ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕР-СИТЕТ

Кафедра фізики

Гаврилова Т.В., Єрьоміна О.Ф.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З ФІЗИКИ

Розділ І. «Механіка»
Розділ П. «Молекулярна фізика і термодинаміка»

Харків 2019

ВСТУП

Фізика – наука, що вивчає найбільш прості, але, поряд с тим, найбільш загальні закономірності явищ природи, властивості і будову матерії і закони її руху.

Із визначення фізики як науки випливає *фундаментальність* вивчуваних фізикою законів, тобто ствердження, що без фізики не можуть існувати інші природничі і технічні науки. У той же час ці закони є *елементарними,* тому фізика не може витіснити інші науки.

Задачею фізики являється створення опитним шляхом у нашій свідомості такої фізичної картини навколишнього світу, яка найбільш повно відтворювала б властивості цього світу. *Фізика є наукою опитною*. Усі фізичні теорії спираються на опит, і тільки опит є критерієм їх правильності.

Фізичний опит або експеримент відрізняється від спостереження тим, що при експерименті усі виміри можуть бути проведені неодноразово при обліку всіх впливів на досліджувану систему. При цьому підвищення точності вимірів поширює можливості пізнання світу і тому є дуже важливою науковою и технічною проблемою.

На основі результатів фізичних експериментів формулюються *фізичні закони*, тобто чисельні співвідношення між *фізичними величинами*, які являються мірою той чи іншої властивості природного явища.

Виміряти фізичну величину – це означає порівняти її з однорідною величиною, умовно прийнятою за одиницю вимірювання. Сукупність незалежно обраних основних одиниць і утворених за їх допомогою похідних одиниць називається *системою одиниць.* Згідно рішенню XI Генеральної конференції по мірам и вагам у 1960 році була прийнята Міжнародна система одиниць (скорочено СІ), до *основних одиниць* якої належать: м (метр, одиниця довжини l або s), кг (кілограм, одиниця маси m), с (секунда, одиниця часу t), моль (одиниця кількості речовини ν), К (кельвін, одиниця температури T), А (ампер, одиниця сили струму I), кд (кандела, одиниця сили світла $I_{св}$). *Додаткові одиниці*: рад (радіан, одиниця плоского кута α або φ), ср (стерадіан, одиниця тілесного кута Ω).

Одиниці всіх інших фізичних величин утворюються шляхом математичних дій над основними і додатковими одиницями з використанням визначальних формулами величин.

РОЗДІЛ 1
ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Лекція 1. КІНЕМАТИКА

План заняття

1.Основні поняття кінематики
2. Кінематика поступального руху. Вектор переміщення. Шлях
3. Швидкість
4. Прискорення
5. Обертальний рух

1.1.1. Основні поняття кінематики

Механіка - розділ фізики, в якому вивчається механічний рух.

Механічний рух - зміна положення даного тіла (або його частин) відносно інших тіл.

Основною задачею механіки є визначення положення тіла у даний момент часу із заданими початковими умовами.

Механіка має два розділи; кінематика і динаміка.

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчаються механічні рухи тіл в часі і не розглядаються які-небудь впливи на ці тіла інших тіл або полів.

В розділі механіка застосовується дві моделі. *Матеріальною точкою* називається тіло, розмірами якого в даній задачі можна знехтувати. *Абсолютно тверде тіло* (тверде тіло) – тіло, що ні при яких умовах не може деформуватися, й відстань між двома точками цього тіла залишається постійною.

Будь-який рух твердого тіла можна представити як комбінацію поступального й обертового рухів.

Поступальний рух твердого тіла – рух, при якому будь-яка пряма, жорстко пов'язана з тілом, що рухається, залишається паралельною своєму первісному положенню. Для опису такого руху достатньо простежити за рухом однієї точки.

Обертальний рух твердого тіла – рух, при якому всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній і тій же прямій, називаній *віссю обертання*. На відміну від поступального руху, різні точки твердого тіла рухаються по-різному, тому його обертальний рух не можна охарактеризувати рухом якоїсь однієї точки.

Рух тіла відбувається в просторі й у часі, які є формами існування матерії. *Простір* характеризується такими властивостями, як однорідність, ізотропність, тривимірність, а *рух* має властивості однорідності і односпрямованость.

Для визначення положення тіла у даний момент часу *вводиться система відліку,* тобто сукупність тіла відліку і системи координат, яка повинна бути забезпечена годинником, що відлічує проміжки часу від довільно обраного початкового моменту часу. Тіло, по відношенню до якого розглядається даний механічний рух, називається *тілом відліку*.

1.1.2. Кінематика поступального руху. Вектор переміщення. Шлях

Положення точки в просторі:

а) визначається координатами (3-ма, 2 - ма або однією в залежності від виду руху);

б) може бути задане радіусом - вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \tag{1.1.1}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори напрямів (орти); *x, y, z* — координати точки.

Вектором переміщення $\Delta\vec{r}$ матеріальної точки називається спрямований відрізок прямої, що сполучає початкове положення тіла з його кінцевим положенням, тобто переміщення точки характеризується напрямком, в якому вона рухається.

Вектор переміщення - різниця радіус-векторів, що характеризують кінцеве і початкове положення точки, яка рухається в протягом певного проміжку часу (рис. 1.1.1).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{1.1.2}$$

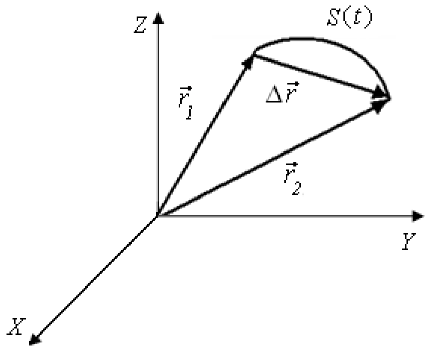


Рис. 1.1.1. **Шлях і вектор переміщення матеріальної точки**

Траєкторією називається лінія, по якій рухається точка. Траєкторія руху матеріальної точки задається рівняннями руху:

у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$;

в скалярній формі 1) $x = f_1(t)$; 2) $y = f_2(t)$; 3) $z = f_3(t)$.

По виду траєкторії розрізняють *прямолінійний* рух і *криволінійний*.

Довжина траєкторії точки являє собою величину *пройденого шляху S*. Шлях $S\ (t)$ - скалярна величина.

1.1.3. Швидкість

Середньою швидкістю за проміжок часу називається физична величина, що дорівнює відношенню вектора переміщення точки до тривалості проміжку часу

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.1.3}$$

де $\Delta \vec{r}$ - переміщення матеріальної точки за інтервал часу Δt.

Середня шляхова швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{1.1.4}$$

де ΔS - шлях, пройдений точкою за інтервал часу Δt.

Миттєва швидкість – це ліміт, до якого наближається середня швидкість, якщо Δt наближається до нуля, тобто похідна від радіус - вектора за часом.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\, v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z, \tag{1.1.5}$$

де $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ - проекції швидкості на осі координат.

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \tag{1.1.6}$$

Одиниця виміру швидкості – м/с.

1.1.4. Прискорення

Похідну швидкості за часом, яка є другою похідною за часом від радіус-вектора, називають *миттєвим прискоренням* точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \qquad (1.1.7)$$

де $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$, $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ - проекції прискорення $\vec{a}$ на осі координат. Вектор прискорення $\vec{a}$ спрямований вздовж вектора прирощення скорости $d\vec{v}$.

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (1.1.8)$$

Одиниця виміру прискорення – м/с^2.

Роздивимось деякі приклади кінематичних рівнянь, тобто залежностей координати руху від часу.

При *рівномірному прямолінійному* русі $\vec{v}$ = const і a = 0.

Кинематическое рівняння рівномірного руху матеріальної точки вздовж осі x

$$x = x_0 + vt, \qquad (1.1.9)$$

де x_0 – початкова координата; t – час.

Нехай тіло рухається прямолінійно з постійним прискоренням a. Цей важливий випадок, що часто зустрічається, носить назву *рівноприскореного* або *рівносповільненого* руху (залежно від знака прискорення). Кінематичне рівняння рівнозмінного руху (a = const) уздовж осі x

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (1.1.10)$$

де v_0 – початкова швидкість; t – час.

Швидкість точки при рівнозмінному русі

$$v = v_0 + at. \qquad (1.1.11)$$

При криволінійному русі прискорення можна представити як суму нормальної і тангенціальної складових (рис. 1.1.2).

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \tag{1.1.12}$$

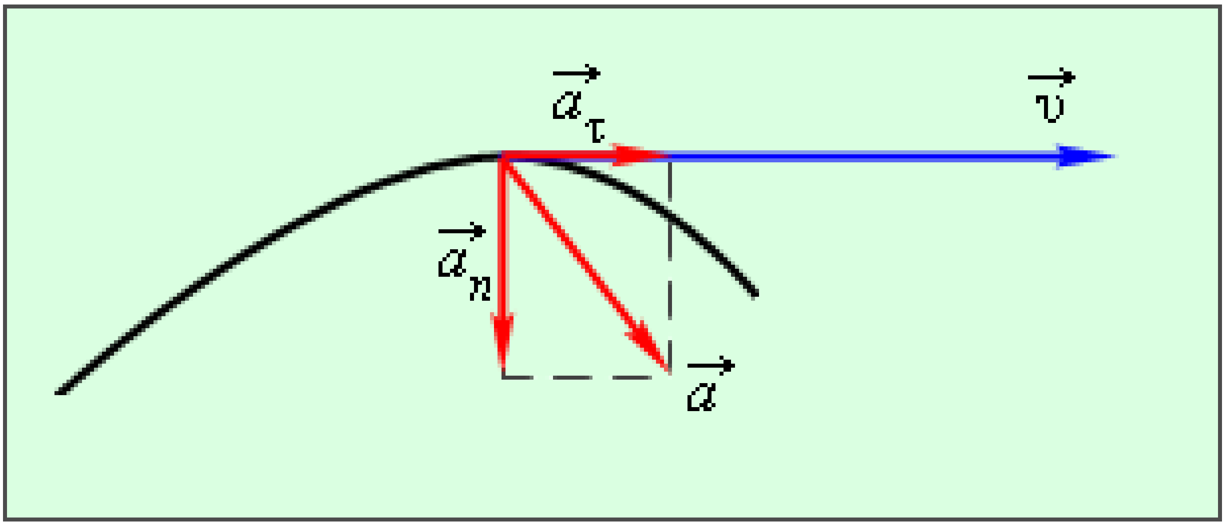


Рис. 1.1.2. **Зв'язок повного $\vec{a}$, нормального $\vec{a}_n$ и тангенціального $\vec{a}_\tau$ прискорень**

Модулі цих прискорень

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_\tau^{\ 2}}, \tag{1.1.13}$$

де R – радіус кривизни в даній точці траєкторії.

1.1.5. Обертальний рух

Рух точки по колу є складовою частиною обертального руху. Поряд з вектором переміщення в цьому випадку зручно розглядати *вектор елементарного повороту тіла* $d\vec{\varphi}$ (або кутове переміщення). Вектор $d\vec{\varphi}$ має бути спрямованим уздовж осі обертання так, щоб з його кінця обертання було видно рух тела проти напрямку руху годинникової стрілки (*правило правого гвинта*). Напрямок вектора повороту тіла пов'язується з напрямом обертання, тобто, $d\vec{\varphi}$ є не істинним вектором, а псевдовектором. Вимірюється кут повороту в радіанах.

Для характеристики швидкості і напряму обертання служить кутова швидкість. *Кутовою швидкістю* називають вектор $\vec{\omega}$, який чисельно дорівнює першій похідній від кута повороту за часом

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.1.14}$$

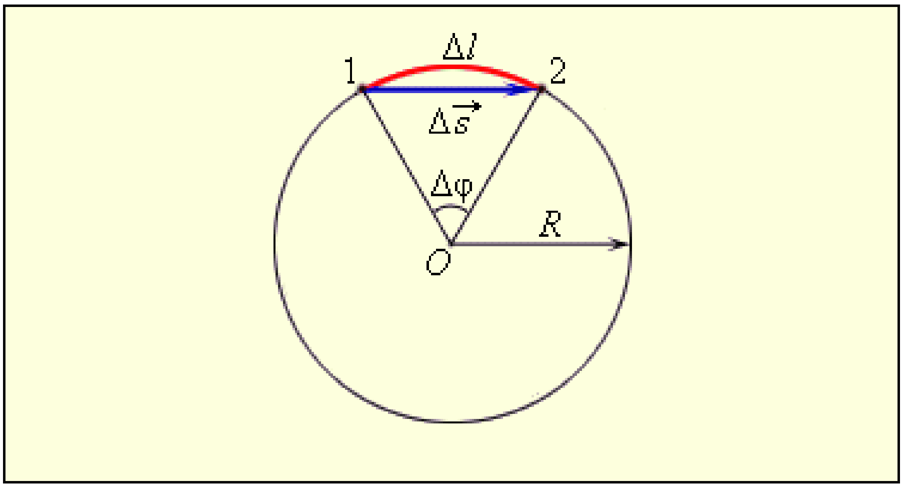
Кутова швидкість $\vec{\omega}$ спрямована уздовж осі обертання у напрямку, що визначається за правилом правого гвинта, та є псевдовектором (рис. 1.1.3).

Аксіальні вектори $d\vec{\varphi}$ і $\vec{\omega}$ не мають певних точок докладання, вони можуть відкладатися з будь-якої точки осі обертання.

Модуль кутової швидкісті визначається як

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.1.15}$$

Одиниця виміру кутової швидкості - радиан в секунду (рад/с).



Довжина дуги dl пов'язана з кутом повороту співвідношенням

$$dl = R \cdot d\varphi, \tag{1.1.16}$$

де R – радіус обертання.

Обертання з постійною за величиною кутовою швидкістю ω зветься *рівномірним*. Час, за який точка, що рівномірно обертається, робить повний оборот, тобто повертається на кут 2π, називається *періодом руху* T

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.1.17}$$

Частотою обертання називається величина, яка дорівнює числу обертів, що здійснює тіло за одиницю часу:

$$n=N/t, \tag{1.1.18}$$

або

$$n=1/T, \tag{1.1.19}$$

де N – число оборотів, що здійснюються тілом за час t; T – період обертання.

Для характеристики швидкості зміни вектора кутової швидкості при нерівномірному обертанні вводиться вектор кутового прискорення. *Кутове прискорення* - це похідна за часом від вектора кутової швидкості (відповідно друга похідна за часом від кута повороту)

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{1.1.20}$$

або

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{1.1.21}$$

Одиниця виміру кутового прискорення - рад/с^2.

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі, то вектор $\vec{\varepsilon}$ спрямований в ту ж сторону, що і $\vec{\omega}$, при прискореному обертанні ($\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$), і в протилежну - при уповільненому обертанні ($\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$).

Кинематичне рівняння рівнозмінного обертання (ε = const)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1.1.22}$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість; t - час

Кутова швидкість тіла при рівнозмінному обертанні

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{1.1.23}$$

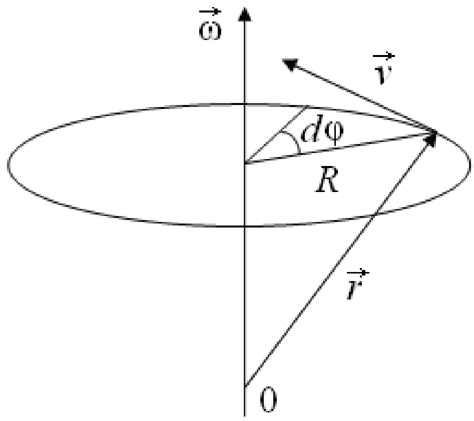


Рис. 1.1.3. **Зв'язок між лінійними і кутовими характеристиками руху**

Зв'язок між лінійними і кутовими величинами (рис.1.1.3), що характерізують обертання твердого тіла, виражається такими формулами:

шлях, пройдений довільною точкою тіла по дузі кола радіусом R, при повороті тіла на кут φ

$$S = \varphi R; \tag{1.1.24}$$

лінійна швидкість точки

$$v = \omega R, \quad \vec{v} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]; \tag{1.1.25}$$

тангенціальне прискорення точки

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad \vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}\vec{r}\right]; \tag{1.1.26}$$

нормальне прискорення точки

$$a_n = \omega^2 R, \quad \vec{a}_n = -\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right]. \tag{1.1.27}$$

Завдання для самопідготовки

1. Дайте визначення поняттям трєкторії і шляху.

2. Що таке вктор переміщення?

3. Порівняйте визначення характеристик поступального і обертального рухів.

4. Які види прискорень ви знаєте?

5. Дві прямі дороги перетинаються під кутом $\alpha = 60°$. Від перехресть по них видаляються машини: одна зі швидкістю $v_1 = 60$ км/год, інша зі швидкістю $v_2 = 80$ км/год. Визначити швидкості v' і v'', з которимі одна машина віддаляється від іншої. Перехрестя машини пройшли одночасно.

Відповідь: $v' = 122$ км/год; $v'' = 72{,}2$ км/год.

6. Рух матеріальної точки задано рівнянням $\vec{r}(t) = \vec{i}\left(A + Bt^2\right) + \vec{j}Ct$, де $A = 10$ м, $B = -5$ м / с 2, $C = 10$ м/с. Знайти вирази для швидкості і прискорення. Для моменту часу $t = 1$с обчислити: 1) модуль швидкості; 2) модуль прискорення; 3) модуль тангенціального прискорення; 4) модуль нормального прискорення.

Відповідь: 1) 14,1 м/с; 2)-10 м/с^2; 3) 7,07 м/с^2; 4) 7,07 м/с^2.

7. Знайти радіус колеса, що рівномірно обертається, якщо лінійна швидкість точки, що лежить на ободі, в 2,5 рази більше лінійної швидкості точки, що лежить на 5 см ближче до осі колеса.

Відповідь: 8,33 см

8. Колесо автомашини обертається рівноприскорено. Зробивши $N = 50$ повних обертів, воно змінило частоту обертання від $n_1 = 4$ с$^{-1}$ до $n_2 = 6$ с$^{-1}$. Визначити кутове прискорення ε і час обертання Δt колеса.

Відповідь: 1,26 рад/с^2, 10с.

9. Автомобіль рухається по заокругленню шосе, що має радіус кривизни R=50 м. Рівняння руху автомобіля має вигляд $S(t)$=A+Bt+Ct^2, де A=10 м, B=10 м/с, C= - 0,5 м/с^2. Знайти швидкість v автомобіля, його тангенціальне a_τ, нормальне a_n. і повне a прискорення в момент часу $t = 5$ с.

Відповідь: v=5м/с; a_τ= - 1 м/с^2; a_n.=0,5 м/с^2; a=1,12 м/с^2.

Лекція 2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І ТІЛА, ЩО РУХАЄТЬСЯ ПОСТУПАЛЬНО

План заняття

1. Закони Ньютона
2. Імпульс тіла
3. Види взаємодій. Гравітаційне тяжіння
4. Пружні сили
5. Сили тертя

2.1. Закони Ньютона

Динаміка - це розділ механіки, в якому вивчаються причини появи прискорення і розглядаються способи його обчислення.

Закони динаміки були відкриті 1687 р великим вченим І.Ньютоном (1642 – 1727). Сформульовані ним закону динаміки лежать в основі так званої класичної механіки. Закони Ньютона слід розглядати як узагальнення дослідних фактів. Висновки класичної механіки справедливі тільки при русі тіл з малими швидкостями, значно меншими швидкості світла c.

Основне завдання динаміки - визначення положення тіл в певний момент часу за відомими початковим положенням тіла, початковий швидкості і силам, діючим на тіло.

Інерція - явище збереження стану руху або спокою при відсутності зовнішніх впливів.

Перший закон Ньютона: Будь-яка матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху (по відношенню до інерціальній системі відліку) до тих пір, поки зовнішні впливи не змінять цього стану.

Інерціальні системи відліку - системи відліку, щодо яких тіло при компенсації зовнішніх впливів рухається рівномірно і прямолінійно (наприклад, геоцентрична і геліоцентрична системи).

Маса - це позитивна скалярна фізична величина, одна з основних характеристик матерії, визначає її інерційні та гравітаційні властивості. При однаковому впливі з боку оточуючих тіл одне тіло може швидко змінювати свою швидкість, а інше в тих же умовах - значно повільніше. Прийнято говорити, що друге з цих двох тіл має більшу інертність, або, іншими словами, друге тіло має більшу масу.

Маса тіла є адитивною величиною, тобто маса тіла або системи тіл складається з суми окремих частин системи. Маса не залежить від положення тіла у просторі і швидкості тіла. У Міжнародній системі одиниць (СІ) маса тіла вимірюється в *кілограмах* (кг).

Сила - це векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, в результаті якого тіло набуває прискорення або змінює форму і розміри. Сила $\vec{F}$ повністю задана, якщо вказані її модуль F, направління в просторі і точка докладання. Пряма, уздовж якої спрямована сила, називається лінією дії сили.

В загальному випадку сила залежить від положення тіла у просторі і від швидкості тіла. Сили підкоряються *принципу суперпозиції*.

Якщо на дане тіло діє одночасно кілька сил, то їх дію тіло можна замінити дією однієї сили - рівнодіючої

$$\vec{F}_{\text{рівн}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \,. \tag{1.2.1}$$

Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона).

Рівнодіюча сил, прикладених до тіла, дорівнює добутку маси тіла на надане йому прискорення.

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \,, \tag{1.2.2}$$

де $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ - геометрична сума сил, що діють на матеріальну точку; m - маса, $\vec{a}$ - прискорення; N - число сил, діючих на точку;

в координатній формі

$$ma_x = \sum_{i=1}^{N} F_{xi} \,; ma_y = \sum_{i=1}^{N} F_{yi} \,; \; ma_z = \sum_{i=1}^{N} F_{zi} \,, \tag{1.2.3}$$

де під знаком суми стоять проекції сил на відповідні осі координат.

Напрямок прискорення завжди збігається з напрямком рівнодійної сили.

Якщо векторна сума сил, що діють на тіло, дорівнює нулю, тіло або покоїться, або рухається рівномірно і прямолінійно.

Сила в Міжнародній системі одиниць вимірюється в *ньютонах* (Н). Сила в 1 Н надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с^2.

Третій закон Ньютона. Тіла діють один на одного з силами, спрямованими уздовж однієї і тієї ж прямої, рівними за абсолютним значенням і протилежними за напрямком. Сили прикладені до різних тіл і мають одну природу (рис. 1.2.1).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (1.2.4)$$

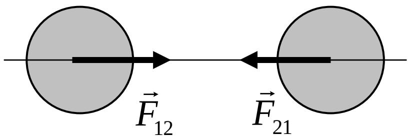
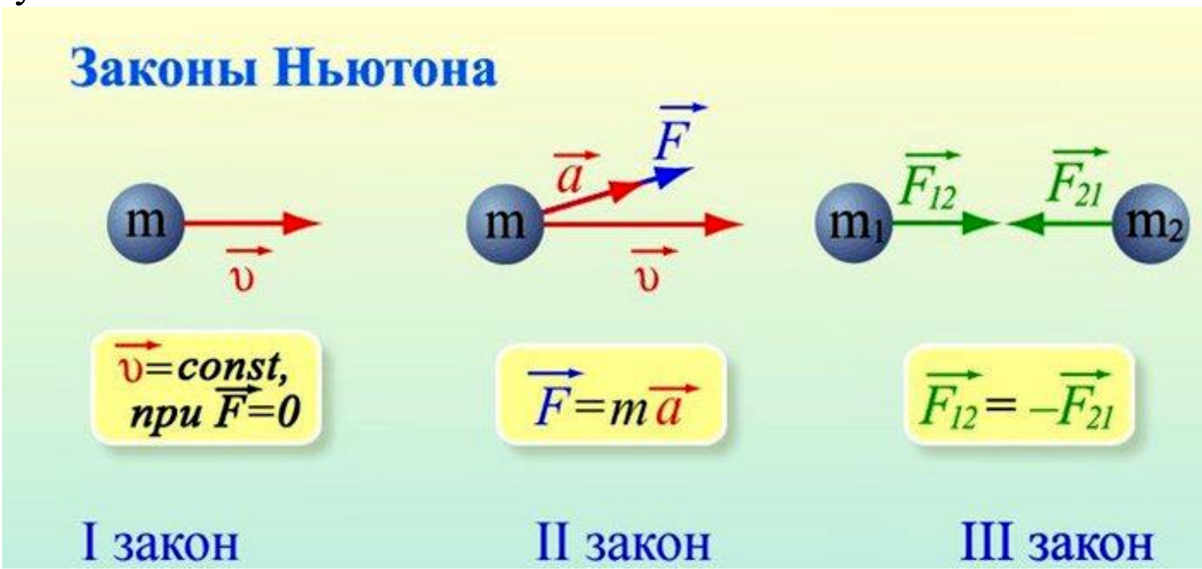


Рис. 1.2.1. **Сили при взаємодії двох тіл**

Закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах відліку.



1.2.2. Імпульс тіла

Імпульс (кількість руху) тіла – векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість

$$\vec{p} = m\vec{v}. \qquad (1.2.5)$$

Імпульс тіла є являється адитивною величиною. Напрямок вектора імпульсу збігається з напрямком вектора швидкості. Одиниця виміру імпульсу - кг·м/с.

Закон збереження імпульсу.

Геометрична сума імпульсів тіл, що складають замкнуту систему, залишається постійною при будь-яких взаємодіях тіл цієї системи між собою

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const} \qquad (1.2.8)$$

або $$\sum_{i=1}^{N} m\vec{v}_i = \text{const} \qquad (1.2.9)$$

де N - число матеріальних точок (або тіл), що входять до системи.

Замкнута система - система тіл, для якої рівнодіюча зовнішніх сил дорівнює нулю.

Закон збереження імпульсу є наслідком *однорідности простору:* при паралельному перенесенні у просторі замкнутої системи тіл як цілого її фізичні властивості не змінюються (не залежать від вибору положення початку координат інерціальної системи відліку).

Можна доказати, що із закону збереження імпульсу виводяться три закони Ньютона.

Так, рівняння руху матеріальної точки може бути представлено у вигляді

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad (1.2.6)$$

або $$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t\,, \qquad (1.2.7)$$

де $\vec{F}\Delta t$ – імпульс сили, тобто добуток сили на час її дії.

Зміна кількості руху пропорційна прикладеній рушійній силі і відбувається по напрямку тієї прямої, по якій ця сила діє.

На дії закону збереження імпульсу заснований реактивний рух. У ракеті при згорянні палива гази, нагріті до високої температури, викидаються з сопла з великою швидкістю u щодо ракети. Позначимо масу викинутих газів через m, а масу ракети після витікання газів через M. Тоді для замкнутої системи «ракета + гази» на підставі закону збереження імпульсу можна записати

$$V = -\frac{m}{M}u\,, \qquad (1.2.10)$$

де V – швидкість ракети після витікання газів.

У даному випадку передбачається, що початкова швидкість ракети дорівнювала нулю. Отримана формула для швидкості ракети справедлива лише за умови, що вся маса згорілого палива викидається з ракети одночасно. Насправді витікання відбувається поступово протягом всього часу прискореного руху ракети. Кожна наступна порція газу викидається з ракети, яка вже придбала деяку швидкість.

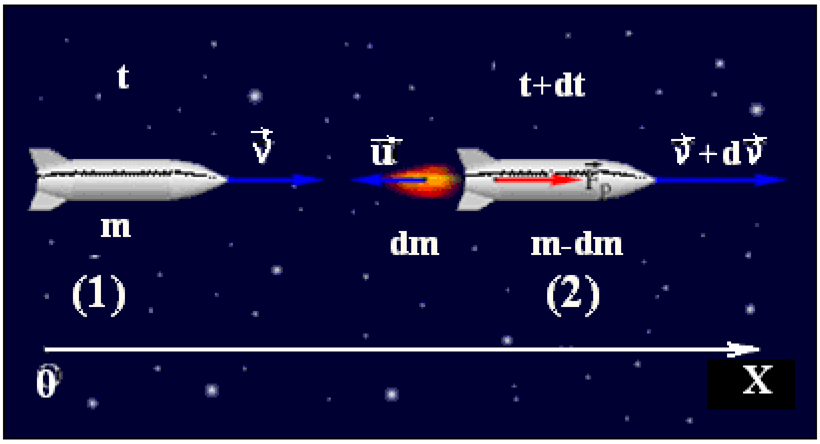


Рис. 1.2.2. **Реактивний рух**

Для отримання точної формули процес закінчення газу з сопла ракети потрібно розглянути більш детально. Нехай ракета в момент часу t має масу m і рухається зі швидкістю $\vec{v}$ (рис. 1.2.2).

Протягом малого проміжку часу dt з ракети буде викинута деяка порція газу з відносною швидкістю $\vec{u}$ Ракета в момент $t+dt$ буде мати швидкість $\vec{v}+d\vec{v}$, а її маса стане рівною $m+dm$, де $dm<0$. Маса викинутих газів буде, очевидно, дорівнювати $-dm > 0$. Швидкість газів в інерціальній системі OX дорівнюватиме $\vec{v}+d\vec{v}+\vec{u}$. Застосуємо закон збереження імпульсу. У момент часу $t+dt$ імпульс ракети дорівнює $(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})$, а імпульс газів, що випускаються, дорівнює $(-dm)(\vec{v}+d\vec{v}+\vec{u})$. У момент часу t імпульс всієї системи дорівнював $m\vec{v}$. Припускаючи, що система «ракета + гази» замкнена, можна записати:

$$m\vec{v}=(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})-dm(\vec{v}+d\vec{v}+\vec{u}). \qquad (1.2.11)$$

Розкриваючи дужки, отримаємо після скорочення

$$md\vec{v}=\vec{u}dm \qquad (1.2.12)$$

або

$$d\vec{v}=\frac{dm}{m}\vec{u}. \qquad (1.2.13)$$

За допомогою математичної операції інтегрування з цього співвідношення можна отримати формулу для кінцевої швидкості $\vec{v}$ ракети:

$$\vec{v} = \ln\frac{m_0}{m}\cdot\vec{u}\,, \qquad (1.2.14)$$

де $\frac{m_0}{m}$ - відношення початкової та кінцевої мас ракети. Ця формула називається *формулою Ціолковського*. З неї випливає, що кінцева швидкість ракети може бути більше, ніж швидкість витікання газів. Але це може бути досягнуто тільки шляхом витрати значної маси палива, що становить більшу частку первісної маси ракети.

Зауважимо, що в окремих випадках закон збереження імпульсу можна застосовувати і для реальних систем, які, зазвичай, є незамкненим. Наприклад, застосовувати закон збереження імпульсу незамкненої системи тільки на дану координатну вісь.

1.2.3. Види взаємодій. Гравітаційне тяжіння

Будь-який рух тіла визначається чотирма фундаментальними взаємодіями в міру зростання: гравітаційним; слабким; електромагнітним; сильним.

Усі механічні явища в макросвіті визначаються електромагнітними і гравітаційними взаємодіями.

Центральними називаються сили, які всюди спрямовані уздовж прямих, що проходять через одну і ту ж нерухому точку - центр сил, і залежать тільки від відстані до центру сил.

Як показує порівняння, гравітаційні сили є слабкіші з усіх фундаментальних взаємодій, однак вони мають властивості адитивності (сумуються) і досягають значних величин в космічному масштабі (тяжіння Місяця, будова Сонячної системи і т.п.). Разом з кулонівськими силами, які визначають взаємодію між електричними зарядами, гравітаційні сили являються *фундаментальними*.

Закон всесвітнього тяжіння, відкритий І.Ньютоном у 1667 році, має вигляд

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,, \qquad (1.2.15)$$

де F - сила взаємного тяжіння двох матеріальних точок; m_1 і m_2 - їх маси; r - відстань між точками; G - гравітаційна стала, яка чисельно дорівнює силі взаємодії двох матеріальних точок масою 1 кг кожна, що знаходяться на відстані 1 м одна від одної; $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

У написаній формі закон всесвітнього тяжіння можна також застосовувати до взаємодії сферичних тіл, маса яких розподілена сферично симетрично. У цьому випадку r є відстань між центрами мас сфер.

Маса тіла є не тільки мірою інертності тіла, але і мірою його гравітаційних взаємодій.

Сила тяжіння $F_{\text{Т}}$ - сила, що діє на тіло масою m, яке перебуває на відстані h від поверхні Землі

$$F_{\text{Т}} = G\frac{M_{3}m}{\left(R_{3}+h\right)^{2}} = mg\,, \tag{1.2.16}$$

де g - прискорення вільного падіння. (Без урахування обертання Землі та її сплюснутості біля полюсів при $h \ll R_3$ $g = 9{,}8$ м/с^2).

1.2.4. Пружні сили

Роздивимось деякі сили, які являються наслідками фундаментальних сил. К ним належать сили пружності, сили тертя, деякі інші.

При деформації тіла виникає сила, яка прагне відновити колишні розміри і форму тіла. Ця сила виникає внаслідок електромагнітної взаємодії між атомами і молекулами речовини. Її називають силою пружності.

Сила пружності - сила, що виникає при деформації тіла і спрямована протилежно напрямку зміщення частинок при деформації.

Під деформаціями ми розуміємо будь-які зміни розмірів і форми тіла. Вони бувають двох видів.

Пластичні деформації - такі деформації, які не зникають після припинення дії зовнішніх сил.

Пружні деформації - такі деформації, які зникають після припинення дії зовнішніх сил.

Найпростішим видом деформації є деформації розтягування і стиснення (рис. 1.2.3). Зовнішня сила $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{ï ð}}$.

При малих деформаціях ($|x| << l$) сила пружності пропорційна деформації тіла і спрямована в бік, протилежний напрямку переміщення частинок тіла при деформації

$$F_x = F_{пр} = -kx. \qquad (1.2.17)$$

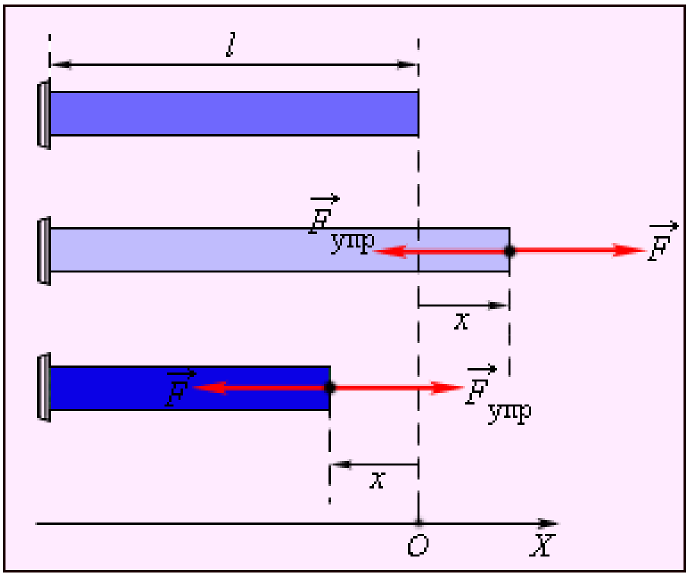


Рис. 1.2.3. **Деформація розтягування ($x > 0$) і стиснення ($x < 0$)**

Співвідношення (1.2.17) виражає експериментально встановлений *закон Гука*. Коефіцієнт k називається жорсткістю тіла. В СІ жорсткість вимірюється в ньютонах на метр (Н/м). Жорсткість залежить від форми і розмірів тіла, а також від його матеріалу.

Для деформації розтягування або стиснення закон Гука прийнято записувати в іншій формі. Введемо відносну деформацію при поздовжньому розтягуванні або стисненні тіла у вигляді

$$\varepsilon = \frac{x}{l_0}, \qquad (1.2.18)$$

де ε – відносне подовження (стиск); x – абсолютне подовження; l_0 – початкова довжина тіла.

Нормальна напруга характеризує дію сили на дане тіло

$$\sigma = \frac{F_{пр}}{S}, \qquad (1.2.19)$$

де $F_{пр}$ – пружна сила, перпендикулярна поперечному перерізу; S – площа цього перерізу, $[\sigma] = Н/м^2$.

Тоді закон Гука можна сформулювати так: відносна деформація ε пропорційна напрузі σ:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \tag{1.2.20}$$

Коефіцієнт E в цій формулі називається модулем Юнга. Модуль Юнга залежить тільки від властивостей матеріалу і не залежить від розмірів і форми тіла. Модуль Юнга різних матеріалів змінюється в широких межах. Для сталі, наприклад, $E \approx 2\cdot10^{11}$ Н/м^2, а для гуми $E \approx 2\cdot10^{6}$ Н/м^2, тобто на п'ять порядків менше.

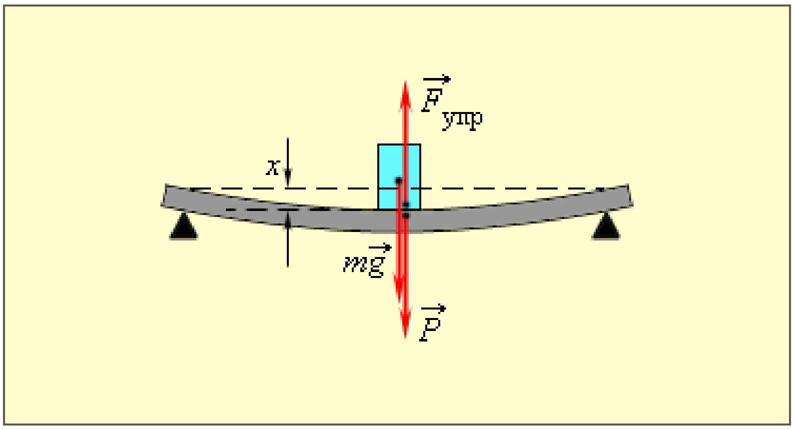


Рис. 1.2.4. **Деформація вигину**.

Закон Гука може бути узагальнений і на випадок більш складних деформацій. Наприклад, при деформації вигину пружна сила пропорційна прогину стрижня, кінці якого лежать на двох опорах (рис. 1.2.4).

Пружну силу, діючу на тіло з боку опори (або підвісу), називають силою реакції опори. При зіткненні тіл сила реакції опори спрямована перпендикулярно поверхні зіткнення. Тому її часто називають силою нормального тиску. Якщо тіло лежить на горизонтальному нерухомому столі, сила реакції опори спрямована вертикально вгору і врівноважує силу тяжіння: $\vec{N} = -m\vec{g}$. Сила, з якою тіло діє на стіл, є *вага* тіла P.

В. загальному випадку, *вагою* називають силу, з якою тіло внаслідок притягання до Землі діє на опору, (або підвіс), що втримує тіло від вільного падіння.

У техніці часто застосовуються спіралеподібні пружини (рис. 1.2.5). При розтягуванні або стисненні пружин виникають пружні сили, які також підпорядковуються закону Гука. Коефіцієнт k називають жорсткістю пружини. У межах застосовності закону Гука пружини здатні сильно змінювати свою довжину. Тому їх часто використовують для вимірювання сил. Пружину, розтягання якої градують в одиницях сили, називають динамометром. Слід мати на увазі, що при розтягуванні або стисненні пружини в її витках виникають складні деформації кручення і вигину.

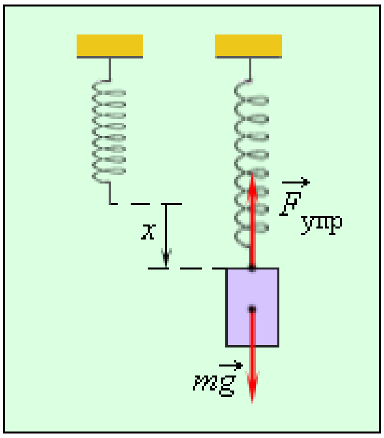


Рис. 1.2.5. **Деформація розтягування пружини.**

На відміну від пружин і деяких еластичних матеріалів (гума) деформація розтягу або стиску пружних стрижнів (або дротів) підкоряються лінійному закону Гука в дуже вузьких межах. Для металів відносна деформація $\varepsilon = \frac{x}{l_0} l$ не повинна перевищувати 0,01. При великих деформаціях виникають незворотні явища (плинність) і руйнування матеріалу.

Приклади сил пружності

Сила реакції опори N – сила пружності, що діє на тіло з боку опори перпендикулярно до її поверхні.

Сила натягу ($F_{Н}$ або T) – сила пружності, що діє на тіло з боку нитки або пружини.

Вага тіла P – сумарна сила пружності, що діє при наявності сили тяжіння на всі опори, підвіси.

За III законом Ньютона: $\vec{P} = -\vec{N}$.

1.2.5. Сили тертя

Сили тертя – сили, які виникають при зіткненні поверхонь тіл, що перешкоджають їх відносному переміщенню, і спрямовані уздовж поверхні зіткнення. Вони мають електромагнітного природу.

Сила тертя спокою $F_{т0}$ – сила тертя, що перешкоджає виникненню руху одного тіла по поверхні іншого. У стані спокою $\vec{F}_{ò0} = -\vec{F}$.

$$F_{т0}=\mu_0 N, \tag{1.2.21}$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя спокою, N – сила нормального тиску.

Сила тертя ковзання – сила тертя, що виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого, завжди спрямована в бік, протилежний відносної швидкості тіл, що стикаються

$$F_т=\mu N, \tag{1.2.22}$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання ($\mu < \mu_0$).

Коефіцієнти тертя - безрозмірні величини, які залежать від виду матеріалів тіл і характеру поверхонь, що труться.

На рис. 1.2.6 представлена залежність сили тертя від прикладеної сили ($F_{тер0\max}$ - максимальне значення сили тертя спокою).

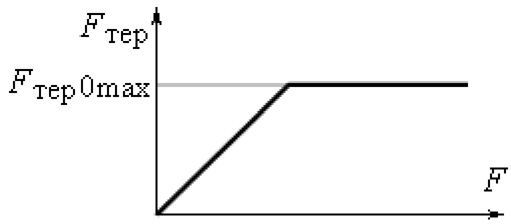


Рис. 1.2.6 – **Сила тертя спокою і сила тертя ковзання**

Завдання для самопідготовки

1. Сформулюйте закони Ньютона.
2. Дайте означення імпульсу тіла.
3. Як формулюється закон збереження імпульсу? Наведіть приклади його використання.
4. Які сили вважаються фундаментальними?
5. Охарактерізуйте види нефундаментальних сил.
6. Похила площина, що утворює кут $\alpha = 25°$ з площиною горизонту, має довжину $l = 2$ м. Тіло, що рухалось рівноприскорено, зісковзнуло з цієї площини за час $t = 2$ с. Визначити коефіцієнти тертя μ

тіла про площину.

Відповідь: 0,35

7. Автомобіль з вантажем масою 5 т проходить по випуклому мосту зі швидкістю 36 км/год. З якою силою він тисне на середину мосту, якщо радіус кривизни моста 50 м?

Відповідь: 39 кН.

8. Автоцистерна з гасом рухається з прискоренням a= 0,7 м/с^2. Під яким кутом α до площини горизонту розташований рівень гасу в цистерні?

Відповідь: ≈4°

9. Автомобіль йде по заокругленню шосе, радіус R кривизни якого дорівнює 200 м. Коефіцієнт тертя μ коліс об покриття дороги дорівнює 0,1 (ожеледь) . При якій швидкості v автомобіля почнеться його занос?

Відповідь: 14 м/с.

10. Автопоїзд, що рухається з постійною швидкістю 0,2 м/с, завантажують щебенем. Швидкість завантаження постійна і становить 200 кг/с. Знайти силу тяги двигуна автопоїзда.

Відповідь: 40 Н.

Лекція 3
1.3. РОБОТА. ПОТУЖНІСТЬ. ЕНЕРГІЯ

План заняття

1.3.1. Механічна робота
1.3.2. Потужність. ККД
1.3.3. Механічна енергія. Кінетична енергія
1.3.4. Потенційна енергія
1.3.5. Закон збереження енергії
1.3.6. Пружний та непружний удари

1.3.1. Механічна робота

Роботою А, яку здійснює постійна сила F, називається фізична величина, що дорівнює добутку модулів сили і переміщення, помноженому на косинус кута α між векторами сили і переміщення

$$A = F\Delta r\cos\alpha \qquad (1.3.1)$$

де α – кут між напрямками векторів сили і переміщення.

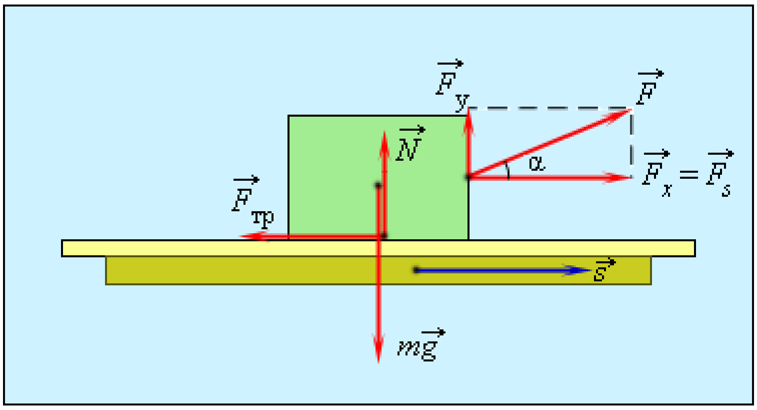


Рис. 1.3.1. **Робота сили**

Робота є скалярною величиною. Вона може бути як позитивною (0≤α <90°), так і негативною (90°<α≤180°). При α=90° робота, що здійснюються силою F, дорівнює нулю.

В системі СІ робота вимірюється в *джоулях* (Дж). Джоуль дорівнює роботі, яку здійснює сила в 1Н на переміщенні 1 м у напрямку дії сили: 1Дж = 1Н·1м.

Робота, що здійснюється змінною силою,

$$A = \int_L F(r)\cos\alpha dr, \tag{1.3.2}$$

або

$$A = \int_L \vec{F}(r)\cdot d\vec{r}, \tag{1.3.3}$$

де інтегрування ведеться уздовж траєкторії, що позначається L.

Графічно робота визначається площею криволінійної фігури під графіком $F_s(x)$ (рис. 1.3.2).

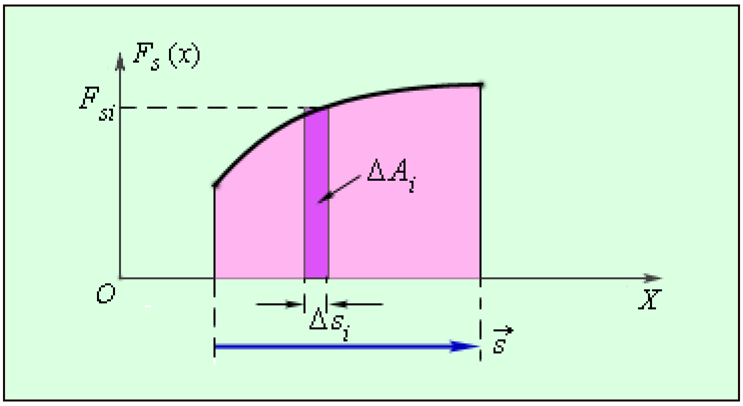


Рис. 1.3.2. **Графічне визначення роботи**

Прикладом сили, модуль якої залежить від координати, може служити сила пружності пружини, що підкоряється закону Гука. Для того, щоб розтягнути пружину, до неї потрібно прикласти зовнішню силу, модуль якої пропорційний подовженню пружини. Залежність модуля зовнішньої сили від координати *x* зображується на графіку прямою лінією (рис. 1.3.3).

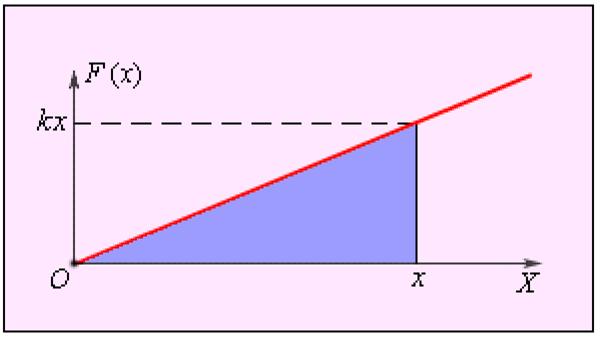


Рис. 1.3.3. **Залежність модуля зовнішньої сили від координати при розтягуванні пружини**

За площею трикутника на рис. 1.3.3 можна визначити роботу, яка виконана зовнішньою силою, прикладеною до вільного кінця пружини

$$A = \frac{kx^2}{2} \tag{1.3.4}$$

Цією ж формулою виражається робота, здійснена зовнішньою силою при стисненні пружини. В обох випадках робота пружної сили дорівнює по модулю роботі зовнішньої сили і протилежна їй за знаком.

1.3.2. Потужність. ККД

Щоб характеризувати швидкість здійснення роботи, використовують поняття *потужності*.

Середня потужність $\langle N \rangle$ - фізична величина, що визначається відношенням роботи ΔA, яку здійснюють силою або системою сил протягом кінцевого проміжку часу Δt, до цього проміжку часу:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}. \tag{1.3.5}$$

Потужність (миттєва потужність) N – фізична величина, що дорівнює межі, до якої прагне середня потужність при нескінченім зменшенні проміжку часу Δt

$$N = \frac{dA}{dt}, \tag{1.3.6}$$

де dA - робота, що здійснюються за проміжок часу dt.

Важливою формулою для роботи є формула, що дає змогу зв'язати роботу, прикладену силу і швидкість тіла

$$N = Fv\cos\alpha. \tag{1.3.7}$$

Одиниця потужності - *ват* (Вт): 1Вт - потужність, при якій за час 1с відбувається робота 1Дж: 1Вт = 1Дж/с.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) - відношення корисної роботи (потужності) до витраченої, визначається у процентах.

$$\eta = \frac{A_{\text{П}}}{A_{\text{З}}} \cdot 100\% = \frac{N_{\text{П}}}{N_{\text{З}}} \cdot 100\%. \tag{1.3.8}$$

1.3.3. Механічна енергія. Кінетична енергія

Енергія – скалярна величина, що являється єдиною мірою різних форм руху матерії і мірою переходу руху матерії з одних форм в інші.

Механічна енергія W характеризує рух і взаємодії тіл та є функцією швидкостей і взаємного розташування тіл.

Вона дорівнює сумі кінетичної ($W_К$) і потенційної ($W_П$) енергій. Одиниця виміру енергії - *джоуль* (Дж).

$$W = W_К + W_П \qquad (1.3.9)$$

Кінетична енергія матеріальної точки або тіла є мірою їх механічного руху, яка залежить від швидкості їх руху в даній інерційній системі відліку. Кінетична енергія матеріальної точки (або тіла) масой m, що рухається поступально зі швидкістю v

$$W_К = \frac{mv^2}{2} \qquad (1.3.10)$$

або

$$W_К = \frac{p^2}{2m}, \qquad (1.3.11)$$

де p – імпульс тіла.

Теорема про кінетичну енергію: зміна кінетичної енергії тіла при його переході з одного стану руху в інше дорівнює роботі всіх сил, діючих на тіло

$$A = \Delta W_К = W_{К2} - W_{К1} \qquad (1.3.12)$$

або

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \qquad (1.3.13)$$

де m - маса тіла; v_1 і v_2 – відповідно швидкість у стані 1 і у стані 2.

Кінетична енергія тіла масою m, що рухається зі швидкістю v, дорівнює роботі, яку повинна зробити сила, діюча на тіло, що покоїться, щоб надати йому цю швидкість.

1.3.4. Потенційна енергія

Механічне взаємодія може здійснюватися як між безпосередньо контактуючими тілами (наприклад, при ударі, терті, тиску один на одного і т. п.), так і між віддаленими тілами. Особлива форма матерії, що зв'язує частинки речовини в єдині системи і передає з кінцевою швидкістю дію одних частинок на інші, називається *фізичним полем* або просто *полем*. Взаємодія між віддаленими тілами здійснюється за допомогою пов'язаних з ними гравітаційних і електромагнітних полів.

Якщо на частинку у кожній точці простору діє деяка сила, то говорять, що ця частинка знаходиться у *силовому полі.* Наприклад, поблизу від поверхні Землі частинка знаходиться у полі сил тяжіння - у кожній точці простору на неї діє сила *mg*.

Поле, діюче на матеріальну точку, називається *стаціонарним* полем, якщо воно не змінюється з плином часу.

Силове поле називається *однорідним,* якщо сили, що діють на тіло в кожній точці поля, однакові за величиною і напрямком.

Силове поле називається *потенційним*, а діючі у ньому сили - *консервативними*, якщо робота цих сил при переміщенні матеріальної точки залежить тільки від початкового і кінцевого положення точок в просторі і не залежить від форми траєкторії. Консервативними силами є сили тяжіння, пружності. Робота, що здійснюється під дією консервативних сил, у разі руху частинки по замкненому колу дорівнює нулю

$$A = \oint_L F\left(r\right)\cos\alpha dr = 0. \qquad (1.3.14)$$

Усі центральні сили консервативні. Механічні системи, на тіла яких діють лише консервативні сили (внутрішні та зовнішні), називаються консервативними системами.

Потенційною енергією називається частина механічної енергії, що залежить від взаємного розташування частин системи і від положення системи в зовнішньому силовому полі. Потенційна енергія системи, подібно кінетичній енергії, є функцією стану системи.

Потенційна енергія тіла в даній точці - скалярна величина, що дорівнює роботі, яку здійснюють консервативні сили при переміщенні тіла з цієї точки в точку, прийняту за нуль відліку потенційної енергії. Знак потенційної енергії та її абсолютна величина залежать від вибору нульового рівня. Якщо тіло переходить з точці 1 у точку 2, робота сил поля дорівнює різниці значень потенційної енергії у цих точках

$$A = -\Delta W_{\Pi} = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2}. \qquad (1.3.15)$$

Потенційна енергія тіла W_{Π} і сила $\vec{F}$, що діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням

$$\vec{F} = -gradW_{\Pi} \qquad (1.3.16)$$

або
$$\vec{F} = -(\vec{i}\,\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z}) \qquad (1.3.17)$$

де - $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ одиничні вектори (орти). В окремому випадку, коли поле сил має сферичну симетрію (як, наприклад, гравітаційне поле),

$$F = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial r}. \qquad (1.3.18)$$

Для прикладу отримаємо формулу потенційної енергії гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (або тіл) масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані r одна від одної.

Сила взаємного тяжіння двох матеріальних точок

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1.3.19)$$

тоді прирощення потенційної енергії при зміні відстані між частинками від r_1 до r_2 буде дорівнювати

$$\Delta W_{\Pi} = W_{\Pi\,2} - W_{\Pi\,1} = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = G\frac{m_1 m_2}{r_1} - G\frac{m_1 m_2}{r_2}. \qquad (1.3.20)$$

Потенційна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок масами m_1 і m_2 (або куль з масою, яка розподілена сферично симетрично), що знаходяться на відстані r один від одного

$$W_{\Pi} = -G\frac{m_1 m_2}{r} + \mathrm{const}. \qquad (1.3.21)$$

Якщо потенційну енергію нескінченно віддалених один від одного матеріальних точок прийняти рівною нулю, то $\mathrm{const}=0$.

Потенційна енергія тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння

$$W_{\Pi} = mgh, \qquad (1.3.22)$$

де h – висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий для відліку потенційної енергії.

Ця формула справедлива за умови $h \ll R$, де R – радіус Землі.

Потенційна енергія пружно деформованого тіла (стислої або розтягнутої пружини)

$$W_{\text{Ï}} = \frac{kx^2}{2}, \qquad (1.3.23)$$

де k – жорсткість, x – абсолютна деформація.

1.3.5. Закон збереженняенергії

Закон збереження енергії в механіці виконується в замкненій системі, в якій діють тільки консервативні сили, і записується у вигляді

$$W\text{к} + W\text{п} = \text{const} . \qquad (1.3.24)$$

Повна механічна енергія замкненої системи тіл, що взаємодіють консервативними силами, залишається незмінною.

Це - фундаментальний закон природи. Він є слідством однорідності часу - інваріантності фізичних законів щодо вибору початку відліку часу.

Якщо система тіл не замкнена, її повна механічна енергія змінюється на величину роботи зовнішньої сили.

В системі, в якій діють також неконсерватівние сили, наприклад, сили тертя, повна механічна енергія системи не зберігається. *Дисипативні* системи - системи, в яких механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в інші (немеханічні) форми енергії.

Однак при "зникненні" механічної енергії завжди виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду. Таким чином, енергія ніколи на зникає і не з'являється знову, вона лише перетворюється з одного виду в інший. В цьому полягає фізична сутність закону збереження і перетворення енергії - сутність незнищенності матерії та її руху.

1.3.6. Пружний та непружний удари

Удар - явище зміни швидкостей тіл за дуже малий пропроміжок часу при їх зіткненні.

Пряма, яка проходить через точку дотику тіл і нормальна до поверхні їхнього зіткнення, називається *лінією удару.* Удар називається *центральним,* якщо тіла до удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їх центри мас.

Абсолютно пружний удар – зіткнення двох тіл, в результаті якого в обох взаємодіючих тілах не залишається ніяких деформацій і вся кінетична енергія, якою володіли тіла до удару, після удару знову перетворюється в кінетичну енергію. Для абсолютно пружного удару виконуються закон збереження імпульсу і закон збереження кінетичної енергії (рис. 1.3.4).

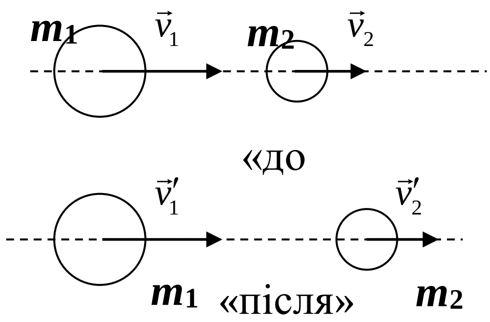


Рис. 1.3.4. **Абсолютно пружний удар**

Застосовуючи закони збереження енергії та імпульсу до прямого пружного удару куль, отримуємо формули швидкостей куль після абсолютно пружного удару

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \qquad (1.3.25)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \qquad (1.3.26)$$

де m_1 і m_2 - маси куль; v_1 і v_2 - їх швидкості до удару.

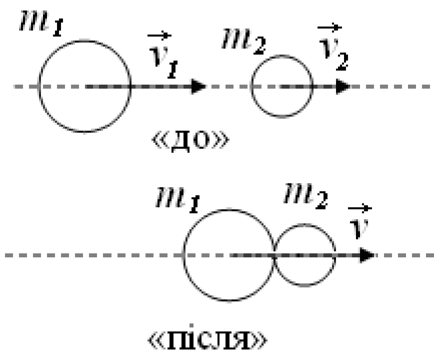


Рис. 1.3.5. **Абсолютно непружній удар**

При *абсолютно непружному ударі* відбувається втрата кінетичної енергії, після удару тіла рухаються як єдине ціле із загальною швидкістю (рис. 1.3.5). Деформація тіл після удару зберігається.

Із закону збереження імпульсу отримуємо формулу швидкості куль після абсолютно непружного удару

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{1.3.27}$$

Внаслідок деформації відбувається «втрата» кінетичної енергії, що перейшла в теплову або інші форми енергії. Ця «втрата» є різницею кінетичної енергії тіл до і після удару:

$$\Delta W_{\hat{E}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \tag{1.3.28}$$

Однак слід відзначити, що така «втрата» енергії часто буває корисною, так, наприклад, при забиванні палі, при ковці виробів, тощо.

Завдання для самопідготовки

1. Сформулюйте означення роботи і потужності.
2. Дайте визначення механічної енергії та її складових.
3. Як формулюється теорема про кінетичну енергію?
4. Які види потенціальної енергії ви знаєте?
5. Сформулюйте закон збереження енергії та наведіть приклади його застосування.
6. Обчислити роботу A, здійснену на шляху S=12 м рівномірно зростаючою силою, якщо на початку шляху сила F_1 = 10 Н, в кінці шляху F_2 = 46 Н.

Відповідь: 336 Дж.

7. Матеріальна точка масою m = 2 кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі Ox згідно рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де B = - 2 м/с, C = 1 м/с^2, D = -0,2 м/с^3. Знайти потужність N, що розвиває сила в момент часу t_1 = 2 с і t_2 = 5 с.

Відповідь: 0,32 Вт, 56 Вт.

8. Мотоцикліст їде по горизонтальній дорозі. Яку найменшу швидкість v він повинен розвинути, щоб, виключивши мотор, проїхати по треку, що має форму «мертвої петлі» радіусом R = 4 м? Тертям і опором повітря знехтувати.

Відповідь: 14 м/с.

9. Автомобіль масою 8 т рухається зі швидкістю 36 км/год. Знайти гальмівний шлях на горизонтальній ділянці шляху, а також на підйомі і на

спуску, якщо крутизна ухилу tgα =0,07. Силу опору у всіх випадках вважати рівною 25 кН.

Відповідь: 16 м; 13 м; 21 м.

10. Дві непружних кулі масами m_1 = 2 кг і m_2 = 3 кг рухаються зі швидкостями відповідно v_1 = 8 м/с і v_1 = 4 м/с. Визначити збільшення ΔU внутрішньої енергії куль при їх зіткненні в двох випадках: 1) менша куля наганяє більшу; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

Відповідь: 1) 9,6 Дж; 2) 86,4 Дж.

Лекція 4.
ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

План заняття

1.4.1. Момент інерції1.
1.4.2. Момент сили і момент імпульсу
1.4.3. Основний закон динаміки обертового руху
1.4.4. Закон збереження моменту імпульсу

1.4.1. Момент інерції

При розгляданні складного руху абсолютно твердого тіла ми користуємося можливостю представити цей рух як накладання поступольного руху і обертального руху навколо нерухомої осі.

Момент інерції тіла – міра інертності твердих тіл при обертальному русі.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання називається добуток маси цієї точки на квадрат відстані від осі

$$J = mr^2, \tag{1.4.1}$$

де m – маса точки; r – її відстань від осі обертання.

Моментом інерції системи відносно осі обертання називається фізична величина, що дорівнює сумі творів мас матеріальних точок системи на квадрати їх відстаней до даної осі

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 , \tag{1.4.2}$$

де Δm_i – маса i –го елемента тіла; r_i – відстань цього елемента від осі обертання; n – число елементів тіла.

У разі суцільного абсолютно твердого тіла ця сума зводиться до інтегралу

$$J = \int r^2 dm , \tag{1.4.3}$$

де інтегрування проводиться за обсягом тіла.

Якщо тіло однорідне, тобто його густина ρ однакова по всьому об’єму V, то $dm = \rho dV$, і

$$J = \rho \int r^2 dV , \qquad (1.4.4)$$

Одиниця виміру моменту інерції - кг·м^2.

Момент інерції – величина адитивна: момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює сумі моментів інерції частин тіла відносно тієї ж вісі.

Момент інерції визначається формою і розмірами тіл. Значення моментів інерції для деяких тіл (тіла вважаються однорідними, m – маса тіла) наведені в таблиці 1.4.1.

Якщо відомий момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас, то момент інерції відносно будь-якої іншої паралельної вісі визначається *теоремою Штейнера*:

момент інерції тіла J щодо довільної вісі дорівнює моменту його інерції відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла J_0, та добутку маси тіла на квадрат відстані d між осями

$$J = J_0 + md^2 . \qquad (1.4.5)$$

Таблиця 1.4.1

Моменти інерції тіл правильної геометричної форми

Тіло	**Вісь, щодо якої визначається момент інерції**	**Формула моменту інерції**
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l	Проходить через центр ваги стрижня перпендикулярно стрижню	$J = \frac{1}{12} ml^2$
	Проходить через кінець стрижня перпендикулярно стрижню	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R і масою m	Проходить через центр перпендикулярно площини підстави	$J=mR^2$
Круглий однорідний диск (циліндр) радіусом R і масою m	Проходить через центр диска перпендикулярно площини підстави	$J = \frac{1}{2} mR^2$

Однорідний куля масою *m* і радіусом *R*	Проходить через центр кулі	$J = \frac{2}{5} mR^2$

1.4.2. Момент сили і момент імпульсу

Для характеристики зовнішньої механічної дії на тіло, що приводить до зміни обертального руху тіла, вводять поняття моменту сили. Моментом сили відносно точки *O* називається векторна величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора, проведеного з точки *O* в точку *A* прикладення сили, на силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \tag{1.4.6}$$

Модуль моменту сили $M = Fr \sin\alpha = Fl$, де $l = r\sin\alpha$ – плече сили – найкоротша відстань між лінією дії сили і точкою *O*; α – кут між $\vec{r}$ і $\vec{F}$ (рис. 1.4.1).

Моментом сили відносно нерухомої осі *z* називається скалярна величина M_z, що дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту сили, знайденого щодо довільної точки *O* даної осі *z*.

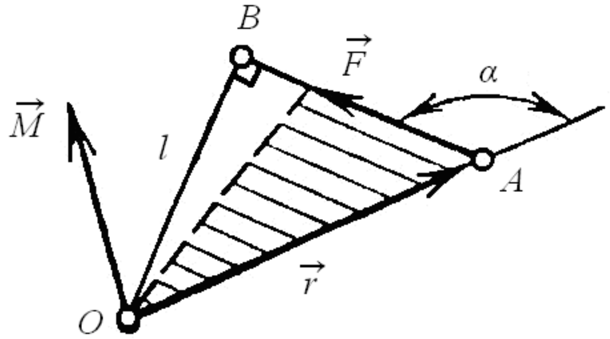


Рис. 1.4.1. **До визначення моменту сили**

Момент сили $\vec{F}$, що діє на тіло, щодо осі обертання

$$M = F_{\perp} l, \tag{1.4.7}$$

де $F_{\perp}$ - проекція сили $\vec{F}$ на площину, перпендикулярну осі обертання; *l* – плече сили (найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили).

Одиниця виміру моменту сили - Н·м.

Моментом імпульсу відносно нерухомої точки *O* називається фізична величина, яка визначається векторним добутком

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]. \qquad (1.4.8)$$

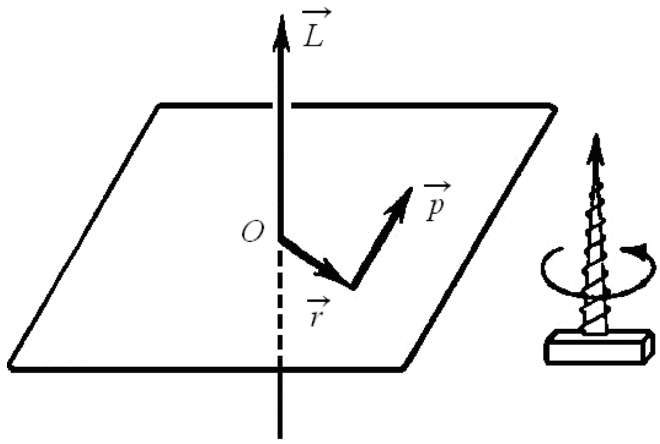


Рис. 1.4.2. **До визначення моменту імпульсу**

Моментом імпульсу відносно нерухомої осі z називається скалярна величина L_z, що дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу, визначеного відносно довільної точки O даної осі. Значення моменту імпульсу L_z не залежить від положення точки O на осі z.

При обертанні абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі кожна точка тіла рухається по колу постійного радіуса r зі швидкістю, перпендикулярній радіусу (рис. 1.4.2). Момент імпульсу окремої частинки дорівнює $L_i = m_i v_i r_i$ і спрямований по осі в сторону, яка визначається правилом правого гвинта (збігається з напрямком вектора кутової швидкості ω).

Моментом імпульсу твердого тіла відносно якої-небудь осі називається сума моментів імпульсу окремих частинок

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i^2 = J_z \omega. \qquad (1.4.9)$$

Таким чином, момент імпульсу тіла, що обертається, відносно осі z

$$L = J_z \omega. \qquad (1.4.10)$$

Момент імпульсу вимірюється в кг·м^2/с.

1.4.3. Основний закон динаміки обертового руху

Якщо взяти похідну від моменту імпульсу (1.4.8) за часом, отримуємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r}, \vec{p}]}{dt} = [\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}] + [\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{v}, \vec{p}] + [\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}]. \qquad (1.4.11)$$

З урахуванням того, що $\vec{v} \parallel \vec{p}$, будемо мати $[\vec{v}, \vec{p}] = 0$. За другим законом Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, тому маємо:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (1.4.12)$$

Це рівняння носить назву *основного рівняння обертального руху*. Воно виконується як для однієї матеріальної точки, так і для будь-якого абсолютно твердого тіла, оскільки таке тіло можна вважати таким, що складається з багатьох матеріальних точок.

У разі постійного моменту інерції основне рівняння динаміки обертового руху приймає вид

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \qquad (1.4.13)$$

де ε - кутове прискорення.

Елементарна робота моменту сили M при повороті тіла на кут $d\varphi$ може бути обчислена за формулою

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}. \qquad (1.4.14)$$

Робота постійного моменту сили M, який діє на тіло, що обертається

$$A = M\Delta\varphi, \qquad (1.4.15)$$

де $\Delta\varphi$ - кут повороту тіла.

Миттєва потужність P, що розвивається при обертанні тіла

$$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}. \qquad (1.4.16)$$

Кінетична енергія тіла, що обертається

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (1.4.17)$$

Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання, складається з енергії поступального і обертального рухів

$$W_K = \frac{m v_C^{\ 2}}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1.4.18)$$

де v_C - швидкість центру мас тіла; $\frac{J\omega^2}{2}$ - кінетична енергія обертального руху тіла навколо осі, що проходить через центр мас.

1.4.4. Закон збереження моменту імпульсу

У замкнутій системі $\vec{M} = 0$, отже, і $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, тобто $\vec{L} = \mathrm{const}$

Закон збереження моменту імпульсу: момент імпульсу замкнутої системи зберігається, тобто не змінюється з часом

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \mathrm{const}, \qquad (1.4.19)$$

де $\vec{L}_i$ - момент імпульсу i -го тіла що входить до складу системи.

Це - фундаментальний закон природи. Він є наслідком *ізотропності* простору (інваріантності фізичних законів щодо вибору напрямку осей координат системи відліку).

Законом збереження імпульсу пояснюються закони руху планет сонячної системи (закони Кеплера); сплющення планет та Галактик внаслідок їх обертального руху; зміна кутової швидкості тіл внаслідок зміни їх моменту інерції.

Наведемо приклади застосування закону збереження моменту імпульсу:

для двох взаємодіючих тіл

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2', \qquad (1.4.20)$$

де J_1, J_2, ω_1, ω_2 - моменти інерції і кутові швидкості тіл до взаємодії; J_1', J_2', ω_1', ω_2' - ті ж величини після взаємодії;

для одного тіла, момент інерції якого змінюється

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \qquad (1.4.21)$$

де J_1 і J_2- початковий і кінцевий моменти інерції; ω_1 і ω_2 – початкова і кінцева кутові швидкості тіла.

Завдання для самопідготовки

1. Дайте визначення моменту інерції та його властивостей.

2. Наведіть аналітичне і графічне визначення моменту сили і моменту імпульса твердого тіла.

3. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу та наведіть приклади його застосування.

4. Проведіть аналогію між характеристиками поступального і обертального рухів.

5. Через блок, що має форму диска, перекинутий шнур. До кінців шнура прив'язали важелі масою m_1 = 100 г і m_2 = 110 м. З яким прискоренням а будуть рухатися важелі, якщо маса m блоку дорівнює 400 г? Тертя при обертанні блоку мізерно мало.

Відповідь: 0,24 м/с^2.

6. Вал масою m = 100 кг і радіусом R = 5 см обертався з частотою n = 8 с$^{-1}$. До циліндричної поверхні вала притиснули гальмівну колодку з силою F = 40 Н, під дією якої вал зупинився через t = 10 с. Визначити коефіцієнт тертя μ.

Відповідь: 0,31.

7. Визначити лінійну швидкість v центру кулі, що скотилася без ковзання з похилої площини висотою h = 1 м.

Відповідь: 3,74 м/с.

8. Куля масою m = 10 кг і радіусом R = 20 см обертається навколо осі, що проходить через його центр. Рівняння обертання кулі має вигляд $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де В = 4 рад/с^2, С = - 1 рад/с^3. Знайти закон зміни моменту сил, що діють на кулю. Визначити момент сил M у момент часу t = 2 с.

Відповідь: -0,64 Н·м.

Лекція 5

1.5. ЕЛЕМЕНТИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ МЕХАНІКИ. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

План заняття

1.5.1. Принцип відносності Галилея. Перетворення Галилея

Для рішення задач, пов’язаних із переходом від однієї системи відліку до іншої, у класичній нерелятивістській фізиці застосовується *принцип відносності Галилея*: всі інерційні системи повністю рівноправні щодо причин прискорень. У всіх інерційних системах відліку закони класичної механіки мають один і той же вигляд**.**

Роздивимося дві інерціальні системи відліку. На рис. 1.5.1 представлени: $K(XOY)$ – нерухома система координат; K' $(X'O'Y')$– система координат, пов'язана зі спостерігачем на тілі, що переміщується щодо системи координат $K(XOY)$.

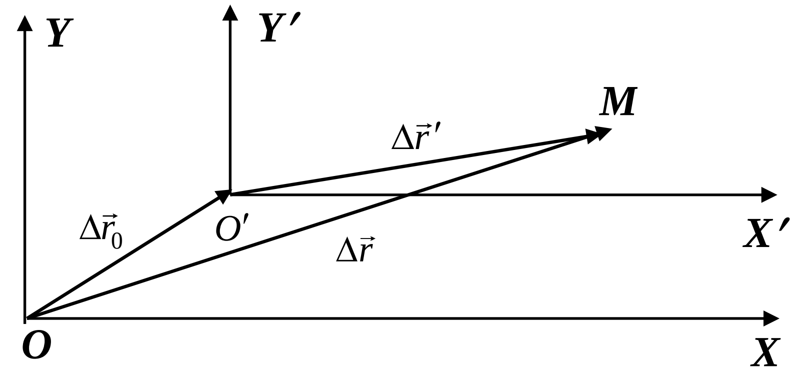


Рис. 1.5.1. **Рухома і нерухома системи відліку**

Радіус-вектор точки *M* в нерухомій системі $\vec{r}$ повязаний з радіусои-вектором $\vec{r}'$ у рухомій системі співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0, \tag{1.5.1}$$

де $\vec{r}_0$ - радіус-вектор початку координат системи K' відносно системи *K*. Припускаючи, що система K' рухається відносно системи *K* з постійною швидкістю ($\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}_0}{dt} = \text{const}$), а також, що *згідно Галилею хід часу не залежить від відносного руху систем відліку*, будемо мати перетворення, які мають назву *перетворень координат Галилея*. В скалярній формі:

$$\begin{aligned} x &= x' + u_x \\ y &= y' + u_y \\ z &= z' + u_z \\ t &= t' \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Діференцуючи рівняння (1.5.2) по часу, одержимо зв'язок між швидкостями тіл у ситемах *K* і K', що відомий як формула додавання швидкостей у класичній механіці

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \tag{1.5.3}$$

Аналогічно, застосувавши операцію диференціювання до рівняння (1.5.3), будемо мати

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{1.5.4}$$

Відсіля витікає, що прискорення будь-якого тіла у всіх системах відліку, які рухаються друг відносно друга рівномірно і прямолінійно, виявляються одними й тими же. А поскільки основне рівнння механіки (1.2.2) вміщує тільки прискорення, то стає очевидним, що і сили, які діють на тіло у різних інерціальних системах, однакові. Тобто, рівняння класичної нерелятивістської механіки не змінюються при переході від однієї інерціальної системи до іншої, і *ніякими механічними опитами неможливо встановити, знаходиться ця система в стані спокою чи рухається прямолінійно і рівномірно*.

1.5.2. Спеціальна теорія відносності. Постулати Ейнштейна

Релятивістська фізика відмовилася від трактовки Галилея часу, як абсолютно протікаючого у всіх системах. Створена А. Ейнштейном у 1905 році спеціальна теорія відносності (СТВ) пов'язала в єдине ціле простір і час. Основу цієї теорії утворюють два постулати.

Перший постулат Ейнштейна (принцип відносності).

Усі закони природи інваріантні (незмінні) стосовно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Перший постулат – це узагальнення принципу відносності класичної механіки (принципу відносності Галілея) на всі процеси в природі, інакше кажучи, всі інерціальні системи відліку еквівалентні (рівноправні) по своїх фізичних властивостях, тобто ніякі опити в принципі не дозволяють виділити ні одну з них як переважну – абсолютну.

Другий постулат Ейнштейна (принцип сталості швидкості світла).

Швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача й однакова у всіх інерціальних системах відліку.

Другий постулат стверджує, що сталість швидкості світла – фундаментальна властивість природи. Якщо всі інші швидкості змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, то швидкість світла у вакуумі – величина інваріантна (незмінна).

Всі положення СТВ базуються на експерименті і блискуче підтверджуються експериментом. Так, другий постулат А. Ейнштейн сформулював на основі опитів Майкельсона – Морлі (1881-1887 р.), які з’ясували, що немає різниці між часом розповсюдження світла паралельно і перпендикулярно к напрямку руху Землі.

1.5.3. Перетворення Лоренца. Кінематичні наслідки СТВ

Аналіз постулатів СТВ свідчить, що перетворення Галилея несумістні з ними. Так, закони класичної електродинаміки, сформульовані. Дж. Максвелом, виявилися неінваріантними щодо перетворень Галилея, тобто мали різний вигляд у різних ІСВ; класичний закон додавання швидкостей не відповідав другому постулату Ейнштейна тощо.

Як було з’ясовано, перетворення, які б задовольняли постулатам СТВ, були знайдені Г.А.Лоренцом у 1904 році, але їх фізична суть була розкрита Ейнштейном.

Припустимо, що система відліку *К'* рухається відносно системи *К* зі швидкістю *u*, яка спрямована уздовж загальної для обох систем осі *x*. Тоді перехід від інерціальної системи *К* до іншої ІСВ *К'* здійснюється за допомогою перетворень Лоренца у такому вигляді

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}, \tag{1.5.5}$$

$$y' = y, \ z' = z, \tag{1.5.6}$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}. \tag{1.5.7}$$

Перетворення Лоренца симетричні і відрізняються знаком при *u*, якщо роздивляється перехід від системи *К'* до системи *К*.

Перетворення Лоренца задовольняють принципу відповідності, тобто при $\beta = u^2 / c^2 \ll 1$ переходять у перетворення координат Галилея.

При $u > c$ перетворення Лоренца втрачають сенс, тобто рух фізичних тіл із швидкістю, що перебільшує швидкість світла неможливий.

Просторові і часові перетворення не являються незалежними. Перетворення Лоренца зв’язують просторові координати і час в одне нерозривне ціле, утворюючи так званий *чотиривимірний простір-час*.

Перерахуємо наслідки, які випливають із перетворень Лоренца.

Відносність одночасності.

Роздивимось випадок, коли у системі *К* дві події *А* и *В* відбуваються в одній і тій же точці ($x_A = x_B$) одночасно ($t_A = t_B$). Для даних умов, відповідно до перетворень Лоренца, $x'_A = x'_B$ і $t'_A = t'_B$, тобто ці події в системі *К'* є одночасними й просторово співпадаючими.

Якщо в системі *К* події просторово роз'єднані ($x_A \neq x_B$), але одночасні ($t_A = t_B$), то, відповідно до перетворень Лоренца, ці події в системі *К'*, залишаючись просторово роз'єднаними ($\tilde{o}'_{\grave{A}} \neq \tilde{o}'_B$), виявляються й неодночасними ($t'_A \neq t'_B$).

Поняття одночасності подій відносні, тобто залежить від системи відліку.

Довжина тіл у різних системах відліку (лоренцеве скорочення довжини).

Нехай тіло (стрижень) рухється разом з системою K' відносно системи K. з швидкістю u вздовж осі x. В системі відліку K', щодо якої стрижень покоїться, його власна довжина $l_0 = x_2' - x_1'$ (стрижень розташований уздовж осі x). Згідно перетворень Лоренца в системі K, щодо якої стрижень рухається його довжина

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2 / c^2}. \tag{1.5.8}$$

Таким чином, довжина стрижня, що рухається, менше довжини, обмірюваної в системі, щодо якої він знаходиться у спокої (менше власної довжини) і в різних інерціальних системах відліку різна. Із рівнянь (1.5.3) виходить, що поперечні розміри тіла не залежить від швидкості руху й однакові у всіх інерціальних системах відліку.

Лоренцеве скорочення довжини – ефект кінематичний і взаємний: якщо в системах K и K' є два однакових стрижні, то з погляду кожної з них коротше той стрижень, що рухається щодо неї.

Тривалість подій у різних системах відліку (релятивістське вповільнення часу).

Якщо в системі відліку K' (вона рухається щодо системи K зі швидкістю u вздовж осі x) інтервал часу між двома подіями, що відбуваються в одній і тій же точці, дорівнює $\tau_0 = t_2' - t_1'$, то інтервал часу між цими подіями в системі K ($\tau = t_2 - t_1$) згідно перетворень Лоренца дорівнює

$$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - u^2 / c^2}. \tag{1.5.9}$$

Таким чином, тривалість події, що відбувається в деякій точці, найменша в тієї інерціальній системі відліку, щодо якої ця система нерухлива. Отже, годинники, що рухаються відносно інерціальної системи відліку, ідуть повільніше годинників, що знаходяться у спокої.

Цей ефект кінематичний і взаємний: якщо з точки погляду K-системи повільніше йдуть годинники K'-системи, то з точки погляду K'-системи, навпаки, повільніше йдуть годинники K-системи (причому в тім же відношенні).

Релятивістський закон додавання швидкостей.

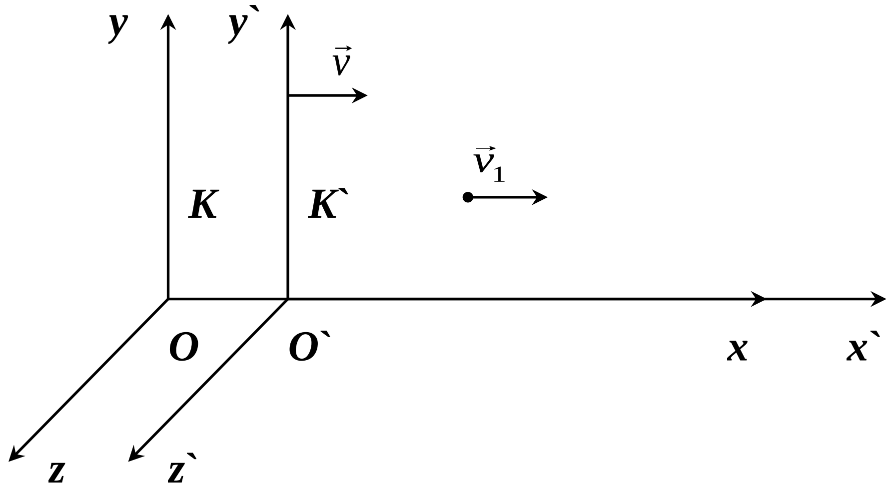


Рис. 1.5.2. **Рух тіла у системах відліку *K* і *K′***

Нехай тіло рухається уздовж осі x' K'-системи зі швидкістю v_1 (рис. 1.5.2). В свою чергу система K' рухається щодо системи K зі швидкістю u. Вісі x і x' збігаються, а вісі y і y', z і z' паралельні. Із перетворень Лоренца отримуємо:

$$v_2 = \frac{v_1 + u}{1 + \frac{v_1 u}{c^2}}, \qquad (1.5.10)$$

де v_1 – швидкість тіла відносно K'; v_2 – швидкість цього ж тіла відносно K.

Якщо $u << c$ і $v_1 << c$, то

$$v_2 = v_1 + u \qquad (1.5.11)$$

і ми маємо закон додавання швидкостей у класичній механіці.

Якщо світловий імпульс у K'-системі рухається уздовж вісі x' зі швидкістю $v_1 = c$, то в системі відліку K

$$v_2 = c. \qquad (1.5.12)$$

Тобто з перетворень Лоренца витікає, що *неможливо досягнути швидкості більшої, ніж швидкість світла у вакуумі ні в якому випадку*.

1.5.4. Релятивістська динаміка

Релятивістський імпульс

В релятивістській динаміці, як і в механіці Ньютона, імпульс матеріальної частинки відіграє важливу роль. Він також пропорційний її масі і співпадає по напрямку із її швидкістю $\vec{v}$. Однак, на різницю від ньютонівської механіки *релятивістський імпульс* є нелінійною функцією швидкості, а саме

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{1.5.13}$$

де m_0 – *так звана маса спокою*.

У граничному випадку, коли $v << c$, визначення релятивістського імпульсу переходить у відоме визначення для нерелятивістського імпульсу $\vec{p} = m_0\vec{v}$.

Основний закон релятивістської механіки

На підставі закону збереження релятивістського імпульсу можна встановити основний закон релятивістської динаміки у вигляді

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{1.5.14}$$

Це рівняння в такому виді, де праворуч знаходиться похідна від релятивістського імпульсу, задовольняє першому постулату Ейнштейна.

На відміну від нерелятивістського визначення сили ми бачимо, що напрямок сили у загальному випадку не збігається з напрямком прискорення. Дійсно, рівняння (1.5.14) можна записати таким чином

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

де позначено $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Кінетична і повна енергія тіла (частинки)

Виконання законів збереження імпульсу і енергії сумісне з релятивістськими уявленнями о просторі і часі тільки тоді, коли повна енергія тіла приймає вигляд

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = mc^2. \qquad (1.5.15)$$

Повна енергія в різних системах відліку різна.

Якщо тіло нерухомо, то його енергія

$$E_0 = m_0 c^2, \qquad (1.5.16)$$

де E_0 – *енергія спокою*, яка не залежить від вибору ІСВ.

Класична нерелятивістська механіка енергію спокою не враховує, вважаючи, що при $v = 0$ енергія тіла у стані спокою дорівнює нулю.

Повна енергія у вигляді (1.5.15) – це сума кінетичної енергії й енергії спокою тіла (частинки). В повну енергію й енергію спокою не входить потенційна енергія тіла в зовнішньому силовому полі.

Формули (1.5.15) і (1.5.16) демонструють нерозривний зв'язок між енергією як мірою руху і масою як мірою кількості матерії, що підкреслює єдність матерії та руху як форми її існування.

Кінетична енергія тіла (частинки) дорівнює

$$E_k = E - E_0 = m_0 c^2 \left(1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right). \qquad (1.5.17)$$

Нескладно довести, що при $v << c$ формула (1.5.17) переходить у формулу для визначення кінетичної енергії поступального руху частинки у нерелятивістському випадку.

Повна енергія частинки і її імпульс пов’язані співвідношенням

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \qquad (1.5.18)$$

або в скалярному вигляді $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$. (1.5.19)

1.5.5. Інваріанти СТВ

Створювач спеціальної теорії відносності А. Ейнштейн називав свою теорію «теорією інваріантів». Дійсно, у класичній нерелятивістській фізиці існують чимало фізичних величин, які не змінюються при переході від однієї ІСВ до іншої, тобто являються інваріантами;

наприклад, просторові і часові інтервали двох подій, маса. Виявляється, що і в релятивістській фізиці при $v \le c$ такі інваріанти теж існують, і вони ілюструють ще більш глибокий зв'язок між фізичними величинами і явищами.

По-перше, інваріантом являється універсальна швидкість поширення взаємодій, що дорівнює швидкості світла у вакуумі

c = invar.

По-друге, інваріантами предстають поперечні координати і розміри тіл (відносно руху, див. (1.5.6)):

$$y' = y, \qquad \Delta y' = \Delta y = \text{invar}$$

$$z' = z, \qquad \Delta z' = \Delta z = \text{invar}$$

По-третє, інваріантною кінематичною величиною є *просторово-часовий інтервал між двома подіями*

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2} = \text{invar}, \qquad (1.5.20)$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta l^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$.

Нарешті, відмітимо, що важливим динамічним інваріантом являється енергія спокою

$$E_0 = m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - p^2 c^2} = \text{invar}. \qquad (1.5.21)$$

1.5.6. Елементи загальної теорії відносності

Щоб перейти від формулювання локального принципа еквівалентності до необмеженного простору А. Ейнштейн створив польову теорію тяжіння – загальну теорію відносності (ЗТВ).

Він запропонував нову модель Всесвіту, яка являла собою викривлений чотиривимірний простір-час і не володіла такими властивостями як однорідність і ізотропність. На основі такої моделі Ейнштейн сформулював узагальнений принцип відносності як *перший постулат ЗТВ*.

1. Будь-які явища природи однакові у всіх системвах відліку (ІСВ та НСВ).

Другий постулат ЗТВ є спільним із СТВ.

2. Швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача й однакова у всіх системах відліку.

ЗТВ (сучасна теорія тяжіння) являє собою єдину теорію простору, часу і тяжіння. Згідно неї геометричні властивості простору-часу залежать від розподілу у просторі тяготіючих мас і їх руху. Тіла, які створюють гравітаційне поле, «викрівляють» реальний тривимірний простір і по-різному змінюють ход часу у різних його точках, тобто викликають відхилення його властивостей від властивостей плоского простору.

Рух тіл у полі тяжіння виявилось можливим роздивлятися як рух по інерції, але у викривленому чотиривимірному неевклідовому просторі-часі, метрікою якого є геометріяЛобачевського-Рімана.

Можно показати, що ньютонівська механіка є часним випадком ЗТВ при малих швидкостях $v \ll c$ і слабких полях.

Нарешті, відзначимо деякі наслідки ЗТВ, які підтверджені експериментально:

-червоне зміщення або розбігання галактик;

- прецесія орбіт планет;

-відхилення проміня світла поблизу Сонця;

-сповільнення часу в сильних гравітаційних полях.

Завдання для самопідготовки.

1.В чому полягає різниця між перетвореннями Галілея і Лоренца?

2. Користуючись перетвореннями Лоренца, виведіть релятивістський закон додавання швидкостей.

3. Доведіть, що при малих швидкостях ($v << c$) вираз для релятивістської кінетичної енергії співпадає с класичним виразом.

4. Що таке сили інерції? Які вони мають властивості?

5. Сформулюйте локальний принцип еквівалентності.

6. При якій швидкості ІСВ розміри тіла в напрямку руху скорочуються удвічі?

Відповідь:0,86*c*.

7. Визначте імпульс частинки масою спокою 100 г у двох випадках: 1) швидкість частинки 2 м/с; 2) швидкість частинки $2{,}7 \cdot 10^8$ м/с.

Відповідь: 0,2 кг·м/с; $0{,}45 \cdot 10^8$ кг·м/с.

Лекція 6

ЕЛЕМЕНТИ СТАТИКИ

План заняття

1.6.1. Центр мас
1.6.2. Умови рівноваги тіл
1.6.3. Прості механізми

1.6.1. Центр мас

Статика - частина механіки, в якій вивчається рівновага тіл.

Центром мас тіла називають точку перетину прямих, уздовж яких мають бути спрямовані сили, щоб тіло двигалось поступально. Положення центру мас системи задається радіус-вектором $\vec{r}_C$, який визначається наступним чином:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}, \qquad (1.6.1)$$

де m_i - маса i-тої частинки; $\vec{r}$ - радіус -вектор, що визначає положення цієї частинки; m - маса системи.

Координати центру мас дорівнюють проекціям на координатні осі:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \qquad (1.6.2)$$

В однорідному полі сил тяжіння (поблизу поверхні Землі) центр мас збігається з центром ваги системи.

1.6.2. Умови рівноваги тіл

Щоб тіло, яке не обертається, перебувало в рівновазі, необхідно, щоб рівнодіюча сил, прикладених до тіла, дорівнювала нулю, або щоб сума проекцій прикладених до тіла сил на будь-яку вісь дорівнювала нулю

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F}_i = 0. \qquad (1.6.3)$$

Якщо тіло може обертатися щодо деякої осі, то для його рівноваги недостатньо рівності нулю рівнодіючої всіх сил.

Тіло, здатне обертатися навколо закріплення осі, перебуває у рівновазі, якщо алгебраїчна сума проекцій моментів прикладених до нього сил відносно цієї осі дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{N} M_{zi} = 0. \qquad (1.6.4)$$

У загальному випадку, коли тіло може рухатися поступально й обертатися, для рівноваги необхідно виконання обох умов: рівність нулю рівнодіючої сили і рівність нулю суми всіх моментів сил.

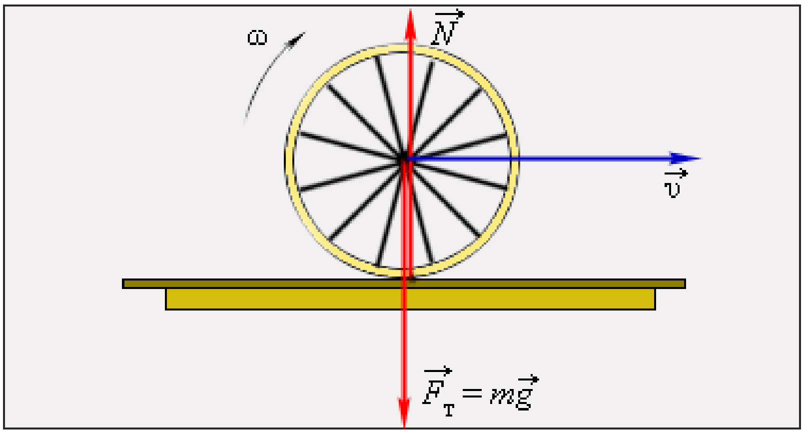


Рис. 1.6.1. **Кочення колеса по горизонтальній поверхні. Рівнодіюча сила і момент сил дорівнюють нулю**

Обидві ці умови не є достатніми для спокою. Колесо, яке котиться по горизонтальній поверхні - приклад байдужої рівноваги (рис. 1.6.1). Якщо колесо зупинити в будь-якій точці, воно виявиться в рівноважному стані. Поряд з байдужою рівновагою в механіці розрізняють стан стійкої і нестійкої рівноваги.

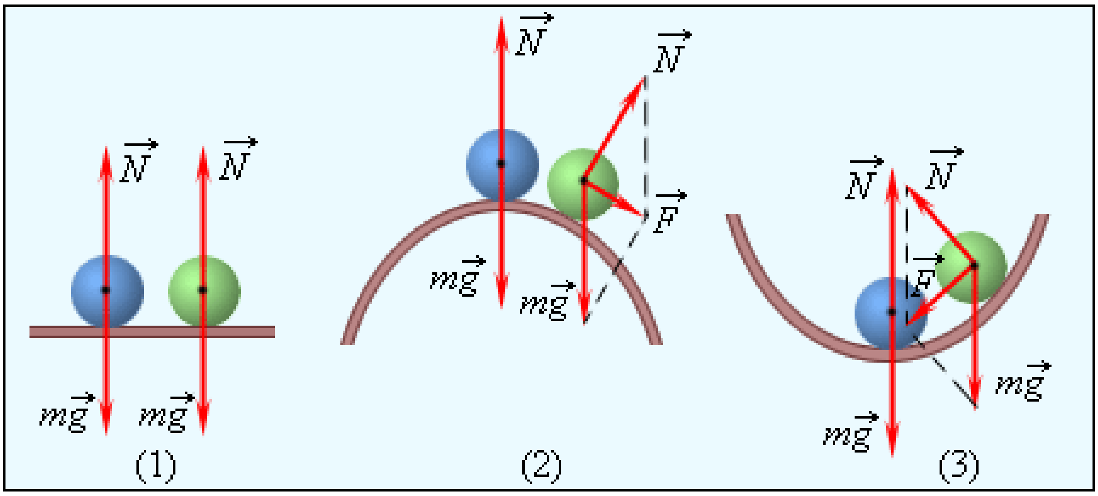


Рис.1.6.2. **Різні види рівноваги кулі на опорі:**

1 – байдужа рівновага, 2 – нестійка рівновага, 3 – стійка рівновага

Стан рівноваги називається *стійким*, якщо при малих відхиленнях тіла від цього стану виникають сили або моменти сил, що прагнуть повернути тіло в рівноважний стан (рис. 1.6.2).

При малому відхиленні тіла зі стану *нестійкої* рівноваги виникають сили або моменти сил, які прагнуть видалити тіло від положення рівноваги.

Для тіла, яке має нерухому вісь обертання, можливі всі три види рівноваги. Байдужа рівновага виникає, коли вісь обертання проходить через центр мас. При стійкій і нестійкій рівновазі центр мас знаходиться на вертикальній прямій, що проходить через вісь обертання. При цьому, якщо центр мас знаходиться нижче осі обертання, стан рівноваги виявляється стійким. Якщо ж центр мас розташований вище осі – стан рівноваги нестійкий (рис. 1.6.3).

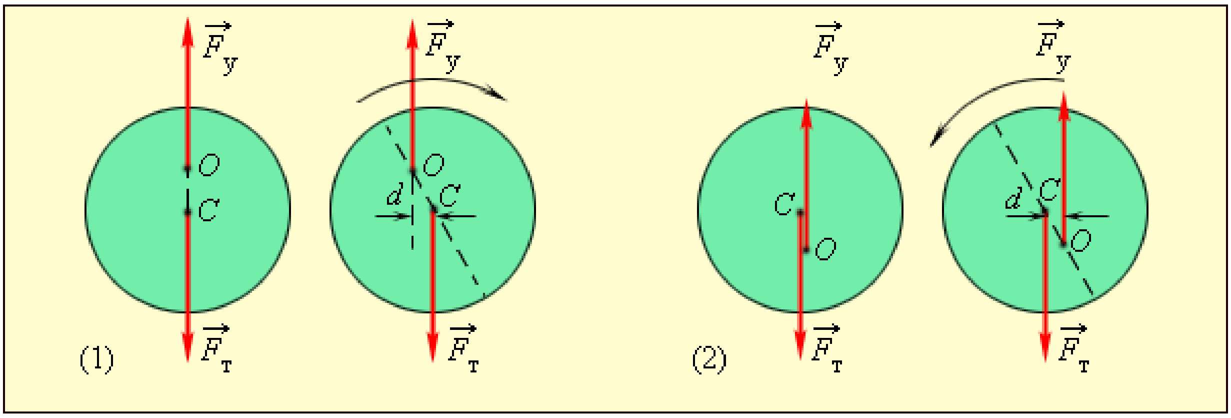


Рис. 1.6.3. **Стійка (1) і нестійка (2) рівновага однорідного круглого диска, закріпленого на осі *O*; точка *C* – центр маси диска; $F_т$ - сила тяжіння; $F_у$ - пружна сила осі; *d* – плече**

Особливим випадком є рівновага тіла на опорі. У цьому випадку пружна сила опори прикладена не до однієї точці, а розподілена по підставі тіла. Тіло знаходиться в рівновазі, якщо вертикальна лінія, проведена через центр мас тіла, проходить через площу опори, тобто усередині контуру, утвореного лініями, що з’єднують точки опори. Якщо ж ця лінія не перетинає площину опори, то тіло перекидається.

1.6.3. Прості механізми

Прості механізми дозволяють, виробляючи роботу, отримати виграш у силі, тобто зменшити прикладену силу *P* за рахунок збільшення переміщення *S* («золоте» правило механіки).

Важелі (рис. 1.6.4) – тверді тіла, які обертаючись навколо нерухомої осі, дають виграш у силі.

Рис. 1.6.4. **Сили, що діють на плечі важеля**

Важіль знаходиться в рівновазі, якщо плечі діючих на нього сил обернено пропорційні значенням сил: $\frac{P}{F} = \frac{S_1}{S_2}$.

Блоки

Нерухомий блок (рис. 1.6.5) являє собою рівноплечий важіль $(d_1 = d_2)$. Він не дає виграшу в силі, $F = P$, але дозволяє змінити її напрямок.

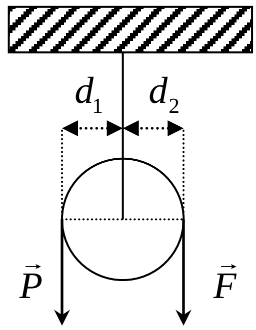


Рис. 1.6.5. **Нерухомий блок**

Рухомий блок (рис. 1.6.6) – важіль, у якого одне плече d_1 в 2 рази більше іншого d_2. Дає виграш у силі в 2 рази.

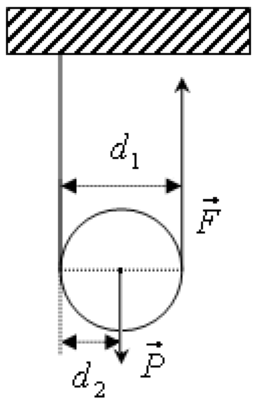


Рис. 1.6.6. **Рухомий блок**

При використанні простих механізмів виграшу в роботі не отримують відповідно до закону збереження енергії.

Завдання для самопідготовки

1. Дайте визначення центру мас тіла.
2. Сформулюйте умови рівноваги тіл при поступальному і обертальному русі.
3. Які види рівноваги ви знаєте?
4. Дайте характеристику різним простим механізмів.
5. Маса автомобіля 3,6 т. Його центр ваги ділить відстань між осями коліс на відрізки, що знаходяться у відношенні 1:3. Знайти силу тиску кожної колісної пари на дорогу.

Відповідь: 8,82 кН; 26,46 кН.

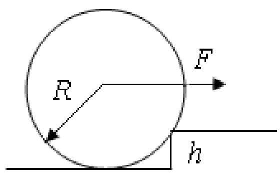
6. Визначити, якої максимальної маси вантаж може переносити підйомний кран і силу тиску його на землю. Противага масою M = 10 т знаходиться на стрілі крана на відстані a = 4 м від вертикальної стійки. Вантаж підвішений на відстані b = 10 м від стійки. Масою крана можна знехтувати.

Відповідь: 4 т; 137,2 кН.

7. Передня колісна пара трактора тисне на грунт силою 7,5 кН, а задня - силою 2,8 кН. Визначити силу тяжіння трактора і відстань від передньої осі до центра ваги, якщо відстань між осями дорівнює 2170 мм.

Відповідь: 10 кН; 0,6 м.

8. Важкий металевий каток асфальтоукладача необхідно підняти на сходинку висоти h. Визначити найменшу силу F, яку необхідно для цього прикласти до центру катка в горизонтальному напрямку, якщо каток має масу m і радіус R, причому $R > h$.



Відповідь: $F_{\min} = \dfrac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$

Лекція 7. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

План заняття

1.7.1. Тиск в рідині або газі

Основною відмінністю рідин від твердих (пружних) тіл є здатність легко змінювати свою форму. Частини рідини можуть вільно зрушуватися, ковзаючись один щодо одного. При цьому рідина приймає форму судини, в якій вона налита. У рідину, як і в газоподібне середовище, можна занурювати тверді тіла. На відміну від газів рідини практично нестисливі.

На тіло, занурене в рідину або газ, діють сили, розподілені по поверхні тіла. Для опису таких розподілених сил вводиться нова фізична величина – тиск.

Тиск визначається як відношення модуля сили $\vec{F}$, що діє перпендикулярно поверхні, до площі S цієї поверхні:

$$p = \frac{F}{S}. \qquad (1.7.1)$$

В системі СІ тиск вимірюється в паскалях (Па): 1 Па дорівнює тиску, створюваному силою 1 Н, що рівномірно розподілена по нормальній до неї поверхні площею 1 м^2 (1 Па = 1 Н/м^2).

Французький учений Б.Паскаль (1623 – 1662) в середині XVII століття емпірично встановив закон, названий *законом Паскаля*: Тиск в рідині або газі передається у всіх напрямках однаково і не залежить від орієнтації площини, на яку вона діє.

Тиск рідини на дно або бічні стінки судини залежить від висоти стовпа рідини. Сила тиску на дно циліндричної посудини висоти h і площі основи S дорівнює вазі стовпа рідини mg, де $m = \rho ghS$ - маса рідини в посудині, ρ - густина рідини, отже

$$p = \frac{\rho hSg}{S} = \rho gh. \qquad (1.7.2)$$

Такий же тиск на глибині h відповідно до закону Паскаля рідина робить і на бічні стінки судини. Тиск стовпа рідини ρgh називають *гідростатичним тиском*. Через різницю тисків у рідині на різних рівнях виникає виштовхуючи, або архимедова, сила $\vec{F}_A$. Рис. 1.7.1 ілюструє появу сили Архімеда.

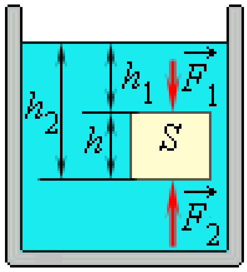


Рис. 1.7.1**. Виштовхуюча або архимедова сила**.

У рідину занурено тіло у вигляді прямокутного паралелепіпеда висотою h і площею підстави S.

Різниця тисків на нижню і верхню межі є

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g h. \qquad (1.7.3)$$

Тому виштовхуюча сила буде спрямована вгору, і її модуль дорівнюватиме

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g h, \qquad (1.7.4)$$

де V - об'єм витісненої тілом рідини, а ρV - її маса.

Архимедова сила, що діє на занурене в рідину (або газ) тіло, дорівнює вазі рідини (або газу), витісненої тілом. Це твердження, що зветься *законом Архімеда*, справедливе для тіл будь-якої форми.

Із закону Архімеда випливає, що якщо середня густина тіла $\rho_т$ більше густини рідини (або газу) ρ, тіло буде опускатися на дно. Якщо ж $\rho_т < \rho$, тіло буде плавати на поверхні рідини. Обсяг зануреної частини тіла буде такий, що вага витісненої рідини дорівнюватиме вазі тіла. Для підйому повітряної кулі в повітрі його вага повинна бути менше ваги витісненого повітря. Тому повітряні кулі заповнюють легкими газами (воднем, гелієм) або нагрітим повітрям.

З виразу для повного тиску в рідині $p=p_0+\rho gh$ витікає, що в сполучених посудинах будь-якої форми, заповнених однорідною рідиною, тиск в будь-якій точці на одному і тому ж рівні однаковий. Якщо обидві судини (у виді вертикально розташованих циліндрів) закрити поршнями, то за допомогою зовнішніх сил, що прикладені до поршнів, в рідині можна створити великий тиск p. Цей тиск у багато разів перевищує гідростатичний тиск ρgh в будь-якій точці системи. Тоді можна вважати, що у всій системі установлюється однаковий тиск p. Якщо поршні мають різні площі S_1 і S_2, то на них з боку рідини діють різні сили $F_1 = pS_1$ і $F_2 = pS_2$. Такі ж по модулю, але протилежно направлені зовнішні сили повинні бути прикладені до поршнів для утримання системи в рівновазі. Таким чином,

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{или} \quad F_2 = F_1 \frac{S_1}{S_2}. \tag{1.7.5}$$

Якщо $S_2 >> S_1$, то $F_2 >> F_1$. Пристрої такого роду називають *гідравлічними машинами* (рис. 1.7.2).

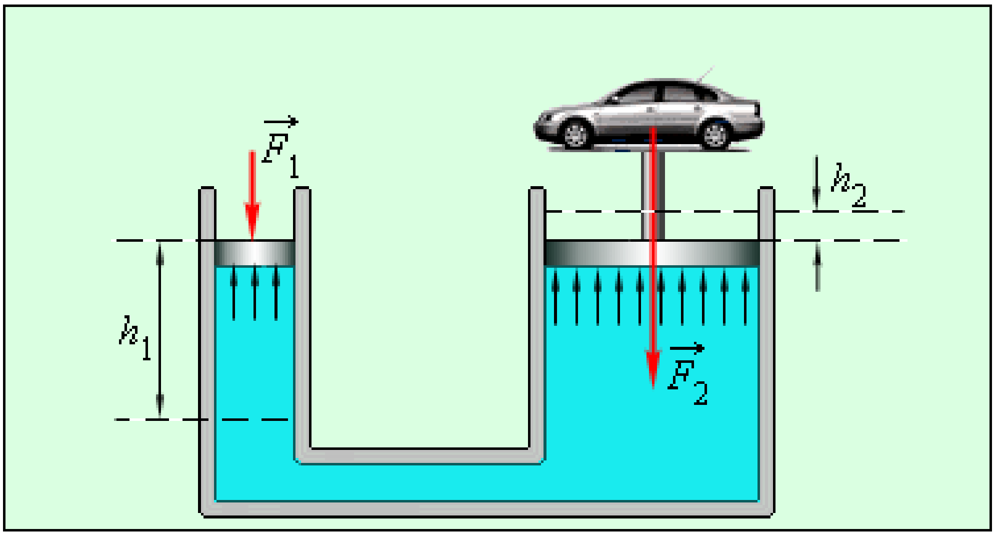


Рис. 1.7.2. **Гідравлічна машина**

Вони дозволяють отримати значний виграш в силі. Якщо поршень у вузькому циліндрі перемістить вниз під дією зовнішньої сили F_1 на відстань h_1, то поршень в широкому циліндрі переміститься на відстань $h_2 = h_1 \dfrac{S_2}{S_1}$, піднімаючи важкий вантаж. Таким чином, виграш у силі в n раз обов'язково супроводжується таким же програшем у відстані. При цьому твір сили на відстань залишається незмінним: $F_1h_1 = F_2h_2$. Це правило виконується для будь-яких ідеальних машин, в яких не діють сили тертя. Воно називається *«золотим правилом механіки»*.

Гідравлічні машини для підйому вантажів називаються домкратами. Вони широко застосовуються також як гідравлічні преси. В якості рідини зазвичай використовуються мінеральні масла.

1.7.2. Рух рідин або газів. Рівняння Бернуллі

Рух рідин або газів являє собою складне явище. Для його опису використовуються різні спрощуючи припущення (моделі). У простій моделі рідина (або навіть газ) передбачається *нестисливими* і ідеальними (тобто без внутрішнього тертя між рухомими шарами). При русі ідеальної рідини не відбувається перетворення механічної енергії у внутрішню, тому виконується закон збереження механічної енергії. Наслідком цього закону для стаціонарного потоку ідеальної і нестисливої рідини є рівняння, що було одержано Д. Бернуллі (1700-1782). *Стаціонарним* прийнято називати такий потік рідини, в якому не утворюються вихори. У стаціонарному потоці частки рідини переміщаються по незмінним в часі траєкторіях, які називаються лініями струму. Досвід показує, що стаціонарні потоки виникають тільки при досить малих швидкостях руху рідини.

Розглянемо стаціонарний рух ідеальної нестисливої рідини по трубі змінного перерізу (рис. 1.7.3). Різні частини труби можуть знаходитися на різних висотах.

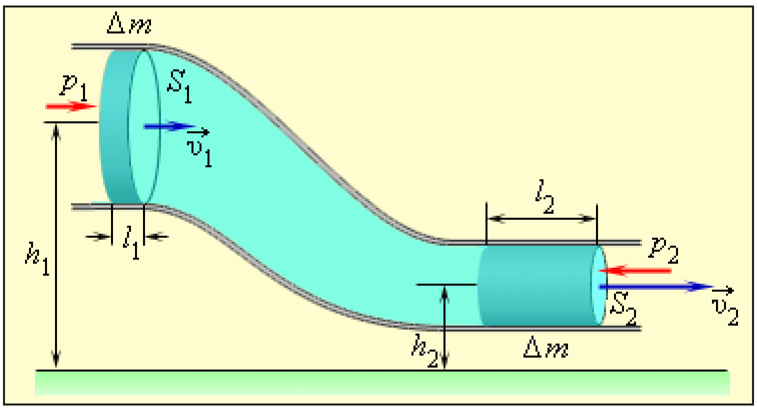


Рис. 1.7.3. **Течія ідеальної рідини по трубі змінного перерізу**

За проміжок часу Δt рідина в трубі перетином S_1 переміститься на $l_1=v_1\Delta t$, а в трубі перетином S_2 - на $l_2 = v_2\Delta t$, де v_1 і v_2 - швидкості частинок рідини в трубах. Якщо рідина нестислива, то об'єм рідини, яка пропливла через перетини S_1 і S_2, однаковий, тобто

$$l_1S_1=l_2S_2, \text{ або } v_1S_1=v_1S_1.$$

Таким чином, при переході рідини з ділянки труби з великим перетином на ділянку з меншим перетином швидкість течії зростає, тобто рідина рухається з прискоренням. Отже, на рідину діє сила. У горизонтальній трубі ця сила може виникнути тільки через різницю тисків у широкій і вузький ділянках труби. Тиск у широкій ділянці труби має бути більше, ніж в вузькій ділянці. Якщо ділянки труби розташовані на різній висоті, то прискорення рідини викликається спільною дією сили тяжіння і сили тиску.

Так як рідина передбачається ідеальною, то вона тече по трубі без тертя. Тому до її течії можна застосувати закон збереження механічної енергії.

При переміщенні рідини сили тиску здійснюють роботу

$$A = p_1S_1l_1 - p_2S_2l_2 = p_1S_1v_1\Delta t - p_2S_2v_2\Delta t = (p_1 - p_2)\Delta V. \qquad (1.7.6)$$

Зміни, що відбулися за час Δt в виділеної частині рідини, укладеної між перетинами S_1 і S_2 в початковий момент часу, при стаціонарному перебігу зводяться до переміщення маси рідини $\Delta m = \rho\Delta V$ (ρ - густина рідини) з однієї частини труби перетином S_1 в іншу частину перетином S_2 (затемненні обсяги на рис. 1.7.4). Закон збереження механічної енергії для цієї маси має вигляд

$$W_2 - W_1 = A = (p_1 - p_2)\Delta V, \qquad (1.7.7)$$

де W_1 і W_2 - повні механічні енергії маси Δm в поле тяжіння

$$W_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1; \quad W_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2. \qquad (1.7.8)$$

Тоді отримуємо

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \qquad (1.7.9)$$

Це і є *рівняння Бернуллі*. З нього випливає, що сума

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \mathrm{const} \qquad (1.7.10)$$

залишається незмінною вздовж всієї труби. Величина p – статичний тиск в рідині. Рівняння Бернуллі виражає закон збереженні енергії стосовно до сталої течії ідеальної рідини.

З рівняння Бернуллі випливає, що тиск в рідині, що тече по горизонтальній трубі змінного перерізу, більше в тих перетинах потоку, в яких швидкість її руху менша, і навпаки, тиск менше в тих перетинах, в яких швидкість більше.

1.7.3. В'язкість (внутрішнє тертя)

В'язкість (внутрішнє тертя) – це властивість реальних рідин чинити опір переміщенню однієї частини рідини щодо іншої.

При переміщенні одних шарів реальної рідини щодо інших виникають сили внутрішнього тертя, спрямовані по дотичній до поверхні шарів. Дія цих сил виявляється в тому, що з боку шару, що рухається швидше, на шар, що рухається повільніше, діє прискорююча сила. З боку ж шару, що рухається повільніше, на шар, що рухається швидше, діє гальмівна сила.

Сила внутрішнього тертя *F* тим більше, чим більше площа поверхні шару *S*, і залежить від того, наскільки швидко змінюється швидкість течії рідини при переході від шару до шару.

Нехай є два шари, що віддалені один від одного на відстані Δx і рухаються зі швидкостями v_1 і v_2. При цьому $v_1 - v_2 = \Delta v$. Величина $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ називається градієнтом швидкості. Вона показує, як швидко змінюється швидкість при переході від шару до шару в напрямку *x*, перпендикулярному напрямку руху шарів.

Модуль сили внутрішнього тертя буде дорівнювати:

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S, \tag{1.7.11}$$

де η – коефіцієнт пропорційності, що залежить від природи рідини, і називається динамічною в'язкістю (або просто в'язкістю).

Одиниця в'язкості – паскаль·секунда (Па·с). 1 Па·с дорівнює динамічній в'язкості середовища, в якому при ламінарній течії і градієнті швидкості з модулем, рівним 1 м/с на 1 м, виникає сила внутрішнього тертя 1 Н на 1 м^2 поверхні торкання шарів (1 Па·с=1 Н·с/м^2).

Експериментально для визначення в'язкості рідини можна використовувати метод Стокса, заснований на вимірюванні швидкості невеликих тіл сферичної форми, що повільно рухаються в рідині.

1.7.4. Ламінарна і турбулентна течія

Існує два режими течії рідин.

Течія називається *ламінарною*, якщо вздовж струму кожен виділений тонкий шар ковзає щодо сусідніх, не змішуючись з ними. Ламінарна течія рідини спостерігається при невеликих швидкостях її руху. Зовнішній шар рідини, що примикає до поверхні труби, в якій вона тече, через дію сил молекулярного зчеплення прилипає до неї і залишається нерухомим. Швидкості наступних шарів тим більше, чим більше їх відстань до поверхні труби, і найбільшу швидкість має шар, який рухається уздовж осі труби.

Течія називається *турбулентною* (вихровою), якщо вздовж потоку відбувається інтенсивне утворення вихрів і перемішування рідини. При турбулентній течії частки рідини набувають складові швидкостей, перпендикулярні до течії, тому вони можуть переходити з одного шару в інший. Швидкість частинок рідини швидко зростає в міру віддалення від поверхні труби, потім змінюється досить незначно. Оскільки частки рідини переходять з одного шару в інший, то їх швидкості в різних шарах мало відрізняються. Через великий градієнт швидкостей у поверхні труби відбувається утворення вихорів.

Характер течії визначається безрозмірною величиною *Re*, яку називають числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot d}{\eta} = \frac{\bar{v} \cdot d}{\nu}, \qquad (1.7.12)$$

де η - кінематична в'язкість; ρ - густина рідини; $\bar{v}$ - середня по перерізу труби швидкість рідини; *d* - характерний лінійний розмір, наприклад, діаметр труби.

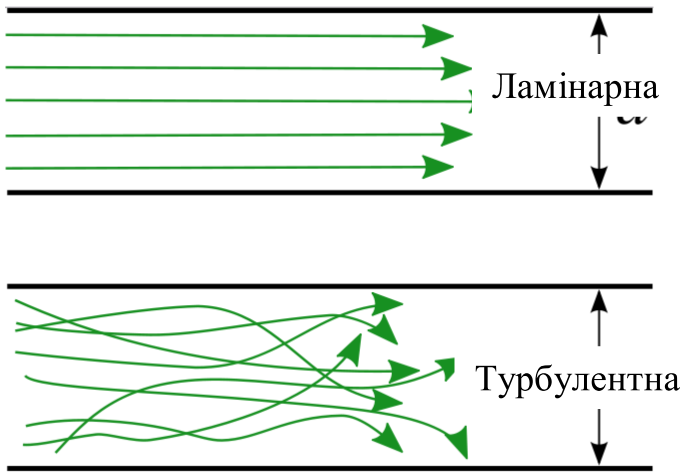


Рис. 1.7.4. **Ламінарна і турбулентна течія рідини**

При малих значеннях числа Рейнольдса ($Re \leq 1000$) спостерігається ламинарна течія, перехід від ламінарної течії до турбулентної відбувається в області $1000 \leq Re \leq 2000$, а при $Re \geq 2300$ (для гладких труб) течія - турбулентна. Якщо число Рейнольдса однаково, то режим течії різних рідин (газів) в трубах різних перетинів однаковий.

На закінчення слід зазначити, що всі висновки аналізу будуть справедливими не тільки для рідин, але і газів. Це означає, що подібному розгляду можна піддати і питання оптимальної побудови форми автомобільного кузова з точки зору аеродинамічного обтікання. Практично, в першу чергу, це досягнення максимуму швидкості і економічності сучасного автомобіля.

Завдання для самопідготовки

1. Чим обумовлений гідростатичний тиск?
2. Яку рідину вважають ідеальною і нестисливою?
3. Що визначає число Рейнольдса?
4. Суцільне однорідне тіло, занурене у рідину з густиною ρ_1, важить P_1, а в рідину з густиною ρ_2 – P_2. Знайти густину речовини тіла.

Відповідь: $\rho = \dfrac{P_2\rho_1 - P_1\rho_2}{P_2 - P_1}$.

5. Дерев'ний брусок квадратного перерізу з ребром a, масою m і довжиною l занурений у воду вертикально. Однак, він відразу переходить у горизонтальний стан. Поясніть явище.
6. Залізобетонна паля мосту через річку забита у дно. Чи діє на неї сила Архімеда?
7. Із труби перерізом S_1 = 20 см^2 б'є вертикально угору водяний струмінь. Знайти переріз струменя на висоті h = 20 м над отвором труби. Расход води із труби дорівнює Q = 50 г/с.

Відповідь: 33 см^2.

Лекція 8. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

План заняття

1.8.1. Гармонійні коливання
1.8.2. Маятники
1.8.3. Згасаючі коливання
1.8.4. Вимушені коливання
1.8.5. Механічні хвилі. Звук

1.8.1. Гармонійні коливання

Коливання - рухи, що мають той або інший ступень повторюваності в часі.

Коливання називаються періодичними, якщо значення фізичних величин, що змінюються в процесі коливання, повторюються через рівні проміжки часу.

Період коливання T - найменший проміжок часу, після закінчення якого повторюються значення всіх величин, що характеризують коливальний рух. За цей час відбувається одне повне коливання.

Частота періодичних коливань ν - число повних коливань, які відбуваються за одиницю часу (за 1 с). Одиниця виміру частоти - **герц (Гц).** Один герц - це частота таких коливань, при яких за одну секунду відбувається одне повне коливання: 1Гц=1/с.

Частота коливань пов'язана з періодом коливань T співвідношеннями

$$\nu = \frac{1}{T}. \qquad (1.8.1)$$

Циклічна, або *кругова частота* коливань

$$\omega = 2\pi\nu, \text{ або } \omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (1.8.2)$$

Вільні коливання - коливання, що виникають у системі (що не піддається дії змінних зовнішніх сил), в результаті якого-небудь одноразового початкового відхилення цієї системи від стану стійкої рівноваги. Необхідні умови для виникнення вільних коливань:

- наявність енергії, надлишкової в порівнянні з енергією системи в положенні стійкої рівноваги;

- наявність інертності;

- робота сили тертя в системі повинна бути значно менше надлишкової енергії.

Коливання називаються *гармонійними*, якщо фізична величина, що коливається, змінюється з часом за законом:

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{1.8.3}$$

або

$$x = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{1.8.4}$$

де x - зміщення точки, що коливається, від положення рівноваги; t - час; A - амплітуда коливання; ω - кутова частота; φ_0 - початкова фаза.

Можно показати, що вирази (1.8.3) і (1.8.4) задовляють диференційному рівняння у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{1.8.5}$$

Фаза коливання - величина, що визначає значення $\omega t + \varphi_0$ в даний момент часу.

Початкова фаза - фаза в початковий момент часу, тобто фаза коливань в момент $t = 0$.

Амплітуда коливання A - найбільше абсолютне значення фізичної величини, що коливається (максимальне зміщення від положення рівноваги).

Циклічна частота, частота і період задаються параметрами системи, тоді як амплітуда і початкова фаза – початковими умовами.

Швидкість точки в довільний момент часу знайдемо, взявши першу похідну від x по формулі (1.8.4) за часом

$$V = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{1.8.6}$$

Максимальне значення швидкості (амплітуда швидкості) дорівнює $V_{\max} = \omega A$.

Прискорення точки

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0). \tag{1.8.7}$$

Максимальне значення прискорення (амплітуда прискорення) дорівнює $a_{\max} = \omega^2 A$.

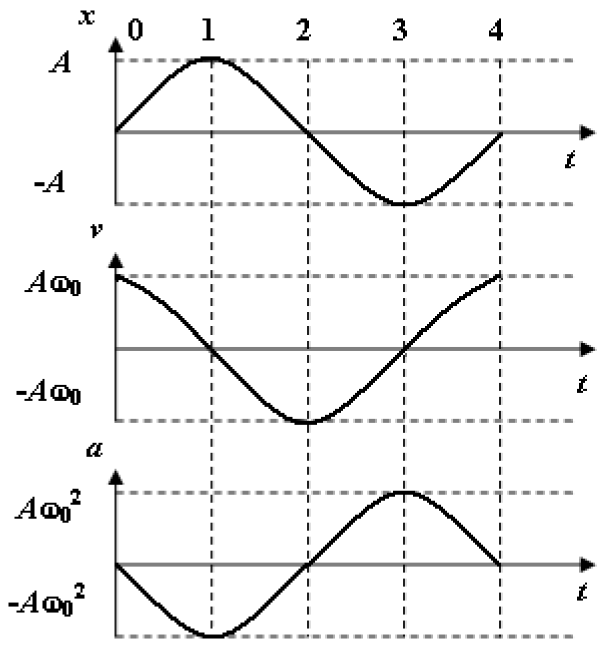


Рис. 1.8.1. **Залежності кінематичних характеристик від часу**

Сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює:

$$F = ma = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) \ . \qquad (1.8.8)$$

Порівнявши з (1.8.4), отримаємо

$$F = -m\omega^2 x \,. \qquad (1.8.9)$$

Отже, сила пропорційна зміщенню матеріальної точки з положення рівноваги і спрямована в протилежний бік. Така залежність сили від зміщення характерна для пружної сили. Тому сили іншої фізичної природи, що задовольняють того ж виду залежності, називаються *квазіпружними*.

При вільних механічних коливаннях кінетична і потенційна енергії змінюються періодично. При максимальному відхиленні тіла від положення рівноваги його швидкість дорівнює нулю, а отже, і кінетична енергія звертається в нуль. У цьому положенні потенційна енергія тіла, що коливається, досягає максимального значення.

Коли тіло при своєму русі проходить через положення рівноваги, його швидкість максимальна. У цей момент воно має максимальну кінетичну і мінімальну потенційну енергію. Збільшення кінетичної енергії відбувається за рахунок зменшення потенційної енергії. При подальшому русі починає збільшуватися потенційна енергія за рахунок убутку кінетичної енергії і т. д.

Таким чином, при гармонійних коливаннях відбувається періодичне перетворення кінетичної енергії в потенційну і навпаки.

Повна енергія матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання,

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2}. \tag{1.8.10}$$

1.8.2. Маятники

Пружинний маятник - це тіло, що підвішене на пружині. Період коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{1.8.11}$$

де m - маса тіла; k - жорсткість пружини.

Математичним маятником називається матеріальна точка, підвішена на невагомою нерозтяжної нитки, яка здійснює коливання у вертикальній площині під дією сили тяжіння (у цьому випадку матеріальна точка - тіло, розміри якого малі порівняно з довжиною нитки).

Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1.8.12}$$

де l - довжина маятника; g - прискорення вільного падіння.

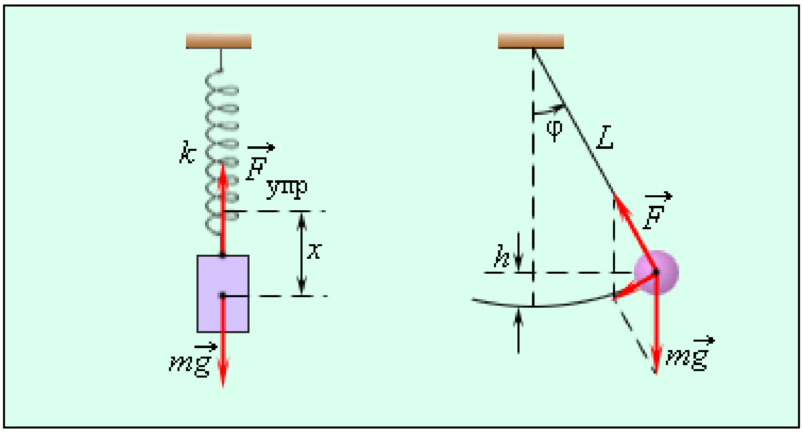


Рис. 1.8.2. **Пружинний і математичний маятники**

Фізичний маятник - тверде тіло, що має можливість здійснювати коливання відносно горизонтальної осі, яка не проходить через центр ваги тіла.

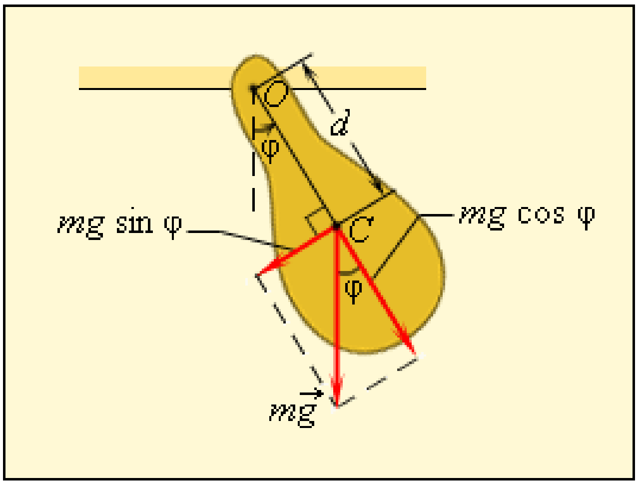


Рис.1.8.3. **Фізичний маятник**

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\,, \tag{1.8.13}$$

де J - момент інерції тіла, що коливається, відносно осі коливань; d - відстань центру мас маятника від осі коливань.

Період *крутильних коливань* тіла, підвішеного на пружній нитці

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}\,, \tag{1.8.14}$$

де J - момент інерції тіла відносно осі, що збігається з пружною ниткою; k - жорсткість пружної нитки, що дорівнює відношенню пружного моменту, який виникає при закручуванні нитки, до кута, на який нитка закручується.

1.8.3. Згасаючі коливання

Згасаючими коливаннями називаються коливання, енергія яких зменшується з плином часу.

Рівняння затухаючих коливань

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi), \tag{1.8.15}$$

де $A(t)$ - амплітуда згасаючих коливань в момент часу t; ω - їх циклічна частота.

Циклічна частота згасаючих коливань знаходиться за формулою

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,, \tag{1.8.16}$$

де δ - коефіцієнт загасання ($[\delta] = 1/c^2$).

Залежність амплітуди згасаючих коливань від часу

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}, \tag{1.8.17}$$

де A_0 - амплітуда коливань у момент $t = 0$.

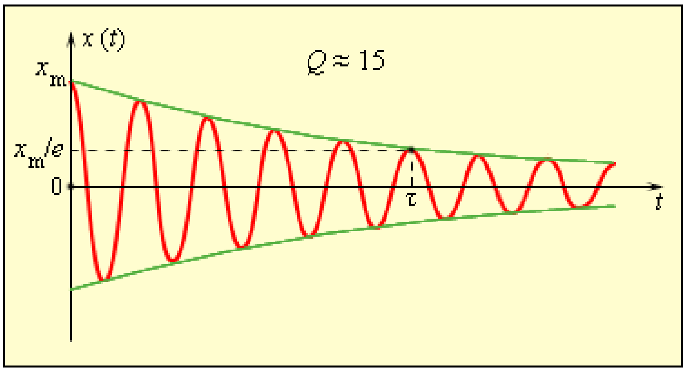


Рис. 1.8.4. **Графік згасаючих коливань**

Параметрами згасаючих коливань також являються:

- *час релаксації* $\tau = 1/\delta$ – час, за який амплітуда коливань зменшується у $e \approx 2{,}718$ разів;
- *декремент загасання* $\Delta = \dfrac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$;
- *логарифмічний декремент загасання* $\theta = \ln\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$.

Останні два параметри характеризують ступінь зменшення амплітуди за період. Енергетичні втрати коливальної системи характеризуються її *добротністю,* яка визначається відношенням набутої енергії до середнього значення втраченої за період

$$Q = 2\pi\frac{W}{\langle W_в\rangle} = \frac{\pi}{\delta T}.$$

1.8.4. Вимушені коливання

Вимушеними коливаннями називаються незгасаючі коливання системи, які викликаються дією на неї зовнішніх сил $F(t)$, що періодично змінюються з плином часу: $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

Прикладом механічних вимушених коливань є коливання пружинного маятника, рівняння руху якого можна звести до лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t. \qquad (1.8.18)$$

Рішенням рівняння (1.8.18) є вираз

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (1.8.19)$$

де A - амплітуда вимушених коливань

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \qquad (1.8.19)$$

φ - фаза

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (1.8.20)$$

Резонанс

Резонанс - явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні циклічної частоти змушуючої сили до значенню резонансної частоти (рис. 1.8.5).

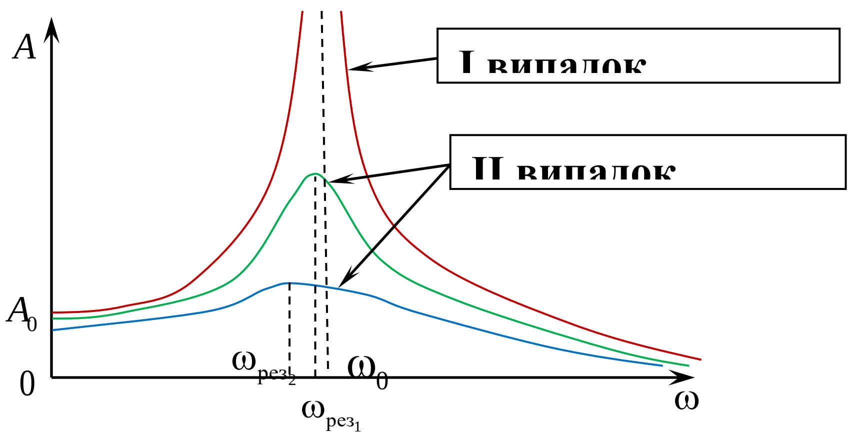


Рис. 1.8.5. **Залежність амплітуди від частоти при резонансі**

I випадок. Відсутність загасання (тертя немає, ідеальний випадок) $\delta = 0$. У цьому випадку резонансна частота збігається з частотою власних коливань $\omega = \omega_{рез} = \omega_0$; амплітуда коливань необмежено зростає: $A \to \infty$.

II випадок. Загасання існує. У цьому випадку резонансна частота визначається за формулою

$$\omega = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,; \qquad (1.8.21)$$

резонансна амплітуда

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \qquad (1.8.22)$$

Чим менше тертя, тим більше амплітуда вимушених коливань при резонансі.

1.8.5. Механічні хвилі. Звук

Якщо в якому-небудь місці твердого, рідкого або газоподібного середовища порушені коливання частинок, то внаслідок взаємодії атомів і молекул середовища коливання починають передаватися від однієї точки до іншої з кінцевою швидкістю. Процес поширення коливань в середовищі називається *хвилею*.

Механічні хвилі бувають різних видів. Якщо у хвилі частинки середовища отримують зміщення в напрямку, перпендикулярному напрямку поширення, то хвиля називається *поперечною*. Прикладом хвилі такого роду можуть служити хвилі, що біжать по натягнутому гумовому джгуту (рис.1.8.6) або по струні.

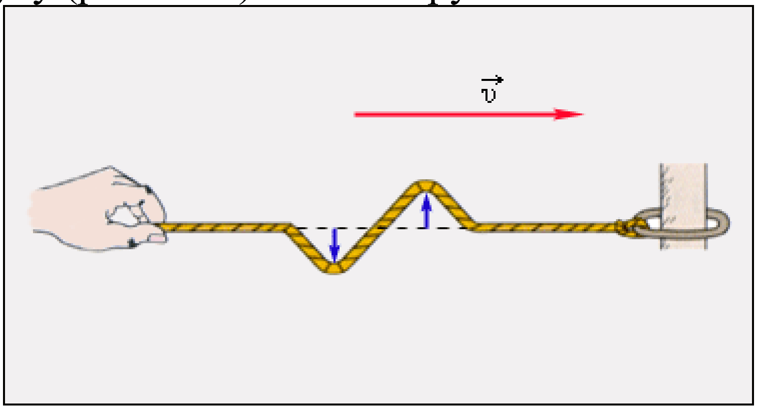


Рис. 1.8.6. **Поширення поперечного хвильового імпульсу по натягнутому гумовому джгуту**

Якщо зсув частинок середовища відбувається в напрямі поширення хвилі, то хвиля називається *поздовжньою*. Хвилі в пружному стрижні (рис. 1.8.7), або звукові хвилі в газі є прикладами таких хвиль.

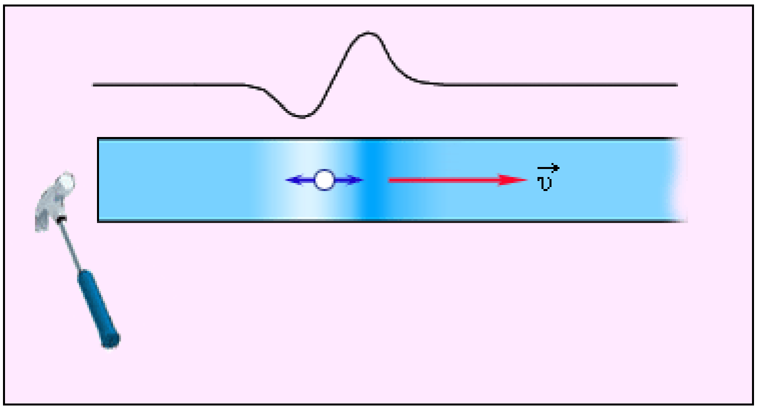


Рис. 1.8.7. **Поширення поздовжнього хвильового імпульсу по пружному стержню**

Хвилі на поверхні рідини мають як поперечну, так і поздовжню компоненти.

Як в поперечних, так і в поздовжніх хвилях перенесення речовини в напрямі поширення хвилі не відбувається. У процесі поширення частки середовища лише здійснюють коливання біля положень рівноваги. Однак хвилі переносять енергію коливань від однієї точки середовища до іншої.

Поздовжні механічні хвилі можуть поширюватися в будь-яких середовищах - твердих, рідких і газоподібних.

В рідинах і газах пружна деформація зсуву не виникає. Отже, поперечні хвилі не можуть існувати в рідкому або газоподібному середовищах.

Значний інтерес для практики представляють прості *гармонійні* або *синусоїдальні* хвилі. Вони характеризуються амплітудою A коливання частинок, частотою ν і довжиною хвилі λ. Синусоїдальні хвилі поширюються в однорідних середовищах з деякою постійною швидкістю V.

Зміщення $y(x,t)$ частинок середовища з положення рівноваги в синусоїдальної хвилі залежить від координати x на осі Ox, вздовж якої поширюється хвиля, і від часу t за законом:

$$y(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) = A\cos\left(\omega t - kx\right), \qquad (1.8.23)$$

де $k = \dfrac{\omega}{V}$ - так зване хвильове число, $\omega = 2\pi\nu$ - кругова або циклічна частота.

Довжиною хвилі λ називають відстань між двома сусідніми точками, що коливаються в однакових фазах. Відстань, рівну довжині хвилі λ, хвиля пробігає за період T, отже, $\lambda = VT$, де V - швидкість поширення хвилі.

Звернемо увагу на те, що рівняння

$$y(x,t) = A\cos\left(\omega t + kx\right) \tag{1.8.24}$$

описує синусоїдальну хвилю, що поширюється в напрямку, протилежному напрямку осі Ox, зі швидкістю $V = \dfrac{\omega}{k}$.

В *біжучій* синусоїдальній хвилі кожна частка середовища здійснює гармонійні коливання з деякою частотою ω. Тому, як і у випадку простого коливального процесу, середня потенційна енергія, що запасена в деякому обсязі середовища, дорівнює середній кінетичної енергії в тому ж обсязі і пропорційна квадрату амплітуди коливань. Звідси випливає, що при поширенні біжучої хвилі виникає потік енергії, пропорційний швидкості хвилі і квадрату її амплітуди.

Якщо хвилі, що біжать по струні в зустрічних напрямках, мають синусоїдальну форму, то за певних умов вони можуть утворити *стоячу хвилю.*

Нехай струна довжини l закріплена так, що один з її кінців знаходиться в точці $x = 0$, а другий - в точці $x_1 = L$ (рис. 1.8.9). В струні створено натяг T.

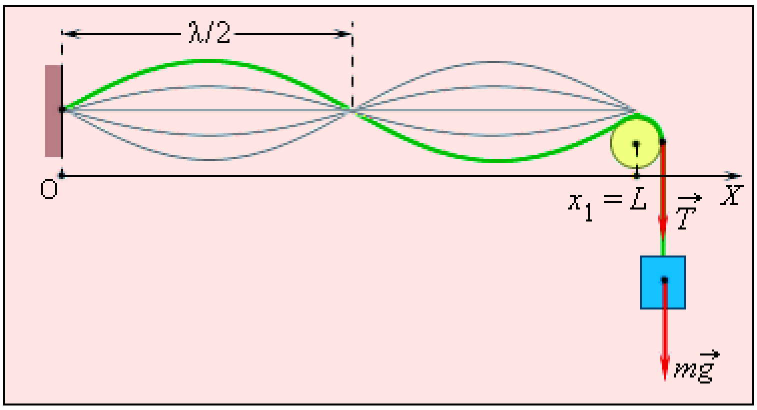


Рис. 1.8.9. **Виникнення стоячої хвилі в струні, що закріплена на обох кінцях**

По струні одночасно поширюються в протилежних напрямках дві хвилі однієї і тієї ж частоти: $y_1(x,t) = A\cos(\omega t+kx)$ – хвиля, що біжить справа наліво; $y_2(x,t) = -A\cos(\omega t-kx)$ – хвиля, що біжить зліва направо. У точці $x = 0$ (один із закріплених кінців струни) падаюча хвиля y_1 в результаті відображення породжує хвилю y_2. При відбитті від нерухомо закріпленого кінця відбита хвиля виявляється в протифазі з падаючою. Згідно з принципом суперпозиції, який є експериментальним фактом, коливання, викликані зустрічними хвилями в кожній точці струни, складаються. Таким чином, результуюче коливання в кожній точці дорівнює сумі коливань, викликаних хвилями y_1 і y_2 окремо. Отже,

$$y=y_1(x, t) + y_2(x, t) = (-2A\sin \omega t)\cdot \sin kx \qquad (1.8.25)$$

Це і є стояча хвиля. В стоячій хвилі існують нерухомі точки, які називаються *вузлами*. Посередині між вузлами знаходяться точки, які коливаються з максимальною амплітудою. Ці точки називаються *пучностями*. Відстань між сусідніми вузлами або сусідніми пучностями дорівнює $\lambda/2$ і називається довжиною стоячої хвилі.

Обидва нерухомих кінця струни повинні бути вузлами. Наведена вище формула задовольняє цій умові на лівому кінці ($x=0$). Для виконання цієї умови і на правому кінці ($x=L$) необхідно, щоб $kL = n\pi$, де n - будь-яке ціле число. Це означає, що стояча хвиля в струні виникає не завжди, $L = n\frac{\lambda_n}{2}$ а тільки в тому випадку, якщо довжина L струни дорівнює цілому числу довжин півхвиль

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad (1.8.26)$$

або

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots). \qquad (1.8.27)$$

Набору значень λ_n довжин хвиль відповідає набір можливих частот ν_n:

$$\nu_n = \frac{V}{\lambda_n} = n\frac{V}{2L} = n\nu_1, \qquad (1.8.28)$$

де V - швидкість поширення поперечних хвиль по струні. Кожна з частот ν_n і пов'язаний з нею тип коливання струни називається нормальною модою. Найменша частота ν_1 називається основною частотою, всі інші називаються гармоніками. На рис.1.8.9 зображена нормальна мода для $n = 2$.

В стоячій хвилі немає потоку енергії. Коливальна енергія, ув'язнена в відрізку струни між двома сусідніми вузлами, не транспортується в інші частини струни. У кожному такому відрізку відбувається періодичне (двічі за період T) перетворення кінетичної енергії в потенційну і назад як у звичайній коливальній системі. Але на відміну від вантажу на пружині або маятника, у яких є єдина власна частота, струна має нескінченне число власних (резонансних) частот ν_n.

Звуковими хвилями або просто *звуком* прийнято називати хвилі, що сприймаються людським вухом. Діапазон звукових частот лежить в межах приблизно від 20 Гц до 20 кГц. Хвилі з частотою менше 20 Гц називаються *інфразвуком,* а з частотою більше 20 кГц - *ультразвуком.* Хвилі звукового діапазону можуть росповсюдживатися не тільки в газі, а й в рідини (поздовжні хвилі) і в твердому тілі (поздовжні і поперечні хвилі). Однак хвилі в газоподібному середовищі - середовищі нашого існування - становлять особливий інтерес. Вивченням звукових явищ займається розділ фізики, який називають *акустикою.*

При сприйнятті різних звуків людське вухо оцінює їх передусім за *рівнем гучності*, що залежить від потоку енергії або інтенсивності звукової хвилі. Вплив звукової хвилі на барабанну перетинку залежить від *звукового тиску*, тобто амплітуди p_0 коливань тиску у хвилі. *Поріг чутності* відповідає значенню p_0 порядку 10^{-5} Па. При такому слабкому звуці молекули повітря коливаються в звуковій хвилі з амплітудою всього лише 10^{-9} м! *Больовий поріг* відповідає значенню p_0 порядку 10 Па. Таким чином, людське вухо здатне сприймати хвилі, в яких звуковий тиск змінюється в мільйон разів.

Ще однією характеристикою звукових хвиль, визначальною їх слухове сприйняття, є *висота звуку*. Коливання в гармонійній звуковій хвилі сприймаються людським вухом як музичний тон. Так, наприклад, діапазон найбільш низького чоловічого голосу - баса - простягається приблизно від 80 до 400 Гц, а діапазон високого жіночого голосу - сопрано - від 250 до 1050 Гц.

Коли говорять про частоту звуку, видаваного струнами будь-якого струнного музичного інструменту, то мається на увазі частота ν_1 основного тону. Але в коливаннях струн можуть бути присутні і гармоніки, частоти ν_n яких задовольняють співвідношенню: $\nu_n = n\nu_1$,

(n = 1, 2, 3 ...). Тому струна, що звучить, може випромінювати цілий спектр хвиль з кратними частотами. Амплітуди A_n цих хвиль залежать від способу порушення струни (смичок, молоточок); вони визначають музичне забарвлення звуку або *тембр*.

Завдання для самопідготовки

1. Які коливання називають гармонійними? Визначте їх параметри.

2. Наведіть приклади маятників і їх характеристик.

3. Дайте характеристику згасаючим коливанням.

4. Що таке резонанс, від чого він залежить?

5. Сформулюйте визначення хвильового процесу і його видів.

6. Дайте опис звуковим хвилям.

7. Визначити максимальні значення швидкості і прискорення точки, що здійснює гармонічні коливання з циклічною частотою $\omega = \pi / 2$ с$^{-1}$ і амплітудою А = 3 см.

Відповідь: 4,71 см/с, 7.40 см/с^2.

8. Точка виконує гармонічні коливання. Найбільше зміщення x_{max} точки дорівнює 10 см, найбільша швидкість v_{max} = 20 см / с. Знайти циклічну частоту ω коливань і максимальне прискорення точки.

Відповідь: 2 с$^{-1}$, 40 см/с^2.

9. Коливання матеріальної точки масою m = 0,1 г відбуваються згідно рівняння $x = A\cos\omega t$, де A = 5 см; ω = 20 с$^{-1}$. Визначити максимальні значення повертаючої сили F_{max} і кінетичної енергії W_{max}.

Відповідь: 2 мН, 50 мкДж.

10. Математичний маятник довжиною l_1 = 40 см і фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стержня довжиною l_2 = 60 см синхронно коливаються відносно однієї і тієї ж горизонтальної осі. Визначити відстань a центру мас стержня від осі коливань.

Відповідь: 10 см.

11. Амплітуда затухаючих коливань маятника за час t_1 = 5 хв зменшилася в два рази. За який час t_2, рахуючи від початкового моменту, амплітуда зменшиться у вісім разів?

Відповідь: 15 хв.

РОЗДІЛ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

Лекція 1

ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

План заняття

1. Рівняння стану ідеального газу
2. Основне рівняння молекулярно - кінетичної теорії газів
3. Наслідки з основного рівняння
4. Закон Дальтона

2.1.1. Рівняння стану ідеального газу

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовини, виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень. За цими уявленнями, будь-яке тіло (тверде, рідке або газоподібне) складається з великої кількості молекул або атомів. Цілий ряд явищ доводить, що ці частинки перебувають у хаотичному безперервному русі. Приклади цього: розширення газу в посудині, випаровування рідини, дифузія і т. п.

Молекулярно - кінетична теорія пояснює властивості тіл, які спостерігаються на досліді (тиск, температура і т. д.), як сумарний результат взаємодії молекул. При цьому, якщо в механіці вивчалася найпростіша форма руху - відносне переміщення тіл, то в молекулярній фізиці вивчається молекулярний рух, що не зводиться до механічного. Незважаючи на те, що кожна частинка рухається за законами механіки, властивості величезних зібрань молекул не можуть бути пояснені тільки найпростішими механічними закономірностями. Тому, для опису закономірностей молекулярного руху використовуються методи статистичної фізики, що описують не рух окремих молекул, а лише такі середні величини, які характеризують рух величезної сукупності частинок. Залежно від агрегатного стану (газ, рідина, тверде тіло), речовина по-різному веде себе при зовнішніх впливах. Отже, при цьому діють міжмолекулярні сили, тобто сили взаємного притягання і відштовхування між частинками. Ці сили діють на мізерно малих відстанях близько двох – трьох діаметрів молекул і з збільшенням відстані убувають до нуля.

Таким чином, вивчаючи властивості речовини, необхідно, крім теплового хаотичного руху, враховувати міжмолекулярні сили.

Вивчення основних уявлень молекулярної фізики проведемо на найпростішої моделі - *ідеальному газі*. Ідеальний газ являє собою сукупність матеріальних точок, які не взаємодіють між собою і володіють лише кінетичної енергією.

Сукупність усіх властивостей тіла буде називатися *станом тіла*. Величини, що характеризують стан тіла і змінюються під впливом зовнішніх умов, називаються *параметрами стану*. Стан даної маси ідеального газу характеризується трьома параметрами: об'ємом V ($[V]$ = $м^3$), температурою T ($[T]$ = К), і тиском p ($[p]$ = Па).

Якщо температура в різних точках тіла неоднакова, то цьому тілу не можна приписати певну температуру. Такий стан називається *нерівноважним*. Це ж відноситься і до тиску. Якщо тіло надати самому собі і ізолювати від інших тіл, то ці параметри вирівнюються.

Стан системи, при якому всі параметри системи мають певні значення, що залишаються при зміні зовнішніх умов постійними як завгодно довго, називається *рівноважним станом*.

Ізопроцеси в газах

Інтерес представляють процеси, в яких один з параметрів постійної маси газу (p, V або T) залишається незмінним. Такі пропроцеси називаються ізопроцессамі.

Ізотермічний процес – це квазістатичний процес, що протікає при постійній температурі T (T = const). Рівняння ізотермічного процесу називають *законом Бойля-Маріотта*: при постійній температурі T і незмінному кількості речовини ν в посудині добуток тиску p газу на його об'єм V має залишатися постійним, тобто

$$PV = \text{const}; \text{ або } P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2. \qquad (2.1.1)$$

На площині (p, V) ізотермічні процеси зображуються при різних значеннях температури T сімейством гіпербол, які називаються изотермами. Так як коефіцієнт пропорційності в цьому співвідношенні збільшується зі зростанням температури, ізотерми, що відповідають більш високим значенням температури, лежать на графіку вище ізотерм, відповідних меншим значенням температури.

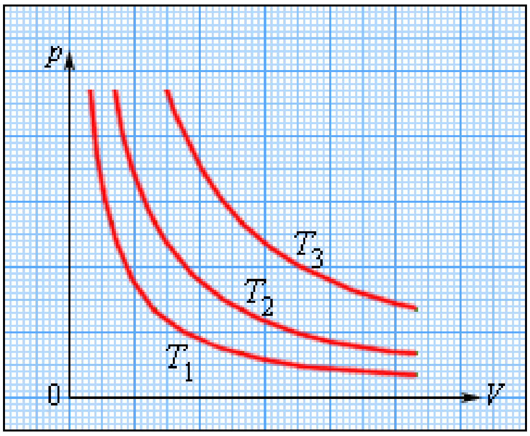


Рисунок 2.1.1.
Сімейство изотерм на площині (p, V). $T_3 > T_2 > T_1$

Ізохорний процес (V = const). Ізохорний процес - це процес квазістатичного нагрівання або охолодження газу при постійному об'ємі V і за умови, що кількість речовини ν в посудині залишається незмінним. Експериментально залежність тиску газу від температури досліджував французький фізик Ж. Шарль (1787 г.). Тому рівняння ізохоричного процесу називається законом Шарля.

$$\frac{p}{T} = \text{const} \text{ або } \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{2.1.2}$$

На площині (p, T) ізохорно процеси для заданого кількістю-ства речовини ν при різних значеннях обсягу V зображуються сімейством прямих ліній, які називаються ізохорами. Більшим значенням обєму відповідають ізохори з меншим нахилом по відношенню до осі температур.

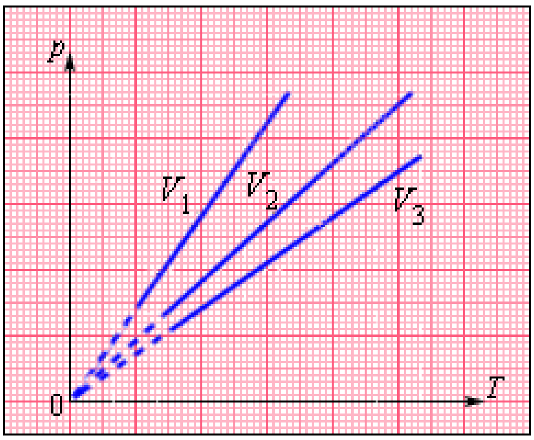


Рисунок 2.1.2
Сімейство изохор на площині (p, T). $V_3 > V_2 > V_1$

Ізобарний процес (p = const). Ізобарним процесом називають квазістатичний процес, що протікає при незмінному тиску p.

Залежність обсягу газу від температури при незмінному тиску була експериментально досліджена французьким фізиком Ж. Гей-Люссаком (1862 г.). Тому рівняння ізобарного процесу називаються вають законом Гей-Люссака.

Рівняння ізобарного процесу для деякого незмінної кількості речовини ν має вигляд:

$$\frac{V}{T} = \text{const} \text{ або } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \qquad (2.1.3)$$

На площині (V, T) ізобарні процеси при різних значеннях тиску p зображуються сімейством прямих ліній, які називаються изобарами.

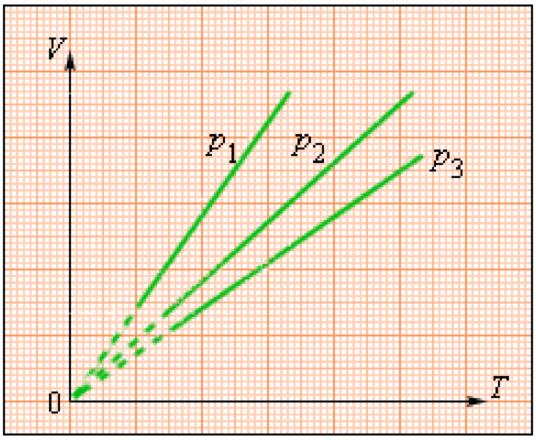


Рисунок 2.1.3
Сімейство изобар на площині V, T). $p_3 > p_2 > p_1$

Узагальнюючи експериментальні газові законі, можна отримати *об'єднаний газовий закон Клапейрона:*

$$\frac{pV}{T} = \text{const} = C \qquad (2.1.4)$$

Тут C - постійна для даної маси газу величина.

Для визначення постійної C скористаємося законом Авогадро, згідно з яким 1 моль всіх газів займають при однакових умовах (однакових температурах, тиску) один і той же об'єм. Звідси випливає, що якщо кількість газу дорівнює одному молю, то C для всіх газів буде однаковою. Вважаючи у рівнянні (2.1.4) $C = R$, можна для одного молю газу записати:

$$\frac{pV_\mu}{T} = R \qquad (2.1.5)$$

де V_μ - об'єм одного молю, R - *універсальна газова стал*а. Підрахуємо в системі СІ величину універсальної газової сталої R, виходячи з умов нормального стану газу: p = 1,01·10^5 Па; V_μ = 22,4·10^{-3} м^3/моль; T =273 K.

$$R = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \text{Па} \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3} \text{м}^3 / \text{моль}}{273\text{К}} = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Узагальнимо рівняння (2.1.5) на випадок довільної маси газу m. У цій масі міститься $\nu = \dfrac{m}{M}$ молей газу. Відповідно, у стільки ж разів зростає величина p. Тому, для довільної маси ідеального газу маємо:

$$pV = \frac{m}{M} RT \qquad (2.1.6)$$

Це і є *рівняння стану ідеального газу*, що включає всі параметри стану газу. Воно відоме як *рівняння Менделєєва - Клапейрона.*

2.1.2. Основне рівняння молекулярно - кінетичної теорії газів

Це рівняння встановлює зв'язок між макроскопічними параметрами (тиском газу в посудині) і мікроскопічним параметром - середньою кінетичною енергією газових молекул. При цьому молекули газу вважаються пружними кульками.

Якщо вважати зіткнення молекул газу зі стінками абсолютно пружним, то тиск на стінки посудини визначиться ударами частинок, які відскакують від стінок без зміни величини швидкості. Внаслідок хаотичності руху частинок, число частинок що вдаряються і їх швидкості будуть різні в окремі моменти часу. З молекулярно - кінетичної точки зору тиск, який чиниться газом на стінки посудини, являє собою середній імпульс сили від ударів молекул газу, що припадає в одиницю часу на одиницю площі стінки.

Результат обчислюваній показує, що середній тиск p газу можна визначити за формулою

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \varepsilon_{\text{пост}} \right\rangle \tag{2.1.7}$$

де – $n = \frac{N}{V}$ - число частинок в одиниці об'єму, а $\left\langle \varepsilon_{\text{пост}} \right\rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху молекул газу.

Це співвідношення є *основне рівняння молекулярно - кінетичної теорії газів*, яке встановлює зв'язок між макроскопічними параметром – тиском і мікроскопічним – середньою кінетичною енергією молекул газу.

2.1.3. Наслідки з основного рівняння

Встановимо зв'язок між середньою кінетичної енергією молекул і абсолютною температурою газу.

Перетворимо формулу основного рівняння (2.1.7), помноживши ліву і праву її частини на об'єм одного молю газу:

$$pV_\mu = \frac{2}{3} n < \varepsilon_{\text{пост}} > V_\mu . \tag{2.1.8 }$$

nV_μ - число частинок в одному молі, яке дорівнює числу Авогадро N_A, тобто $nV_\mu = N_A$.

$$pV_\mu = \frac{2}{3} < \varepsilon_{\text{пост}} > N_A \tag{2.1.9}$$

Порівняємо отриману формулу з формулою

$$pV_\mu = RT.$$

Тоді

$$\frac{2}{3} N_A < \varepsilon_{\text{пост}} >= RT ,$$

а звідси

$$\frac{2}{3} < \varepsilon_{\text{пост}} > = \frac{R}{N_A} T . \qquad (2.1.\ 10)$$

З урахуванням, того, що відношення двох постійних $\frac{R}{N_A} = k$ являє собою *постійну Больцмана,* $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$Дж/К.

Перепишемо співвідношення (2.1. 9) таким чином:

$$< \varepsilon_{\text{пост}} > = \frac{3}{2} kT , \qquad (2.1.11)$$

тобто середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу пропорційна абсолютній температурі.

Молекулярно - кінетичне тлумачення термодинамічної температури: *термодинамічна температура з точністю до постійного множника* $\frac{3}{2}k$ *дорівнює середньої кінетичної енергії поступального руху молекули.*

З формули (2.1.11) витікає фізичний зміст абсолютної температури: *вона є кількісною мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул.*

Отримаємо тепер співвідношення, що пов'язує величину середнього тиску газу з його температурою. У формулу основного рівняння (2.1.7) підставимо значення кінетичної енергії з формули (2.1.11):

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{3}{2} kT = nkT , \qquad (2.1.12)$$

тобто тиск газу пропорційний його температурі.

2.1.4. Закон Дальтона

Припустимо, що є газова суміш яка в одиниці об'єму містить n_1 молекул одного газу, n_2 - другого, n_3 - третього і т.д. Всього є N типів молекул. Так, наприклад, повітря складається з молекул кисню, азоту, вуглекислого газу і т.д.

Тоді загальне число молекул в одиниці об'єму дорівнює:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots.. + n_N . \qquad (2.1.13)$$

Підставимо значення *n* у формулу (2.1.23):

$$p = (n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_N)kT\,. \qquad (2.1.14)$$

Розкриваючи дужки, одержимо:

$$n_1 kT = p_1,\; n_2 kT = p_2 \ldots \qquad (2.1.15)$$

Тиски $p_1, p_2,.. .p_N$ називаються *парціальними тисками*.

Тиск, обумовлений молекулами якого-небудь одного газу за умови, що тільки молекули цього газу присутні в посудині в тій кількості, в який вони присутні у суміші, називаються парціальним тиском.

Формулу (2.1.25) перепишемо у вигляді:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_N = \sum_{i=1}^{N} p_i\,. \qquad (2.1.16)$$

Формула (2.1.27) виражає закон Дальтона: *тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, які створюють суміш.*

Завдання для самопідготовки

1. Який сенс вкладається в поняття «термодинамічний стан тіла»? Які параметри стану Ви знаєте?
2. Визначити густину суміші, що складає з 4 г водню і 32г кисню, при температурі *t* = 7 С і тиску *p* = 93 кПа.

Відповідь: 0,48 кг/м^3

3. У колбі об'ємом *V* = 100 см^3 знаходиться газ при температурі *T* = 300К. Наскільки знизиться тиск газу в колбі, якщо внаслідок витоку з колби вийде N = 10 молекул?

Відповідь: 4,14 кПа

4. При русі посудини з газом щодо деякої системи відліку середня швидкість руху молекул газу щодо цієї системи відліку буде більше, ніж у випадку, коли посудина нерухома. Чи не спричинить за собою рух сосудини збільшення температури газу?
5. Газ знаходиться у посудині, температура стінок якої відрізняється від температури самого газу. У якому випадку тиск газу на стінки посудини буде більше: коли температура стінок вище температури газу або коли вона буде нижче температури газу.

Лекція 2

2.2. ЕЛЕМЕНТИ КЛАСИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

План заняття

1. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями. Закон Максвелла
2. Барометрична формула. Розподіл Больцмана
3. Броунівський рух

2.2.1. Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями. Закон Максвелла

При виведенні основного рівняння МКТ молекулам ставили різні швидкості. У результаті багаторазових зіткнень швидкість кожної молекули змінюється за модулем і напрямком. Однак через хаотичного руху молекул всі напрямки руху є рівноімовірними, тобто в будь-якому напрямку в середньому рухається однакове число молекул.

Згідно молекулярно - кінетичної теорії, як би не змінювалися швидкості молекул при зіткненнях, середня швидкість молекул в газі, що знаходиться в стані рівноваги при $T=const$ залишається постійною.

Це пояснюється тим, що в газі, що знаходиться в стані рівноваги, встановлюється деякий стаціонарний розподіл молекул за швидкостями який не змінюється з часом, і який підпорядковується цілком певному статистичному закону. Цей закон теоретично виведений Максвеллом.

При виведенні закону розподілу молекул за швидкостями Максвелл припускав:

1). газ складається з дуже великого числа тотожних молекул;

2). молекули перебувають у стані хаотичного теплового руху при однаковій температурі;

3). силові поля на газ не діють.

Закон Максвелла описується деякою функцією $f(v)$ яка називається *функцією розподілу молекул за швидкостями*. Якщо розбити діапазон швидкостей молекул на малі інтервали, які дорівнюють dv, то на кожен інтервал швидкості припадатиме деяке число молекул $dN(v)$, що мають швидкість, укладену в цьому інтервалі.

Функція $f(v)$ визначає відносне число молекул $dN(v)/N$, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v+dv$, тобто $dN(v)/N = f(v)$ звідки

$$f(v)=\frac{dN(v)}{N\cdot dv} \qquad (2.2.1)$$

Застосовуючи методи теорії ймовірностей, Максвелл знайшов функцію $f(v)$, тобто закон про розподіл молекул ідеального газу за швидкостями:

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right] \qquad (2.2.2)$$

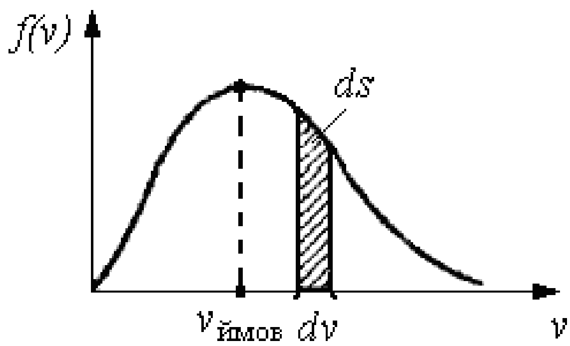


Рис. 2.2.1. **Графік функції *f*(*v*)**

Конкретний вид функції залежить від роду газу (від маси молекули) і від параметра стану (від температури).

Площа, яка обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці. Це означає, що функція $f(v)$ задовольняє умові нормування:

$$\int_0^\infty f(v)dv=1$$

Так як при зростанні швидкості v множник $\exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)$ зменшується швидше, ніж зростає множник v^2, то функція, починаючись від нуля, досягає максимуму при $v_{ймов}$ і потім асимптотично прагне до нуля. Крива несиметрична відносно $v_{ймов}$. Відносне число молекул $dN(v)/N$, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v+dv$, знаходиться як площа заштрихованої смужки.

Швидкість, при якій функція розподілу молекул ідеального газу за швидкостями максимальна, називається *найбільш ймовірною швидкістю* $v_{ймов}$.

Значення найбільш ймовірної швидкості можна знайти, диференціюючи співвідношення (2.2.2) по аргументу *v* та прирівнявши результат нулю, тобто використовуючи умову для максимуму виразу

$$\frac{d}{dv}\left[v^2 \exp\left[-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right]\right] = 2v\left(1-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)\exp\left[-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right] = 0$$

Значення v=0 і v =∞ відповідають мінімумам виразу (2.2.2), а значення v, при якому вираз в дужках стає рівним нулю, і є шукана найбільш ймовірна швидкість $v_{йм}$.

$$v_{йм} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \tag{2.2.3}$$

З формули (2.2.3) випливає, що при підвищенні температури максимум функції розподілу молекул за швидкостями зміститься вправо (значення найбільш вірогідної швидкості стає більше, рис. 2.2.2). Однак площа, обмежена кривою, залишається незмінною, тому при підвищенні температури крива розподілу молекул за швидкостями буде розтягуватися і знижуватися.

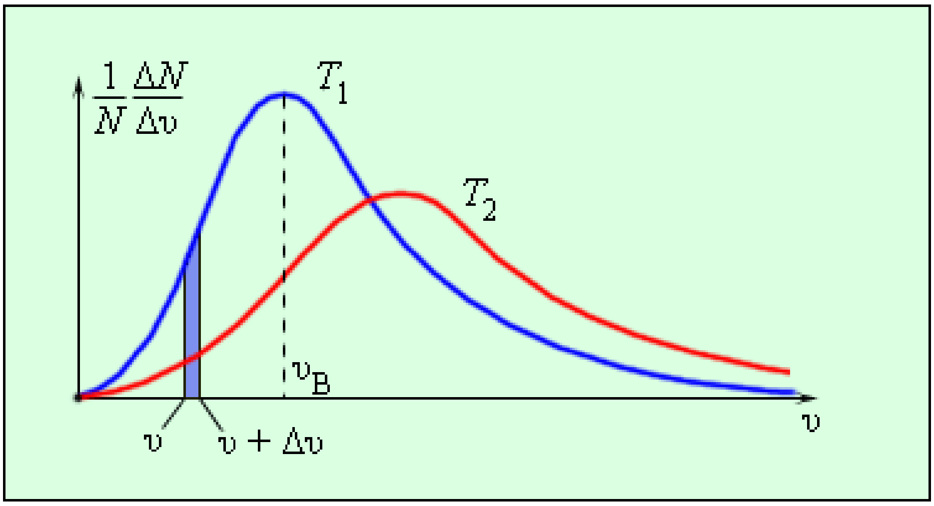


Рис. 2.2.2. **Зміна виду функції *f*(*v*) в залежності від температури, $T_2>T_1$**

Середня швидкість молекул $\langle v \rangle$ (середня арифметична швидкість) визначається за формулою

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty v dN(v) = \int_0^\infty v f(v) dv$$

Підставляючи сюди $f(v)$ у вигляді (2.2.2) і інтегруючи, отримаємо

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad (2.2.4)$$

Таким чином, маємо швидкості, що характеризують стан газу:
1) найбільш ймовірна

$$v_{йм} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

2) середня

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1{,}13 v_{йм}$$

3) середня квадратична

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1{,}22 v_{йм}$$

Виходячи з розподілу молекул за швидкостями

$$dN(v) = N 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi \cdot kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) dv \qquad (2.2.5)$$

можна знайти розподіл молекул за значеннями кінетичної енергії ε.
Перейдемо від змінної v до змінної $\varepsilon = \dfrac{m_0 v^2}{2}$.
Якщо підставити в (2.2.5) $v = \sqrt{2\varepsilon / m_0}$ і $dv = \left(2m_0\varepsilon\right)^{-1/2} d\varepsilon$, то отримаємо**:**

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right) d\varepsilon = Nf(\varepsilon) d\varepsilon, \qquad (2.2.6)$$

де $dN(\varepsilon)$ - число молекул, що мають кінетичну енергію поступального руху, укладену в інтервалі від ε до ε + dε.

Таким чином, функція розподілу молекул по енергіях теплового руху

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right),$$

звідки *середня кінетична енергія* поступального руху $\langle\varepsilon\rangle$ молекул ідеального газу

$$\langle\varepsilon\rangle = \int_0^\infty \varepsilon \cdot f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)d\varepsilon = \frac{3}{2}kT\,.$$

2.2.2. Барометрична формула. Розподіл Больцмана

При виведенні основного рівняння МКТ газів і максвеллівського розподілу молекул за швидкостями передбачалося, що на молекули газу зовнішні сили не діють, тому молекули рівномірно розподілені за об'ємом.

Однак молекули будь-якого газу знаходяться в потенційному полі тяжіння Землі. Тяжіння, з одного боку, і тепловий рух молекул - з іншого, призводять до деякого стаціонарного стану газу, при якому тиск газу з висотою убуває.

Виведемо закон зміни тиску з висотою, припускаючи, що
1) поле тяжіння однорідно, 2) температура постійна і 3)маса всіх молекул однакова.

При зростанні висоти на невелику величину dx (рис. 2.2.3) тиск зменшується на малу величину $dp = -\rho g dx$, де ρ – густина газу, $\rho = m_0 n$, m_0 – маса молекули.

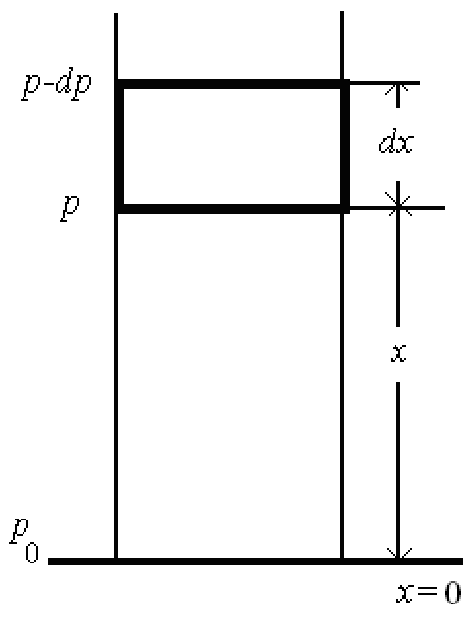


Рис. 2.2.3. **Зміна тиску газу в залежності від висоти**

Зручно виразити густину газу через макропараметри - температуру і тиск. Для цього скористаємося формулою $p = nkT$, тоді $\rho = \dfrac{m_0 p}{kT}$, а $dp = -\dfrac{m_0 pg}{kT} dx$.

Розділимо змінні величини у останній формулі, тобто $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{m_0 g}{kT} dx$. Інтегруючи одержуємо: $\ln p = -\dfrac{m_0 g}{kT} x + \ln C$, де C - постійна інтегрування, яку знаходимо з умови: при $x = 0$ і $C = p_0$. тоді

$\ln p - \ln p_0 = -\dfrac{m_0 gx}{kT}$ або $\ln \dfrac{p}{p_0} = -\dfrac{m_0 gx}{kT}$.

Після потенціювання одержимо *барометричну формулу*

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 gx}{kT}}. \qquad (2.2.7)$$

Враховуючи, що маса молекули може бути виражена через молярну масу і число Авогадро $m_0 = \dfrac{M}{N_A}$, а $N_A k = R$, показник експоненти можна записати через молярну масу і універсальну газову сталу:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgx}{RT}} \qquad (2.2.7)$$

Так як при постійній температурі $p \sim n$, то можна отримати співвідношення для *розподілу Больцмана*:

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgx}{RT}} \text{ або } n = n_0 e^{-\frac{m_0 gx}{kT}}$$

Чисельник показника експоненти являє собою потенційну енергію частинки, що знаходиться в полі сили тяжіння, а знаменник пропорційний теплової енергії. Розподіл Больцмана справедливий, якщо частинка перебуває в будь-якому потенційному полі, тому можна позначити потенційну енергію частинки через $W_п(x)$. Тоді розподіл Больцмана буде мати вигляд

$$n = n_0 e^{-\frac{W_п(x)}{kT}} \qquad (2.2.8)$$

При великому числі частинок n_0 і нескінченно малому інтервалі енергій $dW_п$ частка частинок $\frac{\Delta n}{n_0}$, потенційна енергія яких лежить в в інтервалі $dW_п$ поблизу потенційної енергії $W_п$, має сенс ймовірності того, що будь-яка частинка може мати потенційну енергію в зазначеному інтервалі поблизу заданого значення потенційної енергії.

2.2.3. Броунівський рух

Важливе значення має експериментальне підтвердження отриманих розподілів. Серед експериментів, які підтверджують висновки МКТ про хаотичний (тепловий) рух атомів і молекул першим можна назвати броунівський рух. Броунівський рух – це рух частинок, зважених в рідині або газі, під дією нескомпенсованих ударів молекул рідини або газу. Інтенсивність цього руху підвищується із зростанням температури середовища, із зменшенням в'язкості і розмірів частинок (розміром близько 1мкм), зважених у газі чи рідині. (незалежно від їх хімічної природи). Згодом з’ясувалося, що броунівський рух зважених частинок викликається ударами молекул середовища, в якому частинки зважені. Так як молекули рухаються хаотично, то броунівські частинки отримують поштовхи з різних сторін, тому і роблять рух настільки химерної форми.

Таким чином, броунівський рух є підтвердженням висновків МКТ про хаотичний (тепловий) рух атомів і молекул.

Завдання для самопідготовки

1. Розподіл Максвелла допускає скільки завгодно великі швидкості. Як це узгодити з кінцевістю повної кінетичної енергії молекул газу?

2. У скільки разів середня квадратична швидкість $<v>$ молекул кисню більше середньої квадратичної швидкості порошинки гіпсоцементу масою m = 10 г, що знаходиться серед молекул кисню?

Відповідь: $1{,}37\cdot10^7$.

3. Чому дорівнюють ймовірність достовірної події і ймовірність неможливої події?

4. Середня квадратична швидкість руху молекул у верхніх шарах атмосфери відповідає температурі T = 1000К. Однак термометр в цих шарах показує дуже низьку температуру. Як пояснити цей факт?

Лекція 3

2.3.ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В ТЕРМОДИНАМІЧНО НЕРІВНОВАЖНИХ СИСТЕМАХ

План заняття

1. Рівноважний і нерівноважний стан
2. Теплопровідність
3. Дифузія
3. Внутрішнє тертя (в'язкість)
4. Вакуум

2.3.1. Рівноважний і нерівноважний стан

Рівноважний стан газу в молекулярно - кінетичної теорії розглядається як стан повної хаотичності руху молекул, розподіл яких за швидкостями підпорядковується закону Максвелла.

Будь-яке *нерівноважний стан* газу завжди пов'язаний з порушенням повної хаотичності руху і максвеллівського розподілу молекул за швидкостями. Основною особливістю нерівноважних станів є прагнення газу мимоволі переходити до рівноважного стану. Це обумовлено хаотичним тепловим рухом молекул з безперервними зіткненнями їх одна з одною, що і призводить до постійного перемішування молекул, зміни їх швидкостей та енергії.

До явищ переносу відносять *внутрішнє тертя, або в'язкість*, *теплопровідність* і *дифузію* газів. В'язкість обумовлена перенесенням *імпульсу*, теплопровідність - *кінетичної енергії* і дифузія - *маси молекул*.

Спочатку ці три явища досліджувалися експериментальним шляхом. При цьому вдалося, не вникаючи в молекулярний механізм явищ переносу, встановити дослідні закони, яким вони підкоряються.

Розглянемо послідовно явища теплопровідності, дифузії і в'язкості в газі, та обмежимося розглядом одновимірного переносу. Систему відліку вибираємо так, щоб вісь z була орієнтована в напрямку переносу.

2.3.2. Теплопровідність

У тому випадку коли в одній області газу середня кінетична енергія молекул більше, ніж в іншій, то з плином часу внаслідок постійних зіткнень молекул відбувається процес вирівнювання середніх кінетичних енергій молекул, тобто іншими словами, вирівнювання температур.

Якщо шари газу мають різну температуру, то в газі виникає перенесення тепла від більш нагрітого шару до менш нагрітого, тобто має місце явище теплопровідності. Припустимо, що температура газу змінюється тільки в напрямку осі *z* (рис. 2.3.1).

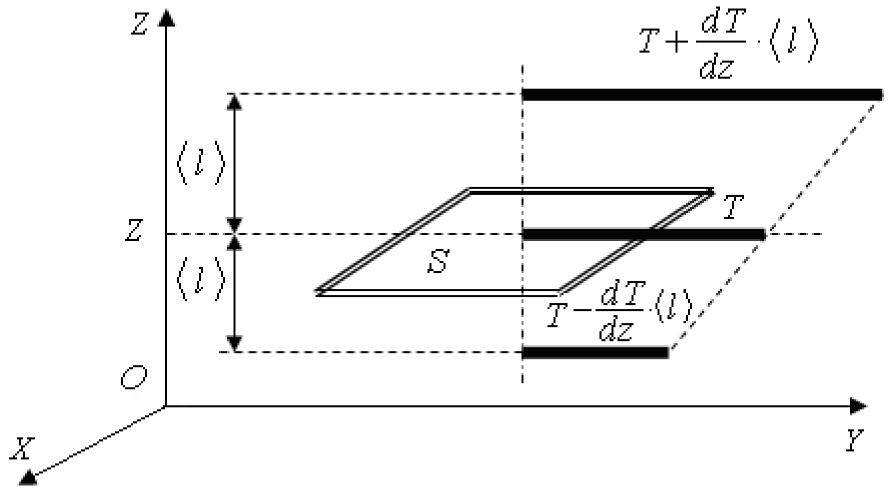


Рис. 2.3.1. **Теплопровідність газу**

Експериментально встановлено, що в цьому випадку теплопровідність газу визначається формулою Фур'є

$$dQ = \chi \frac{dT}{dz} \cdot S \cdot dt \qquad (2.3.1)$$

де dQ - кількість теплоти, яку перенесено за час dt через площину S, розташовану перпендикулярно осі z; $\frac{dT}{dz}$ - градієнт температури газу; χ - коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом теплопровідності. Він залежить від властивостей газу і тих умов, при яких знаходиться газ.

У шарі з великою температурою молекули газу мають більшу середню кінетичну енергію, ніж у шарі з меншою температурою. Потрапляючи при хаотичному русі в цей шар, вони при зіткненнях з іншими молекулами шару передають їм надлишок своєї енергії і тим самим збільшують його температуру. Навпаки, молекули, що потрапляють з шару з меншою температурою в шар з більшою температурою, будуть збільшувати в ньому свою енергію за рахунок інших молекул шару і тим самим будуть знижувати його температуру. Тому в молекулярно–кінетичній теорії перенесення кількості теплоти dQ через площину S розглядається як перенесення через цю площину середньої кінетичної енергії хаотичного руху молекул.

Коефіцієнт теплопровідності χ газу дорівнює

$$\chi = \frac{1}{3}\rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle c_{\mathrm{v}} \tag{2.3.2}$$

де ρ – густина газу, $\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість теплового руху його молекул; $\langle l \rangle$ – середня довжина вільного пробігу; c_{v} – питома теплоємність.

Коефіцієнт теплопровідності χ не залежить від тиску газу. Крім того, χ зростає при збільшенні температури пропорційно $\sqrt{T}$.

2.3.3. Дифузія

Явище дифузії полягає в тому, що відбувається довільне проникнення і перемішування частинок двох дотичних газів, рідин і навіть твердих тіл; дифузія зводиться до обміну мас частинок цих тіл, виникає і триває, поки існує градієнт густини.

Явище дифузії для хімічно однорідного газу підпорядковується закону Фіка:

$$dm = D\frac{d\rho}{dz} \cdot S \cdot dt \tag{2.3.3}$$

де dm – маса, яку перенесено за час dt через площину S, розташовану перпендикулярно осі z; D - коефіцієнт дифузії; $\frac{d\rho}{dz}$ - градієнт густини, який дорівнює швидкості зміни густини на одиницю довжини z.

Знак мінус показує, що перенесення маси відбувається в напрямку убування густини.

Коефіцієнт дифузії D чисельно дорівнює густині потоку маси при градієнті густини, що дорівнює одиниці.

Можна показати, що згідно кінетичної теорії газів

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \ . \tag{2.3.4}$$

2.3.4. Внутрішнє тертя (в'язкість)

Механізм виникнення внутрішнього тертя між паралельними шарами газу (рідини), що рухаються з різними швидкостями, полягає в тому, що завдяки хаотичному тепловому руху молекул відбувається обмін між шарами, в результаті чого імпульс шару, що рухається швидше, зменшується, а що рухається повільніше - збільшується, що призводить до гальмування шару, що рухається швидше, і прискоренню шару, що рухається повільніше.

Сила внутрішнього тертя між двома шарами підпорядковується закону Ньютона:

$$F = \eta \cdot \left| \frac{dv}{dz} \right| \cdot S \qquad (2.3.5)$$

де – η динамічна в'язкість (в'язкість); $\frac{dv}{dz}$ – градієнт швидкості, що показує бистроту зміни швидкості в напрямку, перпендикулярному напрямку руху шарів; S – площа, на яку діє сила.

Взаємодію двох шарів згідно з другим законом Ньютона можна розглядати як процес, при якому від одного шару до іншого в одиницю часу передається імпульс. Оскільки $F = \frac{dp}{dt}$,. співвідношення (2.3.5) можна представити у вигляді

$$dp = -\eta \frac{du}{dz} \cdot S \cdot dt \qquad (2.3.6)$$

причому $j_F = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \frac{\Delta p}{\Delta t}$, де j_F - густина потоку імпульсу – величина, яка визначається повним імпульсом, що переноситься за час dt в позитивному напрямку осі через площадку *S*, перпендикулярну осі *z*; $\frac{dv}{dz}$ - градієнт швидкості.

Знак мінус вказує, що імпульс переноситься в напрямку убування швидкості: dp і $\frac{dv}{dz}$ - мають протилежні знаки.

Коефіцієнт динамічної в’язкості чисельно дорівнює густині потоку імпульсу при градієнті швидкості, рівному одиниці; він обчислюється за формулою

$$\eta = \frac{1}{3}\rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \qquad (2.3.7)$$

З порівняння формул (2.3.1), (2.3.3) і (2.3.6), що описують явища переносу, випливає, що закономірності всіх явищ переносу подібні між собою.

Ці закони були встановлені задовго до того, як вони були обґрунтовані і виведені з МКТ, яка дозволила встановити, що зовнішня схожість їх математичних виразів обумовлена спільністю молекулярного механізму перемішування молекул в процесі їх хаотичного руху і зіткнень одна з одною, який лежить в основі явищ теплопровідності, дифузії і внутрішнього тертя.

Таблиця 2.3.1

Порівняльні характеристики явищ переносу

Явище	Величина, яка переноситься	Рівняння переносу	Формула для коефіцієнта переносу
Дифузія	Маса	$dm = -D\frac{d\rho}{dz} \cdot S \cdot dt$	$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \cdot \langle l \rangle$
В’язкість	Імпульс	$dp = -\eta\frac{du}{dz} \cdot S \cdot dt$	$\eta = \frac{1}{3}\rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle$
Теплопровідність	Енергія у формі тепла	$dQ = -\chi\frac{dT}{dz} \cdot S \cdot dt$	$\chi = \frac{1}{3}\rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \cdot c_V$

Але необхідно відмітити, що закони Фур'є, Фіка і Ньютона не розкривають молекулярно - кінетичного сенсу коефіцієнтів η, χ і D. Співвідношення для коефіцієнтів переносу виводяться з кінетичної теорії. Формули (2.3.2), (2.3.4) і (2.3.7), зв'язують коефіцієнти переносу та характеристики теплового руху молекул.

Порівнюючи формули для коефіцієнтів переносу (таблиця 2.3.1.) можна знайти наступні співвідношення між ними:

$$\eta = \rho \cdot D \qquad \text{та} \qquad \frac{\chi}{\eta \cdot c_V} = 1$$

2.3.5. Вакуум

Якщо з посудини відкачано газ, то при фіксованій температурі по мірі зниження тиску число зіткнень молекул одна з одною зменшується, що призводить до збільшення їх довжини вільного пробігу. При досить великому розрідженні зіткнення між молекулами відносно рідкісні, тому основну роль грають зіткнення молекул зі стінками посудини. *Вакуумом називається стан газу, при якому середня довжина вільного пробігу* $\langle l \rangle$ *порівнянна або більше характерного лінійного розміру посудини d, в якій газ знаходиться.*

Залежно від співвідношення $\langle l \rangle$ і d розрізняють такі види вакууму:

$\langle l \rangle << d$ – низький; $\langle l \rangle \leq d$ – середній

$\langle l \rangle > d$ – високий; $\langle l \rangle >> d$ – надвисокий

Поняття вакууму відносно. Чим більше лінійні розміри посудини з газом, тим при менших тисках в ньому створюються умови вакууму.

Питання створення вакууму мають велике значення у техніці, так як, наприклад, у багатьох сучасних електронних приладах використовуються електронні пучки, формування яких можливе лише в умовах вакууму. Для отримання різних ступенів розрідження застосовуються вакуумні насоси. В даний час застосовуються вакуумні насоси, що дозволяють отримати попереднє розрідження (форвакуум) до тиску приблизно 0,13 Па, а також вакуумні насоси та лабораторні пристосування, які дозволяють отримати тиск до 1,11 пПа (10^{-14} мм рт. ст.).

Завдання для самопідготовки

1. Чим пояснити, що всі явища переносу протікають повільно, хоча всі вони відбуваються завдяки швидким рухам молекул?
2. Накресліть хід графіка залежності добутку $l{\cdot}p$ (довжина вільного пробігу на тиск) від зміни тиску газу p.
3. Один з методів розділення суміші газів на компоненти полягає у використанні дифузії через пористу перегородку. Які властивості молекул використовуються при цьому?
4. Чому при виготовленні посудин Дьюара (колб для термосів) на час відкачування повітря з простору між стінками посудини поміщають в піч з температурою 300-400 ° С?

Лекція 4

2.4. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

План заняття

1. Внутрішня енергія. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи
2. Перший закон термодинаміки
3. Робота газу при зміні його об'єму
4. Теплоємність

2.4.1. Внутрішня енергія. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи

Важливою характеристикою термодинамічної системи є її *внутрішня енергія U* - енергія хаотичного (теплового) руху мікрочастинок системи (молекул, атомів, електронів, ядер і т.д.) і енергія взаємодії цих частинок.

З цього визначення випливає, що до внутрішньої енергії не відносяться кінетична енергія руху системи як цілого і потенційна енергія системи в зовнішніх полях.

Внутрішня енергія - однозначна функція термодинамічного стану, тобто у кожному стані система має цілком певну внутрішню енергію (вона не залежить від того, як система прийшла в даний стан).

Це означає, що при переході системи з одного стану в інший зміна внутрішньої енергії визначається тільки різницею значень внутрішньої енергії цих станів і не залежить від шляху переходу.

Число ступенів свободи i - це число незалежних змінних (координат), які повністю визначають положення системи в просторі.

У ряді задач *молекулу одноатомного газу* розглядають як матеріальну точку, якій *приписують три ступені свободи поступального руху* – $i = 3$.

В класичній механіці молекула двохатомного газу розглядається як сукупність двох матеріальних точок жорстко зв’язаних між собою зв’язком який не деформується (рис. 2.4.1). Ця система окрім трьох ступенів свободи поступального руху має ще дві ступені обертального руху. Таким чином, *двохатомна молекула газу має п’ять ступенів свободи* – $i = 5$.

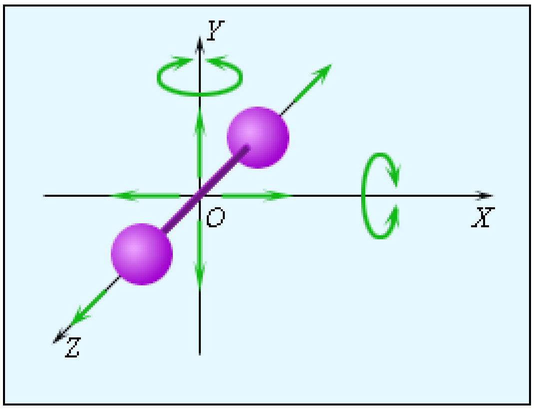


Рис. 2.4.1. Модель двоатомної молекули. Точка О збігається з центром мас молекули

Трьохатомна і *багатоатомна нелінійні молекули мають шість ступенів свободи* (i =6): три поступальних і три обертальних.

Природно, що жорсткого зв'язку між атомами не існує. Тому для реальних молекул необхідно враховувати також ступені свободи коливального руху.

У класичній статистичній фізиці розглядається закон Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями свободи молекул: *для статистичної системи, що перебуває в стані термодинамічної рівноваги, на кожну поступальну і обертальну ступені свободи припадає в середньому кінетична енергія, яка дорівнює* $\frac{1}{2}kT$*, а на кожну з коливальних ступенів свободи - в середньому енергія, яка дорівнює* kT.

Коливальна ступінь "володіє" удвічі більшою енергією тому, що на неї доводиться не тільки кінетична енергія (як у випадку поступального і обертального рухів), а й потенційна енергія, причому середні значення кінетичної і потенційної енергій однакові.

Таким чином, середня енергія молекули:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

де i - сума кількості поступальних, кількості обертальних і подвоєної кількості коливальних ступенів свободи молекули:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2i_{\text{колив}}.$$

У класичній теорії розглядають молекули з жорстким зв'язком між атомами; для них i збігається з числом поступальних і обертальних ступенів свободи молекули.

Так як в ідеальному газі взаємна потенційна енергія молекул дорівнює нулю (молекули між собою не взаємодіють), то внутрішня енергія, віднесена до одного молю газу, буде дорівнювати сумі кінетичних енергій N_A молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT$$

Внутрішня енергія для довільної маси m газу:

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT \qquad (2.4.1)$$

2.4.2. Перший закон термодинаміки

Розглянемо термодинамічну систему, для якої механічна енергія не змінюється, а змінюється лише її внутрішня енергія. Внутрішня енергія системи може змінюватися в результаті різних процесів, наприклад, здійснення над системою роботи або надання їй теплоти. Так, якщо опускати поршень у циліндр, в якому знаходиться газ, то ми стискаємо цей газ, в результаті чого його температура підвищується, тобто тим самим змінюється (збільшується) внутрішня енергія газу. З іншого боку, температуру газу і його внутрішню енергію можна збільшити за рахунок надання йому деякої кількості теплоти - енергії, переданої системі зовнішніми тілами шляхом теплообміну (процес обміну внутрішніми енергіями при контакті тіл з різними температурами).

Таким чином, можна говорити о двох формах передачі енергії від одних тіл до інших: о роботі і теплоті. Енергія механічного руху може перетворюватися в енергію теплового руху, і навпаки.

У цих перетвореннях виконується закон збереження і перетворення енергії; стосовно до термодинамічних процесів цим законом і є перший початок термодинаміки, встановлений в результаті узагальнення багатовікових дослідних даних.

Припустимо, що деяка система (газ, розташований у циліндрі під поршнем), володіючи внутрішньої енергією U_1, отримала деяку кількість теплоти Q і, перейшовши у новий стан, що характеризується внутрішньою енергією U_2, здійснила роботу A над зовнішнім середовищем, тобто проти зовнішніх сил.

Кількість теплоти вважається позитивною, коли вона підводиться до системи, а робота - позитивною, коли система робить її проти зовнішніх сил.

Дослід показує, що відповідно до закону збереження енергії при будь-якому способі переходу системи з першого стану в другий зміна внутрішньої енергії $\Delta U = U_2 - U_1$ буде однаковою і дорівнювати різниці між кількістю теплоти Q яка отримана системою, і роботою A яка виконується системою проти зовнішніх сил:

$$Q = \Delta U + A \qquad (2.4.2)$$

Рівняння (2.4.2) виражає перший закон термодинаміки: *теплота, що надається системі, витрачається на зміну її внутрішньої енергії і на здійснення нею роботи проти зовнішніх сил.*

Вираз (2.4.2) в диференціальній формі буде мати вигляд

$$\delta Q = dU + \delta A \qquad (2.4.3)$$

де dU - нескінченно мала зміна внутрішній енергії системи;

δA - елементарна робота;

δQ - нескінченно мала кількість теплоти.

У цьому виразі dU є повним диференціалом, а δA й δQ не є такими.

З формули (2.4.2) випливає, що в СІ кількість теплоти виражається в тих же одиницях, що робота і енергія, тобто в джоулях (Дж).

Якщо система періодично повертається в первинний стан, то зміна її внутрішньої енергії $dU = 0$.

Тоді, згідно першому початку термодинаміки, $A = Q$.

Іншими словами, вічний двигун першого роду - періодично діючий двигун, який здійснював би більшу роботу, ніж надана йому ззовні енергія, неможливий.

2.4.3. Робота газу при зміні його об'єму

Для розгляду конкретних процесів знайдемо в загальному вигляді зовнішню роботу, що здійснюються газом при зміні його об’єму.

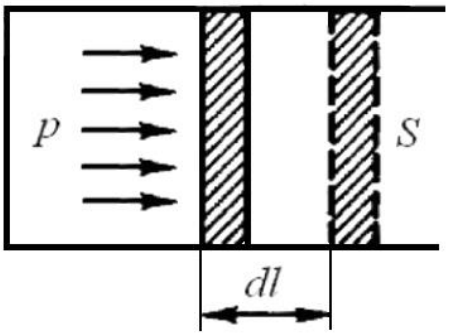


Рис.2.4.1. **Процес розширення газу у циліндрі**

Розглянемо газ, що знаходиться під поршнем в циліндричній посудині. Якщо газ, розширюючись, пересуває поршень на нескінченно малу відстань dl, то виконує над ним роботу

$$\delta A = Fdl = pdSdl = pdV$$

де S - площа поршня, $Sdl = dV$ зміна об'єму системи.

Таким чином,

$$\delta A = pdV \tag{2.4.4}$$

Повну роботу A, вчинену газом при зміні його об'єму від V_1 до V_2 знаходимо інтегруванням формули (2.4.4):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV \tag{2.4.5}$$

Результат інтегрування визначається характером залежності між тиском і об'ємом газу. Знайдене для роботи вираз (2.4.5) справедливо при будь-яких змінах об'єму твердих, рідких і газоподібних тіл. Оскільки геометричний зміст визначеного інтегралу – це площа. То вироблену при тому чи іншому процесі роботу можна зобразити графічно у вигляді площі за допомогою кривої в координатах p, V.

Нехай зміна тиску газу при його розширенні зображується кривої на рис. 2.4.2. При збільшенні об'єму на dV вчинена газом робота дорівнює pdV і визначається площею смужки з основою заштрихованої на малюнку dV. Тому повна робота, що здійснюються газом при розширенні від об'єму V_1 до об'єму V_2 визначається *площею*, обмеженою віссю абсцис, кривою $p = f(V)$ і прямими V_1 і V_2.

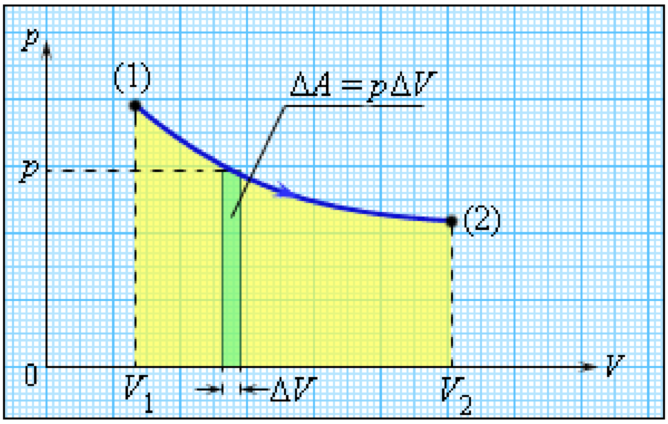


Рис. 2.4.2. Графічне зображення роботи

Графічно можна зображати тільки рівноважні процеси - процеси, які складаються з послідовності рівноважних станів. Усі реальні процеси – нерівноважні (вони протікають з кінцевою швидкістю), але в ряді випадків неравновісністю реальних процесів можна нехтувати (чим повільніше протікає процес, тим він ближче до рівноважного). Всі розглянуті в подальшому процеси будуть рівноважними.

2.4.4. Теплоємність

Теплоємність – фізична величина, чисельно рівна відношенню кількості теплоти ΔQ, наданої тілу, до зміни температури ΔT тіла в термодинамічному процесі:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \tag{2.4.6}$$

Одиниця теплоємності: джоуль на кельвін (Дж/К).

Питома теплоємність речовини - величина, яка дорівнює кількості теплоти, необхідної для нагрівання 1 кг речовини на 1 К

$$c = \frac{\delta Q}{m \cdot dT}. \tag{2.4.7}$$

Одиниця питомої теплоємності - джоуль на кілограм - кельвін (Дж/(кг·К).

Молярна теплоємність - величина, рівна кількості теплоти, необхідної для нагрівання 1 молю речовини на 1 К

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu \cdot dT}, \tag{2.4.8}$$

де $\nu = \dfrac{m}{M}$ – кількість речовини.

Одиниця молярної теплоємності - джоуль на моль - кельвін (Дж/(моль К).

Питома теплоємність c пов'язана з молярною C_m співвідношенням:

$$C_m = c \cdot M \tag{2.4.9}$$

де M - молярна маса речовини.

Розрізняють теплоємності при постійному об'ємі і постійному тиску, якщо в процесі нагрівання речовини його об'єм або тиск підтримується постійним.

Запишемо вираз першого початку термодинаміки (2.4.2) для 1 молю газу з урахуванням формул (2.4.4) і (2.4.8):

$$C_m dT = dU_m + pdV_m \tag{2.4.10}$$

Якщо газ нагрівається при постійному об'ємі, то робота зовнішніх сил дорівнює нулю і надана газу ззовні теплота йде тільки на збільшення його внутрішньої енергії:

$$C_V = \frac{dU_m}{dT} \tag{2.4.11}$$

тобто молярна теплоємність газу при постійному об'ємі C_V дорівнює зміні внутрішньої енергії 1 молю газу при підвищенні його температури на 1К. Оскільки для 1 молю газу зміна внутрішньої енергії dU_m,

$$dU_m = \frac{i}{2} RdT,$$

тоді

$$C_V = \frac{iR}{2}. \tag{2.4.12}$$

Якщо газ нагрівається при постійному тиску, то вираз (2.4.10) можна записати у вигляді

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{pdV_m}{dT}.$$

Враховуючи, що $\frac{dU_m}{dT}$ не залежить від виду процесу (внутрішня енергія ідеального газу не залежить ні від p, ні від V, а визначається лише температурою T) і завжди дорівнює C_V, і диференціюючи рівняння Клапейрона-Менделєєва по T (при p=const), знаходимо

$$pdV_m = RdT$$

звідки

$$C_p = C_V + R \tag{2.4.13}$$

Рівняння (2.4.13) називається *рівнянням Майєра; воно показує, що завжди C_p більше C_V на величину універсальної газової сталої R.*

Це пояснюється тим, що при нагріванні газу при постійному тиску потрібна ще додаткова кількість теплоти на здійснення роботи розширення газу, так як сталість тиску забезпечується збільшенням об'єму газу (рисунок 2.4.3).

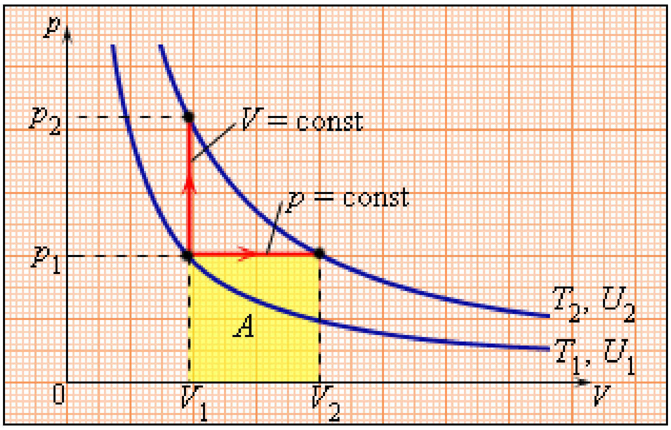


Рис. 2.4.3. Два можливих процеси нагрівання газу на $\Delta T = T_2 - T_1$. При p = const газ здійснює роботу $A=p_1(V_2 - V_1)$. Поэтому $C_p > C_V$

Використавши (2.4.12), вираз (2.4.13) можна записати у вигляді

$$C_p = \frac{i+2}{2}R \tag{2.4.14}$$

З формул (2.4.12) і (2.4.14) випливає, що молярні теплоємності ідеального газу визначаються лише числом ступенів свободи і не залежать від температури.

Завдання для самопідготовки

1. Чому в термодинамічних завданнях потрібно розглядати процеси, які протікають нескінченно повільно, хоча реальні процеси протікають з кінцевою швидкістю?

2. Чим пояснити залежність молярних теплоємність (C_p і C_V) для багатоатомних газів від температури?

3. Чи можливо, щоб $C_p = C_V$? Чи може величина C_p або C_V мати негативне значення або бути рівний нулю?

4. Вкажіть критерій «замерзання» ступенів свободи. Які ступені свободи порушені у молекул азоту и кисню в повітрі при нормальних умовах? Яка величина енергії припадає на коливальну ступінь свободи?

5. Чи мають будь-який вплив на величину тиску газу внутрішні ступені свободи молекул и атомів?

Лекція 5

2.5. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРШОГО ПОЧАТКУ ТЕРМОДИНАМІКИ ДО ІЗОПРОЦЕСІВ

План заняття

1. Ізохорний процес
2. Ізобарний процес
3. Ізотермічний процес
4. Адіабатичний і політропний процеси

2.5.1. Ізохорний процес *V* = const.

Серед рівноважних процесів, що відбуваються з термодинамічними системами, виділяються ізопроцеси, при яких один з основних параметрів стану системи зберігається сталим

Діаграма цього процесу (ізохора) в координатах p,V зображується прямою, паралельною осі ординат (рис. 2.5.1), де процес 2-1 є ізохорне нагрівання, а 2-3 - ізохорне охолодження. При ізохорному процесі газ не виконує роботи над зовнішніми тілами, тобто

$$\delta A = p\,dV = 0$$

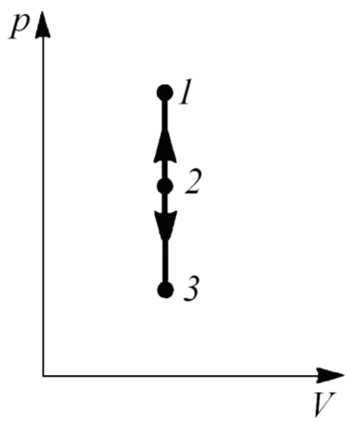


Рис. 2.5.1. **Ізохорний процес**

З першого закону термодинаміки для ізохорного процесу випливає, що вся теплота, що додається газу, йде на збільшення його внутрішньої енергії:

$$\delta Q = dU$$

Відповідно до формули (2.4.12)

$$dU_m = C_V \cdot dT$$

Тоді для довільної маси газу отримаємо

$$\delta Q = d\,U = \frac{m}{M} C_V\, dT \qquad (2.5.1)$$

2.5.2. Ізобарний процес p = const

Діаграма цього процесу (ізобара) в координатах p,V зображується прямою, паралельною вісі V

При ізобарному процесі робота газу при збільшенні об'єму від V_1 до V_2 дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \qquad (2.5.2)$$

і визначається площею заштрихованого прямокутника (рис. 2.5.2).

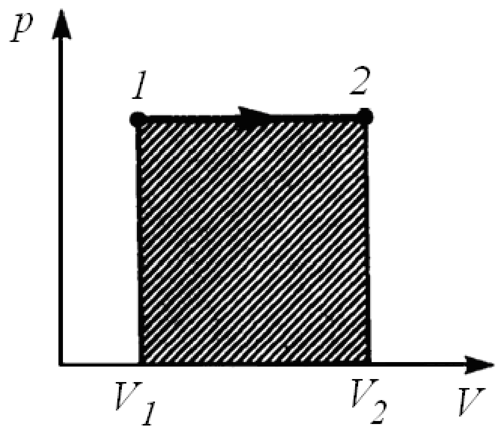


Рис. 2.5.2. **Робота при ізобарному процесі**

Якщо використати рівняння Клапейрона - Менделєєва для обраних двох станів, то одержимо

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1$$

$$pV_2 = \frac{m}{M} RT_2 .$$

Звідки

$$V_2 - V_1 = \frac{mR}{M \cdot p}\left(T_2 - T_1\right).$$

Тоді вираз (2.5.2) для роботи ізобарного розширення прийме вигляд

$$A = \frac{mR}{M}\left(T_2 - T_1\right)\ . \qquad (2.5.3)$$

З цього виразу випливає фізичний зміст молярної газової сталої R: якщо $T_2 - T_1 = 1K$, то для 1 молю газу $R = A$, тобто *R чисельно дорівнює роботі ізобарного розширення 1 молю ідеального газу при нагріванні його на* $1K$.

У ізобарному процесі при доданні газу масою m кількості теплоти $\delta Q = \frac{m}{M} C_p \cdot dT$, його внутрішня енергія зростає на величину $dU = \frac{m}{M} C_V dT$. При цьому газ здійснює роботу, яка визначається виразом

$$\delta A = \frac{mR}{M} dT$$

2.5.3. Ізотермічний процес T = const

Ізотермічний процес описується законом Бойля - Маріотта:
pV = const

Діаграма цього процесу (ізотерма) в координатах p, V являє собою гіперболу, розташовану на діаграмі тим вище, чим вище температура, при якій відбувається процес.

Сходячі з попередніх співвідношень робота ізотермічного розширення газу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Так як при T = const внутрішня енергія ідеального газу не змінюється:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT = 0,$$

то з першого початку термодинаміки виходить, що для ізотермічного процесу

$$\Delta Q = \Delta A,$$

тобто вся кількість теплоти, що надається газу, витрачається на вчинення ним роботи проти зовнішніх сил:

$$A = Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.5.4)$$

Отже, для того щоб при розширенні газу температура не знижувалася, до газу протягом ізотермічного процесу необхідно підводити кількість теплоти, еквівалентне зовнішній роботі розширення.

2.5.4. Адіабатний і політропний процеси

Адіабатним називається процес, при якому відсутній теплообмін $(\Delta Q = 0)$ *між системою і навколишнім середовищем.*

До адіабатних процесів можна віднести всі швидкоплинні процеси. Наприклад, процес поширення звуку в середовищі, так як швидкість поширення звукової хвилі настільки велика, що обмін енергією між хвилею і середовищем відбутися не встигає. Адіабатні процеси застосовуються в ДВС (розширення і стиснення горючої суміші в циліндрах), в холодильних приладах і т.д.

З першого початку термодинаміки для адіабатного процесу випливає, що

$$\delta A = -\, dU, \qquad (2.5.5)$$

тобто зовнішня робота відбувається за рахунок зміни внутрішньої енергії системи.

Використовуючи вирази (2.5.2) і (2.5.3), для довільної маси газу перепишемо рівняння (2.5.5) у вигляді

$$pdV = -\frac{m}{M} C_V dT. \qquad (2.5.6)$$

Якщо продиференцюювати рівняння стану для ідеального газу

$$pV = \frac{m}{M} RT \,,$$

отримаємо

$$pdV + Vdp = \frac{m}{M} RdT \,. \qquad (2.5.7)$$

Виключимо з (2.5.6) і (2.5.7) температуру T

$$\frac{pdV + Vdp}{pdV} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V} \,.$$

Розділивши змінні і враховуючи, що $C - C_V = \gamma$, знайдемо $\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$.

Інтегруючи це рівняння в межах від p_1 до p_2 і відповідно від V_1 до V_2, а потім потенціюючи, прийдемо до виразу

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \quad \text{або} \quad p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} \,.$$

Так як стани 1 і 2 вибрані довільно, то можна записати

$$pV^{\gamma} = \text{const} \,. \qquad (2.5.8)$$

Отриманий вираз є *рівняння адіабатного процесу*, який називається також *рівнянням Пуассона.*

Для переходу до змінних p,T або T,V виключимо з (2.5.8) за допомогою рівняння Клапейрона – Менделєєва $pV = \frac{m}{M} RT$ відповідно тиск або об'єм:

$$TV^{\gamma - 1} = \text{const} \,, \qquad (2.5.9)$$

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const} \,. \qquad (2.5.10)$$

Вирази (2.5.8) - (2.5.10) являють собою рівняння адіабатного процесу. У цих рівняннях безрозмірна величина

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{(i+2)}{i} \qquad (2.5.11)$$

називається *показником адіабати* (або коефіцієнтом Пуассона).

Для одноатомних газів (Ne, He тощо), які досить добре відповідають умові ідеальності, i = 3 і γ = 1,67; для двохатомних газів (H_2, N_2, O_2 та інші) - i = 5 і γ = 1,4.

Значення γ, обчислені за формулою (2.5.11), добре підтверджуються експериментом.

Діаграма адіабатного процесу (адіабата) в координатах p,V зображується гіперболою (рис. 2.5.3). На рисунку видно, що адіабата $pV^{\gamma} = \text{const}$ більш крута ніж, ізотерма pV = const.

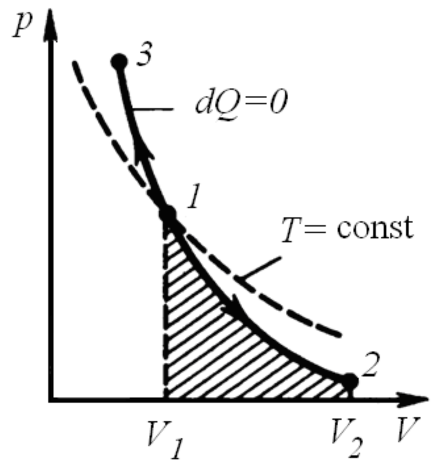


Рис. 2.5.3. **Порівняння графіків ізотермічного та адіабатичного процесів**

Це пояснюється тим, що при адіабатному стисненні 1-3 збільшення тиску газу обумовлено не тільки зменшенням його об'єму, як при ізотермічному стисненні, але і підвищенням температури.

Обчислимо роботу, що здійснюються газом в адіабатному процесі. Запишемо рівняння (2.5.5) у вигляді

$$\Delta A = -\frac{m}{M} C_V dT$$

Якщо газ адіабатно розширюється від об'єму V_1 доV_2, то його температура зменшується від T_1 до T_2, і робота розширення ідеального газу

$$A = -\frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right) \qquad (2.5.12)$$

Застосовуючи ті ж прийоми, що і при виведенні формули (2.5.9), вираз (2.5.12) для роботи при адіабатному розширенні можна перетворити до вигляду

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Робота, що здійснюється газом при адіабатному розширенні 1-2 (визначається площею, яка є заштрихованою на рис. 2.5.3), менше, ніж при ізотермічному. Це пояснюється тим, що при адіабатному розширенні відбувається охолодження газу, тоді як при ізотермічному - температура підтримується постійною за рахунок припливу ззовні еквівалентної кількості теплоти.

Розглянуті ізохорний, ізобарний, ізотермічний і адіабатний процеси мають спільну особливість - вони відбуваються при постійній теплоємності. У перших двох процесах теплоємності відповідно рівні C_V і C_p; в ізотермічному процесі ($dT = 0$) теплоємність дорівнює $+\infty$, в адіабатичному($\Delta Q = 0$) теплоємність дорівнює нулю.

Процеси, в яких теплоємність залишається постійною, називаються *політропні.*

Завдання для самопідготовки

1. Покажіть, що теплоємність ідеального газу залежить від процесу зміни його стану.
2. Який загальний спосіб визначення рівняння процесу даного газу за заданим значенням теплоємності?
3. Які процеси зміни стану газу характеризуються негативною величиною теплоємності?
4. Сходячи з молекулярно-кінетичної картини зіткнення молекул зі стінками покажіть, що при адіабатному стисненні газу він нагрівається. Спробуйте кількісно обчислити величину цього нагрівання в залежності від зміни об’єму.
5. Накреслити залежність теплоємності молекулярного водню від температури и поясніть цю залежність.

Лекція 6

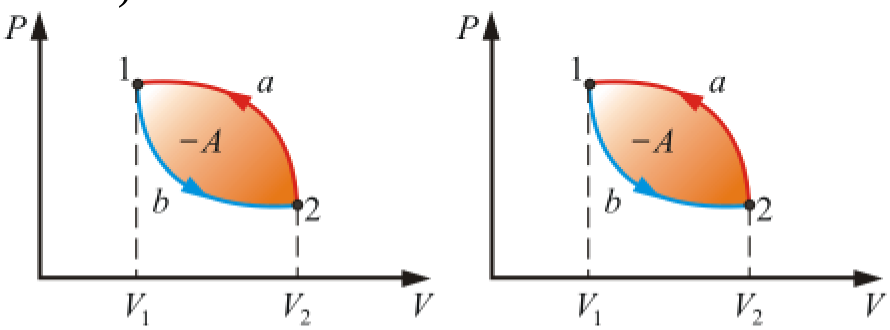
2.6. ДРУГИЙ ЗАКОН (ПОЧАТОК) ТЕРМОДИНАМІКИ

План заняття

1. Круговий процес (цикл). Оборотні і необоротні процеси
2. Другий закон термодинаміки
3. Теплові двигуни і холодильні машини
4. Цикл Карно і його ККД для ідеального газу

2.6.1. Круговий процес (цикл). Оборотні і необоротні процеси

Круговим процесом (або циклом) називається процес, при якому система, пройшовши через ряд станів, повертається у початковий стан. На діаграмі процесів цикл зображується у вигляді замкнутої кривої (рис. 2.6.1).



а б

Рис. 2.6.1. **Круговий процес: а – прямий цикл; б – зворотній цикл**

Цикл, який виконується ідеальним газом, можна розбити на процеси розширення (1-2) і стиснення (2-1) газу.

Робота розширення (визначається площею фігури $1a2$) позитивна ($dV > 0$), робота стиснення (визначається площею фігури $2b1$) негативна ($dV < 0$).

Отже, робота, що здійснюються газом за цикл, визначається площею, яка охоплюється замкнутою кривою.

Якщо за цикл здійснюється позитивна робота

$$A = \oint pdV > 0$$

(цикл протікає за годинниковою стрілкою), то він називається *прямим* (рис. 2.6.1а), якщо за цикл здійснюється негативна робота

$$A = \oint pdV < 0$$

(цикл протікає проти годинникової стрілки), то він називається *зворотнім* (рис. 2.6.1б).

Прямий цикл використовується в теплових двигунах - періодично діючих установках, які вчиняють роботу за рахунок одержання ззовні теплоти. Зворотній цикл використовується в холодильних машинах - періодично діючих установках, в яких за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з більш високою температурою.

У результаті кругового процесу система повертається в початковий стан і, отже, повна зміна внутрішньої енергії газу дорівнює нулю. Тому перший початок термодинаміки для кругового процесу

$$Q = \Delta U + A = A_1, \qquad (2.6.1)$$

тобто робота, що здійснюються за цикл, дорівнює кількості отриманої ззовні теплоти. Проте в результаті кругового процесу система може теплоту як отримувати, так і віддавати, тому $Q = Q_1 - Q_2$, де Q_1- кількість теплоти, отримане системою, Q_2- кількість теплоти, віддане системою.

Тому термічний коефіцієнт корисної дії для кругового процесу

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (2.6.2)$$

Термічний процес називається *оборотним*, якщо він може відбуватися як у прямому, так і в зворотному напрямку. Причому, якщо такий процес відбувається спочатку в прямому, а потім у зворотному напрямку і система повертається в початковий стан, то в навколишньому середовищі і в цій системі не відбувається ніяких змін.

Всякий процес, що не задовольняє цим умовам, є *незворотнім*. Будь-який рівноважний процес є оборотним. Оборотність рівноважного процесу, що відбувається в системі, випливає з того, що її будь проміжний стан є стан термодинамічної рівноваги; для нього "байдуже", йде процес у прямому чи зворотному напрямку. Реальні процеси супроводжуються дисипацією енергії (через тертя, теплопровідності і т.д.).

Оборотні процеси - це ідеалізація реальних процесів. Їх розгляд важливо з двох причин:

- багато процесів у природі і техніці практично оборотні;
- оборотні процеси є найбільш економічними.

Вони мають максимальний термічний коефіцієнт корисної дії, що дозволяє вказати шляхи підвищення ККД реальних теплових двигунів.

2.6.2. Другий закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки, висловлюючи закон збереження і перетворення енергії, не дозволяє встановити напрямок протікання термодинамічних процесів.

Крім того, існує ряд процесів, що не суперечать першому початку термодинаміки, в яких енергія зберігається, а в природі вони не здійснюються.

Поява другого початку термодинаміки пов'язана з необхідністю дати відповідь на питання, які процеси в природі можливі, а які ні. Другий початок термодинаміки визначає напрямок протікання термодинамічних процесів.

Існують два найбільш поширених формулювання другого початку термодинаміки:

- за У. Кельвіном (1851р.): *неможливий круговий процес, єдиним результатом якого є перетворення теплоти, отриманої від нагрівача, в еквівалентну їй роботу;*
- за Р. Клаузіусом (1850р.): *неможливий круговий процес, єдиним результатом якого є передача теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого.*

Досить просто доводиться еквівалентність цих формулювань, якщо акцентувати увагу на слово «єдиним».

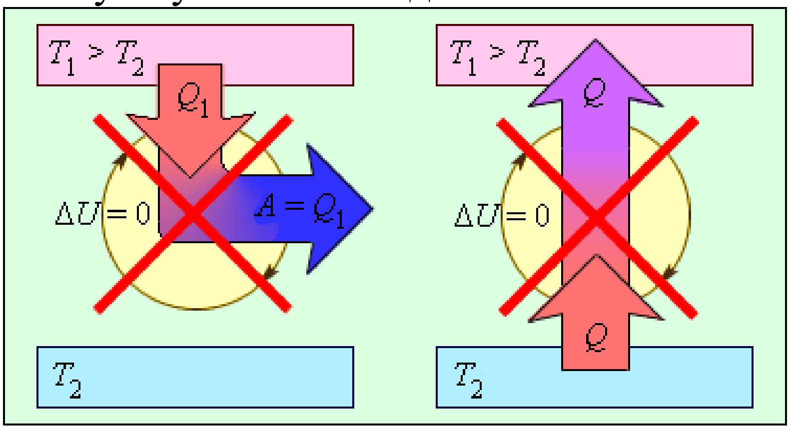


Рис. 2.6.2. **Процеси, що не суперечать першому закону термодинаміки, але забороняються другим законом: 1 - вічний двигун другого роду; 2 - мимовільний перехід тепла від холодного тіла до більш теплого (ідеальна холодильна машина**

2.6.3. Теплові двигуни і холодильні машини

Формулювання другого початку термодинаміки за Кельвіном, по суті стверджує, що вічний двигун другого роду - періодично діючий двигун, який здійснює роботу за рахунок охолодження одного джерела теплоти, - *неможливий*.

Двигун другого роду, будь він можливий, був би практично вічним. Охолодження, наприклад, води океанів на 1° дало б величезну енергію. Маса води в Світовому океані становить приблизно 10^{18} т, при охолодженні якої на 1 градус виділилося б приблизно 10^{24} Дж теплоти, що еквівалентно повному спалюванню 10^{14} тон вугілля. Залізничний потяг, навантажений цією кількістю вугілля, розтягнувся б на відстань 10^{10} км, що приблизно збігається з розмірами Сонячної системи.

Принцип дії теплового двигуна наведено на рис. 2.6.3. Від термостата, який визначається, як термодинамічна система, яка може обмінюватися теплотою з тілами без зміни температури, з більш високою температурою T_1, який називається *нагрівачем*, за цикл віднімається кількість теплоти Q_1, а термостату з більш низькою температурою T_2, який називається холодильником, за цикл передається кількість теплоти Q_2. При цьому виконується робота $A = Q_1 - Q_2$.

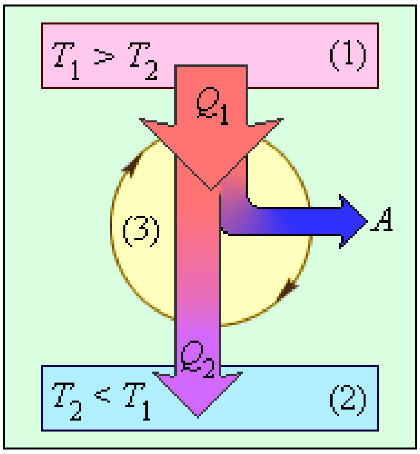


Рис. 2.6.3. **Блок-схема теплового двигуна**

Процес, зворотний тому що відбувається в тепловому двигуні, використовується в холодильній машині, принцип дії якої представлений на рис. 2.6.3. Системою за цикл від термостата з більш низькою температурою T_2 віднімається кількість теплоти Q_2, а віддається термостату з більш високою температурою T_1 кількість теплоти Q_1. Для кругового процесу, згідно (2.5.14), $Q = A$.

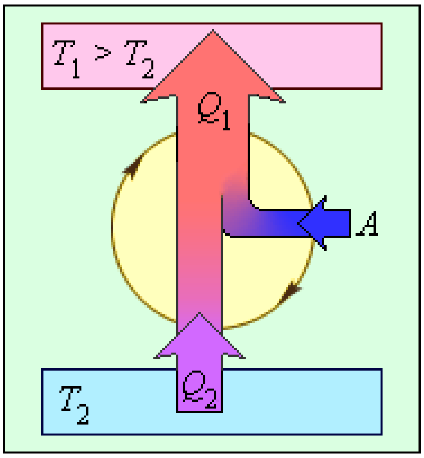


Рис. 2.6.4**. Блок-схема холодильної машини**

Але, за умовою $Q = Q_2 - Q_1 < 0$, тому $A < 0$ і $Q_2 - Q_1 = -A$ або $Q_1 = Q_2 + A$, тобто кількість теплоти яка віддана системою джерелу теплоти Q_1 при більш високій температурі T_1, більше кількості теплоти Q_2, отриманої від джерела теплоти при більш низькій температурі T_2 на величину роботи A, яка виконується над системою.

Отже, без здійснення роботи не можна відбирати теплоту від менш нагрітого тіла і віддавати її більш нагрітому. Це твердження є не що інше, як другий початок термодинаміки у формулюванні Клаузіуса.

Однак другий початок термодинаміки не слід представляти таким, що воно зовсім забороняє перехід теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого. Адже саме такий перехід здійснюється в холодильній машині. Але при цьому треба пам'ятати, що зовнішні сили здійснюють роботу над системою, тобто цей перехід не є єдиним результатом процесу.

2.6.4. Цикл Карно і його ККД для ідеального газу

Щоб термічний коефіцієнт корисної дії теплового двигуна (2.7.1) дорівнював 1, необхідне виконання умови $Q_2 = 0$, тобто тепловий двигун повинен мати тільки одне джерело теплоти, а це неможливо. Французький інженер Сааді Карно показав, що для роботи теплового двигуна необхідно не менше двох джерел теплоти з *різними температурами*

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(Q_1 - Q_2)}{Q_1} \qquad (2.6.5)$$

Ще у 1924 році Карно вивів теорему, що носить його ім'я: *з усіх періодично діючих теплових машин, що мають однакові температури нагрівачів T_1 і холодильників T_2, найбільшим ККД володіють оборотні машини.* При цьому ККД оборотних машин, що працюють при однакових температурах нагрівачів і холодильників рівні один одному і не залежать від природи робочого тіла (тіла, яке вчиняє круговий процес і обмінюється енергією з іншими тілами), а визначаються тільки температурами нагрівача і холодильника.

Цикл Карно зображений на рис. 2.6.5, де ізотермічні розширення і стиснення задані відповідними кривими 1-2 і 3-4, а адіабатичні розширення і стиснення - кривими 2-3 і 4-1.

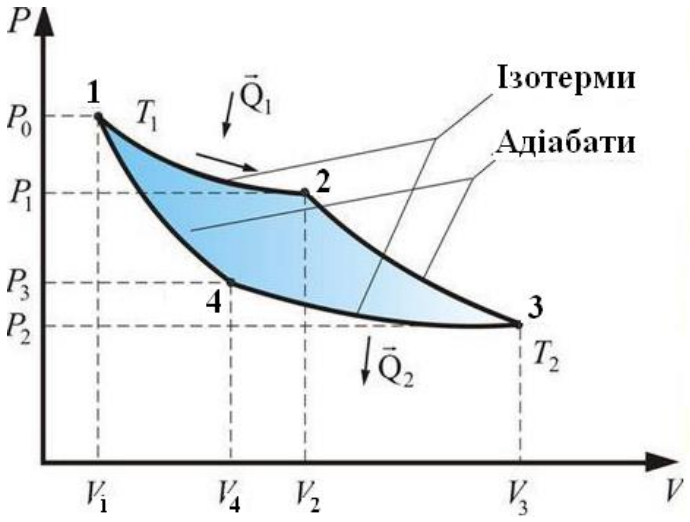


Рис. 2.6.5. **Цикл Карно**

При ізотермічному процесі $U = \text{const}$, тому кількість теплоти Q_1, отримана газом від нагрівача, дорівнює роботі розширення A_{12}, яка здійснюється газом при переході зі стану 1 в стан 2:

$$A_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1 \qquad (2.6.6)$$

При адіабатичному розширенні 2-3 теплообмін з навколишнім середовищем відсутній і робота A_{23} розширення відбувається за рахунок зміни внутрішньої енергії:

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1)$$

Кількість теплоти Q_2, що віддана газом холодильнику при ізотермічному стисненні, дорівнює роботі стиснення A_{34}

$$A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} = -Q_2 \qquad (2.6.7)$$

Робота адіабатичного стиснення

$$A_{41} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}$$

Робота, що здійснюється в результаті кругового процесу,

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2.$$

Вона дорівнює площі, заштрихованій на рис. 2.6.5.

Для визначення термічного ККД циклу Карно будемо користуватися формулою (2.7.1). Застосувавши рівняння для адіабат 2-3 і 4-1, маємо

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \text{ і } T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1},$$

звідки

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \qquad (2.6.8)$$

Підставляючи (2.6.6) і (2.6.7) у формулу (2.6.5) та враховуючи (2.6.8), отримуємо

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (2.6.9)$$

Для циклу Карно ККД визначається тільки температурами нагрівача і холодильника. Для його підвищення необхідно збільшувати різницю температур нагрівача і холодильника.

Наприклад, при $T_1 = 400\,\text{К}$ і $T_2 = 300\,\text{К}$ маємо $\eta = 0,25$ Якщо ж температуру нагрівача підвищити на 100К, а температуру холодильника знизити на 50К, то $\eta = 0,5$.

ККД всякого реального теплового двигуна через тертя і неминучих теплових втрат набагато менше обчисленого для циклу Карно.

Таким чином, формулювання Карно можна вважати першою спробою доказати неможливість створення циклічного теплового двигуна, який би мав 100% ККД, тобто неможливість створення так званого *вічного двигуна другого роду*.

Теорема Карно послужила підставою для встановлення термодинамічної шкали температур. Порівнюючи ліву і праву частини формули (2.7.5), отримаємо

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \qquad (2.6.10)$$

Для порівняння температур T_1 і T_2 двох тіл необхідно здійснити оборотний цикл Карно, в якому одне тіло використовується в якості нагрівача, інше - холодильника. З рівності (2.6.9) бачимо, що відношення температур тіл дорівнює відношенню відданої в цьому циклі кількості теплоти до отриманої.

Однак, практично таким чином порівнювати температури важко, так як реальні термодинамічні процеси є незворотними.

Завдання для самопідготовки

1. У чому відмінність між оборотними і необоротними процесами? Чому всі реальні процеси необоротні?
2. Накресліть оборотний цикл Карно і виведіть вираз для його термічного коефіцієнта корисної дії.
3. У чому полягає другий закон термодинаміки? Чим він доповнює перший початок термодинаміки?
4. Яке статистичне тлумачення другого закону термодинаміки і які межі його застосовності?

5. Чи залежить робота, що здійснюються робочим тілом теплової машини за один цикл, від маси і теплоємності робочого тіла?

7. Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура охолоджувача дорівнює 290 К. У скільки разів збільшиться ККД циклу, якщо температура нагрівача підвищиться від 400 К до 600 К?

Відповідь: 1,27

Лекція 7

2.7. ЕНТРОПІЯ

План заняття

1. Поняття ентропії. Нерівність Клаузіуса
2. Ентропія ідеального газу
3. Статистичне тлумачення ентропії і її зв'язок з термодинамічною ймовірністю
4. Теорема Нернста-Планка

2.7.1. Поняття ентропії. Нерівність Клаузіуса

Поняття ентропії введено Р. Клаузіусом в 1865 р. Для з'ясування фізичного змісту цього поняття розглядають відношення теплоти Q, отриманої тілом в ізотермічному процесі, до температури T тіл які віддають тепло. Це відношення називається *наведеною кількістю теплоти.*

Наведена кількість теплоти, що надається тілу на нескінченно малій ділянці процесу, дорівнює $\frac{\Delta Q}{T}$.

Теоретичний аналіз показує, що наведена кількість теплоти, що надається тілу в будь-якому *оборотному круговому процесі*, дорівнює нулю:

$$\oint \frac{\Delta Q}{T} = 0 \qquad (2.7.1)$$

З рівності нулю інтеграла (2.7.1), взятого по замкнутому контуру, випливає, що підінтегральний вираз $\frac{\Delta Q}{T}$ є повний диференціал деякої функції, яка визначається тільки станом системи і не залежить від шляху, яким система прийшла в цей стан.

Таким чином,

$$\frac{\Delta Q}{T} = dS . \qquad (2.7.2)$$

Функція стану, диференціалом якої є $\frac{\Delta Q}{T}$, називається *ентропією* і позначається S.

З формули (2.7.1) випливає, що для оборотних процесів зміна ентропії дорівнює нулю:

$$\Delta S = 0 \tag{2.7.3}$$

При цьому ентропія системи, що робить незворотний цикл, зростає:

$$\Delta S > 0 \tag{2.7.4}$$

Вирази (2.7.3) і (2.7.4) відносяться тільки до замкнутих систем, якщо ж система обмінюється з теплотою із зовнішнім середовищем, то її ентропія може поводитися будь-яким чином. Співвідношення (2.6.3) і (2.6.4) можна представити у вигляді *нерівності Клаузіуса*:

$$\Delta S \geq 0 \tag{2.7.5}$$

тобто *ентропія замкнутої системи може або зростати (при необоротних процесах), або залишатися постійною (при оборотних процесах).*

Якщо система здійснює рівноважний перехід зі стану 1 в стан 2, то, згідно (2.7.2), зміна ентропії

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\Delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \Delta A}{T}, \tag{2.7.6}$$

де підінтегральний вираз і межі інтегрування визначаються через величини, що характеризують досліджуваний процес. Фізичний зміст має не сама ентропія, а різниця ентропій.

Виходячи з виразу (2.7.6), знайдемо зміну ентропії в процесах ідеального газу. Так як

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT \qquad \text{і} \qquad \Delta A = pdV = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V},$$

то

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

або

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}, \qquad (2.7.7)$$

тобто зміна ентропії $\Delta S_{1\to 2}$ ідеального газу при переході його із стану 1 в стан 2 не залежить від виду процесу переходу $1 \Rightarrow 2$.

Так як для адіабатичного процесу $\Delta Q = 0$ то й $\Delta S = 0$, отже, $S = \mathrm{const}$, тобто адіабатичний оборотний процес протікає при постійній ентропії. Тому його часто називають ізоентропійним процесом.

З формули (2.7.7) випливає, що при ізотермічному процесі $(T_1 = T_2)$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}$$

при ізохоричному процесі $(V_1 = V_2)$

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1}$$

Ентропія має властивість адитивності: ентропія системи дорівнює сумі ентропій тіл, що входять в систему. Властивість адитивності мають також внутрішня енергія, маса, об'єм (температура і тиск такої властивості не мають).

2.7.2. Статистичне тлумачення ентропії і її зв'язок з термодинамічною ймовірністю

Більш глибокий зміст ентропії розкривається в статистичній фізиці: ентропія зв'язується з термодинамічною ймовірністю стану системи.

Термодинамічна ймовірність W стану системи – це число способів, якими може бути реалізовано даний стан макроскопічної системи, або число мікростанів, які здійснюють даний макростан (за визначенням $W \geq 1$, тобто термодинамічна ймовірність не є ймовірність в математичному сенсі).

Згідно Л. Больцману, ентропія системи і термодинамічна ймовірність пов'язані між собою таким чином:

$$S = k \ln W \qquad (2.7.8)$$

де k - стала Больцмана.

Таким чином, ентропія визначається логарифмом числа мікростанів, за допомогою яких може бути реалізований даний макростан. Отже, *ентропія може розглядатися як міра ймовірності стану термодинамічної системи.*

Формула Больцмана (2.7.8) дозволяє дати ентропії наступне статистичне тлумачення: *ентропія є мірою невпорядкованості системи.*

Справді, чим більше число мікростанів, що реалізують даний макростан, тим більше ентропія.

У стані рівноваги - найбільш ймовірного стану системи - число мікростанів максимально, при цьому максимальна і ентропія.

Так як реальні процеси необоротні, то можна стверджувати, що всі процеси в замкнутій системі ведуть до збільшення ентропії - *принцип зростання ентропії*. При статистичному тлумаченні ентропії це означає, що процеси в замкнутій системі йдуть в напрямку збільшення числа мікростанів, іншими словами, від менш імовірних станів до більш імовірних, до тих пір поки ймовірність стану не стане максимальною.

Зіставляючи вирази (2.7.5) і (2.7.8), бачимо, що ентропія і термодинамічна ймовірність замкнутої системи можуть або зростати (у разі необоротних процесів), або залишатися постійними (у разі оборотних процесів).

Використовуючи поняття ентропії і нерівність Клаузиуса, другий початок термодинаміки можна сформулювати як закон зростання ентропії замкнутої системи при необоротних процесах: *будь-який незворотній процес в замкнутій системі відбувається так, що ентропія системи при цьому зростає.*

Більш коротке формулювання другого початку термодинаміки: *у процесах, що відбуваються в замкнутій системі, ентропія не убуває.*

Тут істотно, що мова йде про замкнуті системи, так як в незамкнутих системах ентропія може поводитися будь-яким чином (спадати, зростати, залишатися постійною). Крім того, ентропія залишається постійною в замкнутій системі тільки при оборотних процесах. При необоротних процесах в замкнутій системі ентропія завжди зростає.

Формула Больцмана (2.7.8) дозволяє пояснити зростання ентропії в замкнутій системі при необоротних процесах, яке постулюється другим початком: *зростання ентропії означає перехід системи з менш ймовірних в більш ймовірні стани.*

Таким чином, формула Больцмана дозволяє дати статистичне тлумачення другого початку термодинаміки. Воно, будучи статистичними законом, описує закономірності хаотичного руху великого числа частинок, які складають замкнуту систему.

2.7.2. Теорема Нернста-Планка

Перші два начала термодинаміки дають недостатньо відомостей про поведінку термодинамічних систем при 0 К. Вони доповнюються третім початком термодинаміки або теоремою Нернста - Планка: *ентропія всіх тіл в стані рівноваги прагне до нуля в міру наближення температури до нуля Кельвіна:*

$$\lim_{T \to 0} S = 0$$

Так як ентропія визначається з точністю до адитивної сталої, то цю сталу зручно взяти рівною нулю. Зазначимо, однак, що це довільне припущення, оскільки ентропія по своїй суті завжди визначається з точністю до адитивної сталої.

З теореми Нернста - Планка випливає, що теплоємність C_V при абсолютному нулі дорівнює нулю.

Завдання для самопідготовки

1. Чи змінюється ентропія при адіабатичному процесі? Чи можна здійснити в якій-небудь системі круговий необоротний адіабатичний процес?

2. Яким чином можна вичислити зміну ентропії під час переходу системи з одного стану в інший?

3. Як можна трактувати зміну ентропії при змішуванні газів із статистичної точки зору?

4. Лід масою m = 2 кг при температурі t = 0ºC був перетворений на воду тієї ж температури за допомогою пари, що має температуру t = 100ºC. Визначити масу m витраченого пара. Яке змінення ΔS ентропії системи лід - пар?

Відповідь: 251 г, 610 Дж/К

5. Кисень масою m = 2 кг збільшив свій об’єм в n = 5 разів один раз ізотермічно, інший - адіабатично. Знайти змінення ΔS ентропії в кожному із зазначених процесів.

Відповідь: 836 Дж/К

Лекція 8

2.8. РЕАЛЬНІ ГАЗИ. ВЛАСТИВОСТІ РІДИН

План заняття

1. Рівняння Ван-дер-Ваальса
2. Ізотерми Ван - дер - Ваальса та їх аналіз
3. Властивості рідин
4. Поверхневий натяг. Крайовий кут
5. Тиск під викривленою поверхнею рідини. Капілярні явища

2.8.1. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Модель ідеального газу, що використовується в МКТ газів, дозволяє описувати поведінку розріджених реальних газів при достатньо високих температурах і низьких тисках. При виведенні рівняння стану ідеального газу розмірами молекул і їх взаємодією один з одним нехтують. Підвищення тиску призводить до зменшення середньої відстані між молекулами, тому необхідно враховувати об'єм молекул і взаємодію між ними.

У 1 м^3 газу при нормальних умовах знаходиться $2{,}68 \cdot 10^{25}$ молекул, що займають об'єм приблизно 10^{-4} м^3 (радіус молекули приблизно 10^{-10} м), яким в порівнянні з об'ємом газу можна знехтувати.

При тиску 500 МПа об'єм молекул вже складе половину всього об'єму газу. Доведено, що при високих тисках і низьких температурах зазначена модель ідеального газу непридатна.

Для реальних газів необхідно враховувати розміри молекул і їх взаємодію одна з одною, тому модель ідеального газу й рівняння Клапейрона – Менделєєва $pV_m = RT$ (для молю газу), що описує ідеальний газ, для реальних газів не може бути використана.

Враховуючи власний об'єм молекул і сили міжмолекулярної взаємодії, Ван - дер - Ваальс вивів рівняння стану реального газу.

У рівняння Клапейрона - Менделєєва введено дві поправки.

- Облік власного об'єму молекул.

Наявність сил відштовхування, які протидіють проникненню в зайнятий молекулою об'єм інших молекул, зводиться до того, що фактичний вільний об'єм, в якому можуть рухатися молекули реального газу, буде не V_m, а $V_m - b$, де b– поправка,що враховує об'єм, займаний самими молекулами.

- Облік притягання молекул.

Дія сил притягання між молекулами газу призводить до появи додаткового тиску на газ, який називається *внутрішнім тиском*.

За обчисленнями Ван-дер-Ваальса, внутрішній тиск обернено пропорційний квадрату молярного об'єму

$$p' = \frac{a}{V_m^2} \qquad (2.8.1)$$

де a - постійна Ван -дер -Ваальса, що характеризує сили міжмолекулярного тяжіння; V_m - молярний об'єм.

Тиск, чинений на стінки реальним газом, менше, ніж у випадку ідеального газу, на величину p'.

Вводячи ці поправки, одержимо рівняння Ван-дер-Ваальса для молю газу (*рівняння стану реальних газів*):

$$(p + a / V_m^2)(V_m - b) = RT \qquad (2.8.2\ )$$

Для довільної кількості речовини $\left(\nu = \dfrac{m}{M}\right)$газу з урахуванням того, що $V = \nu \cdot V_m$, рівняння Ван-дер-Ваальса визначиться у вигляді

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT$$

або

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu \cdot b\right) = \nu \cdot RT\ ,$$

де поправки a і b - постійні для кожного газу величини, що визначаються дослідним шляхом. Записуються рівняння Ван-дер-Ваальса для двох відомих з досліду станів газу і вирішуються щодо a і b.

При виведенні рівняння Ван-дер-Ваальса зроблений цілий ряд спрощень, тому воно також вельми наближене, хоча і краще (особливо для несильно стислих газів) узгоджується з дослідом, ніж рівняння стану ідеального газу.

Рівняння Ван-дер-Ваальса не єдине рівняння, що описує реальні гази. Існують і інші рівняння, деякі з них навіть точніше описують реальні гази, але не розглядаються через їх складність.

2.8.2. Ізотерми Ван - дер - Ваальса та їх аналіз

Для дослідження поведінки реального газу розглянемо ізотерми Ван-дер-Ваальса, тобто криві залежності p від V_m при заданих T, зумовлені рівнянням Ван-дер-Ваальса (2.8.2) для молю газу.

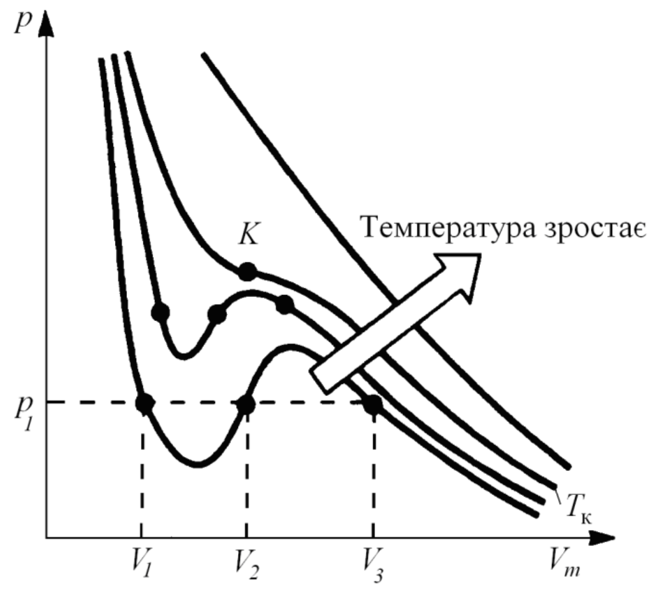


Рис. 2.8.1. **Ізотерми Ван - дер - Ваальса**

Ці криві (розглядаються для 4- х різних температур, рис. 2.8.1) мають досить своєрідний характер.

При високих температурах $T > T_к$ ізотерма реального газу відрізняється від ізотерми ідеального газу тільки деяким спотворенням її форми, залишаючись монотонно спадаючою кривою.

При деякій температурі $T_к$ на ізотермі є лише одна точка перегину К.

Ця ізотерма називається *критичною*, відповідна їй температура $T_к$ - *критичною температурою*.

Точка перегину К називається *критичною точкою*. У цій точці дотична до неї паралельна осі абсцис .

Відповідні цій точці об'єм $V_к$ і тиск $p_к$ називаються критичними. Стан з критичними параметрами $p_к, V_к, T_к$ називається *критичним станом*.

При низьких температурах ізотерми мають хвилеподібну ділянку, спочатку монотонно опускаючись вниз, потім монотонно піднімаючись вгору і знову монотонно опускаючись.

Для пояснення характеру ізотерм перетворимо рівняння Ван - дер -Ваальса (2.8.2) до виду

$$pV_m^3 - (RT + pb)V_m^2 + aV_m - ab = 0 \qquad (2.8.3)$$

Рівняння (2.8.3) при заданих p і T є рівнянням третього ступеня відносно V_m, отже, воно може мати або три дійсних кореня, або один дійсний і два уявних, причому фізичний зміст мають лише дійсні позитивні коріння. Тому першому випадку відповідають ізотерми при низьких температурах (три значення об'єму газу V_1, V_2 і V_3 відповідають одному значенню тиску p_1), другому випадку - ізотерми при високих температурах.

Розглянемо різні ділянки ізотерми при T = const. (рис. 2.8.2).

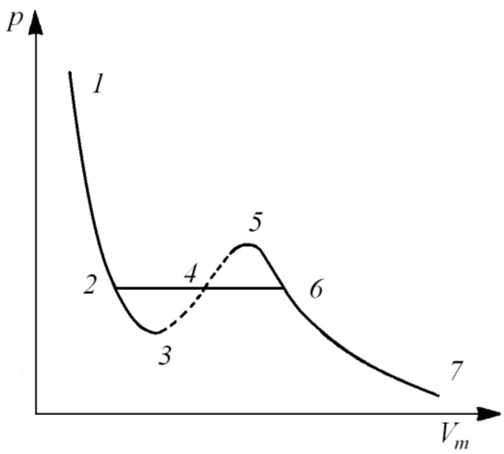


Рис. 2.8.2. **Різні ділянки ізотерми Ван -дер –Ваальса**

Бачимо, що на дільницях 1-3 і 5-7 при зменшенні об'єму тиск зростає, що природно. На ділянці 3-5 стиснення речовини призводить до зменшення тиску; практика ж показує, що такі стани в природі не здійснюються. Наявність ділянки 3-5 означає, що при поступовому зміні об'єму речовина не може залишатися весь час у вигляді однорідного середовища, в деякий момент має настати стрибкоподібна зміна стану і розпад речовини на дві фази. Таким чином, справжня ізотерма буде мати вигляд ламаної лінії 7-6-2-1.

Частина 7-6 відповідає газоподібному стану, а частина 2-1 - рідкому. У станах, відповідних горизонтальній ділянці ізотерми 6-2, спостерігається рівновага рідкої і газоподібної фаз речовини.

Речовина в газоподібному стані при температурі нижче критичної називається парою, а *пара, що знаходиться в рівновазі зі своєю рідиною, називається* ***насиченою.***
Для знаходження критичних параметрів можна записати

$$V_{mк} = 3b$$
$$p_к = a/(27b^2) \tag{2.8.4}$$
$$T_к = 8a/(27Rb)$$

Таблиця 2.8.1

Критичні параметри деяких газів

Газ	$V_{mк}$, м^3	$p_к$, МПа	$T_к$, К
Кисень Азот	$3{,}17 \bullet 10^{-5}$ $3{,}86 \bullet 10^{-5}$	5,08 3,99	155 126

Якщо через крайні точки горизонтальних ділянок ансамблю ізотерм провести лінію, то вийде колоколоподібна крива (рис. 2.8.3), обмежуюча область двофазних станів речовини.

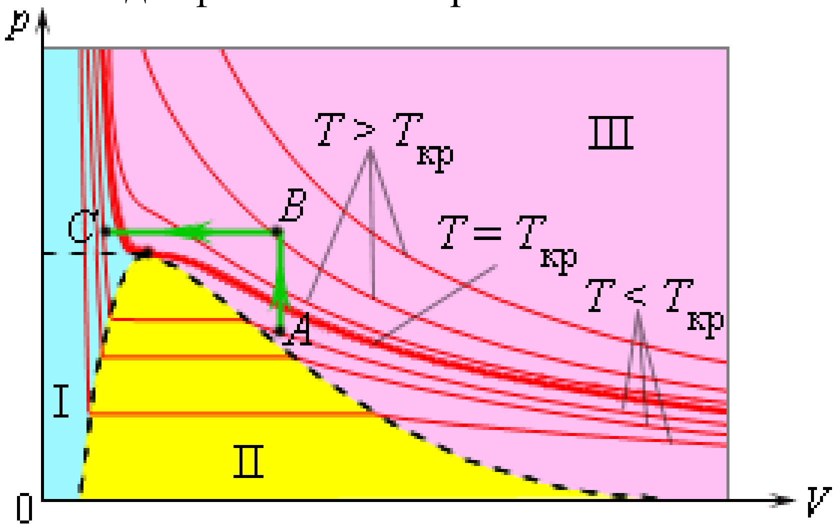


Рис. 2.8.3. **Області різних станів речовини на діаграмі *p – V***
Область I – рідина; Область П – двофазний стан (рідина і насичений пар); область Ш – газоподібний стан. *К* – критична точка

Ця крива і критична ізотерма ділять діаграму p, V_m під ізотермою на три області: під колоколоподібною кривою розташовується область двофазних станів (рідина і насичений пар), ліворуч від неї знаходиться область рідкого стану, а праворуч - область пари. Пара відрізняється від всіх інших газоподібних станів тим, що при ізотермічному стисненні зазнає процес зрідження. Газ же при температурі вище критичної не може бути перетворений на рідину ні при якому тиску.

2.8.3. Властивості рідин

Рідина є агрегатним станом речовини, проміжним між газоподібним і твердим. Тому вона має властивості як газоподібних, так і твердих речовин.

Рідини, подібно до твердих тіл, володіють певним об'ємом, а подібно газам, приймають форму посудини, в якому вони знаходяться.

Молекули газу практично не пов'язані між собою силами міжмолекулярної взаємодії. У даному випадку середня енергія теплового руху молекул газу набагато більше середньої потенційної енергії, обумовленої силами тяжіння між ними, тому молекули газу розлітаються в різні сторони, і газ займає наданий йому об'єм.

У твердих і рідких тілах сили тяжіння між молекулами вже істотні і утримують молекули на певній відстані одну від одної. У цьому випадку середня енергія хаотичного (теплового) руху молекул менше середньої потенційної енергії, обумовленої силами міжмолекулярної взаємодії, і її недостатньо для подолання сил тяжіння між молекулами, тому тверді тіла і рідини мають певний об'єм.

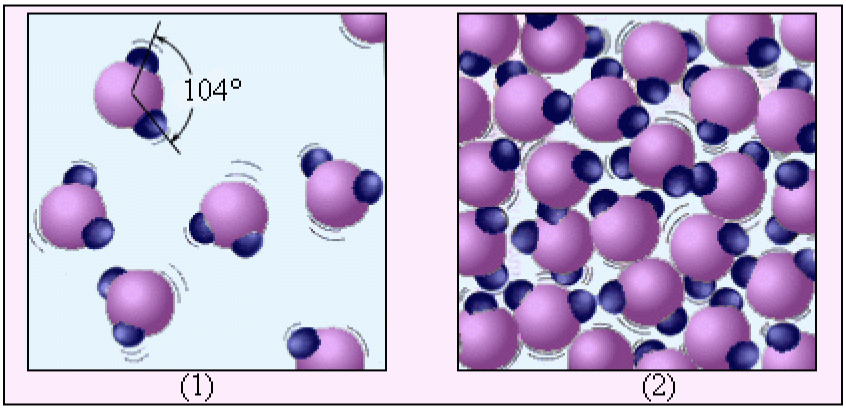


Рис. 2.8.4. **Водяний пар (1) і вода (2)**

Рентгеноструктурний аналіз рідин показав, що характер розташування частинок рідини проміжний між газом і твердим тілом. У газах молекули рухаються хаотично, тому немає ніякої закономірності в їх взаємному розташуванні.

Для твердих тіл спостерігається так званий *дальній порядок* в розташуванні частинок, тобто їх впорядковане розташування, повторюється на великих відстанях.

У рідинах має місце так званий *ближній порядок* в розташуванні частинок, тобто їх впорядковане розташування повторюється на відстанях, порівнянних з міжатомними.

Теорія рідини до теперішнього часу повністю не розвинена. Розробка низки проблем у дослідженні складних властивостей рідини належить Я.І. Френкелю.

Тепловий рух в рідині він пояснював тим, що кожна молекула протягом деякого часу коливається біля певного положення рівноваги, після чого стрибком переходить в нове положення, віддалене від початкового на відстані порядку атомного. Таким чином, молекули рідини досить повільно переміщаються по всій масі рідини і дифузія відбувається набагато повільніше, ніж у газах.

З підвищенням температури рідини частота коливального руху різко збільшується, зростає рухливість молекул, що, у свою чергу, є причиною зменшення в'язкості.

2.8.4. Поверхневий натяг. Крайовий кут

На кожну молекулу рідини з боку оточуючих молекул діють сили тяжіння, які швидко зменшуються з відстанню; отже, починаючи з деякого мінімальної відстані силами тяжіння між молекулами можна знехтувати.

Виділимо всередині рідини молекулу А (рис. 2.8.8). Сили, з якими ці молекули діють на молекулу *A*, спрямовані в різні сторони і в середньому скомпенсовані, тому результуюча сила, що діє на молекулу всередині рідини з боку інших молекул, дорівнює нулю.

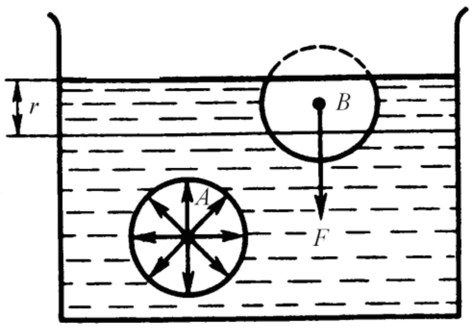


Рис. 2.8.5. **Сили які діють на молекулу: *A* – всередині рідини; *B* – поблизу поверхні рідини**

Інакше йде справа, якщо молекула, наприклад молекула *B*, розташована над поверхні.. Так як концентрація молекул в розташованому над рідиною газі мала в порівнянні з їх концентрацією в рідині, то рівнодіюча сил $\vec{F}$, прикладених до кожної молекули поверхневого шару, не дорівнює нулю і спрямована всередину рідини.

Таким чином, результуючі сили всіх молекул поверхневого шару роблять на рідину тиск, який називається *молекулярним* (або внутрішнім).

Молекули поверхневого шару мають більшу потенційну енергію, ніж молекули всередині рідини. Ця додаткова енергія, яку мають молекули в поверхневому шарі рідини, називається *поверхневою енергією* і пропорційна площі шару ΔS:

$$\Delta E = \sigma \cdot \Delta S \tag{2.8.5}$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу.

Так як рівноважний стан характеризується мінімумом потенційної енергії, то рідина при відсутності зовнішніх сил буде приймати таку форму, щоб при заданому об'ємі вона мала мінімальну поверхню, тобто форму кулі. Спостерігаючи дрібні крапельки, зважені в повітрі, можна побачити, що вони дійсно мають форму кульок, але дещо викривлену через дію сил земного тяжіння. В умовах невагомості крапля будь-якої рідини (незалежно від її розмірів) має сферичну форму, що доведено експериментально на космічних кораблях.

Під дією сил поверхневого натягу (які спрямовані перпендикулярно ділянці контуру, на який вони діють) поверхня рідини прагне скоротитися, тобто коефіцієнт поверхневого натягу дорівнює силі поверхневого натягу, що припадає на одиницю довжини контуру, який обмежує поверхню.

$$\sigma = \frac{F}{l} \tag{2.8.6}$$

Одиниця виміру коефіцієнту поверхневого натягу – ньютон на метр (Н/м) або джоуль на квадратний метр (Дж/м^2).

Більшість рідин при температурі 300 К має коефіцієнт поверхневого натягу порядку 10^{-2}-10^{-1} Н/м. Коефіцієнт поверхневого натягу з підвищенням температури зменшується, так як збільшуються середні відстані між молекулами рідини.

Відомо, що крапля води розтікається на склі і приймає форму, зображену на рис. 2.8.6а, в той час як ртуть на тій же поверхні перетворюється на сплюснуту краплю (рис. 2.8.6б).

У першому випадку говорять, що рідина змочує тверду поверхню, у другому - не змочує її.

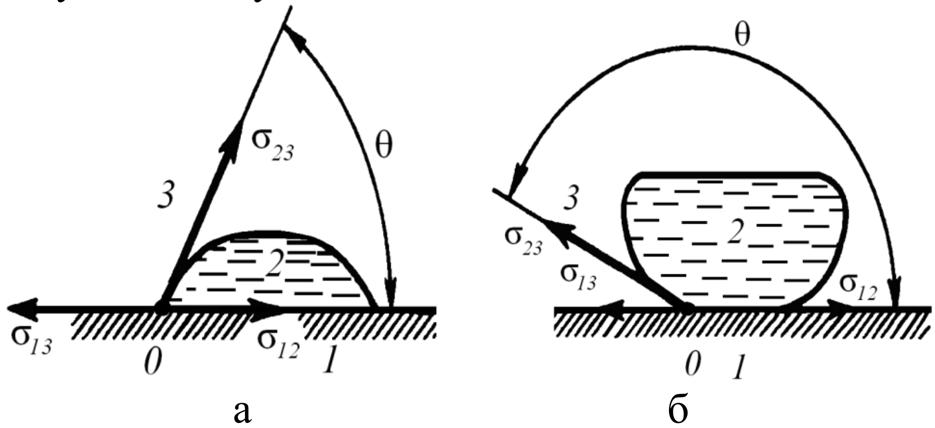


Рис. 2.8.6. **Крапля рідини на поверхні скла: а – вода; б - ртуть**

Змочування залежить від характеру сил, що діють між молекулами поверхневих шарів дотичних середовищ. Для рідини, яка змочує, сили тяжіння між молекулами рідини і твердого тіла більше, ніж між молекулами самої рідини, і рідина прагне збільшити поверхню зіткнення з твердим тілом. Для рідини, яка не змочує, сили тяжіння між молекулами рідини і твердого тіла менше, ніж між молекулами рідини, і рідина прагне зменшити поверхню свого зіткнення з твердим тілом.

Кут θ між дотичними до поверхні рідини і твердого тіла називається *крайовим кутом*.

Якщо рідина розтікається по поверхні твердого тіла, покриваючи його тонкою плівкою (наприклад, гас на поверхні скла) – має місце повне змочування – $\theta = 0$.

Якщо рідина стягується в кульову краплю, в межі маючи з нею лише одну точку дотику (наприклад, крапля води на поверхні парафіну) – має місце повне незмочування – $\theta=\pi$.

Змочування і незмочування є поняттями відносними, тобто рідина, яка змочує одну тверду поверхню, не змочує іншу. Наприклад, вода змочує скло, але не змочує парафін; ртуть не змочує скло, але змочує чисті поверхні металів.

2.8.5. Тиск під викривленою поверхнею рідини. Капілярні явища

Якщо поверхня рідини не плоска, а викривлена, то вона робить на рідину надмірний (додатковий) тиск. Це тиск, обумовлений силами поверхневого натягу, для опуклої поверхні позитивно, а для увігнутій поверхні - негативно.

Формула (2.8.7), яка визначає надлишковий тиск для довільної поверхні рідини двоякої кривизни, має назву *формули Лапласа,*:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{2.8.7}$$

де R_1 і R_2 - радіуси кривизни двох будь-яких взаємно перпендикулярних нормальних перерізів поверхні рідини в даній точці. Радіус кривизни позитивний, якщо центр кривизни відповідного перетину знаходиться всередині рідини, і негативний, якщо центр кривизни знаходиться поза рідиною.

Для сферично викривленої поверхні $R_1 = R_2 = R$ і вираз (2.8.7) перетворюється на

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

У випадку плоскої поверхні $R_1 = R_2 = \infty$ і сили поверхневого натягу надлишкового тиску не створюють.

Якщо помістити вузьку трубку (капіляр) одним кінцем в рідину, налиту в широкий посудину, то внаслідок змочування або незмочування рідиною стінок капіляра кривизна поверхні рідини в капілярі стає значною.

Якщо рідина змочує матеріал трубки, то всередині її поверхня рідини - *меніск* - має увігнуту форму, якщо не змочує - опуклу (див. рисунок).

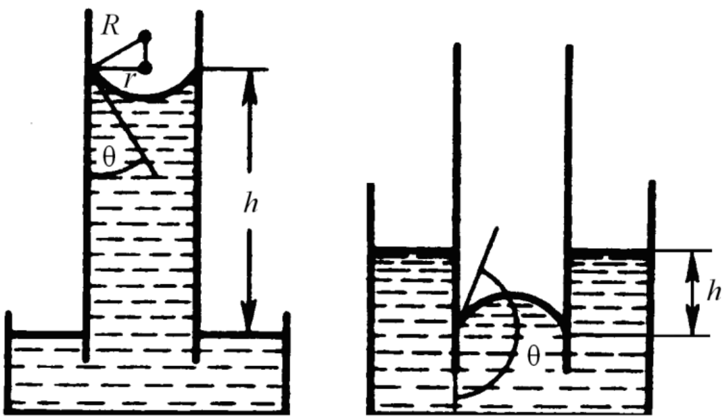


Рис. 2.8.7. **Рівень рідини в капілярі при змочуванні та незмочуванні**

Під увігнутою поверхнею рідини з'явиться негативне надлишковий тиск. Наявність цього тиску призводить до того, що рідина в капілярі піднімається, так як під плоскою поверхнею рідини в широкому посудині надлишкового тиску немає. Якщо ж рідина не змочує стінки капіляра, то позитивний надлишковий тиск призведе до опускання рідини в капілярі (рис 2.8.7).

Явище зміни висоти рівня рідини в капілярах називається *капілярністю.*

Рідина в капілярі піднімається або опускається на таку висоту h, при якій тиск стовпа рідини (гідростатичний тиск) $\rho g h$ врівноважується надлишковим тиском Δp, тобто

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h$$

де ρ - густина рідини.

Якщо r - радіус капіляра, θ- крайовий кут, то (рис. 2.8.7)

$$\frac{2\sigma\cos\theta}{r} = \rho g h$$

Звідки

$$h = \frac{2\sigma\cdot\cos\theta}{r\cdot\rho\cdot g} \qquad (2.8.8)$$

У відповідності з тим, що рідина, яка змочує, по капіляру піднімається, а та, що не змочує, – опускається, з формули (2.11.10) при $\theta < \pi/2$ одержимо позитивні значення h, а при $\theta > \pi/2$ - негативні.

З виразу (2.8.8) видно також, що висота підняття (опускання) рідини в капілярі обернено пропорційна його радіусу. У тонких капілярах рідина піднімається досить високо. Так, при повному змочуванні вода в капілярі діаметром 10 мкм піднімається на висоту майже 3м.

Капілярні явища відіграють велику роль у природі і техніці. Наприклад, вологообмін в ґрунті і в рослинах здійснюється за рахунок підняття води по найтонших капілярах. На капілярності заснована дія фітілів, вбирання вологи бетоном і т.д.

Завдання для самопідготовки

1. Чим відрізняються реальні гази від ідеальних? Накресліть криву, що виражає характер залежності сил взаємодій і взаємної потенційної енергії двох молекул від відстані між ними.

2. Як змінюється величина тиску газу на стінку, якщо при її обчисленні взяти до уваги кінцеві розміри молекул? Дайте чисельну оцінку цієї зміни.

3. Як зміниться величина тиску газу на стінку, якщо при її обчислені взяти до уваги сили тяжіння між молекулами? Який знак цієї зміни і як вона залежить від густини газу?

4. У посудині місткістю V = 0,3 л знаходиться вуглекислий газ, що містить кількість речовини 1 моль при температурі T = 300 К. Визначити тиск p газу:1) за рівнянням Менделєєва - Клапейрона, 2) за рівнянням Ван -дер -Ваальса.

Відповідь: p_1 = 8,31 МПа, p_2 = 5,67 МПа.

5. Які причини особливих властивостей поверхневого шару рідин?

6. Як залежить коефіцієнт поверхневого натягу рідин від їх температури?

7. Як впливає поверхнево-активна речовина (ПАВ) на поверхневий натяг бітумів та води?

8. Як впливає температура на значення крайового кута змочування бітумом твердої поверхні?

9. Трубка має діаметр d = 0,2 см. На нижньому кінці трубки повисла крапля води, що має в момент відриву вигляд кульки Знайти діаметр d цієї краплі.

Відповідь: 4,4 мм.

10. Яку роботу A потрібно здійснити, щоб, видуваючи мильну бульбашку, збільшити її діаметр від d = 1 см до d = 11 см ? Вважати процес ізотермічним.

Відповідь: 3 мДж.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики: У 3 т. / За ред. І.М.Кучерука. - 2-ге вид., випр. - К.: Техніка, 2006. Т.1: / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик. - 452 с.
2. В.П. Курінний та ін.; Курс фізики /За заг. ред. І.П. Гаркуші. - 2-ге вид.,стер. - К.: Техніка, 2004. - 560 с.
3. Куліш В.В., Соловйов А.М., Кузнєцова О.Я., Кулішенко В.М. Фізика для інженерних спеціальностей. Кредитно-модульна система. Частина 1. - К.: НАУ, 2004. - 456 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1./ И.В. Савельев- М.: Наука, 1982.
5. Трофимова Т.И. Курс физики./ Т.И. Трофимова- М.: Висшая школа, 1985.
6. Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Б. Курс физики. Т.1-3./ А.А. Детлаф., Б.М. Яворский, Л.Б Милковская - М.: Высшая школа, 1979.
7. Яворский Б. М. Справочник по физике. Для инженеров и студентов вузов / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. – 8-е изд., перераб и испр. – М. Оникс. – 2007. – 1056 с.
8. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – Изд-е 7-е: Физматлит, 2001. – 640 с.
9. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями: Учеб. Пособие для вузов / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова – М.: Высш. Шк., 1999. – 591 с.

Додаток

Таблиця 1

Літери грецького алфавіту

Α,α-альфа	Ι,ι-йота	Ρ,ρ-ро
Β,β-бета	Κ,æ-капа	Σ,σ-сігма
Γ,γ-гама	Λ,λ-ланбдо	Τ,τ-тау
Δ,δ-дельта	Μ,μ-мю	V,υ-іпсілон
Ε,ε-епсилон	Ν,ν-ню	Φ,φ-фі
Ζ,ζ-дзета	Ξ,ξ-ксі	Χ,χ-хі
Η,η-ета	Ο,ο-омікрон	Ψ,ψ-псі
Θ,θ-тета	Π,π-пі	Ω,ω-омега

Таблиця 2

Множники та префікси утворення кратних і часткових одиниць

Найменування	Позна-чення	Множ-ник	Наймену-вання	Позначення	Множник
Пета	*П*	10^{15}	Деці	д	10^{-1}
Тера	*Т*	10^{12}	Санті	с	10^{-2}
Гіга	*Г*	10^{9}	Мілі	м	10^{-3}
Мега	*М*	10^{6}	Мікро	мк	10^{-6}
Кіло	к	10^{3}	Нано	н	10^{-9}
Гекто	г	10^{2}	Піко	п	10^{-12}
Дека	де	10^{1}	Фемто	ф	10^{-15}

Таблиця 3

Деякі фундаментальні фізичні величини (сталі)

№	Стала	Позна-чення	Числове значення
1	Стала тяжіння	G, γ	$6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²
2	Швидкість світла у вакуумі	C	$2{,}9979 \cdot 10^{8}$ м/с
3	Стала Авогадро	N_A	$6{,}0220 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
4	Універсальна молярна газова стала	R	8,3144·Дж/ моль К
5	Стала Больцмана	K	$1{,}3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
6	Стала Фарадея	F	$9{,}65 \cdot 10^{4}$ Кл/моль
7	Стала Планка	H	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
8	Елементарний заряд	e	$1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
9	Атомна одиниця маси	*а.о.м.*	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$кг
10	Маса електрона у стані спокою	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $5{,}49 \cdot 10^{-4}$а.о.м.
11	Маса протона у стані спокою	m_p	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$кг; 1,00728 а.о.м.
12	Маса нейтрона у стані спокою	m_n	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$кг; 1,00867 а.о.м.

Таблиця 4

Основні астрофізичні величини (сталі)

№	Стала	Позначення	Числове значення
1	Маса Землі	$M_\oplus$,$M_З$	$5{,}976\cdot10^{24}$ кг
2	Радіус Землі	$R_\oplus$,$R_З$	
	середній		6371030 м
	екваторіальний		6378164 м
	полярний		6356799 м
3	Прискорення вільного падіння	g	
	нормальне (стандартне)		$9{,}8066$ м/с^2
	на екваторі		$9{,}7804$ м/с^2
	на полюсі		$9{,}8323$ м/с^2
	На широті 45°		$9{,}8061$ м/с^2
4	Маса Сонця	$M_\otimes$, M_C	$1{,}989\cdot10^{30}$ кг
5	Радіус Сонця	$R_\otimes$,R_C	$6{,}9599\cdot10^{8}$ кг
6	Маса Місяця	$M_М$	$7{,}357\cdot10^{22}$ кг
7	Середня відстань між Землею та Місяцем	$R_{ЗМ}$	384400 км
8	Парсек	*пк*	$3{,}085678\cdot10^{16}$ м
9	Світловий рік	*св. рік*	$9{,}460530\cdot10^{15}$ м
10	Середня швидкість руху Землі по орбіті	$V_{орб}$	$3\cdot10^{4}$ м/с

Таблиця 5

Густина ρ газів за нормальних умов (T=273 К або t°C=0°C та тиску P=101,3 кПа або 760 мм рт. ст.)

№	Вид газу	ρ,кг/м^3	Вид газу	ρ,кг/м^3
1	Азот	1.25	Кисень	1,47
2	Водень	0,09	Окис вуглецю	1,25
3	Водяна пара (100°C)	0,88	Повітря	2,2
4	Гелій	0,179	Пропан	2,2

Таблиця 6

Густина ρ рідини (при t°С=20°С або T=293 К)

№	Вид рідини	ρ,кг/дм^3	Вид рідини	ρ,кг/дм^3
1	Ацетон	0,8	Дизельне пальне	1,0
2	Бензин(легкий)	0,7	Морська вода	1,02-1,04
3	Вода	1,0	Ртуть	13,5
4	Гас	0,8	Сірчана кислота	1,8-1,85
5	Гліцерин	1,26	Спирт	0,79-0,83

Таблиця 7

Густина ρ твердих речовин

№	Речовина	ρ,кг/дм^3	Речовина	ρ,кг/дм^3
1	Алюміній	2,71	Латунь	8,6
2	Бетон	2,2	Мідь	8,9
3	Граніт	2,8	Піщаник	2,4
4	Дуб	0,8	Плексиглас	1,2
5	Залізо	7,8	Свинець	11,34
6	Золото	19,3	Сосна	0,5
7	Кам’яне вугілля	1,4	Срібло	10,5
8	Крига	0,9	Цинк	7,1

Таблиця 8

Швидкість звуку v у різних середовищах

№	Середовище	v,м/с	Середовище	v,м/с
1	Водень(0°)	1286	Дерево	4000
2	Вода(0°)	1485	Свинець	1300
3	Граніт	3950	Скло	5000
4	Гума	54	Цегла	3500

Таблиця 9

Коефіцієнт поверхневого натягу σ рідини (при 20^0 С)

Рідина	σ, мН/м	Рідина	σ, мН/м
Ацетон	23,3	Розчин мила	40
Вода	72,7	Ртуть	465…490
Гліцерин	65,7	Спирт	22…23
Гас	28,9	Трансформаторне масло	36…40