрівача підвищиться від 400 К до 600 К?

Відповідь: 1,27

8. У кімнаті постійна температура $t_1 = 18^\circ \text{C}$ підтримується електронагрівачем потужністю $P_w = 500$ ват. Температура повітря зовні $t_2 = -21^\circ \text{C}$. Замість електронагрівача для підтримки в кімнаті тієї ж температури можна використовувати тепловий насос (теплову машину, що працює по холодильному циклу). Яку потужність P_t споживатиме з електромережі тепловий насос, що працює з максимальною ефективністю?

Відповідь: $P_t = 67$ Вт (замість 500 Вт!) .

2.8. Термодинамічні потенціали

2.8.1. Внутрішня енергія

Всі розрахунки в термодинаміки ґрунтуються на використанні функцій стану, званих *термодинамічними потенціалами*. Кожному набору незалежних параметрів відповідає свій термодинамічний потенціал.

Зміни потенціалів, що відбуваються в ході яких процесів, визначають або чинену системою роботу, або отримувану системою теплоту.

При розгляді термодинамічних потенціалів будемо користуватися співвідношенням 2-го початку термодинаміки, представивши його у вигляді $TdS \geq \Delta Q$. Знак рівності відноситься до оборотних, знак нерівності - до необоротних процесів.

Термодинамічні потенціали є функціями стану. Тому прирощення будь-якого з потенціалів одно повного диференціалу функції, якої він виражається.

Повний диференціал функції $f(x, y)$ змінних x і y визначається виразом

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy$$

Тому, якщо в ході перетворень отримаємо для приросту деякої величини вираз виду

$$df = X(\zeta, \eta) d\zeta + Y(\zeta, \eta) d\eta \quad (8.1)$$

можна стверджувати, що ця величина є функцією параметрів ζ і η , причому функції $X(\zeta, \eta)$ і $Y(\zeta, \eta)$ являють собою часткові похідні функції $f(\zeta, \eta)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)_\eta = X(\zeta, \eta); \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_\zeta = Y(\zeta, \eta) \quad (8.2)$$

Вираз першого початку для оборотного процесу можна представити у вигляді

$$dU = TdS - pdV \quad (8.3)$$

Порівняння з (8.1) показує, що в якості природних змінних для потенціалу U виступають змінні S і V .

З (8.2) випливає, що

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -p \quad (8.4)$$

Зі співвідношення $\Delta Q = dU + \Delta A$ маємо, що у випадку, коли тіло не обмінюється теплотою з зовнішнім середовищем, чинена їм робота дорівнює

$$\Delta A = -dU$$

або в інтегральній формі

$$A = U_1 - U_2 \quad (8.5)$$

Таким чином, за відсутності теплообміну з зовнішнім середовищем робота дорівнює убутку внутрішньої енергії тіла. При постійному об'ємі

$$\Delta Q = dU \quad (8.6)$$

Отже, теплоємність при постійному обсязі дорівнює

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (8.7)$$

2.8.2. Вільна енергія

Згідно (8.3) робота, вироблена тілом при оборотному ізотермічному процесі, може бути представлена у вигляді

$$\Delta A = -dU + TdS = -d(U - TS) . \quad (8.8)$$

Функцію стану

$$F = U - TS \quad (8.9)$$

називають *вільною енергією* тіла.

Відповідно з формулами (8.8) і (8.9) при оборотному ізотермічному процесі робота дорівнює убутку вільної енергії тіла:

$$\Delta A = -dF, \quad (8.10)$$

або

$$A = F_1 - F_2 \quad (T = \text{const, оборотний}) \quad (8.11)$$

Порівняння з формулою (8.5) показує, що при ізотермічних процесах вільна енергія відіграє таку ж роль, як внутрішня енергія при адіабатичних процесах.

Зауважимо, що формула (8.5) справедлива як при оборотних, так і при необоротних процесах. Формула ж (8.11) справедлива тільки для оборотних процесів.

При необоротних процесах $\Delta Q < TdS$. Підставивши цю нерівність у співвідношення $\Delta A = \Delta Q - dU$ легко отримати, що при необоротних ізотермічних процесах

$$A < F_1 - F_2 \quad (T = \text{const, необоротний}) \quad (8.12)$$

Отже, спад вільної енергії визначає верхня межа кількості роботи, яку може зробити система при ізотермічному процесі.

Візьмемо диференціал від функції (8.9). Взявши до уваги (8.3), отримаємо

$$dF = TdS - pdV - TdS - SdT = -SdT - pdV \quad (8.13)$$

З порівняння з (8.1) бачимо, що природними змінними для вільної енергії є T і V .

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S; \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p \quad (8.14)$$

Замінімо в $TdS \geq \Delta Q$ ΔQ на $dU + pdV$ і розділимо співвідношення що вийшло на dt , де t - час.

В результаті отримаємо, що

$$T \frac{dS}{dt} \geq \frac{dU}{dt} + p \frac{dV}{dt} \quad (8.15)$$

Якщо температура і об'єм залишаються постійними, то співвідношення (8.15) може бути перетворено до виду

$$\frac{d(U - TS)}{dt} = \frac{dF}{dt} \leq 0 \quad (T = \text{const}; V = \text{const}) \quad (8.16)$$

З цієї формули випливає, що незворотний процес, що протікає при постійних температурі і об'ємі, супроводжується зменшенням вільної енергії тіла.

По досягненні рівноваги такий термодинамічний потенціал як вільна енергія перестає змінюватися з часом.

Таким чином, при незмінних T і V рівноважним є стан, для якого вільна енергія мінімальна.

2.8.3. Ентальпія

Якщо процес відбувається при постійному тиску, то кількість одержуваної тілом теплоти можна представити таким чином:

$$\Delta Q = dU + pdV = d(U + pV). \quad (8.17)$$

Функцію стану

$$H = U + pV \quad (8.18)$$

називають *ентальпією* або теплової функцією. З (8.17) і (8.18) випливає, що кількість теплоти, одержуваної тілом в ході ізобаричного процесу, дорівнює

$$\Delta Q = dH \quad (8.19)$$

або в інтегральній формі

$$Q = H_2 - H_1 \quad (8.20)$$

Отже, у разі, коли тиск залишається постійним, кількість одержуваної тілом теплоти дорівнює збільшенню ентальпії.

Диференціювання виразу (8.18) з урахуванням (8.3) дає

$$dH = TdS - pdV + pdV + Vdp = TdS + Vdp \quad (8.21)$$

Звідси укладаємо, що ентальпія є термодинамічний потенціал у змінних S і p . Його частинні похідні дорівнюють

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p = T; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S = V \quad (8.22)$$

Відповідно до (8.19) теплоємність при постійному тиску

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (8.23)$$

Порівнявши формули (8.19) і (8.23) з формулами (8.6) і (8.7), приходимо до висновку, що при постійному тиску ентальпія має властивості, аналогічними тим, які має внутрішня енергія при постійному об'ємі.

2.8.4. Термодинамічний потенціал Гіббса

Так називається функція стану, яка визначається таким чином:

$$G = H - TS = U + pV - TS \quad (8.24)$$

Її повний диференціал дорівнює (див. (8.21))

$$dG = TdS + Vdp - TdS - SdT = Vdp - SdT \quad (8.25)$$

Отже, природними змінними для функції Гіббса є p і T . Частинні похідні цієї функції дорівнюють

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = V; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S \quad (8.26)$$

Якщо температура і тиск залишаються постійними, співвідношення (8.15) можна записати у вигляді

$$\frac{d(U + pV - TS)}{dt} = \frac{dG}{dt} \leq 0 \quad (T = \text{const}; p = \text{const}) \quad (8.27)$$

З цієї формули випливає, що незворотний процес, що протікає при постійних температурі і тиску, супроводжується зменшенням термодинамічного потенціалу Гіббса. По досягненні рівноваги функція Гіббса перестає змінюватися з часом.

Таким чином, при незмінних p і T рівноважним є стан, для якого термодинамічний потенціал Гіббса мінімальний (порівняй з (8.16)).

Таблиця 8.1

Основні властивості термодинамічних потенціалів

Назва та позначення термодинамічного потенціалу	Властивості	
Внутрішня енергія $U = U(S, V)$	$U_1 - U_2 = A$	при адіабатичному процесі
	$U_2 - U_1 = Q$	при $V = \text{const}$
Вільна енергія $F = F(T, V)$	$F_1 - F_2 = A$	при оборотному ізотермічному процесі
	$F = \min$	для рівноважного стану при $T = \text{const}$ і $V = \text{const}$
Ентальпія $H = H(S, p)$	$H_2 - H_1 = Q$	при $p = \text{const}$
Термодинамічний потенціал Гіббса $G = G(T, p)$	$G = \min$	для рівноважного стану при $T = \text{const}$ і $p = \text{const}$

Завдання для самоконтролю

1. Рідина переходить в пар тієї ж температури. Як при цьому міняються питомий термодинамічний потенціал, ентропія, внутрішня енергія?
2. Відкриту посудину частково заповнили рідиною і герметично закрили. Порівняйте термодинамічні потенціали системи, коли посудину закрили, і через досить великий проміжок часу після її закриття.
3. Накресліть ізотерму реального газу для температури нижче критичної. Покажіть точки, що відповідають станам з однаковими питомими термодинамічними потенціалами.
4. Чому не можна зобразити нерівноважний процес безперервною лінією на термодинамічній діаграмі?

5. Яка різниця між функцією стану і функцією процесу?
6. Якими значеннями вільної енергії та ентропії характеризується термодинамічна система в рівноважному стані?
7. У теплоізольованій посудині знаходяться два гази з однаковою температурою, розділені непроникною перегородкою. Як будуть змінюватися енергія і ентропія при видаленні перегородки?
8. Як записуються повні диференціали будь-якого термодинамічного параметра?

2.9. РЕАЛЬНІ ГАЗИ

2.9.1. Сили і потенційна енергія міжмолекулярної взаємодії

Модель ідеального газу, що використовується в МКТ газів, дозволяє описувати поведінку розріджених реальних газів при достатньо високих температурах і низьких тисках. При виведенні рівняння стану ідеального газу розмірами молекул і їх взаємодією один з одним нехтують. Підвищення тиску призводить до зменшення середньої відстані між молекулами, тому необхідно враховувати об'єм молекул і взаємодію між ними.

У 1 м^3 газу при нормальних умовах знаходиться $2,68 \cdot 10^{25}$ молекул, що займають об'єм приблизно 10^{-4} м^3 (радіус молекули приблизно 10^{-10} м), яким в порівнянні з об'ємом газу можна знехтувати.

При тиску 500 МПа об'єм молекул вже складе половину всього об'єму газу. Доведено, що при високих тисках і низьких температурах зазначена модель ідеального газу непридатна.

При розгляді реальних газів - газів, властивості яких залежать від взаємодії молекул, треба враховувати сили міжмолекулярної дії. Вони виявляються на відстанях $\leq 10^{-9} \text{ м}$ і швидко зменшуються при збільшенні відстані між молекулами. Такі сили називають *короткодійними*.

У ХХ столітті, в міру розвитку уявлень про будову атома і квантової механіки, було з'ясовано, що між молекулами речовини одночасно діють сили тяжіння і сили відштовхування. На рис. 9.1а наведена якісна залежність сил міжмолекулярної взаємодії від

відстані між молекулами, де F_e і F_n відповідно сили відштовхування і притягання, а F - їх результуюча. Сили відштовхування вважаються позитивними, а сили взаємного тяжіння - негативними. Аналітично сила F має вигляд

$$F = -\frac{c_1}{r^7} + \frac{c_2}{r^{13}},$$

де коефіцієнти c_1 і c_2 залежать від хімічної природи газів.

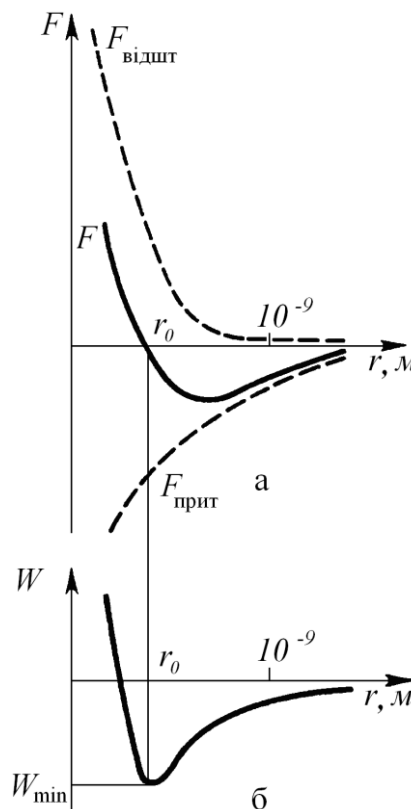


Рис.9.1. Графіки міжмолекулярної взаємодії: а – сили взаємодії; б - потенційна енергія

При $r < r_0$ переважають сили відштовхування $F > 0$.

При $r > r_0$ переважають сили притягання $F < 0$.

На відстанях $r > 10^{-9}$ м міжмолекулярні сили взаємодії практично відсутні $F \rightarrow 0$.

Елементарна робота ΔA сили F при збільшенні відстані dr між молекулами виконується за рахунок зменшення потенційної енергії молекул W , тобто

$$\Delta A = Fdr = -dW \quad (9.1)$$

З аналізу якісної залежності потенційної енергії W взаємодії молекул від відстані між ними (рис. 9.1б) випливає, що якщо молекули знаходяться одна від одної на відстані $r \rightarrow \infty$, на якому міжмолекулярні сили взаємодії не діють, то $W=0$.

При поступовому зближенні молекул між ними з'являються сили тяжіння $F < 0$, які здійснюють позитивну роботу

$$\Delta A = Fdr > 0$$

Тоді, згідно (9.1), потенційна енергія взаємодії зменшується, досягаючи мінімуму при $r = r_0$.

При $r < r_0$ із зменшенням r сили відштовхування $F > 0$ різко зростають і чинена проти них робота негативна $\Delta A = Fdr < 0$

Потенційна енергія починає теж різко зростати і стає позитивною.

З даної потенційної кривої випливає, що система з двох взаємодіючих молекул у стані стійкої рівноваги $r = r_0$ володіє мінімальною потенційною енергією.

Проста модель парного взаємодії неполярних молекул, що описує залежність енергії взаємодії двох частинок від відстані між ними була запропонована Леннард-Джонсом в 1924 році. Формула Леннарда - Джонса широко використовується в розрахунках і при комп'ютерному моделюванні

$$W = -\frac{a_1}{r^6} + \frac{a_2}{r^{12}},$$

де параметри a_1 і a_2 є характеристиками атомів відповідної речовини.

Критерієм різних агрегатних станів речовини є співвідношення між величинами $W_{\min}$ і kT . Нагадаємо, що kT - визначає подвоєну середню енергію, що припадає на одну ступінь свободи хаотичного (теплого) руху молекул; $W_{\min}$ - найменша потенційна енергія взаємодії молекул - визначає роботу, яку потрібно здійснити проти сил тяжіння для того, щоб роз'єднати молекули, що знаходяться в рівновазі $r = r_0$.

Якщо $W_{\min} \ll kT$, то речовина знаходиться в газоподібному стані, так як інтенсивний тепловий рух молекул перешкоджає

з'єднанню молекул, які наблизилися до відстані r_0 , тобто ймовірність утворення агрегатів з молекул достатньо мала.

Якщо $W_{\min} \gg kT$, то речовина знаходиться в твердому стані, так як молекули, притягаючись один до одного, не можуть віддалитися на значні відстані і коливаються біля положень рівноваги, що визначається відстанню r_0 .

Якщо $W_{\min} \approx kT$, то речовина знаходиться в рідкому стані, так як в результаті теплового руху молекули переміщуються в просторі, обмінюючись місцями, але не розходяться на відстань, що перевищує r_0 .

Таким чином, будь-яка речовина залежно від температури може знаходитися в газоподібному, рідкому або твердому агрегатному стані, причому температура переходу з одного агрегатного стану в інший залежить від значення $W_{\min}$ для даної речовини.

Наприклад, у інертних газів $W_{\min}$ мала, а в металів велика, тому при звичайних (кімнатних) температурах вони знаходяться відповідно в газоподібному і твердому станах.

2.9.2. Рівняння Ван - дер -Ваальса

Для реальних газів необхідно враховувати розміри молекул і їх взаємодію одна з одною, тому модель ідеального газу й рівняння Клапейрона – Менделєєва $pV_m = RT$ (для молю газу), що описує ідеальний газ, для реальних газів непридатна.

Враховуючи власний об'єм молекул і сили міжмолекулярної взаємодії, Ван - дер - Ваальс вивів рівняння стану реального газу.

У рівняння Клапейрона - Менделєєва введено дві поправки.

- Облік власного об'єму молекул.

Наявність сил відштовхування, які протидіють проникненню в зайнятий молекулою об'єм інших молекул, зводиться до того, що фактичний вільний об'єм, в якому можуть рухатися молекули реального газу, буде не V_m , а $V_m - b$, де b - об'єм, займаний самими молекулами.

Покажемо, що об'єм b дорівнює почетвереному власному об'єму молекул.

Якщо d - діаметр молекули, то кожна молекула реального газу має об'єм

$$V_0 = \pi d^3 / 6.$$

Якщо, наприклад, в посудині знаходяться дві молекули, то центр будь-який з них не може наблизитися до центру іншої молекули на відстань d , меншу діаметра молекули. Це означає, що для центрів обох молекул виявляється недоступним сферичний об'єм радіуса d , тобто

$$V_s = \frac{4}{3} \pi d^3 = 8V_0.$$

Заборонений об'єм дорівнює восьми об'ємам молекули або почетвереному об'єму молекули в перерахунку на одну молекулу, для одного моля маємо $b = 4N_A V_0$.

- Облік притягання молекул.

Дія сил притягання між молекулами газу призводить до появи додаткового тиску на газ, який називається *внутрішнім тиском*.

За обчисленнями Ван -дер -Ваальса, внутрішній тиск обернено пропорційний квадрату молярного об'єму

$$p' = \frac{a}{V_m^2} \quad (9.1)$$

де a - постійна Ван -дер -Ваальса, що характеризує сили міжмолекулярного тяжіння; V_m - молярний об'єм.

Тиск, чинений на стінки реальним газом, менше, ніж у випадку ідеального газу, на величину p' .

Вводячи ці поправки, одержимо рівняння Ван -дер -Ваальса для молю газу (*рівняння стану реальних газів*):

$$(p + a / V_m^2)(V_m - b) = RT \quad (9.2)$$

Для довільної кількості речовини $\left(v = \frac{m}{\mu} \right)$ газу з урахуванням того, що $V = v \cdot V_m$, рівняння Ван -дер -Ваальса визначиться у вигляді

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2} \right) \left(\frac{V}{v} - b \right) = RT$$

або

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2} \right) (V - v \cdot b) = v \cdot RT,$$

де поправки a і b - постійні для кожного газу величини, що визначаються дослідним шляхом. Записуються рівняння Ван - дер - Ваальса для двох відомих з дослідів станів газу і вирішуються щодо a і b .

При виведенні рівняння Ван - дер - Ваальса зроблений цілий ряд спрощень, тому воно також вельми наближене, хоча і краще (особливо для не сильно стислих газів) узгоджується з дослідом, ніж рівняння стану ідеального газу.

Рівняння Ван - дер - Ваальса не єдине рівняння, що описує реальні гази. Існують і інші рівняння, деякі з них навіть точніше описують реальні гази, але не розглядаються через їх складність.

2.9.3. Ізотерми Ван - дер - Ваальса та їх аналіз

Для дослідження поведінки реального газу розглянемо ізотерми Ван - дер - Ваальса, тобто криві залежності p від V_m при заданих T , зумовлені рівнянням Ван - дер - Ваальса (9.2) для молю газу.

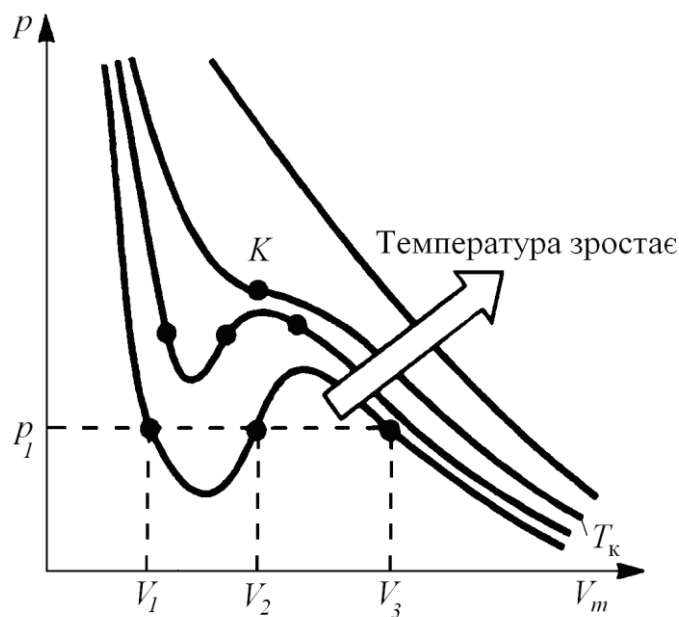


Рис. 2.9.2. Ізотерми Ван - дер - Ваальса

Ці криві (розглядаються для 4-х різних температур, рис. 9.2) мають досить своєрідний характер.

При високих температурах $T > T_k$ ізотерма реального газу відрізняється від ізотерми ідеального газу тільки деяким спотворенням її форми, залишаючись монотонно спадаючою кривою.

При деякій температурі T_k на ізотермі є лише одна точка перегину К.

Ця ізотерма називається *критичною*, відповідна їй температура T_k - *критичною температурою*.

Точка перегину К називається *критичною точкою*. У цій точці дотична до неї паралельна осі абсцис.

Відповідні цій точці об'єм V_k і тиск p_k називаються критичними. Стан з критичними параметрами p_k, V_k, T_k називається *критичним станом*.

При низьких температурах ізотерми мають хвилеподібну ділянку, спочатку монотонно опускаючись вниз, потім монотонно піднімаючись вгору і знову монотонно опускаючись.

Для пояснення характеру ізотерм перетворимо рівняння Ван - дер -Ваальса (9.2) до виду

$$pV_m^3 - (RT + pb)V_m^2 + aV_m - ab = 0 \quad (9.3)$$

Рівняння (9.3) при заданих p і T є рівнянням третього ступеня відносно V_m , отже, воно може мати або три дійсних кореня, або один дійсний і два уявних, причому фізичний зміст мають лише дійсні позитивні коріння. Тому першому випадку відповідають ізотерми при низьких температурах (три значення об'єму газу V_1, V_2 і V_3 відповідають одному значенню тиску p_1), другому випадку - ізотерми при високих температурах.

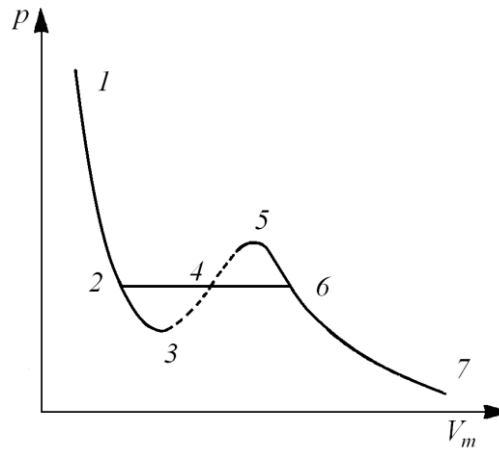


Рис. 2.9.3. Різні ділянки ізотерми Ван -дер -Ваальса

Розглянемо різні ділянки ізотерми при $T = \text{const.}$ (рис. 9.3). Бачимо, що на ділянках 1-3 і 5-7 при зменшенні об'єму тиск зростає, що природно. На ділянці 3-5 стиснення речовини призводить до зменшення тиску; практика ж показує, що такі стани в природі не здійснюються. Наявність ділянки 3-5 означає, що при поступовому зміні об'єму речовина не може залишатися весь час у вигляді однорідного середовища, в деякий момент має настати стрибкоподібна зміна стану і розпад речовини на дві фази. Таким чином, справжня ізотерна буде мати вигляд ламаної лінії 7-6-2-1.

Частина 7-6 відповідає газоподібному стану, а частина 2-1 - рідкому. У станах, відповідних горизонтальній ділянці ізотерми 6-2, спостерігається рівновага рідкої і газоподібної фаз речовини.

Речовина в газоподібному стані при температурі нижче критичної називається парою, а пара, що знаходиться в рівновазі зі своєю рідиною, називається *насиченою*.

Дані висновки, які є наслідком аналізу рівняння Ван -дер -Ваальса, були підтверджені дослідями Т. Ендрюса, що вивчав ізоермічне стиснення вуглекислого газу. Відмінність експериментальних і теоретичних ізоерм полягає в тому, що перетворення газу в рідину в першому випадку відповідають горизонтальні ділянки, а в другому - хвилеподібні. Для знаходження критичних параметрів підставимо їх значення в рівняння (9.3) і запишемо

$$p_k V_m^3 - (RT_k + p_k b) V_m^2 + a V_m - ab = 0 \quad (9.3)$$

Оскільки в критичній точці всі три корені збігаються і дорівнюють V_{mk} , рівняння приводиться до вигляду

$$p_k(V - V_{mk})^3 = 0 \quad \text{або}$$

$$p_k V^3 - 3p_k V_{mk} V^2 + 3p_k V_{mk}^2 V - p_k V_{mk}^3 = 0 \quad (9.4)$$

Так як рівняння (9.3) і (9.4) тотожні, то в них повинні бути рівними і коефіцієнти при невідомих величинах відповідних ступенів. Тому можна записати

$$p_k V_{mk}^3 = ab; \quad 3p_k V_{mk}^2 = a; \quad 3p_k V_{mk} = RT_k + p_k b.$$

Вирішуючи отримані рівняння, знайдемо

$$V_{mk} = 3b$$

$$p_k = a / (27b^2) \quad (9.5)$$

$$T_k = 8a / (27Rb)$$

Таблиця 9.1

Критичні параметри деяких газів

Газ	$V_{mk}, \text{ м}^3$	$p_k, \text{ МПа}$	$T_k, \text{ К}$
Кисень	$3,17 \cdot 10^{-5}$	5,08	155
Азот	$3,86 \cdot 10^{-5}$	3,99	126

Якщо через крайні точки горизонтальних ділянок ансамблю ізотерм провести лінію, то вийде колоколоподібна крива (рис. 9.4), обмежуюча область двофазних станів речовини.

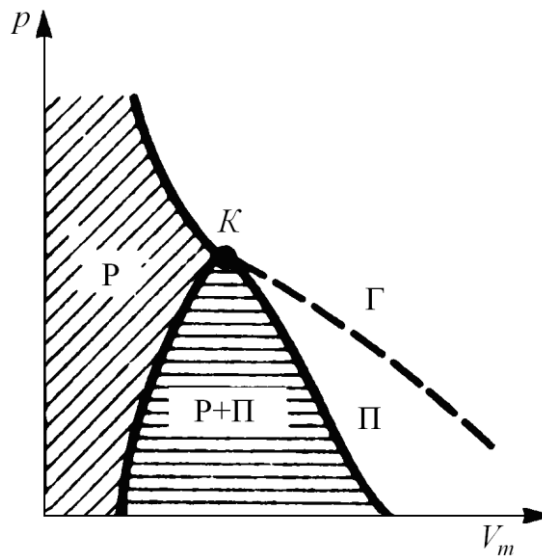


Рис. 2.9.4. Области різних станів речовини на діаграмі $p - V$

Ця крива і критична ізотерма ділять діаграму p, V_m під ізотермою на три області: під колоколоподібною кривою розташовується область двофазних станів (рідини і насичений пар), ліворуч від неї знаходиться область рідкого стану, а праворуч - область пари. Пара відрізняється від всіх інших газоподібних станів тим, що при ізотермічному стисненні зазнає процес зрідження. Газ же при температурі вище критичної не може бути перетворений на рідину ні при якому тиску.

Порівнюючи ізотерму Ван -дер -Ваальса з ізотермою Ендрюса (рис. 9.5), бачимо, що остання має прямолінійну ділянку 2-6, відповідну двофазним станам речовини. Правда, за деяких умов можуть бути реалізовані стани, відображені ділянками 5-6 і 2-3 ізотерми Ван дер - Ваальса.

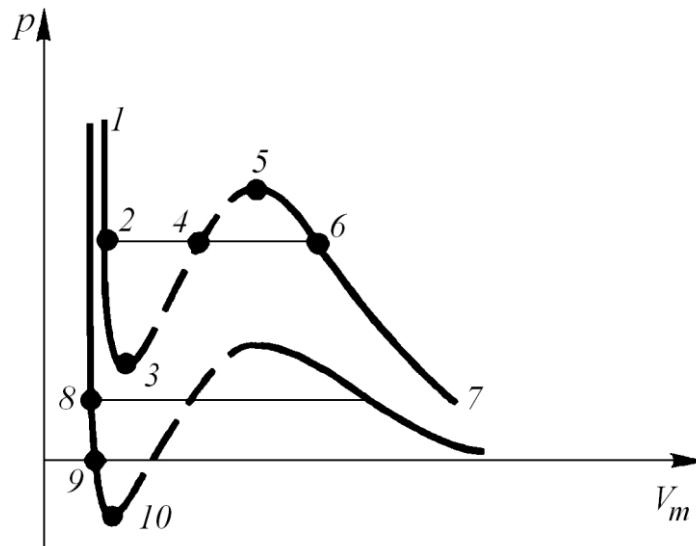


Рис. 2.9.5. Ізотерми Ендрюса

Ці нестійкі стани називаються метастабільними. Ділянка 2-3 зображує перегріту рідину, 5-6 - пересичений пар. Обидві фази обмежено стійкі.

При досить низьких температурах ізотерма перетинає вісь V_m переходячи в область негативних тисків (нижня крива на рис. 9.5). Речовина під негативним тиском знаходиться в стані розтягування. За деяких умов такі стани також реалізуються. Ділянка 8-9 на нижній ізотермі відповідає перегрітій рідині, ділянка 9-10 - розтягнутій рідині.

Завдання для самоконтролю

1. Чим відрізняються реальні гази від ідеальних? Накресліть криву, що виражає характер залежності сил взаємодій і взаємної потенційної енергії двох молекул від відстані між ними.
2. Як змінюється величина тиску газу на стінку, якщо при її обчисленні взяти до уваги кінцеві розміри молекул? Дайте чисельну оцінку цієї зміни.
3. Як зміниться величина тиску газу на стінку, якщо при її обчисленні взяти до уваги сили тяжіння між молекулами? Який знак цієї зміни і як вона залежить від густини газу?
4. У посудині місткістю $V = 0,3$ л знаходиться вуглекислий газ, що містить кількість речовини 1 моль при температурі $T = 300$ К. Визначити тиск p газу: 1) за рівнянням Менделєєва - Клапейрона, 2) за рівнянням Ван - дер -Ваальса.
Відповідь: $p_1 = 8,31$ МПа, $p_2 = 5,67$ МПа.
5. Для двох різних газів, узятих в рівних кількостях і які мають однакові об'єми і температури, розрахували тиск за рівнянням Ван - дер -Ваальса. Результат порівняли з тиском ідеального газу з такими ж параметрами. Виявилось, що тиск одного газу більше тиску ідеального газу, іншого - менше. Чим пояснити отримані відмінності в тисках?

2.10. ЗМІНА ТЕМПЕРАТУРИ ПРИ РОЗШИРЕННІ ГАЗІВ. ЕФЕКТ ДЖОУЛЯ-ТОМСОНА

2.10.1. Внутрішня енергія реального газу

Внутрішня енергія реального газу складається з кінетичної енергії теплового руху його молекул (яка визначає внутрішню енергію ідеального газу, що дорівнює $C_V T$) і потенційну енергію міжмолекулярної взаємодії.

Потенційна енергія реального газу обумовлена тільки силами тяжіння між молекулами. Наявність сил тяжіння призводить до виникнення внутрішнього тиску на газ (див. (61.1)):

$$p' = a / V_m^2$$

Робота, яка витрачається для подолання сил тяжіння, що діють між молекулами газу йде на збільшення потенційної енергії системи, тобто

$$\Delta A = p' dV_m = dW ,$$

або $dW = \frac{a}{V_m^2} dV_m$. Звідки $W = -\frac{a}{V_m}$ (постійна інтегрування прийнята рівною нулю).

Знак мінус означає, що молекулярні сили, що створюють внутрішній тиск, p' є силами тяжіння. Враховуючи обидва додатки, одержимо, що внутрішня енергія моля реального газу

$$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m} \quad (10.1)$$

Вона зростає з підвищенням температури і збільшенням об'єму.

Якщо газ розширюється без теплообміну з навколишнім середовищем (адіабатичний процес, тобто $\Delta Q = 0$) і не робить зовнішньої роботи (розширення газу у вакуум, тобто $\Delta A = 0$), то на підставі першого початку термодинаміки $\Delta Q = (U_2 - U_1) + \Delta A$ отримаємо, що

$$U_2 = U_1 \quad (10.2)$$

Отже, при адіабатичному розширенні без здійснення зовнішньої роботи внутрішня енергія газу не змінюється.

Рівняння (10.2) формально справедливо як для ідеального, так і для реального газу, але фізичний зміст його для обох випадків різний.

Для ідеального газу рівність $U_2 = U_1$ означає рівність температур $T_2 = T_1$, тобто при адіабатичному розширенні ідеального газу у вакуум його температура не змінюється.

Для реального газу з рівняння (10.2), враховуючи, що для молю газу

$$U_1 = C_V T_1 - a / V_{m1}, \quad U_2 = C_V T_2 - a / V_{m2} \quad (10.3)$$

отримуємо

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V} \left(\frac{1}{V_{m1}} - \frac{1}{V_{m2}} \right).$$

Так як $V_{m2} > V_{m1}$, то $T_1 > T_2$, тобто реальний газ при адіабатичному розширенні у вакуум охолоджується.

При адіабатичному стисканні у вакуум реальний газ нагрівається.

2.10.2. Ефект Джоуля – Томсона

Якщо ідеальний газ адіабатично розширюється і робить при цьому роботу, то він охолоджується, так як робота в цьому випадку відбувається за рахунок його внутрішньої енергії. Подібний процес, але з реальним газом – адіабатичне розширення реального газу з вчиненням зовнішніми силами позитивної роботи - здійснили Джоуль і Томсон.

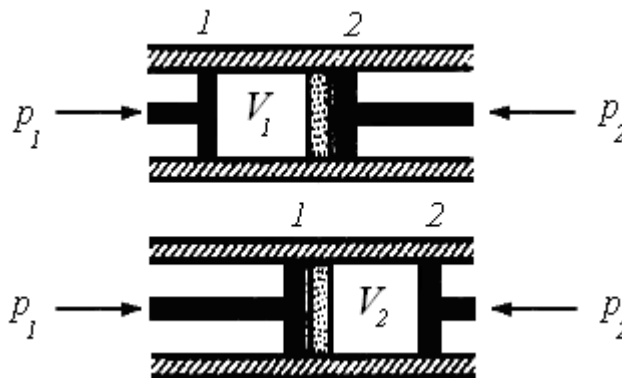


Рис. 2.10.1. До ефекту Джоуля - Томсона

На рис.10.1 представлена схема їхнього досліду. У теплоізолюваній трубці з пористої перегородкою знаходяться два поршні, які можуть переміщатися без тертя.

Нехай спочатку зліва від перегородки газ під поршнем 1 знаходиться під тиском p_1 , займає об'єм V_1 при температурі T_1 , а праворуч газ відсутній (поршень 2 присунутий до перегородки).

Після проходження газу через пористу перегородку в правій частині газ характеризується параметрами p_2 , V_2 , T_2 . Тиски p_1 і p_2 підтримуються постійними - $p_1 > p_2$.

Так як розширення газу відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем (адіабатично), то на підставі першого початку термодинаміки маємо

$$\Delta Q = (U_2 - U_1) + \Delta A = 0. \quad (10.4)$$

Зовнішня робота, що здійснюються газом, складається з позитивної роботи при русі поршня 2: $A_2 = p_2 V_2$ і негативною при русі поршня 1: $A_1 = p_1 V_1$, тобто

$$\Delta A = A_2 - A_1$$

Підставляючи вирази для робіт у формулу (10.4), отримуємо

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 \quad (10.5)$$

Таким чином, в досліді Джоуля - Томсона зберігається (залишається незмінною) величина $U + pV = H$ - функція стану або *ентальпія*.

Розглянемо 1 моль газу. Підставляючи у формулу (10.5) вираз (10.3) і розраховані з рівняння Ван -дер -Ваальса значення p_1 , V_{m1} та p_2 , V_{m2} і виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$T_2 - T_1 = \frac{2a(1/V_{m2} - 1/V_{m1}) - b(p_2 - p_1)}{C_V + R} - \frac{ab(1/V_{m2}^2 - 1/V_{m1}^2)}{C_V + R} \quad (10.6)$$

З виразу (10.6) випливає, що знак різниці $T_2 - T_1$ залежить від того, яка з поправок Ван -дер -Ваальса відіграє більшу роль.

Проаналізуємо даний вираз, зробивши припущення, що $p_1 > p_2$ у деяких випадках.

- Якщо $a = 0$, тобто не враховуємо сили тяжіння між молекулами, а враховуємо лише розміри самих молекул. Тоді

$$T_2 - T_1 = -\frac{b(p_2 - p_1)}{C_V + R} > 0,$$

тобто газ в даному випадку *нагрівається*.

- Якщо $b = 0$ не враховуємо розміри молекул, а враховуємо лише сили тяжіння між молекулами. Тоді

$$T_2 - T_1 = \frac{2a(1/V_{m2} - 1/V_{m1})}{C_V + R} < 0$$

тобто газ в даному випадку *охолоджується*.

- Враховуємо обидві поправки. Підставивши у вираз (10.6) обчислене з рівняння Ван -дер -Ваальса значення p_1 маємо

$$T_2 - T_1 = \frac{-\frac{2a}{V_{m1}} + \frac{bRT_1}{V_{m1} - b}}{C_V + R} - \frac{\frac{ab}{V_{m1}^2} - \frac{ba}{V_{m1}^2}}{C_V + R} = \frac{\frac{bRT_1}{V_{m1} - b} - \frac{2a}{V_{m1}}}{C_V + R},$$

тобто знак різниці температур залежить від значень початкового об'єму тобто знак різниці температур залежить від значень початкового об'єму V_{m1} і початкової температури T_1 .

Зміна температури реального газу в результаті його адіабатичного розширення, або, як кажуть, *адіабатичного дроселювання* - повільного проходження газу під дією перепаду тиску крізь дросель (наприклад, пористу перегородку), *називається ефектом Джоуля - Томсона*.

Ефект Джоуля - Томсона прийнято називати *позитивним*, якщо газ в процесі дроселювання охолоджується $\Delta T < 0$, і *негативним*, якщо нагрівається $\Delta T > 0$.

Залежно від умов дроселювання для одного і того ж газу ефект Джоуля - Томсона може бути як позитивним, так і негативним.

Температура, при якій (для даного тиску) відбувається зміна знака ефекту Джоуля - Томсона, називається *температурою інверсії*. Її залежність від об'єму отримаємо, прирівнявши вираз (10.6) нулю:

$$T = \frac{2a}{bR} \left(1 - \frac{b}{V} \right) \quad (10.7)$$

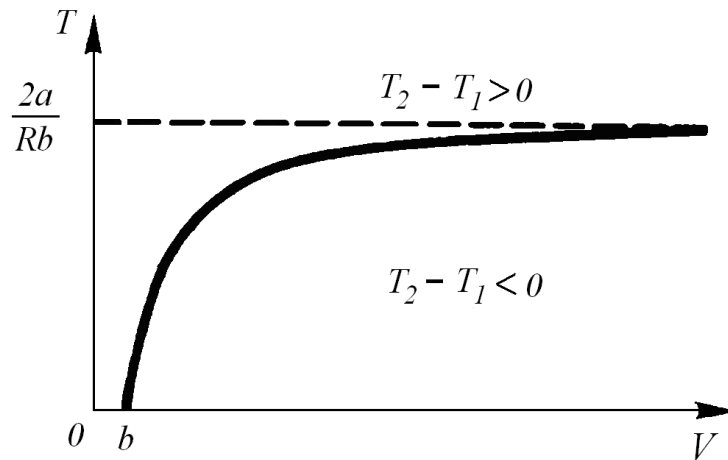


Рис. 2.10.2. Крива інверсії ефекту Джоуля - Томсона

Крива, що визначається рівнянням (10.7) - *крива інверсії* - наведена на рис. 10.2. Область вище цієї кривої відповідає негативному ефекту Джоуля - Томсона, нижче - позитивного.

Зазначимо, що при великих перепадах тиску на дроселі температура газу змінюється незначно. Так, при дроселюванні від 20 до 0,1 МПа і початкової температури 17°C повітря охолоджується на 35°C.

Ефект Джоуля - Томсона обумовлений відхиленням газу від ідеальності. Справді, для моля ідеального газу $pV_m = RT$, тому вираз (10.5) набуде вигляду

$$C_V T_1 + RT_1 = C_V T_2 + RT_2$$

звідки випливає, що $T_1 = T_2$.

2.10.3. Зрідження газів. Практичне використання ефекту Джоуля-Томсона

Перехід газів у рідкий стан називається *зрідженням газів*. Як буде показано далі, газ можна перетворити в рідину, якщо його температура нижче від критичної, а тиск вищий від критичного; тобто температуру газів перед зрідженням треба спочатку знижувати до температури $T_{кр}$.

Досягнути досить низких температур (рідкий азот $T_{\text{кр}} = 126,05\text{K}$, водень $T_{\text{кр}} = 33,25\text{K}$, гелій $T_{\text{кр}} = 5,25\text{K}$) можна за допомогою ефекту Джоуля-Томсона. При послідовному стисканні, охолодженні і розширенні газу і багаторазовому повторенні цього циклу температура газу поступово знижується до його точки кипіння, коли він перетворюється в рідину. При зріджуванні повітря виходить суміш рідкого азоту і рідкого кисню, яку можна розділити, користуючись різницею в їх температурі кипіння (для азоту температура кипіння 77K а для кисню 90K).

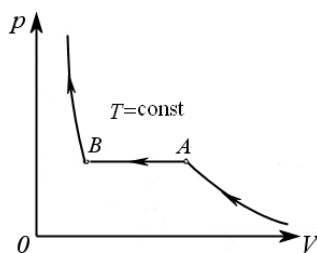
Пристрій, в якому потрібної для зрідження газів температури досягають тим, що охолоджуваний газ виконує роботу не тільки проти сил молекулярної взаємодії, а й проти зовнішніх сил називається *детандер*.

Зріджування газів має технічне та наукове значення. Зріджування повітря використовується в техніці для розділення повітря на складові частини. Метод заснований на тому, що різні гази, з яких складається повітря, киплять при різних температурах. Найбільш низькі температури кипіння мають гелій, неон, азот, аргон. У кисню температура кипіння трохи вища, ніж у аргону. Тому спочатку випаровується гелій, неон, азот, а потім аргон, кисень. Зріджені гази знаходять широке застосування в техніці. Азот йде для отримання аміаку і азотних солей, уживаних у сільському господарстві для добрива ґрунту. Аргон, неон та інші інертні гази використовуються для наповнення електричних ламп розжарювання, а також газосвітних ламп. Найбільше застосування має кисень. У суміші з ацетиленом або воднем він дає полум'я дуже високої температури, що застосовується для різання і зварювання металів. Вдування кисню (кисневе дуття) прискорює металургійні процеси. Особливо важливим є застосування рідкого кисню як окислювача для двигунів космічних ракет. Рідкий водень використовується як паливо в космічних ракетах. Рідкий аміак знайшов широке застосування в холодильниках - величезних складах, де зберігаються швидкопсувні продукти. Охолодження, що виникає при випаровуванні зріджених газів, використовують в рефрижераторах при перевезенні швидкопсувних продуктів. Гази, що застосовуються в промисловості, медицині, тощо, легше перевозити, коли вони знаходяться в зрідженому стані, так як при цьому в тому ж обсязі знаходиться її більша кількість.

При добичі нафти ефект Джоуля-Томсона може бути використаний для активного впливу на пласт холодом або теплом. Охолодження або заморожування забою свердловини шляхом продавлювання нафтового газу через дросельний елемент, опущений в свердловину на насосно-компресорних трубах, не представляє технічних труднощів. У зв'язку з цим можна здійснити внутрішньопластове заморожування шляхом створення в пласті холодного кільця навколо свердловини на заданій відстані від її осі з температурою нижче нуля, причому забойна температура може залишатися початковою; таке кільце не пропускає води до застиглої нафти і може бути використано як для роз'єднання пластів, так і для багаторазового гідророзриву.

Завдання для самоконтролю

1. У чому сутність і які причини ефекту Джоуля - Томсона?
2. Які існують методи зрідження газів?
3. З чого складається внутрішня енергія реального газу?
4. У чому полягає відмінність позитивного та негативного ефекту Джоуля – Томсона?
5. Як змінюється внутрішня енергія речовини при переході зі стану А у стан В (див. рис.)?



6. Знайти внутрішню енергію вуглекислого газу масою 0,132 кг при нормальному тиску і температурі 300 К.
Відповідь: 9,2 кДж.
7. Вуглекислий газ масою 20 г займає об'єм $V_1 = 200 \text{ см}^3$. Визначити зміну внутрішньої енергії газу при його ізотермічному розширенні до $V_2 = 500 \text{ см}^3$. Поправку a прийняти рівною $0,361 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$.
Відповідь: 500 Дж

2.11. РІДИНИ

2.11.1. Властивості рідин

Рідина є агрегатним станом речовини, проміжним між газоподібним і твердим. Тому вона має властивості як газоподібних, так і твердих речовин.

Рідини, подібно до твердих тіл, володіють певним об'ємом, а подібно газам, приймають форму посудини, в якому вони знаходяться.

Молекули газу практично не пов'язані між собою силами міжмолекулярної взаємодії. У даному випадку середня енергія теплового руху молекул газу набагато більше середньої потенційної енергії, обумовленої силами тяжіння між ними, тому молекули газу розлітаються в різні сторони, і газ займає наданий йому об'єм.

У твердих і рідких тілах сили тяжіння між молекулами вже істотні і утримують молекули на певній відстані одну від одної. У цьому випадку середня енергія хаотичного (теплового) руху молекул менше середньої потенційної енергії, обумовленої силами міжмолекулярної взаємодії, і її недостатньо для подолання сил тяжіння між молекулами, тому тверді тіла і рідини мають певний об'єм.

Рентгеноструктурний аналіз рідин показав, що характер розташування частинок рідини проміжний між газом і твердим тілом.

У газах молекули рухаються хаотично, тому немає ніякої закономірності в їх взаємному розташуванні.

Для твердих тіл спостерігається так званий *дальній порядок* в розташуванні частинок, тобто їх впорядковане розташування, повторюється на великих відстанях.

У рідинах має місце так званий *ближній порядок* в розташуванні частинок, тобто їх впорядковане розташування повторюється на відстанях, порівнянних з міжатомними.

Теорія рідини до теперішнього часу повністю не розвинена. Розробка низки проблем у дослідженні складних властивостей рідини належить Я.І. Френкелю.

Тепловий рух в рідині він пояснював тим, що кожна молекула протягом деякого часу коливається біля певного положення рівноваги, після чого стрибком переходить в нове положення, віддалене від початкового на відстані порядку атомного. Таким чином, молекули рідини досить повільно переміщуються по всій масі рідини і дифузія відбувається набагато повільніше, ніж у газах.

З підвищенням температури рідини частота коливального руху різко збільшується, зростає рухливість молекул, що, у свою чергу, є причиною зменшення в'язкості.

2.11.2. Поверхневий натяг

На кожную молекулу рідини з боку оточуючих молекул діють сили тяжіння, які швидко зменшуються з відстанню; отже, починаючи з деякого мінімальної відстані силами тяжіння між молекулами можна знехтувати.

Це відстань r (порядку 10^{-9}м) називається радіусом молекулярної дії, а сфера радіуса r - сферою молекулярної дії.

Виділимо всередині рідини молекулу A (рис. 11.1) і проведемо навколо неї сферу радіуса r . Досить, згідно з визначенням, врахувати дію на дану молекулу тільки тих молекул, які знаходяться всередині сфери молекулярного дії.

Сили, з якими ці молекули діють на молекулу A , спрямовані в різні сторони і в середньому скомпенсовані, тому результуюча сила, що діє на молекулу всередині рідини з боку інших молекул, дорівнює нулю.

Інакше йде справа, якщо молекула, наприклад молекула B , розташована від поверхні на відстані, меншій r . У даному випадку сфера молекулярного дії лише частково розташована всередині рідини. Так як концентрація молекул в розташованому над рідиною газі мала в порівнянні з їх концентрацією в рідині, то рівнодіюча сил $\vec{F}$, прикладених до кожної молекули поверхневого шару, не дорівнює нулю і спрямована всередину рідини.

Таким чином, результуючі сили всіх молекул поверхневого шару роблять на рідину тиск, який називається *молекулярним* (або внутрішнім).

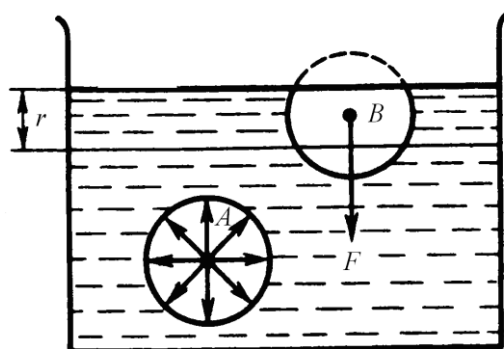


Рис. 2.11.1. Сили які діють на молекулу: *A* – всередині рідини;
B – поблизу поверхні рідини

Молекулярний тиск не діє на тіло, розташований в рідині, так як воно обумовлене силами, що діють тільки між молекулами самої рідини.

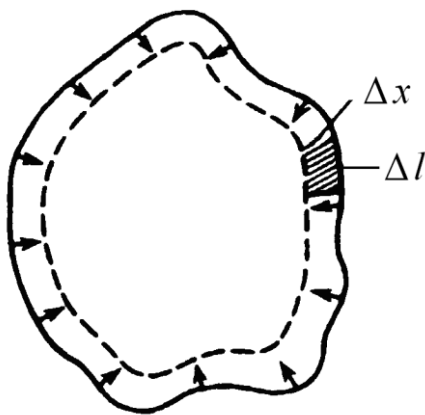


Рис. 2.11.2. Дія сил поверхневого натягу на поверхню рідини

Сумарна енергія частинок рідини складається з енергії їх хаотичного (теплого) руху і потенційної енергії, обумовленої силами міжмолекулярної взаємодії. Для переміщення молекули з глибини рідини в поверхневий шар треба затратити роботу. Ця робота здійснюється за рахунок кінетичної енергії молекул і йде на збільшення їхньої потенційної енергії. Тому молекули поверхневого шару мають більшу потенційну енергію, ніж молекули всередині рідини. Ця додаткова енергія, якою володіють молекули в поверхневому шарі рідини, яка називається *поверхневою енергією*, пропорційна площі шару ΔS :

$$\Delta E = \sigma \cdot \Delta S \quad (11.1)$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу.

Так як рівноважний стан характеризується мінімумом потенційної енергії, то рідина при відсутності зовнішніх сил буде приймати таку форму, щоб при заданому об'ємі вона мала мінімальну поверхню, тобто форму кулі. Спостерігаючи дрібні крапельки, зважені в повітрі, можна побачити, що вони дійсно мають форму кульок, але дещо викривлену через дію сил земного тяжіння. В умовах невагомості крапля будь-якої рідини (незалежно від її

розмірів) має сферичну форму, що доведено експериментально на космічних кораблях.

Умовою стійкої рівноваги рідини є мінімум поверхневої енергії, тобто рідина при заданому об'ємі повинна мати найменшу площу поверхні, тобто рідина прагне скоротити площу вільної поверхні. У цьому випадку поверхневий шар рідини можна уподібнити розтягнутої пружної плівці, в якій діють сили натягу.

Розглянемо поверхню рідини (рис. 11.2), обмежену замкнутим контуром. Під дією сил поверхневого натягу (які спрямовані перпендикулярно ділянці контуру, на який вони діють) поверхня рідини скоротилася і розглянутий контур перемістився в нове положення.

Сили, що діють з боку виділеної ділянки на сусідні з ним ділянки, здійснюють роботу

$$\Delta A = f \cdot \Delta l \cdot \Delta x$$

де f - сила поверхневого натягу, що діє на одиницю довжини контуру поверхні рідини. З рисунку видно, що $\Delta S = \Delta l \cdot \Delta x$, тобто

$$\Delta A = f \cdot \Delta S \quad (11.2)$$

Ця робота здійснюється за рахунок зменшення поверхневої енергії, тобто

$$\Delta A = \Delta E = f \cdot \Delta S \quad \text{є} \quad (11.3)$$

З порівняння виразів (11.1) і (11.3) видно, що

$$\sigma = f \quad (11.4)$$

тобто коефіцієнт поверхневого натягу дорівнює силі поверхневого натягу, що припадає на одиницю довжини контуру, який обмежує поверхню.

Одиниця коефіцієнту поверхневого натягу - ньютон на метр (Н/м) або джоуль на квадратний метр (Дж/м²).

Більшість рідин при температурі 300К має коефіцієнт поверхневого натягу порядку 10⁻²-10⁻¹ Н/м. Коефіцієнт поверхневого натягу з підвищенням температури зменшується, так як збільшуються середні відстані між молекулами рідини.

Відомо, що крапля води розтікається на склі і приймає форму, зображену на рис.11.3а, в той час як ртуть на тій же поверхні перетворюється на сплюснуту краплю (рис.11.3б).

У першому випадку говорять, що рідина змочує тверду поверхню, у другому - не змочує її.

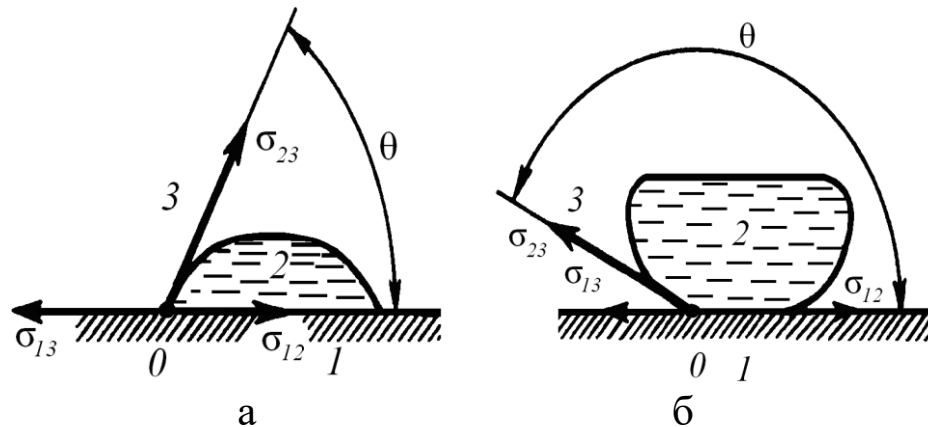


Рис. 2.11.3. Крапля рідини на поверхні скла: а – вода; б - ртуть

Змочування залежить від характеру сил, що діють між молекулами поверхневих шарів дотичних середовищ. Для рідини, яка змочує, сили тяжіння між молекулами рідини і твердого тіла більше, ніж між молекулами самої рідини, і рідина прагне збільшити поверхню зіткнення з твердим тілом. Для рідини, яка не змочує, сили тяжіння між молекулами рідини і твердого тіла менше, ніж між молекулами рідини, і рідина прагне зменшити поверхню свого зіткнення з твердим тілом.

До лінії зіткнення трьох середовищ (точка 0 є її перетин з площиною креслення) прикладені три сили поверхневого натягу, які спрямовані по дотичній всередину поверхні зіткнення відповідних двох середовищ (рис.11.3а і б).

Ці сили, віднесені до одиниці довжини лінії зіткнення, дорівнюють відповідним коефіцієнтам поверхневого натягу σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} .

Кут θ між дотичними до поверхні рідини і твердого тіла називається *крайовим кутом*. Умовою рівноваги краплі (рис.11.3а і б) є рівність нулю суми проекцій сил поверхневого натягу на напрям дотичної до поверхні твердого тіла, тобто

$$-\sigma_{13} + \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta = 0.$$

Звідси

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} . \quad (11.5)$$

З умови (11.5) випливає, що крайовий кут може бути гострим або тупим залежно від значень σ_{13} і σ_{12} .

Якщо, $\sigma_{13} > \sigma_{12}$ то $\cos\theta > 0$ і кут θ - гострий (рис.11.3а), тобто рідина змочує тверду поверхню.

Якщо, $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ то $\cos\theta < 0$ і кут θ - тупий (рис.11.3б), тобто рідина не змочує тверду поверхню.

Крайовий кут задовольняє умові (11.5), якщо

$$\frac{|\sigma_{13} - \sigma_{12}|}{\sigma_{23}} \leq 1 \quad (11.6)$$

Якщо умова (11.6) не виконується, то крапля рідини 2 ні за яких значеннях не може перебувати в рівновазі. Якщо $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$, то рідина розтікається по поверхні твердого тіла, покриваючи його тонкою плівкою (наприклад, гас на поверхні скла) - має місце повне змочування - $\theta = 0$.

Якщо $\sigma_{12} > \sigma_{13} + \sigma_{23}$, то рідина стягується в кульову краплю, в межі маючи з нею лише одну точку дотику (наприклад, крапля води на поверхні парафіну) - має місце повне незмочування - $\theta = \pi$.

Змочування і незмочування є поняттями відносними, тобто рідина, яка змочує одну тверду поверхню, не змочує іншу. Наприклад, вода змочує скло, але не змочує парафін; ртуть не змочує скло, але змочує чисті поверхні металів.

2.11.3. Тиск під викривленою поверхнею рідини

Якщо поверхня рідини не плоска, а викривлена, то вона робить на рідину надмірний (додатковий) тиск. Це тиск, обумовлений силами поверхневого натягу, для опуклої поверхні позитивно, а для увігнутій поверхні - негативно.

Для розрахунку надлишкового тиску припустимо, що вільна поверхня рідини має форму сфери радіусу R , від якої подумки відтятий кульовий сегмент, спирається на коло радіуса $r = R \sin \alpha$ (рис.11.4).

На кожен нескінченно малий елемент довжини Δl цього контуру діє сила поверхневого натягу $\Delta F = \sigma \cdot \Delta l$, дотична до поверхні сфери.

Розкладемо $\Delta \vec{F}$ на два компоненти: $\Delta \vec{F}_1$ і $\Delta \vec{F}_2$; бачимо, що геометрична сума сил $\Delta \vec{F}_2$ дорівнює нулю, так як ці сили на протилежних сторонах контуру направлені в зворотні сторони і взаємно врівноважуються. Тому рівнодіюча сил поверхневого натягу, що діють на вирізаний сегмент, спрямована перпендикулярно площині перетину всередину рідини і дорівнює сумі алгебри складових поверхневого натягу, діючих на вирізаний сегмент, спрямована перпендикулярно площині перерізу всередину рідини і дорівнює алгебраїчній сумі складових $\Delta \vec{F}_1$

$$F = \sum_{i=1}^N \Delta F_{1i} = \sum_{i=1}^N \Delta F_{1i} \sin \alpha = \sum_{i=1}^N \sigma \cdot \Delta l_i \frac{r}{R} = \sigma \frac{r}{R} \sum_{i=1}^N \Delta l_i = \sigma \frac{r}{R} 2\pi \cdot r$$

Розділивши цю силу на площу основи сегмента, обчислимо надлишковий тиск на рідину, створюване силами поверхневого натягу і обумовлене кривизною поверхні:

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\sigma\pi \cdot r^2}{R\pi \cdot r^2} = \frac{2\sigma}{R} \quad (11.7)$$

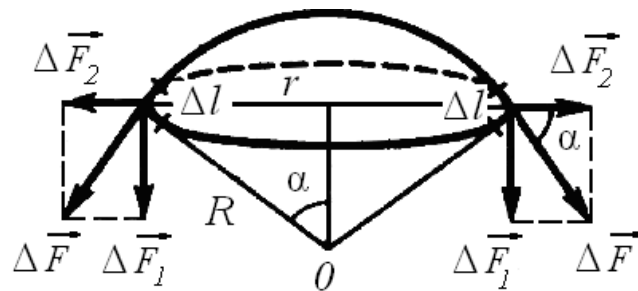


Рис. 2.11.4. Сили, які діють на поверхні рідини

Якщо поверхня рідини увігнута, то результуюча сила поверхневого натягу спрямована з рідини і надлишковий тиск дорівнює

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{R} \quad (11.8)$$

Отже, тиск всередині рідини під вгнутою поверхнею менше, ніж в газі, на величину Δp .

Формули (11.7) і (11.8) є окремим випадком *формули Лапласа*, яка визначає надлишковий тиск для довільної поверхні рідини двоякої кривизни:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (11.9)$$

де R_1 і R_2 - радіуси кривизни двох будь-яких взаємно перпендикулярних нормальних перерізів поверхні рідини в даній точці. Радіус кривизни позитивний, якщо центр кривизни відповідного перетину знаходиться всередині рідини, і негативний, якщо центр кривизни знаходиться поза рідиною.

Для сферично викривленої поверхні $R_1 = R_2 = R$ і вираз (11.9) перетворюється на (11.7); для циліндричної поверхні $R_1 = R$ і $R_2 = \infty$ і тоді надлишковий тиск

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\sigma}{R}$$

У випадку плоскої поверхні $R_1 = R_2 = \infty$ і сили поверхневого натягу надлишкового тиску не створюють.

2.11.4. Капілярні явища

Якщо помістити вузьку трубку (капіляр) одним кінцем в рідину, налиту в широкий посудину, то внаслідок змочування або незмочування рідиною стінок капіляра кривизна поверхні рідини в капілярі стає значною.

Якщо рідина змочує матеріал трубки, то всередині її поверхня рідини - *меніск* - має увігнуту форму, якщо не змочує - опуклу (див. малюнок).

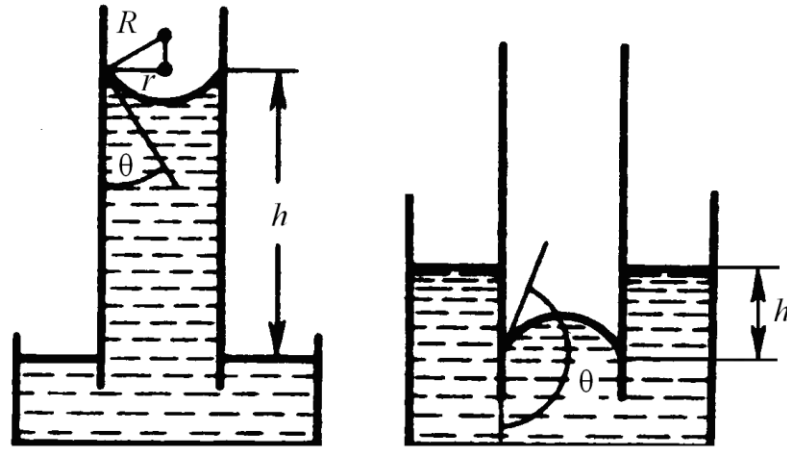


Рис. 2.11.5. Рівень рідини в капілярі при змочуванні та незмочуванні

Під увігнутою поверхнею рідини з'явиться негативне надлишковий тиск, що визначається за формулою (11.8). Наявність цього тиску призводить до того, що рідина в капілярі піднімається, так як під плоскою поверхнею рідини в широкому посудині надлишкового тиску немає. Якщо ж рідина не змочує стінки капіляра, то позитивний надлишковий тиск призведе до опускання рідини в капілярі (рис 11.5).

Явище зміни висоти рівня рідини в капілярах називається *капілярністю*.

Рідина в капілярі піднімається або опускається на таку висоту h , при якій тиск стовпа рідини (гідростатичний тиск) ρgh врівноважується надлишковим тиском Δp , тобто

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh$$

де ρ - густина рідини.

Якщо r - радіус капіляра, θ - крайовий кут, то (рис 11.5)

$$\frac{2\sigma \cos \theta}{r} = \rho gh$$

Звідки

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{r \cdot \rho \cdot g} \quad (11.10)$$

У відповідності з тим, що змочуюча рідина по капіляру піднімається, а незмочувальна - опускається, з формули (11.10) при $\theta < \pi/2$ одержимо позитивні значення h , а при $\theta > \pi/2$ - негативні.

З виразу (11.10) видно також, що висота підняття (опускання) рідини в капілярі обернено пропорційна його радіусу. У тонких капілярах рідина піднімається досить високо. Так, при повному змочуванні - вода в капілярі діаметром 10 мкм піднімається на висоту майже 3м.

Капілярні явища відіграють велику роль у природі і техніці. Наприклад, вологообмін в ґрунті і в рослинах здійснюється за рахунок підняття води по найтонших капілярах. На капілярності заснована дія фітілів, вбирання вологи бетоном і т.д.

2.11.5. Капілярне зчеплення

Відомо, що дві пластини, змочені рідиною, дуже важко роз'єднати, прикладаючи силу в напрямку, перпендикулярному пластинам. Причина такого сильного взаємодії пластин - наявність негативного тиску Лапласа. Будь-який елемент вільної поверхні рідини являє собою увігнутий циліндр (рис.11.6). Тиск, що виникає через кривизну поверхні, буде негативним.

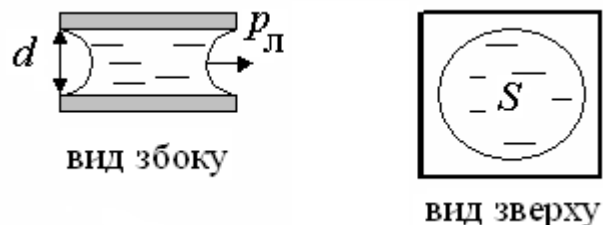


Рис. 2.11.6. Капілярне зчеплення

Отже, тиск в рідині буде менше нормального на величину тиску Лапласа, який для циліндричної поверхні в разі повного змочування дорівнюватиме

$$p_{\text{л}} = \frac{2\sigma}{d},$$

де d - відстань між пластинами.

Пластини будуть здавлені тиском Лапласа. Сила зчеплення пластин може бути визначена за формулою $F = p_{\text{л}} S$, де S - площа

пластини, змоченою рідиною (площа підстави увігнутого циліндра). При малому зазорі d між пластинами, тиск Лапласа великий і тому сила зчеплення також має велике значення. Сила зчеплення також зростає при збільшенні площі поверхні пластини, змоченою рідиною.

2.11.6. Залежність коефіцієнта поверхневого натягу від температури і властивостей речовини

З підвищенням температури коефіцієнт поверхневого натягу рідин зменшується, а при критичній температурі дорівнює нулю. Коефіцієнт поверхневого натягу рідин залежить також від густини і молярної маси рідини. Причому залежність коефіцієнта поверхневого натягу від температури виражена тим сильніше, чим більше густина рідини і менше її молярна маса. Для визначення коефіцієнта поверхневого натягу можна використовувати напівемпіричну формулу:

$$\sigma = B(T_k - T - \tau) \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (11.11)$$

Тут B - постійний коефіцієнт, практично однаковий для всіх рідин, T_k - критична температура, ρ – густина рідини, μ - її молярна маса, τ - невелика величина, яка має розмірність температури. Формула (11.11) непридатна для використання поблизу критичної температури. Коефіцієнт поверхневого натягу водних розчинів залежить від роду розчиненої речовини. Одні речовини, наприклад, такі як спирт, мило, пральні порошки, розчинені у воді, мають меншу, ніж у води густину і призводять до зменшення коефіцієнта поверхневого натягу; вони називаються *поверхнево-активними речовинами*.

Найбільш відомою поверхнево-активною речовиною по відношенню до води є мило. Воно сильно зменшує її коефіцієнт поверхневого натягу (приблизно з $7,5 \cdot 10^{-2}$ до $4,5 \cdot 10^{-2}$ Н / м).

Інші речовини, що знижують поверхневий натяг води: спирти, ефіри, нафта та інші.

Існують речовини (цукор, сіль), які збільшують поверхневий натяг рідини завдяки тому, що їх молекули взаємодіють з молекулами рідини сильніше, ніж молекули рідини між собою. Наприклад, якщо посолити мильний розчин, то в поверхневий шар рідини

виштовхуються молекули мила більше, ніж у прісній воді. У миловарної техніці мило "висаліваються" цим способом з розчину.

Поверхнево-активні речовини застосовують як змочувачі, флотаційні реагенти, піноутворювачі, диспергатори - знижувачі твердості, та в якості пластифікуючих добавок, модифікаторів кристалізації і т.п. Збільшення концентрації таких речовин призводить до зменшення коефіцієнта поверхневого натягу. Інші речовини, розчинені у воді, наприклад, цукор, сіль, призводять до збільшення густини розчину і збільшують коефіцієнт поверхневого натягу. Збільшення концентрації таких речовин призводить до збільшення коефіцієнта поверхневого натягу. Для експериментального визначення коефіцієнтів поверхневого натягу використовують кілька методів вимірювання: метод Ребіндера, метод капілярних хвиль, метод краплі і бульбашки та ін.

Явища змочування і незмочування мають велике значення в техніці.

Наприклад, у методі флотаційного збагачення руди (відділення руди від порожньої породи) її, дрібно роздроблену, збовтують в рідині, яка змочує порожню породу і не змочує руду. Через цю суміш продувається повітря, а потім вона відстоюється. При цьому змочені рідиною частинки породи опускаються на дно, а крупинки мінералів "прилипають" до бульбашок повітря і спливають на поверхню рідини.

Завдання для самоконтролю

1. Які причини особливих властивостей поверхневого шару рідин?
2. Як залежить коефіцієнт поверхневого натягу рідин від їх температури?
3. Як впливає поверхнево-активна речовина (ПАВ) на поверхневий натяг бітумів та води?
4. Як впливає температура на значення крайового кута змочування бітумом твердої поверхні?
5. Трубка має діаметр $d = 0,2$ см. На нижньому кінці трубки повисла крапля води, що має в момент відриву вигляд кульки. Знайти діаметр d цієї краплі.

Відповідь: 4,4 мм.

6. Яку роботу A потрібно здійснити, щоб, видувачи мильну бульбашку, збільшити її діаметр від $d = 1$ см до $d = 11$ см? Вважати процес ізотермічним.

Відповідь: 3 мДж.

7. У дві однакові горизонтальні скляні трубки, що розширюються до одного кінця, ввели різні рідини. За якої умови краплі рідини в трубках переміщуються в протилежні сторони?

2.12. ТВЕРДІ ТІЛА

2.12.1. Кристалічні і аморфні тіла

Збільшення потенційної енергії взаємодії в порівнянні з кінетичної енергією молекул за деяких умов призводить до утворення *твердого тіла*. Тверді тіла зазвичай ділять на *кристалічні* й *аморфні*.

Аморфні речовини, як і рідини, мають ближній порядок в міжмолекулярних взаємодіях. До аморфних тіл відносять, наприклад, скло, смоли, пластмаси. Теоретичний опис аморфних тіл складний, як і опис рідин. Фізичні властивості аморфних тіл залежать від способу їх отримання. Аморфні тіла *ізотропні*, тобто мають однакові фізичні властивості в усіх напрямках.

Значно краще розвинена фізика кристалічного стану за високого ступеня впорядкованості його структури. Розрізняють *монокристали* і *полікристали*. Полікристали складаються з безлічі монокристалів, розташованих безладно, тому полікристали ізотропні. Монокристали ж *анізотропні*, тобто їх властивості різні по різних напрямках.

В основі теорії твердого тіла лежить модель нескінченного досконалого монокристала. Структура монокристала являє собою безперервне повторення у тривимірному просторі однакових структурних одиниць. Для монокристалів характерно збереження кутів між гранями при їх зростанні або руйнуванні. Для опису правильної структури кристалів зручно використовувати поняття *кристалічної ґратки*.

Кристалічна ґратка враховує не тільки просторову структуру, але і тип взаємодії між частками ґратки. Правильне розміщення частинок в кристалі можна описати за допомогою операції паралельного переміщення або трансляції. Радіус – вектор $\vec{r}$, що характеризує положення частинки визначають так:

$$\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c},$$

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - найменші вектори трансляції; n, m, p – цілі числа (у тому числі і нулі). Гратка, побудована шляхом трансляції якого-небудь вузла за трьома напрямками, називається *трансляційною* або *граткою Браве*. *Просторова гратка* - це чисто геометричне поняття на відміну від кристалічної гратки, яку можна отримати, зв'язавши з кожним вузлом просторової гратки атом, молекулу, іон, групу атомів або молекул, які називаються *базисом*. Просторову гратку можна представити як результат заповнення тривимірного простору окремими осередками - *елементарними комірками*. Застосувавши до елементарної комірки операцію трансляції, отримаємо просторову гратку. Вибір елементарної комірки не є однозначним. Елементарна комірка, що володіє найменшим об'ємом, називається *елементарною коміркою*. Просторові гратки можуть мати властивості симетрії не тільки по відношенню до операції трансляції, але і по відношенню до повороту, відображенню, інверсії та ін. Існує всього *сім класів* кристалічних ґраток, які можуть утворити 230 просторових ґраток з різними типами симетрії. У кристалі частинки речовини можуть розташовуватися не тільки у вузлах елементарної комірки, а й у центрі граней, тоді гратку називають *гранецентрованою*. Якщо частинки речовини розташовуються в серединях діагональних площин, що проходять через вершини, то гратку називають *об'ємноцентрованою*. Якщо частинки речовини розташовуються в серединях діагональних площин базису, то гратку називають *базоцентрованою*.

Розташування атомів або молекул в базисі залежить від сил взаємодії між ними. Частинки розташовуються так, щоб енергія взаємодії між ними була мінімальною. Позитивна різниця між енергією ізольованих частинок і енергією частинок в кристалічній решітці називається *енергією зв'язку*. Енергія зв'язку визначається роботою, необхідною для видалення частинки з кристала.

2.12.2. Класифікація кристалів за типом зв'язків

За типом зв'язків розрізняють п'ять класів кристалів.

1. *Кристали молекулярні* (з Ван -дер- ваальсовими зв'язками). Енергія зв'язку в таких кристалах має значення порядку величини $10^3 \div 10^4$ Дж/моль. Прикладами таких кристалів є кристали затверділих інертних газів - неону, аргону, криптону, ксенону.

2. *Кристали з ковалентним зв'язком.* Взаємодія між частинками в таких кристалах обумовлено тим, що два електрона належать одночасно двом атомам. Енергія зв'язку в таких кристалах має значення порядку величини $10^5 \div 10^6$ Дж/моль. Прикладами таких кристалів є кристали кремнію, алмазу.

3. *Кристали з водневим зв'язком.* Цей зв'язок обумовлений наявністю водню в речовинах. Він слабкіший ковалентного. Енергія зв'язку в таких кристалах має значення порядку величини 10^4 Дж/моль. Прикладами таких кристалів є кристали льоду, речовини KN_2PO - сегнетоелектрика, який застосовується в пристроях обробки інформації, фтороводню HF , синильної кислоти HCN , фториду амонію NH_4F та ін.

4. *Кристали з іонним зв'язком.* Цей зв'язок обумовлена взаємодією іонів. Енергія зв'язку в таких кристалах має значення порядку величини $10^5 \div 10^6$ Дж/моль. Прикладами таких кристалів є кристали кухонної солі NaCl , фториду літію LiF .

5. *Кристали з металевим зв'язком.* У металах всі валентні електрони слабо пов'язані з атомами (позитивними іонами, що знаходяться у вузлах кристалічної ґратки) та усупільнені, так що не можна визначити який валентний електрон до якого атома відноситься. Валентні електрони в металах уподібнюють ідеальному електронному газу, що заповнює простір між вузлами кристалічної ґратки, в яких знаходяться позитивні іони. Енергія зв'язку в таких кристалах має значення порядку величини $10^4 \div 10^5$ Дж/моль. Прикладами таких кристалів є кристали всіх металів. У кристалах також можливі змішані зв'язки.

2.12.3. Дефекти в кристалах

Реальні кристали відрізняються від ідеальних порушенням строгого порядку в кристалічній ґратці. Порушення строгого порядку може бути викликано різними причинами. Кажуть, що в кристалах є дефекти. *Дефекти* можна розділити на точкові, лінійні (дислокації), поверхневі та об'ємні.

Домішки впливають на фізичні властивості кристалів, наприклад, напівпровідники з донорними або акцепторними домішками мають домішкову провідність поряд з власною провідністю.

Дефекти по Шотткі - відсутність частинки в якому-небудь вузлі кристалічної ґратки (вакансія у вузлі).

Дефекти по Френкелю являють собою наявність частинки між вузлами ґратки, яка з'являється там, покинувши своє місце в одному з вузлів. У цьому випадку утворюється пара дефектів (пара Френкеля), так як порожній вузол і наявність зайвої частинки в між вузлами рівною мірою призводять до порушення строгого порядку.

Лінійні дефекти або дислокації можна розділити на крайові і гвинтові.

Крайові дефекти виявляються в наявності краю «зайвої» атомної площині.

Гвинтові дислокації представляють собою кручену лінію, утворену з частинок кристала.

Поверхневі дефекти - це дефекти, які проявляються на площині. До них відносяться поверхня самого кристала, межі між окремими частинами кристала, по-різному орієнтованими, межі між кристалами в полікристалі.

Об'ємні дефекти - це дефекти, які проявляються в тривимірному просторі. До них відносяться пори і тріщини в кристалах.

Всі дефекти впливають на фізичні властивості кристалів, такі як міцність, електропровідність, теплопровідність та інші.

2.12.4. Рідкі кристали

При плавленні деякі кристалічні речовини проходять через кілька проміжних фаз - *мезофаз*. Фізичні властивості мезофаз володіють просторовою анізотропією. Як рідини вони володіють високою пластичністю, здатністю до утворення крапель і деякими іншими властивостями, притаманними рідині. Через цих властивостей речовини в таких станах називають *рідкими кристалами*.

Залежно від умов утворення рідкі кристали ділять на термотропні, ліотропні і фототропні. *Термотропні* рідкі кристали утворюються при зміні температурного режиму. *Ліотропні* рідкі кристали утворюються при розчиненні твердих кристалів в деяких розчинниках. *Фототропні* рідкі кристали утворюються під впливом випромінювання. В основному рідкокристалічний стан спостерігається у органічних речовин з сильно витягнутими макромолекулами.

Залежно від орієнтації молекул рідкі кристали ділять на смектичні, нематичні і холестеричні.

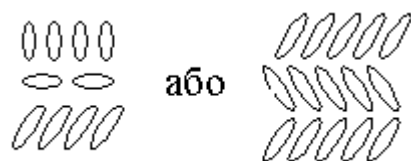


Рис. 2.12.1. Модель смектичного кристалу

Смектичні рідкі кристали характеризуються одновимірною просторовою впорядкованістю, шарістю в розташуванні молекул (рис.12.1).



Рис. 2.12.2. Модель нематичного кристалу

Нематичні рідкі кристали мають орієнтаційну впорядкованість (рис. 12.2). Вони встановлюються так, що їхні осі паралельні одна одній, але просторової впорядкованості немає.

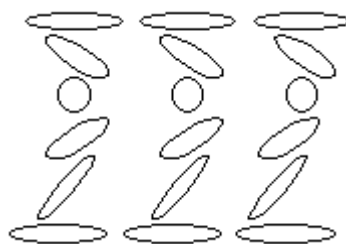


Рис. 2.12.3. Модель холестеричного кристалу

Холестеричні рідкі кристали характеризуються такою орієнтацією молекул, що їхні осі при переході від шару до шару розташовуються по гвинтовій лінії (рис. 12.3).

Рідкі кристали змінюють свої властивості під дією різних зовнішніх факторів: температури, електричних і магнітних полів, механічних деформацій, випромінювання. Тому рідкі кристали

отримали широке застосування в індикаторних пристроях, в системах зберігання та обробки інформації.

2.12.5. Випаровування, сублімація, плавлення та кристалізація

Як в рідинах, так і в твердих тілах завжди є деяка кількість молекул, енергія яких достатня для подолання тяжіння до інших молекул і які здатні відірватися від поверхні рідини або твердого тіла і перейти в навколишній їхній простір. Цей процес для рідини називається *випаровуванням* (або паротворенням), для твердих тіл - *сублімацією*.

Випаровування рідин йде при будь-якій температурі, але його інтенсивність з підвищенням температури зростає. Поряд з процесом випаровування відбувається компенсуючий його процес конденсації пари в рідину. Якщо число молекул, що залишають рідину за одиницю часу через одиницю поверхні, дорівнює кількості молекул, які переходять з пари в рідину, то настає динамічна рівновага між процесам випаровування і конденсації. Пара, що знаходиться в рівновазі зі своєю рідиною, називається насиченим.

Для більшості твердих тіл процес сублімації при звичайних температурах незначний і тиск пари над поверхнею твердого тіла мало; воно підвищується із зростанням температури.

Інтенсивно сублімують такі речовини, як нафталін, камфора, що виявляється по різкому, властивому їм запаху. Особливо інтенсивно сублімація відбувається у вакуумі - цим користуються для виготовлення дзеркал. Відомий приклад сублімації - перетворення льоду в пару - мокра білизна висихає на морозі.

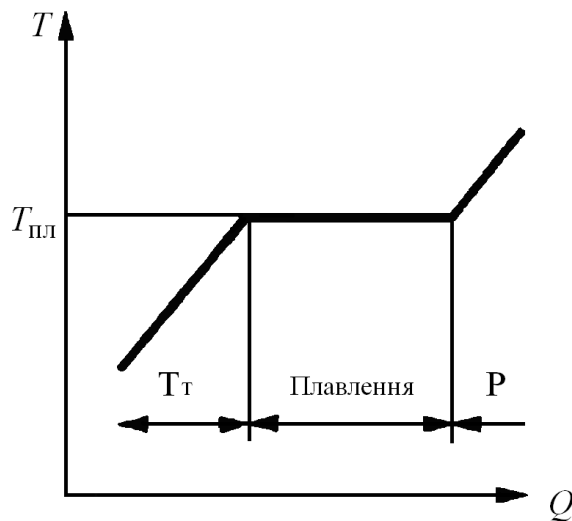


Рис. 2.12.4. Процес плавлення твердого тіла

Якщо тверде тіло нагрівати, то його внутрішня енергія (складається з енергії коливань частинок у вузлах ґратки та енергії взаємодії цих частинок) зростає. При підвищенні температури амплітуда коливань частинок збільшується до тих пір, поки кристалічна ґратка не зруйнується, - тверде тіло плавиться. На рис. 12.4 зображена приблизна залежність $T = f(Q)$, де Q - кількість теплоти, що отримується тілом при плавленні. У міру повідомлення твердому тілу теплоти його температура підвищується, а при температурі плавлення починається перехід тіла з твердого стану в рідкий. Температура $T_{пл}$ залишається постійною доти, поки весь кристал не розплавиться, і тільки тоді температура рідини знову почне підвищуватися.

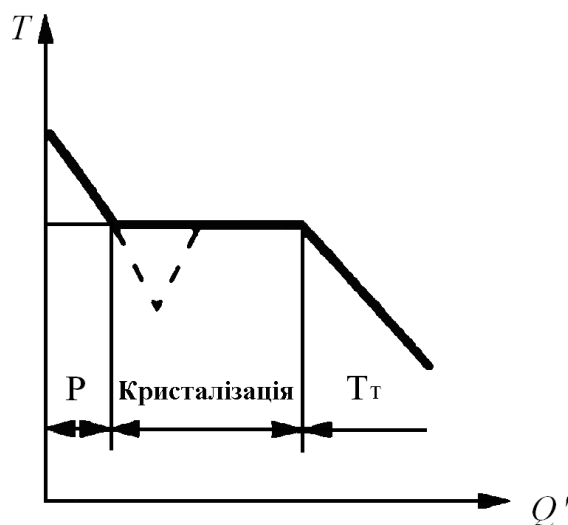


Рис. 2.12.5. Процес кристалізації твердого тіла

Нагрівання твердого тіла до $T_{пл}$ ще переводить його в рідкий стан, оскільки енергія частинок речовини повинна бути достатньою для руйнування кристалічної ґратки. У процесі плавлення теплота, що повідомляється речовині, йде на здійснення роботи по руйнуванню кристалічної ґратки, а тому $T_{пл} = \text{const}$ до розплавлення всього кристала.

Якщо рідина охолоджується, то процес протікає у зворотному напрямку (Q' - кількість теплоти, що віддається тілом при кристалізації): спочатку температура рідини знижується, потім при постійній температурі, рівній $T_{пл}$ починається кристалізація, після її завершення температура кристала почне знижуватися (рис.12.5). Для кристалізації речовини необхідно наявність так званих центрів кристалізації - кристалічних зародків, якими можуть бути не тільки кристалики утворюється речовини, але і домішки, а також пил, сажа і т.д.

Відсутність центрів кристалізації в чистій рідині ускладнює утворення мікроскопічних кристаликів, і речовина, залишаючись в рідкому стані, охолоджується до температури, меншої температури кристалізації, при цьому утворюється переохолоджена рідина (на рис.12.5 їй відповідає штрихова лінія).

При сильному переохолодженні починається спонтанне утворення центрів кристалізації, і речовина кристалізується досить швидко.

Зазвичай переохолодження розправа відбувається від частинок до десятків градусів, але для ряду речовин може досягати сотні градусів.

Через велику в'язкості сильно переохолоджених рідини втрачають плинність, зберігаючи, як і в твердих тілах, свою форму. Ці тіла отримали назву *аморфних твердих тіл*. До них відносяться смоли, віск, сургуч, скло.

Аморфні тіла, будучи переохолодженими рідинами, ізотропні, тобто їх властивості у всіх напрямках однакові; для них, як і для рідин, характерний ближній порядок в розташуванні частинок; в них на відміну від рідин рухливість частинок досить мала.

Особливістю аморфних тіл є відсутність у них певної точки плавлення, тобто неможливо вказати певну температуру, вище якої можна було б констатувати рідкий стан, а нижче - тверде.

У аморфних тілах з часом може спостерігатися процес кристалізації, наприклад у склі з'являються кристалики; воно, втрачаючи прозорість, починає мутніти і перетворюватися на полікристалічне тіл.

Завдання для самоконтролю

1. Який фізичний зміст поняття тверде тіло?
2. Які експерименти підтвердили припущення про існування кристалічних ґраток твердих тіл?
3. Які специфічні властивості кристалів пов'язані з їх симетрією і анізотропією?
4. Залізо, мідь, алюміній і інші метали є твердими тілами. Чому ж практично не спостерігаються явища, що пояснюються анізотропією цих тіл?
5. Які фізичні властивості монокристала залежать від числа дислокацій в одиниці об'єму, а які не залежить?
6. Чому в зимовий час у систему охолодження автомобільних двигунів заливають не воду, а особливу рідину - антифриз, що замерзає при температурі - 65°C.
7. Лід, що знаходиться при температурі – 10°C, нагрівають. У результаті лід плавиться й утворюється вода при температурі 20°C. Зобразити графічно процеси що відбуваються.

2.13. ТЕПЛОВІ ВЛАСТИВОСТІ ТВЕРДИХ ТІЛ

2.13.1. Теплоємність твердих тіл

Найбільш важливими способами поглинання теплової енергії твердим тілом є:

- збільшення інтенсивності коливань атомів;
- збільшення енергії поступального руху електронів;
- збільшення обертальної енергії молекул.

Перший механізм притаманний усім твердим тіла. Цей механізм найбільш важливий з усіх трьох. Інші ефекти можуть переважати тільки у вузьких температурних інтервалах.

Загальна енергія твердого тіла, складається з двох складових частин. Однією з них є теплова енергія, іншою - енергія, якою володіють тверді тіла при абсолютному нулі температури. Сума цих

величин є внутрішньою енергією U . Ця величина може бути точно визначена з експерименту. Проте історично склалося так, що більша увага приділялася величиною теплоємності твердого тіла.

Теплоємність тіла при постійному об'ємі C_V ($V = \text{const}$) або постійному тиску C_p ($p = \text{const}$) визначається як похідна від енергії тіла по температурі. При вивченні твердих тіл з експерименту зазвичай визначається теплоємність при постійному тиску, проте більш фундаментальною величиною у фізиці твердого тіла є теплоємність при постійному об'ємі, пов'язана із співвідношенням

$$C_p - C_V = 9\alpha BVT \quad (13.1)$$

де α - лінійний коефіцієнт теплового розширення; B - модуль об'ємної пружності (всебічного стиснення). Відносна величина різниці (13.1) невелика, і при температурах нижче кімнатної нею зазвичай можна знехтувати.

Будемо надалі розглядати теплоємність при постійному об'ємі, яку можна визначити за формулою

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (13.2)$$

У 1918 році французькі вчені Дюлонга і Пті експериментально встановили, що для переважної маси неорганічних твердих тіл при кімнатних температурах значення теплоємності є величина постійна, і вона близька до значення $25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. Це означає, що при нагріванні будь-якого твердого тіла на один кельвін кожен його атом поглинає одну і ту ж кількість теплової енергії.

Пояснення цьому факту можна дати на основі класичної фізики. Одне з елементарних наслідків теорії ідеального газу і класичної статистичної механіки: середня енергія класичної системи дорівнює $\frac{1}{2}kT$ (де k - постійна Больцмана, помноженому на число ступенів свободи системи. Такий результат вірний для системи невзаємодіючих частинок, якою і є ідеальний газ. Якщо ж частинки між собою взаємодіють, причому сили взаємодії підпорядковуються гармонійному закону, тобто пропорційні зміщенню, а вся система являє собою ансамбль взаємодіючих гармонійних осциляторів, то на одну ступінь свободи доводиться енергія kT . (Середня кінетична

енергія залишається тією ж самою $\frac{1}{2}kT$, а середня потенційна дорівнює середньої кінетичної.) Крім того, кожному атому можна зіставити сукупність трьох лінійних гармонійних осциляторів.

Нехай система (кристал) складається з N_A атомів (N_A - число Авогадро). Тоді повна внутрішня енергія системи гармонійних осциляторів дорівнюватиме $U = 3N_A kT$. Це призводить до вираження для теплоємності такої системи (закон Дюлонга і Пті)

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3N_A k = 3R, \quad (13.3)$$

де R - універсальна газова стала. Таким чином, з (13.3) випливає, що $C_V \approx 25 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$, що збігається з результатами вимірювань при кімнатній температурі і вище. Однак експерименти показали, що при низьких температурах закон Дюлонга і Пті не виконується і температурна залежність теплоємності для твердих тіл має вигляд, показаний на рис. 13.1.

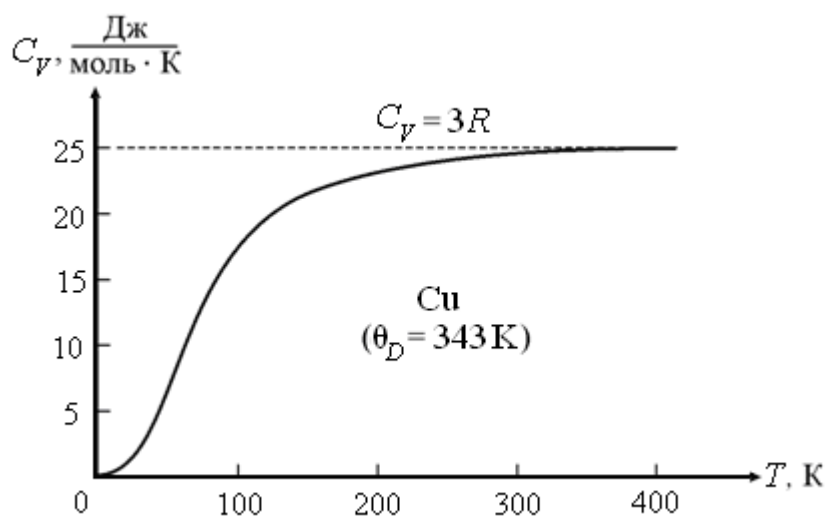


Рис. 2.13.1. Залежність теплоємності від температури для міді

Подальші експериментальні дослідження залежності теплоємності від температури привели до виявлення ряду особливостей, які було неможливо пояснити на основі класичної теорії. Перерахуємо деякі з них:

- при низьких температурах ($T \rightarrow 0 \text{ К}$) теплоємність помітно зменшується (T в області абсолютного нуля температур

наближається до нуля за законом $\sim T^3$ для діелектриків і $\sim T^1$ для металів. Якщо метал здатний переходити в надпровідний стан, то зменшення теплоємності C_V виявляється більш різким;

- у твердих магнетиках внесок, пов'язаний з упорядкуванням магнітних моментів, становить досить велику частку теплоємності C_V в тій області температур, де таке впорядкування має місце;
- нижче температури 0,1К значний внесок у теплоємність C_V може вносити впорядкування ядерних моментів.

Крім того, ефекти упорядкування в багатокомпонентних твердих тілах завжди ведуть до зміни ентропії, а значить і до зміни теплоємності C_V .

Класична теорія теплоємності твердих тіл правильно пояснила факт убуття теплоємності з пониженням температури. Однак вона не дозволила отримати закон зміни теплоємності при дуже низьких температурах. Причина розбіжності класичної теорії з дослідженнями полягає в обмеженій застосовності закону рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи. Адже саме цей закон призводить до незалежності теплоємності від температури.

Труднощі класичної теорії теплоємності твердих тіл були подолані в сучасній квантовій теорії, яка заснована на припущенні про незалежні коливання всіх атомів з однаковою частотою. Квантовий підхід складався з урахування того, що фактично атоми твердого тіла дуже сильно пов'язані між собою. Тому не можна вважати, що N_A атомів кристала коливаються з однаковою частотою. Потрібно розглядати систему з N_A зв'язаних коливань, відповідних з N_A ступенями свободи, причому частоти всіх коливань, взагалі кажучи, різні.

Розвиток цієї ідеї дозволила замінити коливання окремих атомів решітки пружними коливаннями всього кристала. Енергія твердого тіла при низьких температурах виявилася пропорційною четвертому ступеню абсолютної температури ($U \sim T^4$), а теплоємність, відповідно з досвідченими даними, пропорційна T^3 . При високих температурах теорія привела до результатів, що збігається з класичними (закон Дюлонга і Пті).

Наприкінці треба зазначити одну принципову трудність, що виникла в теорії теплоємності металів і пов'язану із застосуванням до вільних електронів класичного закону про рівномірний розподіл енергії за ступенями свободи. Застосовуючи цей закон до

електронного газу в металі, ми прийдемо до висновку, що на частку електронів повинна припадати молярна теплоємність, яка дорівнює $\sim 12,6$ Дж/(моль·К). Таким чином, загальна теплоємність металу, що включає теплоємність кристалічної ґратки і електронів, повинна при звичайних температурах дорівнювати ~ 38 Дж/(моль·К). Досліди спростовують це: теплоємність металів близька до ~ 25 Дж/(моль·К). Отже, електрони практично не змінюють своєї енергії при нагріванні металу. Ця трудність була вирішена тільки після створення квантової статистики Фермі - Дірака. Було показано, що при звичайних і низьких температурах електронний газ знаходиться в особливому «виродженому» стані, з якого нагрівання на один градус вивести його не може. Електрони металу, подібно до атомів у кристалічній ґратці, можуть перебувати в певних енергетичних станах (на певних «сходинках» енергетичної сходи). Однак відповідно до принципу Паулі розподіл електронів металу по станах такий, що вони рівномірно заповнюють всі енергетичні «сходинки», починаючи від найнижчих. Тому при нагріванні металу на один градус тільки незначна частина електронів, що знаходяться на верхніх зайнятих «сходинках», може бути піддана тепловому збудженню, тобто переведена на сусідні вільні рівні з більш високою енергією. Ці електрони вносять незначний внесок у загальну теплоємність металу.

2.13.2 Теплопровідність твердих тіл

Теплопровідністю називається процес перенесення тепла від більш нагрітих частин тіла до менш нагрітих, що приводить до вирівнювання температури тіла. У твердих тілах, на відміну від рідин і газів, неможлива конвекція (передача тепла потоками нагрітого речовини), тому перенесення тепла здійснюється тільки за рахунок коливань кристалічної ґратки.

Хороша теплопровідність - один з відмінних ознак металів. У інших типів твердих тіл (наприклад, у кристалічних діелектриків) коефіцієнти теплопровідності значно менше, ніж у металів. Досліди показали, що теплопровідність металів тим більше, чим більше їх електропровідність, тому природно зробити висновок про те, що процес теплопровідності в металах в основному здійснюється за рахунок перенесення енергії вільними електронами. Це явище описується тим же рівнянням Фур'є, яке було встановлено для теплопровідності газів.

Крім електронної теплопровідності, в металах є також теплопровідність, яка здійснюється кристалічною ґраткою (ґраткова теплопровідність). Однак вона не відіграє суттєвої ролі в загальній теплопровідності металів.

Теплопровідність більшості чистих металів повільно зменшується з підвищенням їх температури. Для сплавів зазвичай має місце зворотне явище. Механізм теплопровідності кристалічних ґраток твердих тіл, що не містять вільних електронів, якісно відмінний від механізму теплопровідності металів. Теплопровідність таких твердих тіл тісно пов'язана з характером теплового руху частинок, що утворюють їх кристалічні ґратки. Справа в тому, що ці частинки пов'язані одна з одною силами взаємодії, залежними від відстані між ними. Тому теплові коливання одних частинок передаються іншим. Таким чином, в кристалі повинні поширюватися пружні (акустичні) хвилі, що переносять енергію теплових коливань від одних вузлів до інших. Отже, атоми у вузлах ґратки здійснюють теплові (акустичні) коливання при будь якій відмінній від абсолютного нуля температурі.

Найбільш простою і фізично наочною моделлю теплових коливань ґратки є хвильова модель. У ній нормальні коливання атомів твердого тіла замінюються відповідним набором пружних хвиль, що задовольняють циклічним граничним умовам. Циклічні граничні умови, що визначають для моделей моноатомної і двоатомної одновимірних ланцюжків атомів, набір дозволених значень хвильових чисел, дозволяють розглядати процес поширення пружних хвиль без урахування ефектів віддзеркалення на кордонах кристала.

Заміна нормальних коливань сукупністю пружних хвиль дозволяє, з одного боку, знаходити відповідні їм значення частот, а з іншого, використовуючи ідею квантово - хвильового дуалізму в квантовій механіці, - ввести поняття квазічастинок, що описують елементарні теплові збудження в твердому тілі, і приписати кожній такої квазічастинки певну енергію і імпульс. Така модель передбачає, що енергія коливань решітки, або енергія пружної хвилі, є квантової величиною.

Квант енергії пружної хвилі називають фонони (за аналогією з фотоном). У застосуванні до фононів справедливі всі концепції корпускулярно - хвильового дуалізму.

Теплові коливання атомів у кристалах можна розглядати як процес термічного збудження фононів за аналогією з термічним збудженням фотонів, а теплопередачу - як процес поширення фононів (так само, як процес поширення електромагнітних хвиль можна пов'язати з процесом поширення фотонів).

Тепер теплові коливання решітки (збуджений стан решітки) можна представити як ідеальний газ фононів, що вільно рухається в об'ємі кристала. Фононний газ в певному інтервалі температур поводить себе подібно ідеальному газу, а оскільки фонони є основними переносниками тепла в твердому тілі (це твердження справедливе лише для діелектриків), то коефіцієнт теплопровідності твердого тіла можна виразити такою ж залежністю, як коефіцієнт теплопровідності ідеального газу

$$\lambda = \frac{1}{3} C^* \langle l_{\phi} \rangle v_z, \quad (13.4)$$

де C^* - теплоємність одиниці об'єму фононного газу, l_{ϕ} - середня довжина вільного пробігу фонона, v_z - швидкість поширення звуку в даному тілі.

Обчислення середньої довжини вільного пробігу фонона являє собою складну задачу, оскільки вона залежить від того, на чому відбувається розсіювання фононів: на інших фононах, на дефектах структури або на зовнішніх гранях зразка. Однак теоретичний аналіз призводить до того, що при досить високих температурах середня довжина вільного пробігу фонона обернено пропорційна абсолютній температурі.

У досить чистих і бездефектних кристалах при температурі, близькій до абсолютного нуля, виникає залежність середньої довжини вільного пробігу фононів від розмірів зразка. Це пояснюється тим, що при низьких температурах концентрація фононів мала, а отже, мала ймовірність розсіювання фононів на інших фононах.

Вважаючи середню довжину вільного пробігу фононів приблизно рівною лінійним розмірам кристала, тобто $\langle l_{\phi} \rangle \approx L$, де L - лінійний розмір кристала, можна рівняння (13.4) переписати у вигляді

$$\chi_T = \frac{1}{3} C^* L v_z \quad (13.5)$$

У правій частині рівняння (13.5) від температури залежить тільки теплоємність одиниці об'єму фононного газу. При температурах, близьких до абсолютного нуля, теплоємність пропорційна T^3 , тому і коефіцієнт χ_T теплопровідності пропорційний кубу абсолютної температури. Такий висновок підтверджується експериментальними даними. Слід додати, що анізотропія сил зв'язку в кристалах приводить до анізотропії коефіцієнта теплопровідності.

Все вищесказане відноситься до гратковій (фононній) частини теплопровідності твердого тіла, властивості неметалевим кристалом. У металах у перенесенні тепла, крім атомів кристалічної ґратки, беруть участь ще і вільні електрони, які одночасно є і носіями електричного заряду, забезпечуючи високу електропровідність металів. Більше того, в чистих металах основними носіями тепла є саме вільні електрони, а не фоони. При досить високих температурах металів граткова складова теплопровідності складає всього 1-2 % від електронної теплопровідності. Цим пояснюється висока теплопровідність чистих металів порівняно з діелектриками. Наприклад, в алюмінію при кімнатній температурі коефіцієнт теплопровідності $\chi_T = 2,2 \cdot 10^6$ Вт/(см·К), що приблизно на два порядки більше, ніж у кварцу. Однак при дуже низьких температурах в металах електронна частина теплопровідності менше, ніж граткова. Це пояснюється ефектами електрон - фононного розсіювання.

На рис. 2.13.2 приведений вид залежності теплопровідності від температури для діелектриків і металів.

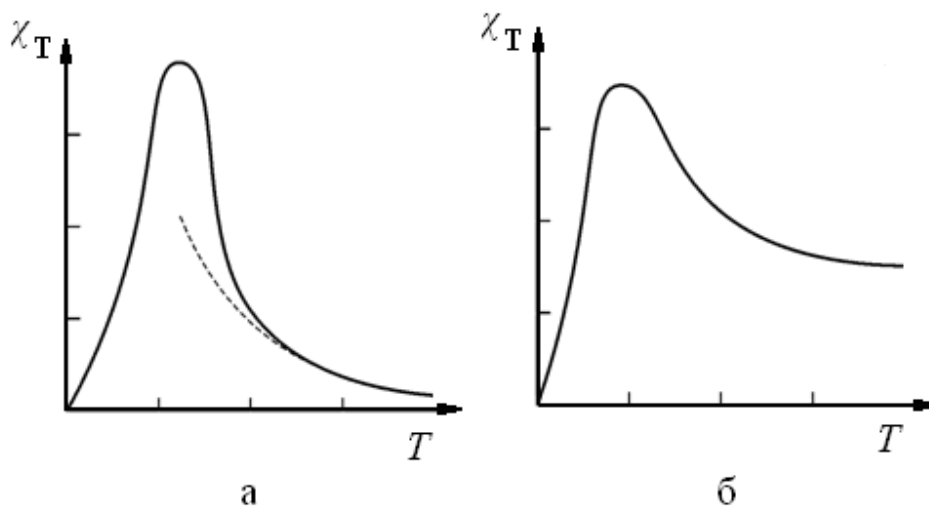


Рис. 2.13.2. Порівняльні температурні залежності коефіцієнта теплопровідності χ : а - для діелектриків ; б - для металів

У діелектриках, які практично не мають вільних електронів, перенесення тепла здійснюється тільки фононами. Вище було сказано, що середня довжина вільного пробігу $\langle l_{\phi} \rangle$ залежить від процесів розсіювання фононів на різних об'єктах. Все це призводить до того, що температурна залежність коефіцієнта теплопровідності χ_t для діелектриків має вигляд кривої з максимумом (рис. 2.13.2а). Ліва висхідна гілка залежності обумовлена збільшенням числа фононів із зростанням температури, а права спадна пов'язана з послаблюючими фонон - фононним та іншими видами розсіювання. Вид залежності $\chi_t(T)$ для металів (рис. 2.13.2б) якісно схожий на криву для діелектриків. Це пов'язано з перевагою при дуже низьких температурах фононного механізму теплопередачі. Однак зі зростанням температури внесок фононній складовій в цей процес стає дуже малий і теплопередача здійснюється в основному вільними електронами. При відносно високих температурах в металах коефіцієнт теплопровідності χ_t практично перестає змінюватися із збільшенням T .

2.13.3 Теплове розширення твердих тіл

У твердому тілі атоми при будь-якій температурі безперервно роблять коливання біля середнього положення рівноваги. Якщо амплітуди таких коливань малі, то їх можна вважати гармонійними.

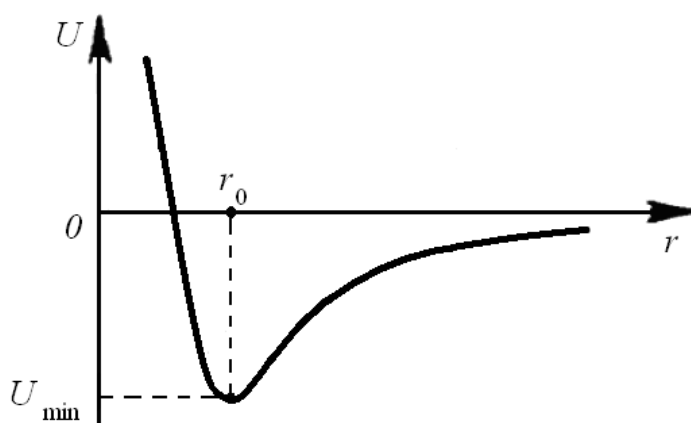


Рис. 2.13.3. Залежність потенційної енергії взаємодії атомів від міжатомної відстані

Всі можливі коливання пов'язаних атомів можна представити як сукупність взаємодіючих пружних хвиль різної довжини, що поширюються по всьому об'єму кристала. При цьому, т. к. тверде тіло обмежено за розміром, при даній температурі встановлюється стаціонарний стан коливань, які представляють собою суперпозицію стоячих хвиль.

Будемо виходити із залежності потенційної енергії взаємодії атомів від міжатомної відстані (рис. 13.3). Мінімум кривої відповідає балансу сил притягання і відштовхування і має місце при $r = r_0$, що відповідає рівноважному відстані між частинками.

Для малих відхилень від точки рівноваги потенційну енергію системи взаємодіючих атомів $U(r)$ можна розкласти в ряд Тейлора поблизу точки $r = r_0$, причому r_0 - рівноважна відстань між атомами, r - координата атома в довільний момент часу:

$$U(r) = U(r_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} \cdot (r - r_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} \cdot (r - r_0)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} \right)_{r=r_0} \cdot (r - r_0)^3 + \dots$$

(13.6)

Позначимо у формулі (13.6)

$$U(r_0) = -U_0, \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right)_{r=r_0} = \beta, \left(\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} \right)_{r=r_0} = 2 \gamma$$

а зсув з положення рівноваги $r - r_0 = u$, тоді

$$U(r) + U_0 = \frac{1}{2} \beta u^2 - \frac{1}{3} \gamma u^3$$

(13.7)

У гармонійному наближенні залежність потенційної енергії від зсуву $U(u)$ - параболічна функція:

$$U(u) = U_0 + \frac{1}{2} \beta u^2,$$

(13.8)

тобто атом є гармонійним осцилятором і коливається в симетричній потенційної ямі (рис. 13.4). При збільшенні амплітуди коливань атом переходить на все більш високі рівні енергії $U = U_T$. На кожному збудженому рівні, відповідному певній температурі (і T_1, T_2 т. д.), відстань між гілками параболи (відстані $|A_1 B_1|, |A_2 B_2|$ і т. д.) визначає подвоєну амплітуду коливань. Однак значення $r_0 = x_1 = x_2 = x_3 =$

залишається постійним, тобто середнє положення атома в ґратці при гармонічних коливаннях не змінюється. Інша справа при урахуванні в розкладанні потенційної енергії додатку, що містить куб зсуву (u^3). При температурі T_1 атом буде відхилятися так само, як і у випадку параболічної потенційної ями, вліво до точки A_1 і вправо до точки B_1 на однакові відстані (рис. 13.5).

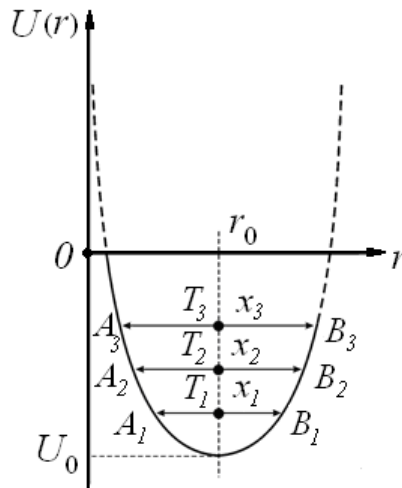


Рис. 2.13.4. Залежність потенційної енергії взаємодії між двома атомами від відстані між ними в гармонійному наближенні ($T_1 < T_2 < T_3$)

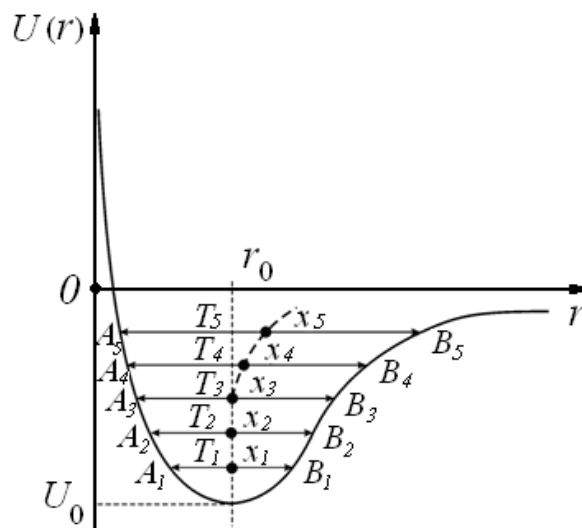


Рис. 2.13.5. Залежність потенційної енергії взаємодії між двома атомами з урахуванням ангармонізму коливань ($T_1 < T_2 < T_3 < \dots$)

При деякій досить помітній температурі (на рисунку це температури T_4 , T_5 і т. д.) відхилення атома від положення рівноваги

r_0 вліво і вправо не рівні і середні значення x_4 x_5 і т. д. будуть відповідати значенням r , відмінним від рівноважного. Потенційна енергія при збільшенні r змінюється повільніше, ніж по гармонійному закону, і $U(-u) - U_0 > U(u) - U_0$. Обмежуючись третьою похідною, потенційну енергію $U(u) = U(r) - U(r_0)$ можна представити у вигляді

$$U(u) = \frac{1}{2} \beta u^2 - \frac{1}{3} \gamma u^3, \quad (13.9)$$

де коефіцієнт $\gamma > 0$. Коефіцієнт γ в рівнянні (13.9) визначає ступінь відхилення $U(r)$ від параболічної залежності і називається (як зазначено вище) коефіцієнтом ангармонізму. Сила, що діє на осцилятор при його відхиленні від положення рівноваги в ангармонічним наближенні, буде мати вигляд

$$F(u) = \frac{\partial U}{\partial u} = -\beta u + \gamma u^2. \quad (13.10)$$

Таким чином, при збільшенні амплітуди коливань осцилятора з зростанням температури відбувається збільшення середнього за часом значення його рівноважної координати, тобто відбувається теплове розширення твердого тіла.

Для опису теплового розширення твердого тіла можна скористатися наближеною моделлю, в якій ґратка замінена на сукупність ангармонічних осциляторів. Гармонійна модель узгоджується з багатьма експериментальними даними. Однак деякі властивості кристалів, наприклад теплове розширення, можуть бути пояснені лише при врахуванні кубічного доданка у виразі для енергії (13.6). Таке наближення називають *ангармонічним*.

Ангармонізм коливань атомів призводить до того, що силові постійні, що характеризують величину сил міжатомного зв'язку залежать від амплітуди коливань а значить, і частота починає залежати від амплітуди зміщень. Ангармонізм веде і до виникнення таких явищ, як теплове розширення. Зв'яжемо коефіцієнт теплового розширення α (який присутній у виразі для подовження тіла $L = L_0(1 + \alpha T)$) з коефіцієнтом ангармонізму γ . Відносна зміна розміру тіла при нагріванні дорівнює відношенню середнього значення відхилення атома від рівноважного положення $\langle u \rangle$ до значення рівноважного відстані між сусідніми атомами r_0 :

$$\frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\langle u \rangle}{r_0} = \alpha T. \quad (13.11)$$

Таким чином, середнє зміщення атомів від положення рівноваги при нагріванні пропорційно температурі і коефіцієнту ангармонізму γ та обернено пропорційно квадрату коефіцієнта квазіпружної сили.

Підставивши $\langle u \rangle = \frac{\gamma}{\beta^2} k T$ у формулу (13.11), отримаємо для відносного подовження тіла при нагріванні:

$$\frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\gamma}{\beta^2 r_0} k T = \alpha T. \quad (13.12)$$

Звідси

$$\alpha = \frac{\gamma}{\beta^2 r_0} k. \quad (13.13)$$

Рівняння (13.13) свідчить про те, що коефіцієнт теплового розширення α прямо пропорційний постійній ангармонізму γ , причому знаки їх збігаються. Знак α визначається характером асиметрії потенційної енергії $U(r)$ поблизу положення рівноваги.

Якщо гілка при $r < r_0$ змінюється круче, ніж при $r > r_0$, то при нагріванні тіло розширюється, якщо навпаки, то стискається. Якщо гілки симетричні, розміри тіла не змінюються.

Формула (13.12) справедлива для полікристалічних тіл, і α тут середній коефіцієнт лінійного теплового розширення. Монокристали мають анізотропію властивостей, а значить, і коефіцієнт лінійного розширення для різних напрямів усередині кристала в загальному випадку буде мати різні значення. Якщо з монокристалу виточити кулю, а потім нагріти або охолодити її, то при зміні температури монокристал втратить сферичну форму і перетвориться на тривісний еліпсоїд, осі якого пов'язані з кристалографічними осями координат кристала.

Для характеристики теплового розширення існує, як було показано, коефіцієнти лінійного α і об'ємного δ розширення. Коефіцієнт лінійного розширення, характеризує відносне подовження $\Delta L/L_0$, що відбувається при нагріванні тіла на 1К.

В результаті лінійного розширення збільшується об'єм тіла. Виявляється, що в першому наближенні об'єм V твердого тіла зростає пропорційно першій ступені температури:

$$V = V_0(1 + \delta T)$$

де V_0 - об'єм тіла при температурі 0°C , а δ - коефіцієнт об'ємного розширення, що характеризує відносне збільшення об'єму, що відбувається при нагріванні тіла на 1K .

Легко показати, що між коефіцієнтами α і δ ізотропного тіла існує наступний наближений зв'язок $\delta = 3\alpha$.

Завдання для самоконтролю

1. Чи слід обов'язково враховувати теплове розширення у разі підбору компонентів суміші дорожньо-будівельних матеріалів,?
2. Чим визначається теплоємність речовини у будь-якому її агрегатному стані?
3. Чим відрізняється механізм теплопровідності діелектриків та металів?
4. Які особливості структури твердих тіл?
5. Чим пояснити теплове розширення твердих тіл?
6. У чому відмінність механізмів процесу теплопровідності у металів »
інших твердих тіл?
7. Сформулюйте закон Дюлонга і Пті. Як отримати цей закон на основі класичної теорії теплоємності ? Які труднощі виникають у цій теорії при її застосуванні до металів ?
8. У чому полягає основна ідея квантової теорії теплоємності твердих тіл?
9. Вода у ставку знаходиться при $T_1=0^\circ\text{C}$, температура воздуха $T_2=-10^\circ\text{C}$. Який шар льоду утворюється за добу, якщо густина льоду $\rho=0,9\text{г/см}^3$, температура його поверхні співпадає з температурою повітря. Теплота плавлення льоду $\theta = 80\text{кал/г}$, коефіцієнт теплопровідності льоду $\lambda=0,005\text{кал/см}\cdot\text{с}\cdot\text{K}$.
Відповідь: $h=11,2\text{см}$.

2.14. ФАЗОВІ РІВНОВАГИ І ПЕРЕТВОРЕННЯ

2.14.1. Поняття фази і фазового переходу

У термодинаміці *фазою* називається сукупність однорідних, однакових за своїми властивостями частин системи. Пояснимо поняття фази на наступних прикладах. У закритій посудині знаходиться вода і над нею суміш повітря і пари води. У цьому випадку ми маємо справу з системою, що складається з двох фаз: одну фазу утворює вода, другу - суміш повітря і пари води. Якщо у воду додати кілька шматочків льоду, то всі ці шматочки утворюють третю фазу. Різні кристалічні модифікації якої-небудь речовини також представляють собою різні фази. Так, наприклад, алмаз і граніт є різними твердими фазами вуглецю.

За певних умов різні фази одного і того ж речовини можуть перебувати в рівновазі один з одним, стикаючись між собою. Рівновага двох фаз може мати місце лише в певному інтервалі температур, причому кожному значенню температури T відповідає цілком певний тиск p , при якому можлива рівновага. Таким чином, стан рівноваги двох фаз відобразиться на діаграмі (p, T) графіком $p = f(T)$.

Перехід з однієї фази в іншу зазвичай супроводжується поглинанням або виділенням деякої кількості теплоти, яка називається *прихованою теплотою переходу*, або просто *теплотою переходу*. Такі переходи називаються *фазовими переходами першого роду*. Існують переходи з однієї кристалічної модифікації в іншу, які не пов'язані з поглинанням або виділенням теплоти. Такі переходи називаються *фазовими переходами другого роду*. Фазові переходи другого роду не вичерпуються переходами між різними кристалічними модифікаціями. До їх числа належить перехід в надпровідний стан, який чиниться у відсутності магнітного поля, а також перехід між двома рідкими фазами гелію, званими гелієм I і гелієм II. Ми обмежимося розглядом тільки переходів першого роду. Класифікацію фазових переходів першого роду зручно провести за допомогою блок схеми, наведеної на рис. 2.14.1, де позначені наступні процеси: 1. плавлення; 2. кристалізація; 3. випаровування; 4. конденсація; 5. осадження; 6. сублімація.

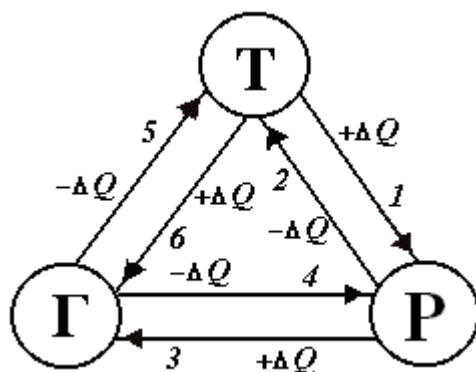


Рис. 2.14.1. Блок-схема фазових переходів

Теплота фазового перетворення ΔQ пропорційна зміні маси фази Δm , тобто $q = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ - *питома теплота фазового перетворення*.

2.14.2. Фазові перетворення реального газу

Розглянемо з іншою точки зору процес стиснення речовини при постійній температурі T , яку виберемо нижче критичної $T_{кр}$. Початково речовину припускаємо газоподібною.

Спочатку в міру зменшення об'єму тиск газу зростатиме (рис. 14.2).

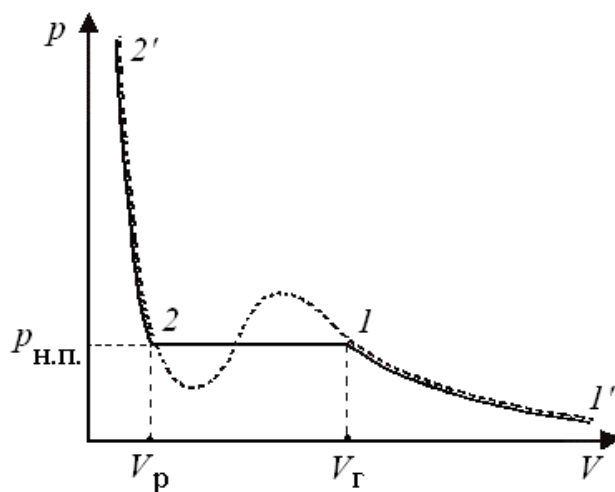


Рис. 2.14.2. Процес стиснення речовини при постійній температурі T

По досягненні об'єму $V_г$ тиск перестає бути однорідним - частина газу конденсується в рідину. Відбувається розшарування речовини на дві фази: рідку і газоподібну. У міру подальшого зменшення об'єму все більша частина речовини переходить у рідку

фазу, причому перехід здійснюється при постійному тиску $p_{н.п.}$ (тиску насиченої пари). Після того як процес конденсації речовини закінчується (це відбувається при досягненні об'єму $V_{ж.}$), подальше зменшення об'єму починає супроводжуватися швидким зростанням тиску.

На рис. 2.14.2 штриховою лінією зображена ізотерма Ван -дер - Ваальса, відповідна даній температурі. Якщо проведемо лінію через крайні точки горизонтальних ділянок експериментальних ізотерм, отримуємо колоколоподібну криву, яка обмежує область двофазних станів речовини. Відобразимо на діаграмі (p,V) також ізотерму, відповідну критичній температурі $T_{кр.}$. Тоді колоколоподібна крива і критична ізотерма ділять діаграму (p,V) на чотири області.

Під колоколоподібною кривою (рис. 2.14.3) розташовується область двофазних станів (рідина + пар). Область, що лежить зліва від колоколоподібної кривої, являє собою область однорідних рідких станів, і нарешті, область, що лежить праворуч від колоколоподібної кривої і верхньої гілки критичної ізотерми, являє собою область однорідних газоподібних станів речовини. Тут можна особливо виділити частину лежачу під правою гілкою критичної ізотерми, назвавши її областю пара.

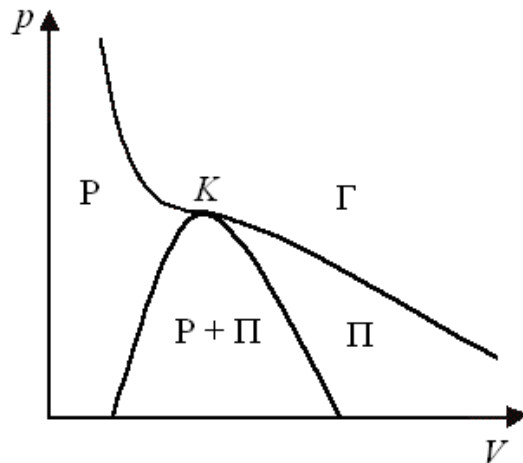


Рис. 2.14.3. Фазовий перехід пара-рідина

Будь-який стан у цій області відрізняється від інших газоподібних станів в тому відношенні, що при ізометричному стисненні речовина, спочатку знаходилася в такому стані, зазнає процес стиснення. Речовина, що знаходиться в одному з станів при температурі вище критичної, не може бути зріджена ніяким стисненням. Розподіл газоподібних станів на газ і пару не є

загальноприйнятим, тому надалі ми обидва ці стани будемо називати газом.

2.14.3. Рівняння Клапейрона – Клаузіуса і фазова діаграма для перетворення рідина - газ ($P \leftrightarrow \Gamma$)

Як вже вказувалося, дві фази будь-якої речовини можуть перебувати в рівновазі лише при певному тиску, величина якого залежить від температури. Загальний вигляд цієї залежності можна отримати, скориставшись методом циклів Карно. Візьмемо дві близько розташовані ізотерми реального газу при температурах T і $T' = T - dT$. Побудуємо на цих ізотермах цикл Карно, як показано на рис.4.

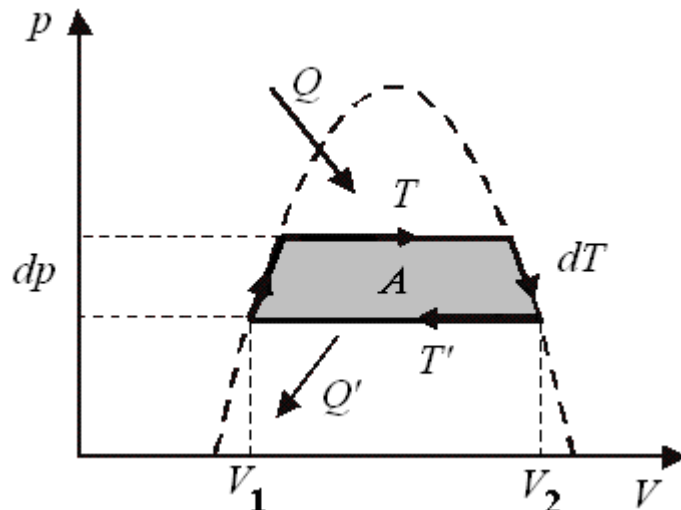


Рис. 2.14.4. Цикл Карно двофазного стану речовини

За теоремою Карно маємо

$$\frac{A}{Q} = \frac{T - T'}{T} \quad (14.1)$$

У разі елементарного циклу Карно

$$A = (V_2 - V_1)dp, \quad T - T' = dT.$$

Підставляючи це в рівняння в (14.1), отримаємо

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q}{T(V_2 - V_1)} \quad (2)$$

Уявімо величини які входять в (14.2) наступним чином

$$Q = \nu \cdot r, \quad V_1 = \nu \cdot V_p, \quad V_2 = \nu \cdot V_r,$$

де r - теплота випаровування 1 молю рідини, V_p - об'єм 1 моля рідини, V_r - об'єм 1 моля газу.

Тоді рівняння (14.2) прийме вигляд:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(V_r - V_p)}. \quad (14.3)$$

Воно називається *рівнянням Клайперона - Клаузіуса для фазового перетворення рідина – газ*.

Фазова діаграма - це графік, що виражає криву $p = f(T)$, на якій дві фази знаходяться в рівновазі. Рівняння Клайперона - Клаузіуса (14.3) визначає характер цієї кривої.

Оскільки $(V_r - V_p) > 0$, то $\frac{dp}{dT} > 0$, тобто підвищення температури призводить до збільшення рівноважного тиску.

Візьмемо речовину у вигляді рідини, яка знаходиться в рівновазі зі своєю насиченою парою і, не змінюючи об'єму, станемо віднімати від неї тепло.

Цей процес буде супроводжуватися зниженням температури речовини і відповідно зменшенням тиску. Тому точка, що зображає стан речовини на діаграмі (p, T) , переміщується вниз по кривій $p = f(T)$. Це продовжується до тих пір, поки не буде досягнута температура кристалізації речовини, що відповідає рівноважному значенню тиску (рис. 2.14.5).

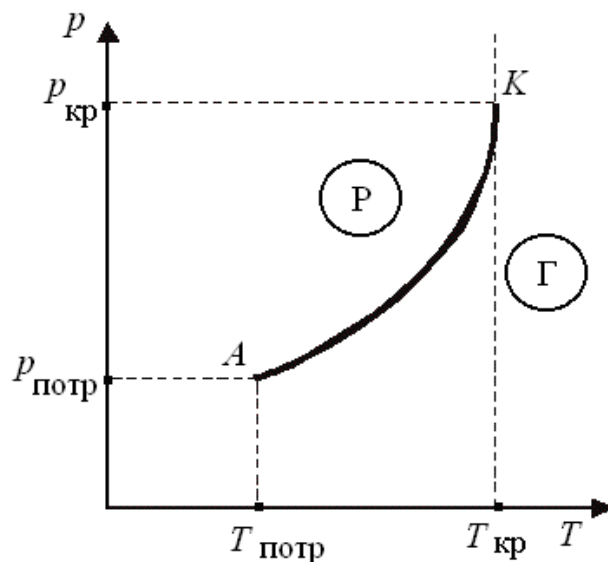


Рис. 2.14.5. Діаграма (p, T) переходу рідини до потрійної точки

Позначимо цю температуру $T_{\text{тр}}$. Весь час, поки йде процес кристалізації, температура і тиск залишаються незмінними. Відведена при цьому теплота являє собою теплоту, що виділяється при кристалізації. Температура $T_{\text{тр}}$ і відповідний рівноважний тиск $p_{\text{тр}}$ – єдині значення температури і тиску, при яких можуть знаходитися в рівновазі три фази речовини: тверда, рідка і газоподібна. Відповідна точка на діаграмі $p = f(T)$ називається *потрійною точкою* (т. А).

2.14.4. Рівняння Клайперона – Клаузіуса і фазова діаграма для перетворення тверде тіло – рідина ($T \leftrightarrow R$)

Рівняння Клайперона - Клаузіуса в цьому випадку має вигляд аналогічний рівнянню (14.3)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{T(V_p - V_t)}, \quad (14.4)$$

де l - теплота плавлення 1 молю твердого тіла, V_p – об'єм 1 моля рідини, V_t – об'єм 1 моля твердого тіла.

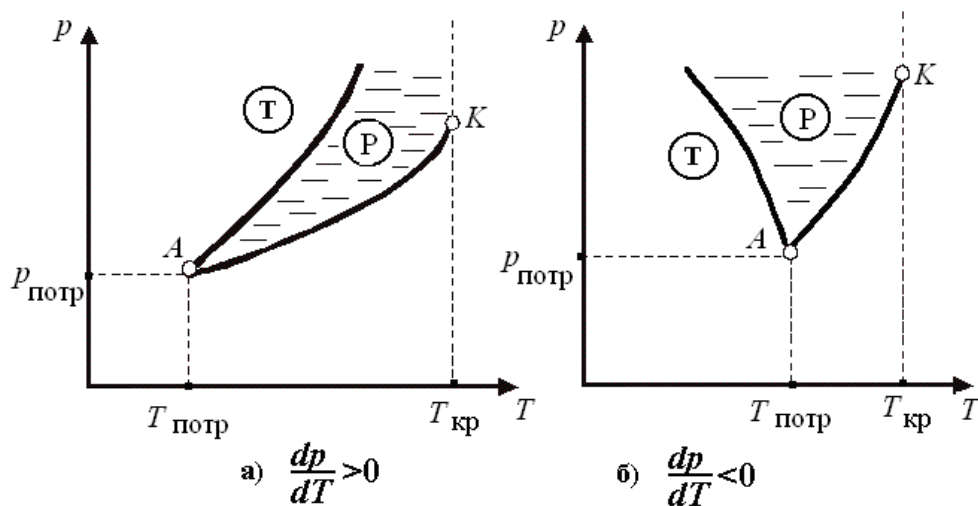


Рис. 2.14.6. Фазова діаграма переходу тверде тіло - рідина

На рис. 14.6 представлена фазова діаграма (залежність $p = f(T)$), тобто умова рівноваги фаз. Зазвичай $V_p > V_t$, і тому $\frac{dp}{dT} > 0$, але для деяких речовин (наприклад, система вода - чавун) $V_p < V_t$, і тоді $\frac{dp}{dT} < 0$. Вид фазових діаграм, для обох випадків зображений на рис.2.14.6а і рис.2.14.6б.

2.14.5. Рівняння Клайперона - Клаузіуса і фазова діаграма для перетворення тверде тіло – газ ($T \leftrightarrow \Gamma$).

Візьмемо речовину, яка знаходиться у такому стані, коли три фази речовини знаходяться в рівновазі, тобто в стані, заданих потрійною точкою А. Будемо продовжувати віднімати від речовини теплоту. По закінченні процесу кристалізації в рівновазі будуть перебувати тверда і газоподібна фази. І якщо і далі продовжувати віднімати теплоту, то температура знову почне знижуватися. Відповідно зменшується тиск парів, що знаходяться в рівновазі з кристалічною фазою. Точка, що зображає стан речовини буде переміщатися вниз по фазовій діаграмі $T \leftrightarrow \Gamma$.

Рівняння Клайперона - Клаузіуса для фазового перетворення $T \leftrightarrow \Gamma$ має вигляд:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(V_\Gamma - V_T)}, \quad (14.5)$$

де r - теплота сублимації 1 молю твердого тіла, V_T – об'єм 1 моля твердого тіла, V_G – об'єм 1 моля газу (пари).

Оскільки $V_G > V_T$, то $\frac{dp}{dT} > 0$, тобто фазова діаграма має вигляд зростаючої кривої. Далі в цьому випадку $V_G \gg V_T$, і можна рахувати що $V_G \approx V$.

З рівняння стану ідеального газу $pV=RT$ знаходимо $V = \frac{RT}{p}$.

Тоді рівняння (14.5) прийме вигляд:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{TV} \text{ або } \frac{dp}{dT} = \frac{r}{R} \frac{p}{T^2}. \quad (14.6)$$

Це рівняння зі змінними величинами, які розділяються

$$\frac{dp}{p} = \frac{r}{R} \frac{dT}{T^2}. \quad (14.7)$$

Рішення рівняння (14.7) має вигляд

$$p = \text{const} \cdot e^{-\frac{r}{RT}},$$

або враховуючи, що

$$\frac{r}{R} = \frac{N_A}{N_A} \frac{\varepsilon}{k} = \frac{\varepsilon}{k},$$

можна записати

$$p = \text{const} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \quad (14.8)$$

де ε – енергія зв'язку окремого атома з кристалом.

Вид фазової діаграми $p = f(T)$ для перетворення $T \leftrightarrow G$ наведено на рис. 2.14.7.

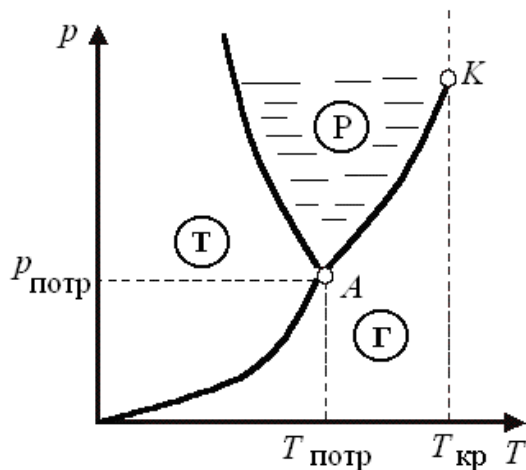


Рис. 2.14.7. Фазова діаграма перетворення $T \leftrightarrow \Gamma$

2.14.6. Потрійна точка. Діаграма стану

Як видно з рис. 2.14.7, всі три фазові діаграми сходяться в одній точці (потрійній точці A) і розбивають координатну площину на три області: область твердої фази, область рідких станів і область газоподібних станів речовини. Будь-яка точка в одній з цих областей зображує відповідний однофазний стан речовини. Будь-яка точка, що лежить на одній з кривих, що розмежовують області, зображує стан рівноваги двох відповідних фаз речовини. Потрійна точка зображує стан рівноваги всіх трьох фаз. Таким чином, кожна точка на діаграмі зображує певний рівноважний стан речовини. Тому її називають *діаграмою стану*.

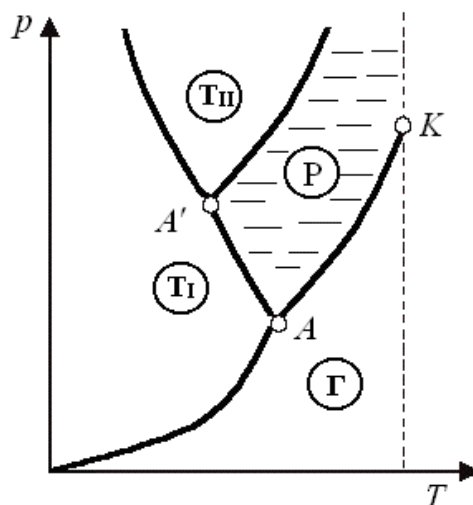


Рис. 2.14.8. Фазова діаграма для речовини з двома кристалічними модифікаціями

Для речовини з кількома кристалічними модифікаціями діаграма стану має більш складний характер. На рис. 2.14.8 зображена діаграма для випадку, коли число різних кристалічних модифікацій дорівнює двом. У цьому випадку є дві потрійні точки. У точці A в рівновазі знаходяться рідина, газ і перша кристалічна модифікація речовини, в точці A' - обидві кристалічні модифікації.

Діаграма стану для кожної конкретної речовини будується на основі експериментальних даних. Знаючи діаграму стану, можна передбачити, в якому стані буде перебувати речовина при різних умовах (при різних значеннях p і T), а також які перетворення буде зазнавати речовина при різних процесах.

Завдання для самоконтролю

1. Розкажіть про фазові перетворення речовини і накресліть відповідні криві фазових рівноваг в діаграмі T - p .
2. Що називається фазою системи, фазовою рівновагою, фазовим переходом, фазовою діаграмою (чи кривою рівноваги)?
3. Намалюйте і поясніть фазову діаграму води яка застосовується у процесі затворювання бетону.
4. Яку особливість має фазова крива?
5. Наведіть приклади газів, які ніяким способом не можна привести в рідкий стан при кімнатній температурі і поясніть чому.
6. Яким явищем супроводжується зникнення двофазного стану рідина-газ в критичній точці? Як воно пояснюється і яким чином можна його спостерігати?
7. Яким чином можна розрахувати зміну ентропії під час переходу системи з одного стану в інший?
8. Що таке потрійна точка? Що таке критична точка?

2.15. РОЗЧИНИ

2.15.1. Визначення та основні кількісні характеристики розчинів

*Розчинами називають фізично однорідні (гомогенні) суміші двох або декількох речовин. Фізична однорідність досягається рівномірним перемішуванням молекул. У цьому відношенні розчини відрізняються від механічних сумішей, в яких перемішані не молекули, а макроскопічні частинки речовини. Якщо однієї речовини в розчині більше, ніж інших, то воно називається *розчинником*, а інші речовини - *розчиненими речовинами*. Розчини називаються *слабкими* або *розведеними*, якщо число молекул розчинених речовин дуже мало в порівнянні з числом молекул розчинника. Розчини ж, що містять багато розчинених речовин, називаються *міцними*. Дуже міцні розчини називають *концентрованими*.*

Речовина, присутня в розчині в більшій кількості, називають *розчинником*, а інше - *розчиненою речовиною*.

Розчини, що складаються з двох речовин, називають *бінарними*.

Речовини, що входять в розчин, називаються його компонентами. Відносний вміст компонентів в розчині характеризується їх концентраціями. Розрізняють *масові*, *молярні* та *об'ємні концентрації*.

Молярну концентрацію визначають як відношення кількості молей молекул розчиненої речовини v_2 (або кількість молей розчинника v_1) до повного кількості молей молекул розчину:

$$q_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \quad \text{або} \quad q_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2}, \quad (15.1)$$

причому $q_1 + q_2 = 1$.

Набагато зручніше використовувати *масову концентрацію*, оскільки компоненти легко зважити:

$$C_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{или} \quad C_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (15.2)$$

причому $C_1 + C_2 = 1$.

Об'ємною концентрацією компонента називається кількість його (в грамах або молях) в одиниці об'єму розчину.

Механізм розчинення зводиться до розриву зв'язків між молекулами кожного з вихідних речовин і утворення нових зв'язків між молекулами речовин, що знаходяться в розчині. У багатьох

випадках при розчиненні молекули речовини розпадаються на складові частини - іони (у солей, лугів, кислот). Зазвичай на роз'єднання молекул при розчиненні речовини витрачається певна енергія, тому при розчиненні відбувається охолодження речовини.

Від хімічних сполук розчини відрізняються тим, що в хімічні сполуки речовини вступають в точно визначених пропорціях, тоді як відносні кількості речовин в розчинах можуть змінюватися в більш-менш широких межах. Але розчини не можна вважати і механічними сумішами молекул. Через взаємодії останніх розчини за деякими ознаками наближаються до хімічних сполук. Розчинення зазвичай супроводжується виділенням або поглинанням тепла. Тепловий ефект вважається позитивним, якщо при розчиненні тепло виділяється, і негативним, якщо воно поглинається. Величина теплового ефекту залежить не тільки від кількості розчиненої речовини, але і від кількості розчинника. Під теплотою розчинення зазвичай розуміють кількість тепла, яке виділяється або поглинається при розчиненні речовини в настільки великій кількості розчинника, що подальше додавання розчинника вже не призводить до виділення або поглинання тепла. У слабких розчинах взаємодія між молекулами розчинених речовин не відіграє помітної ролі. У теорії їй зазвичай нехтують подібно до того, як це робиться у вченні про ідеальні гази. Має значення тільки взаємодія молекул розчинених речовин з молекулами розчинника.

В електролітах молекули розчинених речовин повністю або частково дисоціюють (розпадаються) на іони. Цим пояснюється електропровідність електролітів і пов'язане з нею явище електролізу. У багатьох рідких розчинах встановлено існування *сольватів*. Так називають більш-менш неміцні сполучення непостійного складу молекул або іонів розчинених речовин з молекулами розчинника. У водних розчинах сольвати називаються *гідратами*. Сольвати і гідрати безперервно руйнуються (дисоціюють) і утворюються знову.

2.15.2. Принцип Ле - Шательє – Брауна і стійкість термодинамічної рівноваги

Цей принцип є дуже важливим для процесів у розчинах і дозволяє передбачати напрямок течії процесу в системі, коли вона виведена зовнішнім впливом зі стану стійкої рівноваги. Принцип Ле-Шательє - Брауна не є настільки всеосяжним, як другий початок

термодинаміки. Зокрема, він не дозволяє висловлювати ніяких кількісних висновків про поведінку системи. Необхідною умовою застосування принципу Ле-Шательє - Брауна є наявність стійкої рівноваги, з якої система виводиться зовнішнім впливом. Він не застосовується до процесів, що переводять систему в більш стійкий стан, наприклад, до вибухів.

Принцип Ле-Шательє - Брауна був сформульований як узагальнення знаменитого і всім добре відомого електродинамічного правила Ленца, що визначає напрям індукційного струму: *якщо система знаходиться в стійкій рівновазі, то всякий процес, викликаний в ній зовнішнім впливом або іншим первинним процесом, завжди буває спрямований таким чином, що він прагне знищити зміни, зроблені зовнішнім впливом або первинним процесом.*

2.15.3. Розчинність тіл

Всяка речовина розчиняється в іншій речовині далеко не завжди в необмеженій кількості. Розчин, що містить найбільшу кількість речовини, яка може в ньому розчинитися, називається *насиченим*. Якщо до насиченого розчину додати нову порцію речовини, що розчиняє, то концентрація розчину мінятися не буде. Виникає термодинамічна або статистична рівновага між розчиняємим тілом і розчином: число молекул, що переходять від тіла в розчин, в середньому буде дорівнювати числу молекул, що повертаються назад з розчину до тіла.

Розчин називається *ненасиченим*, якщо концентрація розчиненої речовини в ньому менше, ніж в насиченому розчині. Якщо ж вона більше, то розчин називається *пересиченим*. Пересичені розчини метастабільні. У присутності зародків речовина розчиняється, надлишок її випадає з розчину, і розчин стає насиченим. Концентрація насиченого розчину може служити мірою здатності аналізованої речовини розчинятися в розчиннику. Її називають *розчинністю*.

Розчинність залежить від температури. Енергію, витрачену на розчинення, називають *теплотою розчинення*. Після роз'єднання молекул речовини, що розчиняється, сили тяжіння між молекулами розчиненої речовини і розчинника можуть бути значними, що призводить до утворення комплексів молекул. При цьому за рахунок роботи сил тяжіння внутрішня енергія збільшується і відбувається

нагрівання. Якщо збільшення внутрішньої енергії при утворенні комплексів перевищує зменшення внутрішньої енергії за рахунок роз'єднання молекул розчиненої речовини, то підсумок процесу розчинення зводиться до нагрівання при розчиненні. Теплоту, що виділяється при цьому, також називають *теплотою розчинення*.

Розчини, у яких теплота розчинення дорівнює нулю, називають *ідеальними розчинами*. Це означає, що взаємодія між молекулами розчиненої речовини і розчинника таке ж, як і між молекулами розчинника. Ідеальними можна вважати і будь-які розчини з малою концентрацією розчиненого речовини.

Розглянемо рівноважну систему, що складається з насиченого розчину і речовини, що межує з ним. Якщо її нагріти, то рівновага порушиться. Згідно з принципом Ле-Шательє - Брауна для відновлення рівноваги в системі повинні початися процеси, які прагнуть зменшити це нагрівання. Звідси випливає, що якщо тепловий ефект при розчиненні позитивний, то частина розчиненої речовини повинна випасти з розчину. Якщо ж він негативний, то деяка кількість речовини повинен перейти в розчин. Таким чином, для речовин з позитивним тепловим ефектом розчинність убиває з температурою, а для речовин з негативним тепловим ефектом - зростає.

При розчиненні газів в рідинах і твердих тілах молекули переходять з газу, де вони слабо взаємодіють один з одним, в розчин, де вони піддаються сильному тяжінню з боку молекул розчинника. З цим пов'язана та обставина, що в переважній більшості випадків тепловий ефект при розчиненні газів позитивний. Значить, розчинність газів (при постійному тиску) повинна спадати з підвищенням температури.

Аналогічні міркування застосовні до розподілу розчиненої речовини між двома розчинниками, які не змішуються. Так у разі слабких розчинів відношення рівноважних концентрацій розчиненої речовини в двох змішуються розчинниках не залежить від концентрації, а є функцією тільки температури і тиску. Це положення називається *законом розподілу*.

Гази в звичайних умовах здатні змішуватися між собою в будь-яких пропорціях. Іншими словами, кожен газ має необмежену розчинність в іншому газі. Не існує насичених розчинів одного газу в іншому. Тільки при дуже високих тисках, коли густина газів наближається до густини відповідних рідин, спостерігаються в

деяких випадках відступи від цього правила: суміші газів поділяються на дві фази різного складу.

2.15.4. Закон Рауля

Франсуа Марі Рауль у 1870-х роках провів серію експериментів, що призвели до закону, названому згодом його ім'ям, справедливого для ідеальних розчинів. З умови динамічної рівноваги на межі рідина - насичений пар випливає, що тиск насичених парів над ідеальним розчином повинний бути менше, ніж тиск насичених парів над чистим розчинником. Відносне зниження тиску пари пропорційно концентрації розчину і не залежить від хімічної природи розчиненої речовини. Закон Рауля можна виразити наступною формулою

$$p_1 = p_1^0 \frac{v_1}{v_1 + v_2} \quad (15.3)$$

Тут p_1 - тиск насичених парів над розчином, p_1^0 - тиск насичених парів над чистим розчинником, v_1 - кількість молей молекул розчинника, v_2 - кількість молей молекул розчиненої речовини.

Введення в розчинник молекул розчиненої речовини підвищує температуру кипіння і знижує температуру твердіння розчинів на величину, пропорційну концентрації розчину і не залежить від хімічної природи розчиненої речовини.

2.15.5. Закон Генрі

Рівноважна концентрація слабкого розчину, що виникає при розчиненні газу в рідині або твердому тілі, пропорційна тиску газу і не залежить від природи газу і конденсованої фази. Це суть закону розчинності Генрі. Він справедливий для ідеальних розчинів при відсутності хеміадсорбції - хімічної взаємодії між газом і твердим розчинником. Закон Генрі можна виразити наступною формулою:

$$q = \alpha p \quad (15.4)$$

Тут q - концентрація розчинених насичених парів, p - тиск насичених парів розчиненої речовини.

2.15.6. Осмос. Осмотичний тиск

Явище проникнення розчинника в розчин через пористу перегородку (мембрану), непроникну для розчиненої речовини і відокремлює розчин від чистого розчинника, називається *осмосом*.

Через мембрану здійснюється обмін молекулами розчинника, що знаходиться по обидві сторони від мембрани. В результаті переважного руху молекул розчинника в бік розчину рівновагу в системі розчинник - мембрана - розчин підтримується за

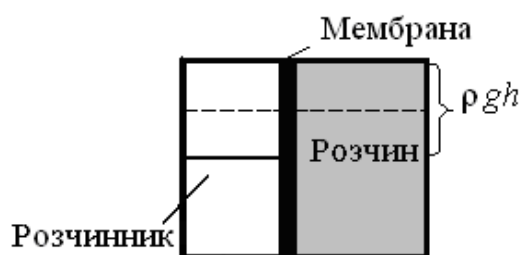


Рис. 2.15.1. Явище осмосу

допомогою осмотичного тиску (рис.15.1), який здійснюється розчиненою речовиною в розчині. Осмотичний тиск можна виміряти за допомогою гідростатичного тиску розчину, оскільки підйом рівня рідини розчину буде відбуватися до тих пір, поки гідростатичний тиск, що дорівнює ρgh , не опиниться рівним осмотичному.

Це явище було відкрито в середині 19 століття. Я.Х. Вант-Гофф вивів просте рівняння, аналогічне рівнянню стану ідеального газу:

$$p_{oc} V = \nu RT \quad (15.5)$$

Тут p_{oc} - осмотичний тиск, V - об'єм розчину, ν - число молей молекул розчиненої речовини, R - універсальна газова стала, T - абсолютна температура. Осмотичний тиск не залежить від виду мембрани або від роду розчинника. Закон Вант-Гоффа не справедливий для електролітів.

Осмотичний тиск відіграє велику роль у житті тварин і рослин. Розрізняють статичний і динамічний методи вимірювання осмотичного тиску. Статичний метод заснований на вимірюванні надлишкового гідростатичного тиску по висоті стовпа рідини розчину. Динамічний метод полягає у вимірюванні швидкостей всмоктування і витискування розчинника з осмотичної комірки при

різних значеннях надлишкового тиску. В якості мембран зазвичай застосовують плівку з целофану, природних і синтетичних полімерів, пористі керамічні і скляні перегородки. Осмотичний тиск може досягати значної величини. Наприклад, 10% -ий розчин цукру при кімнатній температурі має осмотичний тиск близько 10МПа. Осмотичний тиск морської води становить 0,27 МПа.

Завдання для самоконтролю

1. Гумова куля, наповнена спиртом, при зануренні у воду збільшує свої розміри, а наповнена водою при зануренні в спирт зменшує свої розміри. Як пояснити ці спостереження?
2. Глиняна посудина, оброблена особливим чином, наповнена розчином цукру. Посудина закрита пробкою, в яку вставлена довга вертикальна трубка. При зануренні судини в чисту воду в трубці з'являється рідина. Яка особливість стінок посудини, що приводить до збільшення тиску всередині судини? Чи буде висота підйому рівня рідини в трубці пропорційна часу спостереження?
3. Для іспиту бетону на морозостійкість використовують розчини NaCl. Для готування соляного розчину змішали 10%-ий і 25%-ий розчини соли й одержали 3 кг 20%- го розчину. Яку кількість кожного розчину в кілограмах було використано?
Відповідь: 1 кг і 2 кг відповідно.
4. 1 мл 25% розчину полімерно-в'язучої речовини містить 0,458 грам розчиненого полімеру. Яка густина цього розчину?
Відповідь: 1,832г/мл.
5. Приготовлений 30% розчин добавки ПАР (поверхнево-активна речовина), який сприяє змочуванню поверхні зерен цементу. Цей розчин має густину 1,2 г/мл. Яка його молярна концентрація?
Відповідь: 5,71моль/л.
6. Судина місткістю 100 л розділена напівпроникною перегородкою на дві рівні частини. В одній половині судини знаходиться водень масою 2 г, в іншій - азот у кількості 1 моль. Визначити тиск по обидві сторони від перегородки, якщо вона може пропускати тільки водень. Температура в обох половинах однакова, не міняється і дорівнює 127°C.
Відповідь: $p_{\text{водень}} \approx 33 \cdot 10^{-3}$ Па, $p_{\text{водень} + \text{азот}} \approx 100 \cdot 10^{-3}$ Па

Додаток
Таблиця 1

Літери грецького алфавіту

Α,α-альфа	Ι,ι-йота	Ρ,ρ-ро
Β,β-бета	Κ,κ-капа	Σ,σ-сігма
Γ,γ-гама	Λ,λ-ланбдо	Τ,τ-тау
Δ,δ-дельта	Μ,μ-мю	Υ,υ-іпсілон

Ε,ε-епсидон	N,ν-ню	Φ,φ-фі
Z,ζ-дзета	Ξ,ξ-ксі	X,χ-хі
H,η-ета	O,ο-омікрон	Ψ,ψ-псі
Θ,θ-тета	Π,π-пі	Ω,ω-омега

Таблиця 2

Множники та префікси утворення кратних і часткових одиниць

Найменвання	Позначення	Множник	Найменування	Позначення	Множник
Пета	<i>P</i>	10^{15}	Деці	д	10^{-1}
Тера	<i>T</i>	10^{12}	Санті	с	10^{-2}
Гіга	<i>G</i>	10^9	Мілі	м	10^{-3}
Мега	<i>M</i>	10^6	Мікро	мк	10^{-6}
Кіло	к	10^3	Нано	н	10^{-9}
Гекто	г	10^2	Піко	п	10^{-12}
Дека	де	10^1	Фемто	ф	10^{-15}

Таблиця 3

Деякі фундаментальні фізичні величини (сталі)

№	Стала	Позначення	Числове значення
1	Стала тяжіння	<i>G, γ</i>	$6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
2	Швидкість світла у вакуумі	<i>c</i>	$2,9979 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
3	Стала Авогадро	<i>N_A</i>	$6,0220 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
4	Універсальна молярна газова стала	<i>R</i>	$8,3144 \cdot \text{Дж/ моль К}$
5	Стала Больцмана	<i>k</i>	$1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
6	Стала Фарадея	<i>F</i>	$9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$
7	Стала Планка	<i>h</i>	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
8	Елементарний заряд	<i>e</i>	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
9	Атомна одиниця маси	<i>a.o.m.</i>	$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
10	Маса електрона у стані спокою	<i>m_e</i>	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}; 5,49 \cdot 10^{-4} \text{ а.о.м.}$
11	Маса протона у стані спокою	<i>m_p</i>	$1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}; 1,00728 \text{ а.о.м.}$
12	Маса нейтрона у стані спокою	<i>m_n</i>	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}; 1,00867 \text{ а.о.м.}$

Таблиця 4

Основні астрофізичні величини (сталі)

№	Стала	Позначення	Числове значення
1	Маса Землі	<i>M_⊕, M_З</i>	$5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
2	Радіус Землі		
	середній		6371030 м

	екваторіальний	$R_{\oplus}, R_3$	6378164 м
	полярний		6356799 м
3	Прискорення вільного падіння	g	
	нормальне (стандартне)		9,8066 м/с ²
	на екваторі		9,7804 м/с ²
	на полюсі		9,8323 м/с ²
	На широті 45°		9,8061 м/с ²
4	Маса Сонця	$M_{\odot}, M_C$	$1,989 \cdot 10^{30}$ кг
5	Радіус Сонця	$R_{\odot}, R_C$	$6,9599 \cdot 10^8$ км
6	Маса Місяця	M_M	$7,357 \cdot 10^{22}$ кг
7	Середня відстань між Землею та Місяцем	$R_{ЗМ}$	384400 км
8	Парсек	$пк$	$3,085678 \cdot 10^{16}$ м
9	Світловий рік	$св. рік$	$9,460530 \cdot 10^{15}$ м
10	Середня швидкість руху Землі по орбіті	$V_{орб}$	$3 \cdot 10^4$ м/с

Таблиця 5

Густина ρ газів за нормальних умов ($T=273$ К або $t^{\circ}\text{C}=0^{\circ}\text{C}$ та тиску $P=101,3$ кПа або 760 мм рт. ст.)

№	Вид газу	$\rho, \text{кг/м}^3$	Вид газу	$\rho, \text{кг/м}^3$
1	Азот	1,25	Кисень	1,47
2	Водень	0,09	Окис вуглецю	1,25
3	Водяна пара (100°C)	0,88	Повітря	2,2
4	Гелій	0,179	Пропан	2,2

Таблиця 6

Густина ρ рідини (при $t^{\circ}\text{C}=20^{\circ}\text{C}$ або $T=293$ К)

№	Вид рідини	$\rho, \text{кг/дм}^3$	Вид рідини	$\rho, \text{кг/дм}^3$
1	Ацетон	0,8	Дизельне пальне	1,0
2	Бензин(легкий)	0,7	Морська вода	1,02-1,04
3	Вода	1,0	Ртуть	13,5

4	Гас	0,8	Сірчана кислота	1,8-1,85
5	Гліцерин	1,26	Спирт	0,79-0,83

Таблиця 7

Густина ρ твердих речовин

№	Речовина	$\rho, \text{кг/дм}^3$	Речовина	$\rho, \text{кг/дм}^3$
1	Алюміній	2,71	Латунь	8,6
2	Бетон	2,2	Мідь	8,9
3	Граніт	2,8	Піщаник	2,4
4	Дуб	0,8	Плексиглас	1,2
5	Залізо	7,8	Свинець	11,34
6	Золото	19,3	Сосна	0,5
7	Кам'яне вугілля	1,4	Срібло	10,5
8	Крига	0,9	Цинк	7,1

Таблиця 8

Швидкість звуку v у різних середовищах

№	Середовище	$v, \text{м/с}$	Середовище	$v, \text{м/с}$
1	Водень(0°)	1286	Дерево	4000
2	Вода(0°)	1485	Свинець	1300
3	Граніт	3950	Скло	5000
4	Гума	54	Цегла	3500

Таблиця 9

Коефіцієнт поверхневого натягу σ рідини (при 20°C)

Рідина	$\sigma, \text{мН/м}$	Рідина	$\sigma, \text{мН/м}$
Ацетон	23,3	Розчин мила	40
Вода	72,7	Ртуть	465...490
Гліцерин	65,7	Спирт	22...23
Гас	28,9	Трансформаторне масло	36...40