Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к расчетно-графической работе
по дисциплине «Техническая механика»
для студентов специальности 6.100400

Утверждено методическим
советом университета,
протокол № 2 от 10.11.2010 г.

Харьков
ХНАДУ
2011

Составители: Янчевский И. В.,
Шарапата А. С.

Кафедра деталей машин и ТММ

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Расчетно-графическая работа (РГР) по технической механике содержит задачи, решение которых позволяет закрепить знания по основным разделам дисциплины. Ее выполнение имеет большое значение для инженерной подготовки студентов немашиностроительных специальностей и прививает навыки самостоятельной работы, которые необходимы при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Настоящее издание рассчитано на первый семестр изучения дисциплины «Техническая механика» и включает в себя рекомендации к оформлению РГР, схемы и варианты задач, указания по их выполнению с примерами решений. При этом некоторые из задач взяты из давно уже ставшего классическим сборника заданий для курсовых работ под редакцией А. А. Яблонского[*].

Номер схемы и вариант задачи назначает ведущий практические занятия в академической группе преподаватель или в индивидуальном порядке, или по последним двум цифрам зачетной книжки студента – предпоследняя указывает на номер схемы, последняя – на вариант задачи (нуль в зачетной книжке соответствует цифре 10 при выборе номера схемы и/или варианта). Количество задач в РГР и объем их выполнения может быть откорректирован преподавателем.

Каждая задача должна быть защищена. Качество выполнения РГР и результаты защиты задач оцениваются дифференцированно. При неудовлетворительной оценке или несоответствии заданий студенту выдается другая схема или вариант задачи. Студент, не защитивший хотя бы одну из задач РГР, к итоговому контролю по технической механике не допускается.

1. ОФОРМЛЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа оформляется с одной стороны листов писчей бумаги формата А4 (210×294 мм) в виде расчетно-пояснительной записки или рукописно аккуратным почерком чернилами черного или синего цвета, или на компьютере в текстовом редакторе Word. Вид первого (титульного) листа РГР показан в приложении и содержит названия университета и кафедры, название РГР, город и год выполнения работы. Также указывается группа, фамилия и инициалы студента, должность, фамилия и инициалы преподавателя. Титульный лист должен иметь стандартную рамку (отступ слева 20 мм, с остальных сторон – по 5 мм) без вспомогательных полей (см. прило-

[*] Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Уч. пос. для втузов. / Под ред. А. А. Яблонского. – М.: Высш. школа, 1978. – 388 с.

жение). На втором листе, на котором оформляется содержание работы, располагают основную надпись по форме 2 (рис. 1.1). Для последующих листов РГР – выполняется надпись по форме 2а (рис. 1.2).

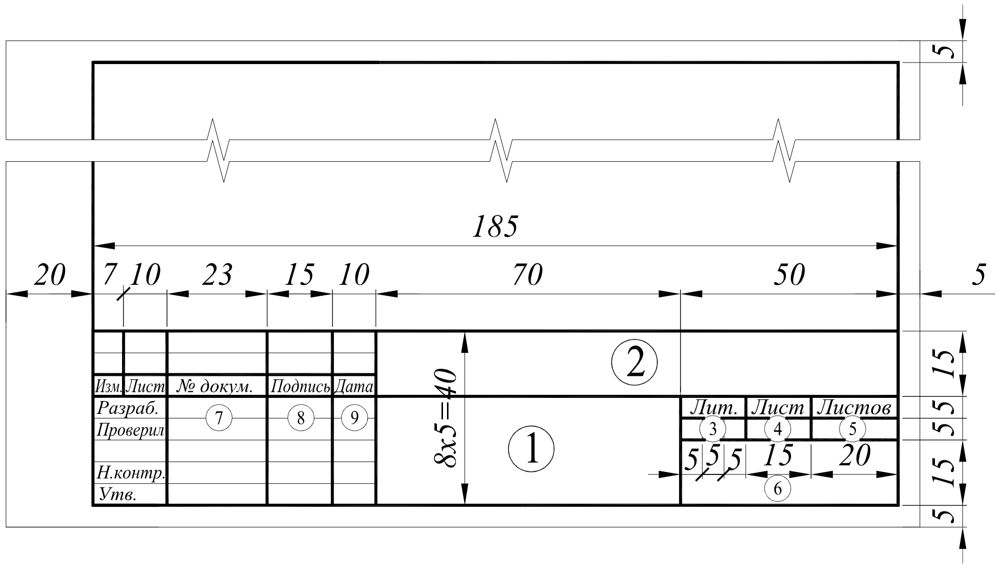


Рисунок 1.1 – Основная надпись для второго листа РГР

Рисунок 1.2 – Основная надпись для последующих листов РГР

В графах основной надписи (см. нумерацию на рис. 1.1, 1.2) указывают:

1 – надпись «Расчетно-графическая работа». В конце надписи точку не ставить, перенос слов исключается;

2 – код «ХХ ДТМ YY.ZZ», где ХХ – буквенное обозначение группы студента, YY – номер академической группы; ZZ – порядковый номер студента в списке журнала или последние цифры зачетной книжки, если по этим цифрам выбирались задания на РГР.
Например, студенту группы ТС-18 Иванову И.И. при схеме № 10 и варианте № 5 следует в поле 2 написать «ТС ДТМ 18.05» (без кавычек);

3 – в полях записать буквы «Р»«Г»«Р»;

4 – порядковый номер листа РГР;
5 – общее количество листов;
6 – аббревиатура университета («ХНАДУ»);
7 – фамилии лиц, подписавших документ (напротив поля «Разраб.» – фамилия студента, напротив «Проверил» – фамилия преподавателя);
8 – подписи лиц, фамилии которых указаны в графе 7;
9 – дату подписи документа.

Начиная с третьего листа РГР приводятся решения задач. При их оформлении нужно указать номер схемы и варианта в случае несовпадения с данными на титульном листе, обязательно изложить постановку задачи (как она содержится в задании), выписать исходные данные с единицами измерения величин и представить относящуюся к задаче схему. Схема и графические построения выполняются в масштабе с помощью чертежных инструментов. На схемах должны быть изображены оси координат и все векторы и величины, которые встречаются в ходе решения задачи (векторы сил, скоростей и ускорений, положения центров тяжести, вспомогательные линии, проч.).

Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими пояснениями, то есть должны быть указаны какие применяются теоремы, формулы или уравнения, проч. Все необходимые для расчета уравнения и формулы обязательно пишутся сначала в общем виде, а затем в них подставляются числовые значения известных величин (без изменения их последовательности в формуле или уравнении) и в конце приводится конечный результат расчета с указанием размерности. Промежуточные результаты расчетов при этом могут быть опущены. Примеры оформления задач приведены в настоящем издании после каждого указания к решению этих задач.

2. ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\sum$, $\prod$ – операторы суммирования и произведения:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_N\,; \qquad \prod_{j=1}^{N} b_j = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_N\,.$$

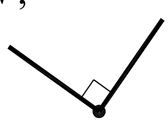
Примечание. Если информация о диапазоне суммирования (произведения) отсутствует, то эта операция выполняется на всем диапазоне изменения переменного индекса.

$\widehat{\vec{a},\vec{b}}$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

$a \Rightarrow b$ – из a следует b;

$a \Leftrightarrow b$ – следует в обе стороны;

$i=\overline{1,N} \;\Leftrightarrow\; i=1,2,\ldots,N$;



$\Leftrightarrow$

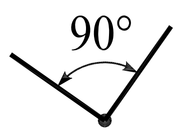


Таблица 2.1 – **Некоторые приставки СИ для кратных единиц**

Приставка (Обозначение)	милли (м)	санти (с)	кило (к)	мега (М)
Пример	1 мм = 10^{-3} м	1 см = 10^{-2} м	1 кН = 10^{3} Н	1 МПа = 10^{6} Па

Таблица 2.2 – **Латинский и греческий алфавиты**

Латинский алфавит		Греческий алфавит*	
Печатный шрифт	*Транскрипция*	*Печатный шрифт*	*Транскрипция*
A a	[а]	Α α	[альфа]
B b	[бэ]	Β β	[бэта]
C c	[це]		
D d	[дэ]	Δ δ	[дельта]
E e	[е], [э]	Ε ε	[эпсилон]
F f	[эф]	Φ φ	[фи]
G g	[гэ], [жэ]	Γ γ	[гамма]
H h	[ха], [аш]	Η η	[эта]
I i	[и]	Ι ι	[йота]
J j	[йот], [жи]		
K k	[ка]	Κ κ	[каппа]
L l	[эль]	Λ λ	[ламбда]
M m	[эм]	Μ μ	[мю]
N n	[эн]	Ν ν	[ню]
		Ξ ξ	[кси]
O o	[о]	Ο ο	[омикрон]
P p	[пэ]	Π π	[пи]
Q q	[ку]	Θ θ	[тэта]
R r	[эр]	Ρ ρ	[ро]
S s	[эс]	Σ σ	[сигма]
T t	[тэ]	Τ τ	[тау]
U u	[у]		
V v	[вэ]	Υ υ	[ипсилон]
W w	[дубль-вэ]	Ω ω	[омега]
X x	[икс]	Χ χ	[хи]
Y y	[игрек]	Ψ ψ	[пси]
Z z	[зет]	Ζ ζ	[дзэта]

* Приведенная в таблице последовательность букв греческого алфавита изменена для упрощения сопоставления алфавитов.

ЗАДАЧА С-1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА

Постановка задачи. Найти реакции опор балки. Схемы нагружения представлены на рисунке С-1.1. Значения нагрузок и геометрические размеры балки указаны в таблице С-1.1 (из таблицы следует выписать только те величины, которые используются на конкретной схеме нагружения).

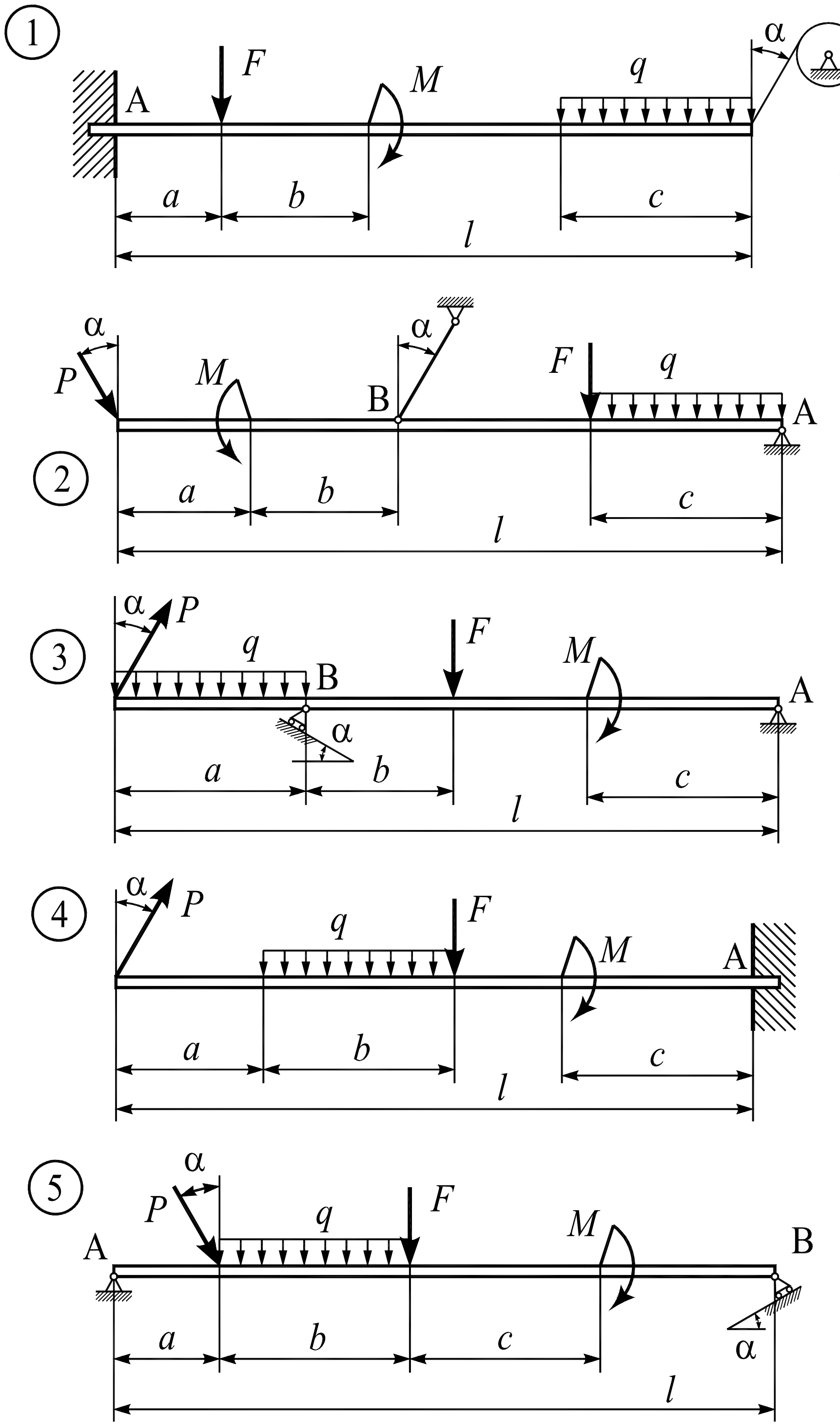


Рисунок С-1.1 – Схемы нагружения балок (начало)

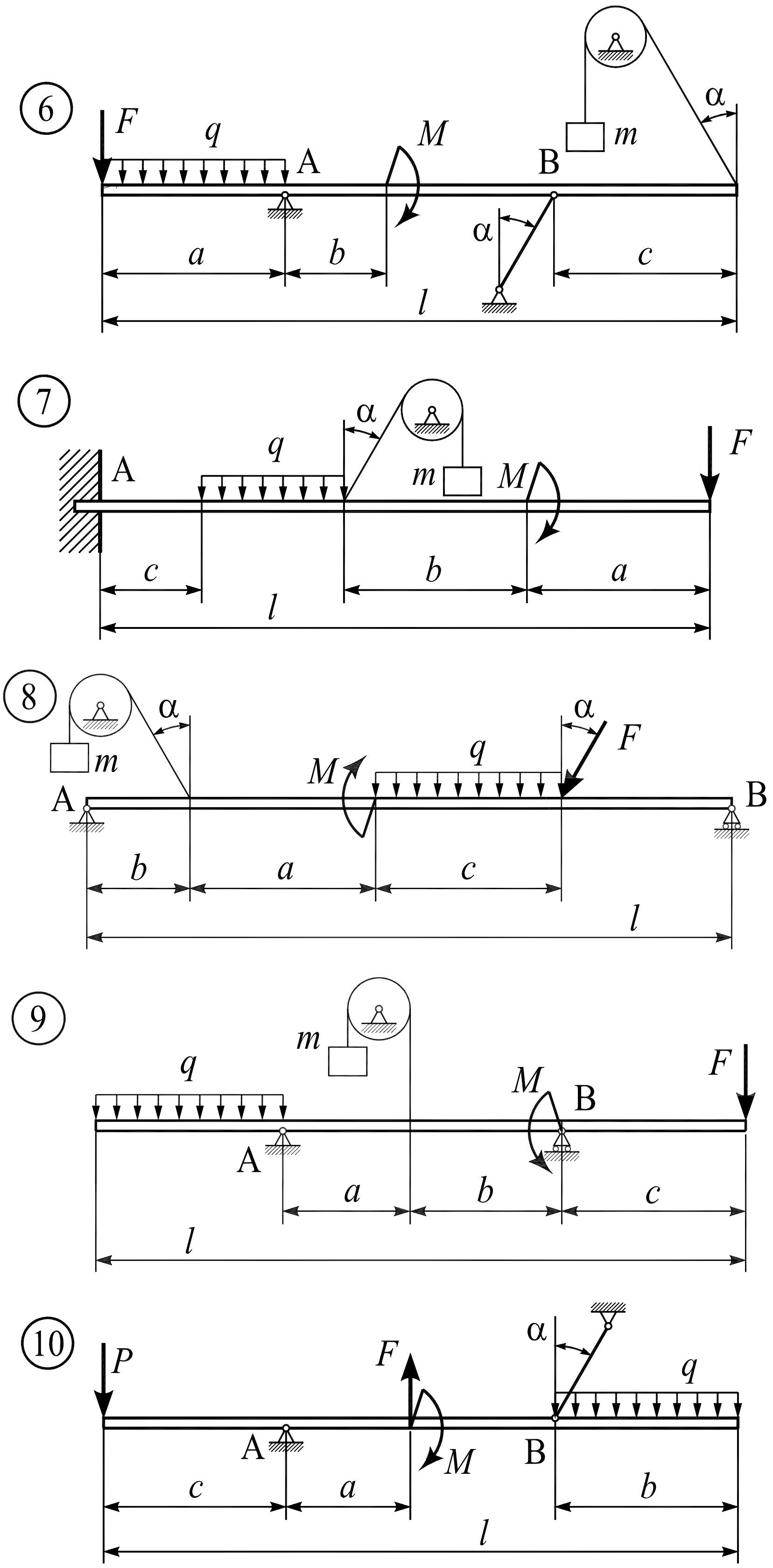


Рисунок С-1.1 – Схемы нагружения балок (конец)

Таблица С-1.1 – **Исходные данные к задаче С-1**

Вар.	F, кН	P, кН	M, кНм	q, кН/м	m, т	a, м	b, м	c, м	l, м	α, °
1	6	3	6	10	1.2	1.25	1.25	1.5	5	30
2	7	4	4	36	0.5	1	1	1	4	45
3	3	5	5	5	0.4	2	1	2	5.5	25
4	2	5	6	4	0.3	1	2	1	6	35
5	4	1	2	3	1.0	0.5	1.5	0.5	3	20
6	4	6	3	4	0.2	2	2	1	6	50
7	2	2	2	5	0.5	1	0.5	1	3.5	10
8	12	4	8	1	0.5	1.5	1.5	3	7	15
9	14	5	15	1	1.0	1	1.5	1.5	6	5
10	10	12	12	7	0.6	1	3	2	8	0

Указания к решению задачи С-1.

1. При решении задачи на первом этапе следует составить расчетную схему балки. Для этого объект исследования (балку) изображаем отдельно, мысленно освободив ее от связей (опор), заменив их действие реакциями связей. В общем случае реакция связи всегда противоположна направлению, по которому связь препятствует движению балки. Применительно к видам опор, указанных на рис. С-1.1, возможны следующие виды реакций.

1) *Шарнирно-подвижная опора* (рис. С-1.2,а,в). Эта опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. Реакция опоры приложена в центре шарнира и направлена перпендикулярно опорной плоскости. Числовое значение опорной реакции неизвестно (рис. С-1.2,б,г).

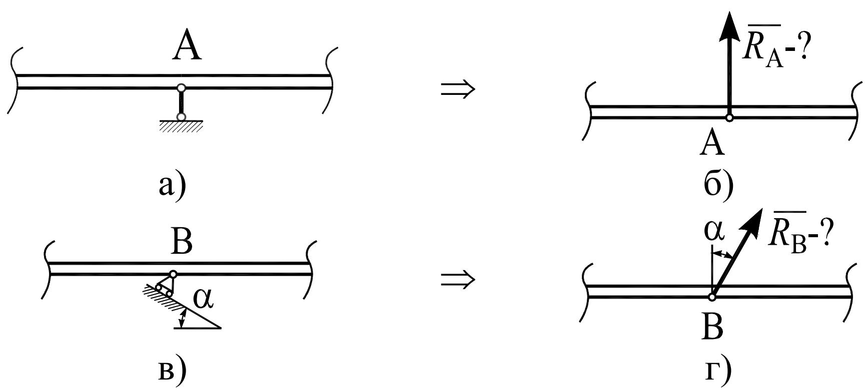


Рисунок С-1.2 – Шарнирно-подвижная опора

2) *Шарнирно-неподвижная опора* (рис. С-1.3,а). Эта опора допускает поворот вокруг оси шарнира, но не допускает никаких линейных перемещений. В данном случае известна только точка приложения опорной реакции – центр шарнира, направление и значение опорной реакции остаются неизвестными (рис. С-1.3,б). Обычно вместо значения и направления реакции связи

(рис. С-1.3,б) вводят ее составляющие, направленные вдоль осей системы координат (рис. С-1.3,в).

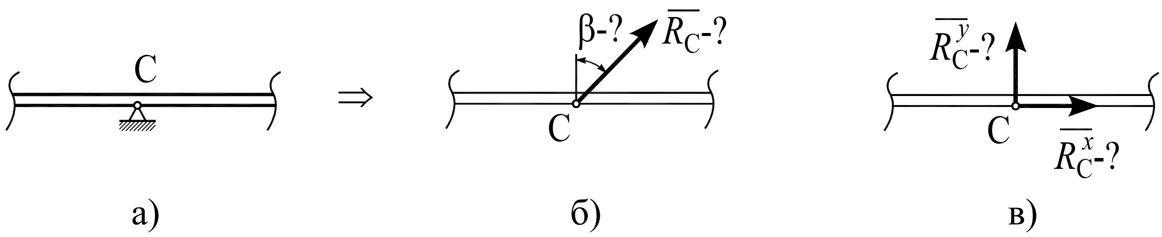


Рисунок С-1.3 – Шарнирно-неподвижная опора

3) *Невесомый стержень с шарнирами* (рис. С-1.4,а). В этом случае реакция связи направлена вдоль оси стержня (рис. С-1.4,б). Стержни могут быть как растянутыми, так и сжатыми в зависимости от знака значения реакции связи.

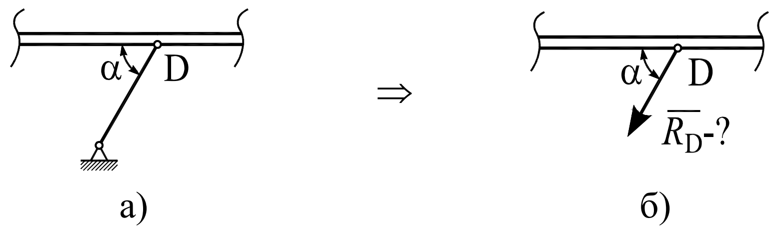


Рисунок С-1.4 – Невесомый стержень с шарнирами

4) *Жесткая заделка* (рис. С-1.5,а). Такая связь не допускает ни линейных перемещений, ни поворота балки. Неизвестными в данном случае являются не только значение и направление реакции, но и точка ее приложения. Поэтому жесткую заделку заменяют силой реакции $\vec{R}$ (направление которой неизвестно) и парой сил с моментом *M*. Следовательно, для определения опорной реакции следует найти три неизвестные – значения реакции $\vec{R}$, угла β и моментной нагрузки *M* (рис. С-1.5,б). Однако по аналогии с шарнирно-неподвижной опорой (рис. С-1.5,б,в) искомые $\vec{R}$ и β обычно заменяют составляющими реакции связи по осям координат $\vec{R}^x$ и $\vec{R}^y$ (рис. С-1.5,в).

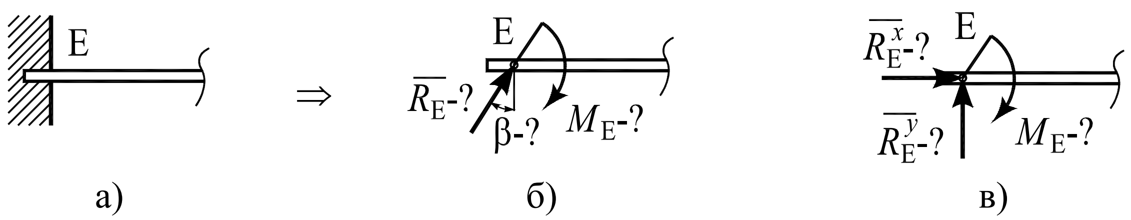


Рисунок С-1.5 – Жесткая заделка

2. На следующем этапе решения задачи необходимо изобразить действующие на балку активные силы. Если в заданной схеме имеется груз массой *m* (схемы 1,5,7–9), который соединен с балкой через гибкую связь (нить, трос, цепь, т. п.), то необходимо предварительно вычислить силу его тяжести (кН)

$$G = m \cdot g,$$

где m – масса груза в кг (поскольку в исходных данных масса задана в тоннах, то следует учесть, что 1 т = 10^3 кг); g=9.806… м/с^2 – ускорение свободного падения (в расчетах допускается округление g до 10 м/с^2).

Следовательно, если m=1.4 т, то

$$G = m\cdot g \approx 1.4\cdot 10^3\cdot 10 = 14\cdot 10^3 \text{ Н} = 14 \text{ кН}.$$

Далее силу G следует перенести в точку соединения гибкой связи с балкой. При этом сила G направлена вдоль связи таким образом, что связь работает на растяжение (рис. С-1.6,б).

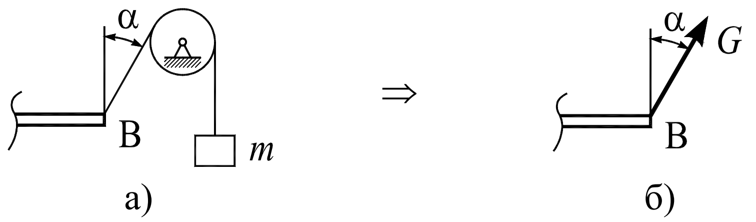


Рисунок С-1.6 – Замена гибкой нити с массой сосредоточенной силой

Если линия действия искомой реакции или заданной силы R составляет угол α к вертикали (рис. С-1.7,а), то для удобства последующих расчетов ее рекомендуется разложить на горизонтальную $R\cdot\sin\alpha$ и вертикальную $R\cdot\cos\alpha$ составляющие (рис. С-1.7,б).

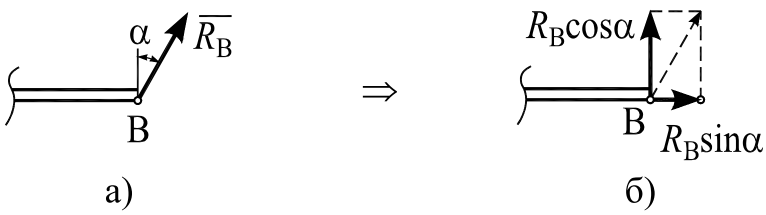


Рисунок С-1.7 – Разложение силы на составляющие

Погонную нагрузку q, которая равномерно распределена на заданном участке балки (рис. С-1.8,а), удобно при расчетах заменить сосредоточенной силой Q, точка приложения которой находится на средине указанного участка (рис. С-1.8,б). Значение этой силы (кН) равно

$$Q = q\cdot a,$$

где a – длина участка, м; q – интенсивность погонной нагрузки, кН/м.

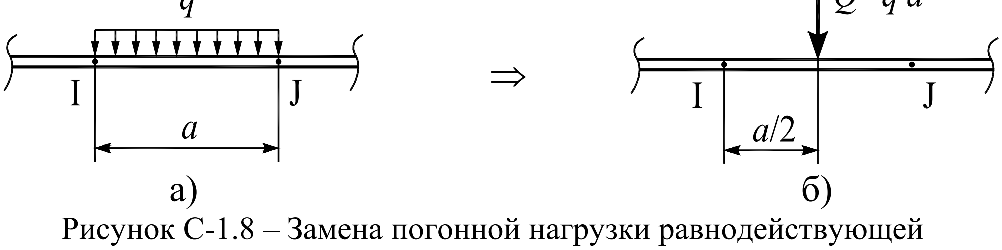


Рисунок С-1.8 – Замена погонной нагрузки равнодействующей

3. Искомые реакции опор вычисляются на основании **любых трех уравнений** из приведенной ниже системы алгебраических уравнений (т.н. *условий статического равновесия* для плоской механической системы):

$\sum X_i = 0$; – суммы проекций сил, приложенных к балке, на координатные оси Оx и Оy должны быть равны нулю;

$\sum Y_i = 0$;

$\sum M_{\text{A}}(\overline{F}_i) = 0$; – суммы моментов и моментов сил относительно точки, указанной нижним индексом, должны быть равны нулю.

$\sum M_{\text{B}}(\overline{F}_i) = 0$.

При составлении уравнений необходимо учитывать направление действия силы или момента с помощью соответствующего знака («+» или «–»). Момент считать положительным, если он направлен против часовой стрелки. Момент силы относительно точки равен произведению значения этой силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы (т.н. «плечо»).

Результаты вычислений записываются с точностью до трех значащих цифр после запятой.

Если значение реакции получилось положительным, то принятое направление этой силы совпадают с фактическим. В противном случае – сила направлена в противоположную сторону.

4. Для проверки достоверности полученных результатов на заключительном этапе решения задачи необходимо записать дополнительное уравнение статического равновесия балки, которое не должно повторять используемые на предыдущем этапе решения задачи. Т.е. необходимо записать оставшееся невостребованным уравнение из представленной выше системы и подставить в него полученные значения.

Результат вычисления правой части этого уравнения должен равняться нулю (допускается погрешность во втором знаке после запятой).

Пример выполнения задачи С-1.

ЗАДАЧА С-1

Найти реакции опор А и В (R_{A} и R_{B}). *Дано*: схема нагружения балки (рис. С-1.9); F=10 кН; M=8 кНм; q=2 кН/м; a=4 м; b=2 м; c=3 м; l=12 м; α=30°.

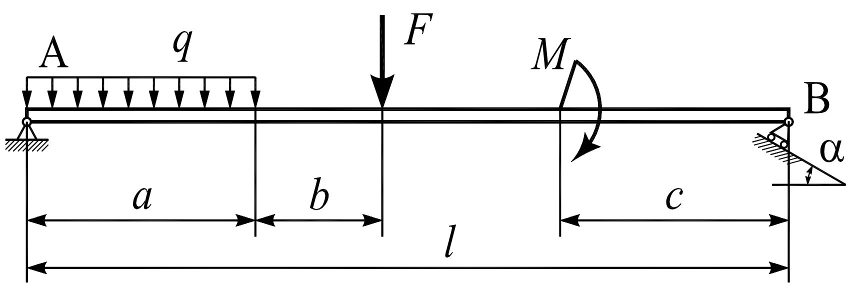


Рисунок С-1.9 – Схема нагружения балки

Решение.

Отбрасываем связи – шарнирно-неподвижную опору А и шарнирно-подвижную опору В. Действие отброшенных связей на балку заменяем реакциями R_A^x, R_A^y и R_B. Реакцию R_B раскладываем на горизонтальную и вертикальную составляющие – $R_B \sin\alpha$ и $R_B \cos\alpha$. Погонную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $q \cdot a$, точка приложения которой находится на средине участка длиной a. Размер c опускаем*. В результате таких действий исходная система (рис. С-1.9) будет преобразована к следующей (рис. С-1.10).

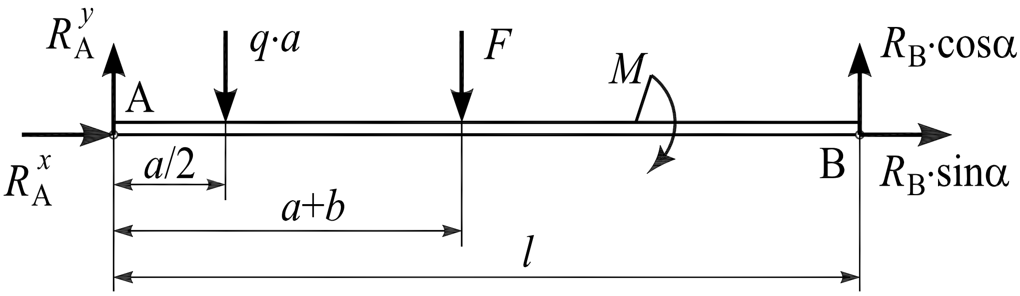


Рисунок С-1.10 – Расчетная схема балки

Далее составляем уравнения статического равновесия балки:

$$\sum X_i = 0: \qquad R_A^x + R_B \sin\alpha = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \qquad R_A^y - q \cdot a - F + R_B \cos\alpha = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_A(F_i) = 0: \qquad -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - F \cdot (a+b) - M + R_B \cos\alpha \cdot l = 0. \tag{3}$$

Решаем полученную систему линейных алгебраических уравнений. Из уравнения (3) находим неизвестную R_B:

$$R_B = \frac{q \cdot a^2/2 + F \cdot (a+b) + M}{l \cdot \cos\alpha} = \frac{2 \cdot 4^2/2 + 10 \cdot (4+2) + 8}{12 \cdot \cos 30°} = 8.083 \text{ кН}.$$

Из уравнения (1) вычисляем R_A^x:

$$R_A^x = -R_B \sin\alpha = -8.083 \cdot \sin 30° = -4.042 \text{ кН},$$

а из уравнения (2) – R_A^y:

---

* Поскольку изгибающий момент является свободным вектором, то информация о положении точки ее приложения при расчетах не учитывается.

$$R_{\text{A}}^{y}=q\cdot a+F-R_{\text{B}}\cos\alpha=2\cdot4+10-8.083\cdot\cos30°=11\ \text{кН}.$$

Составляем дополнительное уравнение для проверки достоверности полученных результатов:

$$\sum M_{\text{B}}(F_i)=0: \qquad -R_{\text{A}}^{y}\cdot l+q\cdot a\cdot\left(l-\frac{a}{2}\right)+F\cdot[l-(a+b)]-M=0;$$

$$-11\cdot12+2\cdot4\cdot\left(12-\frac{4}{2}\right)+10\cdot[12-(4+2)]-8=0;$$

$$0=0.$$

Условие выполнено. Следовательно, вычисления верны. Сводим результаты решения задачи:

$$R_{\text{A}}^{x}=-4.0415\ \text{кН};\quad R_{\text{A}}^{y}=11\ \text{кН};$$

$$R_{\text{A}}=\sqrt{\left(R_{\text{A}}^{x}\right)^2+\left(R_{\text{A}}^{y}\right)^2}=\sqrt{(-4.042)^2+11^2}=11.719\ \text{кН};$$

$$R_{\text{B}}=8.083\ \text{кН}.$$

Ответ: $R_{\text{A}}=11.719$ кН; $R_{\text{B}}=8.083$ кН.

ЗАДАЧА С-2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТЕЛА

Постановка задачи. Найти координаты центра тяжести плоской фермы, составленной из тонких однородных стержней одинакового погонного веса (схемы 1, 2), плоской фигуры (схемы 3, 4, 7, 8) или объема (схемы 5, 6, 9, 10). Значения линейных и угловых размеров указаны в таблице С-2.1. В схемах 7–10 указаны относительные массы соответствующих элементов.

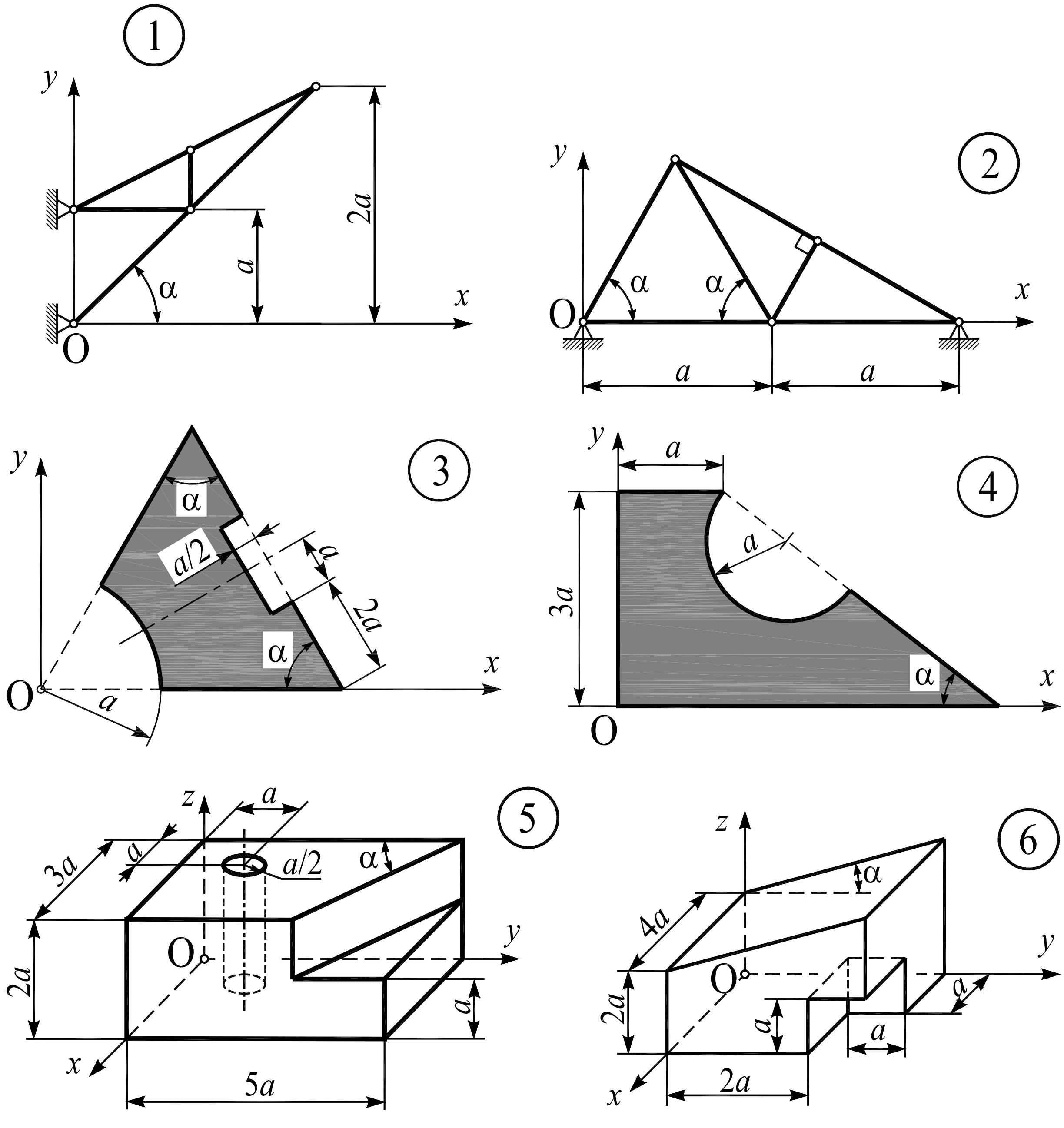


Рисунок С-2.1 – Схемы на определение положения центра тяжести (начало)

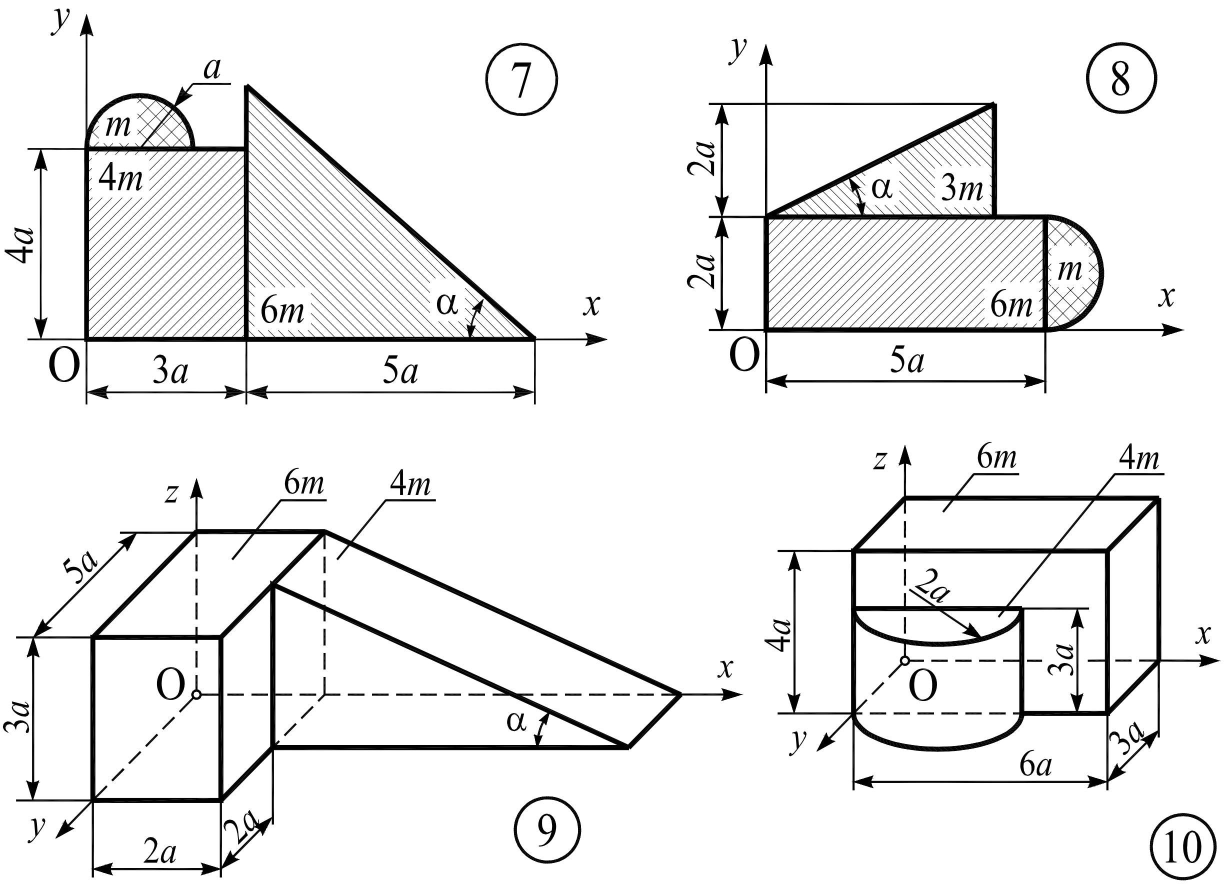


Рисунок С-2.1 – Схемы на определение положения центра тяжести (конец)

Таблица С-2.1 – **Исходные данные к задаче С-2**

Вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a, см	5	4	2	3	5	6	6	4	6	7
α, °	45	30	35	65	60	70	50	40	55	75

Указания к решению задачи С-2.

На первом этапе решения задачи следует выделить и пронумеровать элементы заданной фигуры, для которых центр тяжести или известен, или легко может быть найден. В следующих формулах номера элементов обозначены через i, центры их тяжести – через S_i, координаты центров – $\left(x_{\mathrm{S}i};y_{\mathrm{S}i}\right)$ для плоской схемы или $\left(x_{\mathrm{S}i};y_{\mathrm{S}i};z_{\mathrm{S}i}\right)$ – для пространственной.

1. Применительно к плоской ферме (схемы 1, 2), состоящей из N однородных стержней, считать, что центры тяжести стержней $\left(x_{\mathrm{S}i};y_{\mathrm{S}i}\right)$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$ расположены на средине длины:

$$x_{\mathrm{S}i}=\frac{x_{2i}+x_{1i}}{2};\quad y_{\mathrm{S}i}=\frac{y_{2i}+y_{1i}}{2},$$

где $\left(x_{1i};y_{1i}\right)$ и $\left(x_{2i};y_{2i}\right)$ – координаты концов i-го стержня (рис. С-2.2).

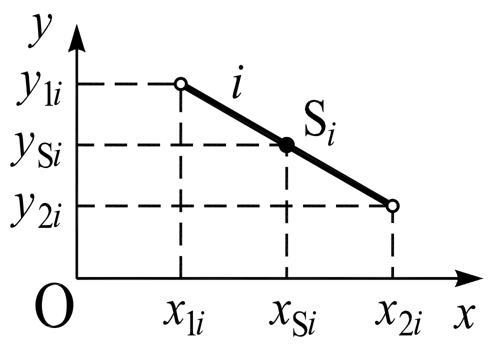


Рисунок С-2.2 – К определению длины и центра тяжести однородного стержня

При этом саму длину стержня можно вычислить по формуле

$$l_i = \sqrt{\left(x_{2i} - x_{1i}\right)^2 + \left(y_{2i} - y_{1i}\right)^2}\ .$$

В результате, для нахождения координат центра тяжести плоской фермы применимы формулы

$$x_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} l_i \cdot x_{Si}}{\sum\limits_{i=1}^{N} l_i}; \quad y_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} l_i \cdot y_{Si}}{\sum\limits_{i=1}^{N} l_i},$$

где i и l_i – номера стержней и их длины.

2. Координаты центра тяжести плоской фигуры (схемы 3, 4) равны

$$x_S = \frac{\sum F_i \cdot x_{Si}}{\sum F_i}; \quad y_S = \frac{\sum F_i \cdot y_{Si}}{\sum F_i}, \tag{1}$$

где i – номер части, из которых состоит исходная фигура; $\left(x_{Si}; y_{Si}\right)$ и F_i – координаты центров тяжести этих частей и значения их площадей.

Выражения для вычисления площадей и координат центров тяжести элементов плоских фигур, встречающихся при решении задачи, приведены в таблице С-2.2.

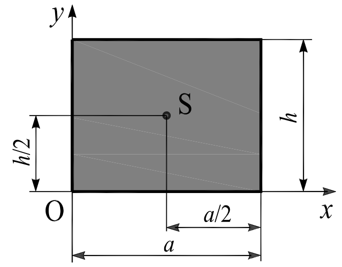
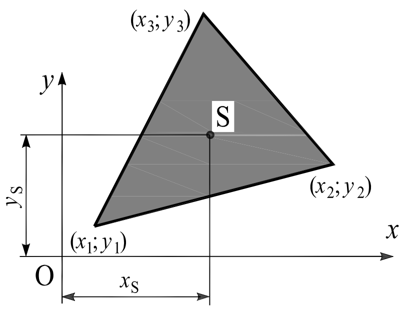
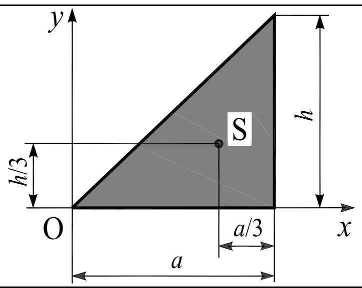
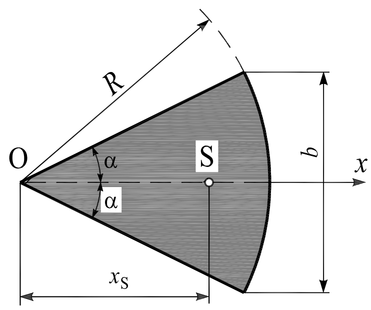
3. Аналогично следует поступать и при вычислении координаты центра тяжести объемной фигуры (схемы 5, 6):

$$x_S = \frac{\sum V_i \cdot x_{Si}}{\sum V_i}; \quad y_S = \frac{\sum V_i \cdot y_{Si}}{\sum V_i}; \quad z_S = \frac{\sum V_i \cdot z_{Si}}{\sum V_i},$$

где i – номера трехмерных элементов, из которых состоит заданный объем; $\left(x_{Si}; y_{Si}\right)$ и V_i – координаты центров тяжести этих элементов и значения их объема.

Выражения для вычисления объемов и координат центров тяжести некоторых трехмерных тел приведены в таблице С-2.3.

Таблица С-2.2 – **К определению площадей и центров тяжести плоских фигур**

Плоская фигура		Площадь и координаты центра тяжести
Прямоугольник		$F=a\cdot h$; $x_S=\dfrac{a}{2}$, $y_S=\dfrac{h}{2}$
Треугольник		$F=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=(a+b+c)/2$; a, b, c – длины сторон треугольника: $a=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$; $b=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$; $c=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$; $x_S=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y_S=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$; $(x_i;y_i)$ – координаты вершин треугольника.
		$F=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot h$; $x_S=a-\dfrac{a}{3}$, $y_S=\dfrac{h}{3}$
Круговой сектор		$F=\left(\alpha^\circ\cdot\dfrac{\pi}{180^\circ}\right)\cdot R^2$; $x_S=\dfrac{R^2\cdot b}{3\cdot F}$, где $b=2\cdot R\cdot\sin\alpha$; $\pi\approx3.14$ ($\pi=3.1415926\ldots$); При $\alpha=90^\circ$ (полукруг): $F=\dfrac{\pi R^2}{2}$; $x_S=\dfrac{4R}{3\pi}$. При $\alpha=180^\circ$ (круг): $F=\pi R^2$; $x_S=0$.

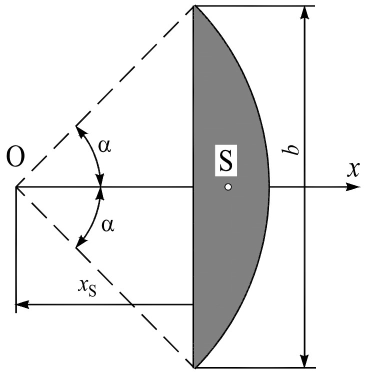
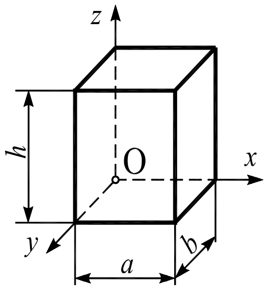
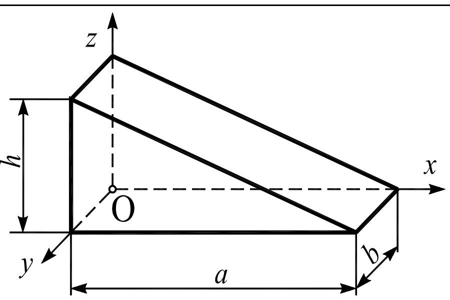
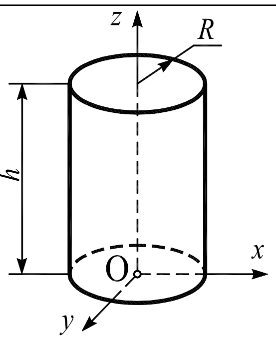
Круговой сегмент		$F=R^2\cdot\left(\alpha^\circ\cdot\dfrac{\pi}{180^\circ}-\dfrac{\sin 2\alpha}{2}\right);$ $x_S=\dfrac{b^3}{12F}$, где $b=2\cdot R\cdot\sin\alpha$

Таблица С-2.3 – **К определению объемов и центров тяжести трехмерных тел**

Трехмерное тело		Объем и координаты центра тяжести S
Параллелепипед		$V=a\cdot b\cdot h$; $x_S=(1/2)\cdot a$; $y_S=(1/2)\cdot b$; $z_S=(1/2)\cdot h$
Призма		$V=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot h\cdot b$; $x_S=(1/3)\cdot a$; $y_S=(1/2)\cdot b$; $z_S=(1/3)\cdot h$;
Цилиндр		$V=\pi\cdot R^2\cdot h$; $z_S=\dfrac{1}{2}\cdot h$

4. Применительно к схемам 7–10, в которых указаны относительные массы элементов плоской или объемной фигуры, при решении задачи следует пользоваться формулами:

(схемы 7, 8) $$x_S=\frac{\sum m_i\cdot x_{Si}}{\sum m_i};\quad y_S=\frac{\sum m_i\cdot y_{Si}}{\sum m_i};$$

(схемы 9, 10) $\quad x_S = \dfrac{\sum m_i \cdot x_{Si}}{\sum m_i}; \quad y_S = \dfrac{\sum m_i \cdot y_{Si}}{\sum m_i}; \quad z_S = \dfrac{\sum m_i \cdot z_{Si}}{\sum m_i},$

где i – номера элементов; $(x_{Si};y_{Si})$ или $(x_{Si};y_{Si};z_{Si})$ и m_i – координаты центров тяжести этих элементов и их массы.

Для вычисления x_{Si}, y_{Si} и z_{Si} следует руководствоваться данными таблиц С-2.2 или С-2.3.

Пример выполнения задачи С-2.

ЗАДАЧА С-2

Найти координаты центра тяжести плоской фигуры $(x_S;y_S)$. *Дано*: плоская фигура (рис. С-2.3); a=30 см; R=20 см.

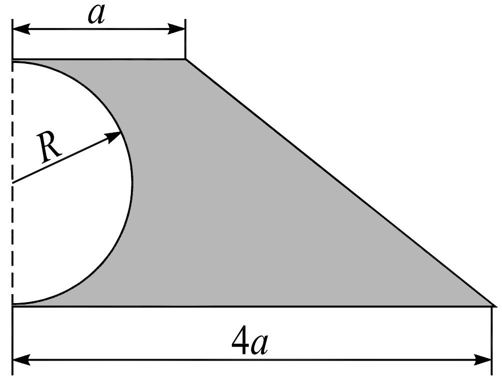


Рисунок С-2.3 – Схема плоской фигуры

Решение.

Разделим площадь на следующие части (рис. С-2.4): прямоугольник (присваиваем ему номер 1), треугольник (номер 2) и полукруг (номер 3).

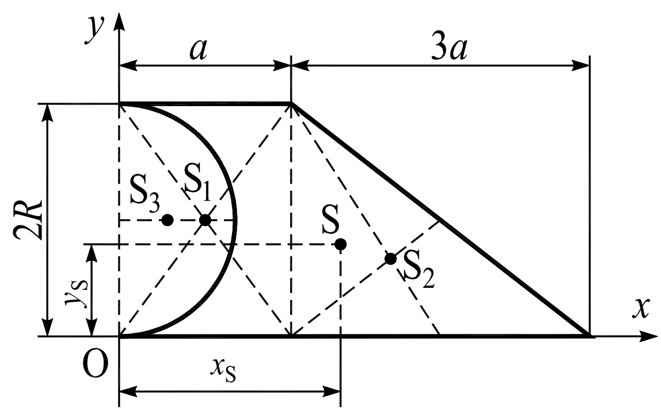


Рисунок С-2.4 – Расчетная схема

Запишем значения площадей F_i перечисленных частей и их координаты центров тяжести $(x_{Si};y_{Si})$:

- прямоугольник 1:

$$F_1 = 2R \cdot a = 2 \cdot 20 \cdot 30 = 1200 \text{ см}^2;$$

$$x_{S1} = \frac{a}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ см}; \quad y_{S1} = \frac{2R}{2} = \frac{2 \cdot 20}{2} = 20 \text{ см};$$

- треугольник 2:

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 3a = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 30 = 1800 \text{ см}^2;$$

$$x_{S2} = a + \frac{3a}{3} = 30 + \frac{3 \cdot 30}{3} = 60 \text{ см}; \quad y_{S2} = \frac{2R}{3} = \frac{2 \cdot 20}{3} = 13.33 \text{ см};$$

- полукруг 3:

$$F_3 = -\frac{\pi \cdot R^2}{2} = -\frac{\pi \cdot 20^2}{2} = -628.32 \text{ см}^2;^*$$

$$x_{S3} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 20}{3 \cdot \pi} = 8.49 \text{ см}; \quad y_{S3} = \frac{2R}{2} = \frac{2 \cdot 20}{2} = 20 \text{ см}.$$

Вычисляем координаты центра тяжести заданной фигуры:

$$x_S = \frac{\sum F_i \cdot x_{Si}}{\sum F_i} = \frac{1200 \cdot 15 + 1800 \cdot 60 + (-628.32) \cdot 8.49}{1200 + 1800 + (-628.32)} = 50.88 \text{ см};$$

$$y_S = \frac{\sum F_i \cdot y_{Si}}{\sum F_i} = \frac{1200 \cdot 20 + 1800 \cdot 13.33 + (-628.32) \cdot 20}{1200 + 1800 + (-628.32)} = 14.94 \text{ см}.$$

Центр тяжести заданной плоской фигуры показан на рисунке С-2.4.

Ответ: $x_S = 50.88$ см; $y_S = 14.94$ см.

---

* Площадь этой части, вырезанную из площади прямоугольника (часть 1), считаем отрицательной.

ЗАДАЧА К-1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Постановка задачи. По заданному уравнению $x(t)$ прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, а также вращательное, центростремительное и полное ускорение точки М в момент времени, когда координата груза 1 равна s_1 ($x=s_1$). Схемы механических систем показаны на рисунке К-1.1, а необходимые для расчета данные указаны в таблице К-1.1.

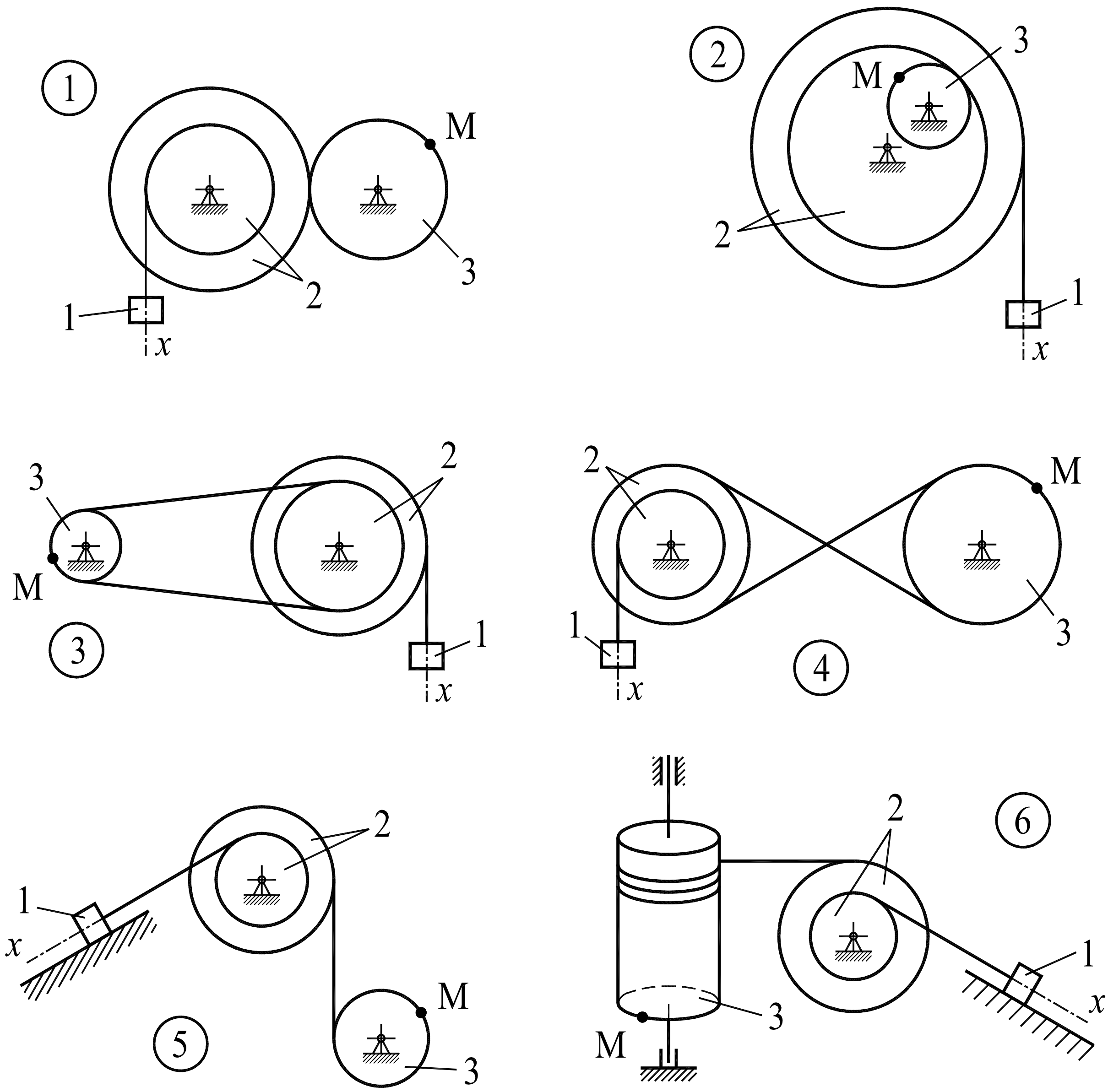


Рисунок К-1.1 – Схемы механических систем (начало)

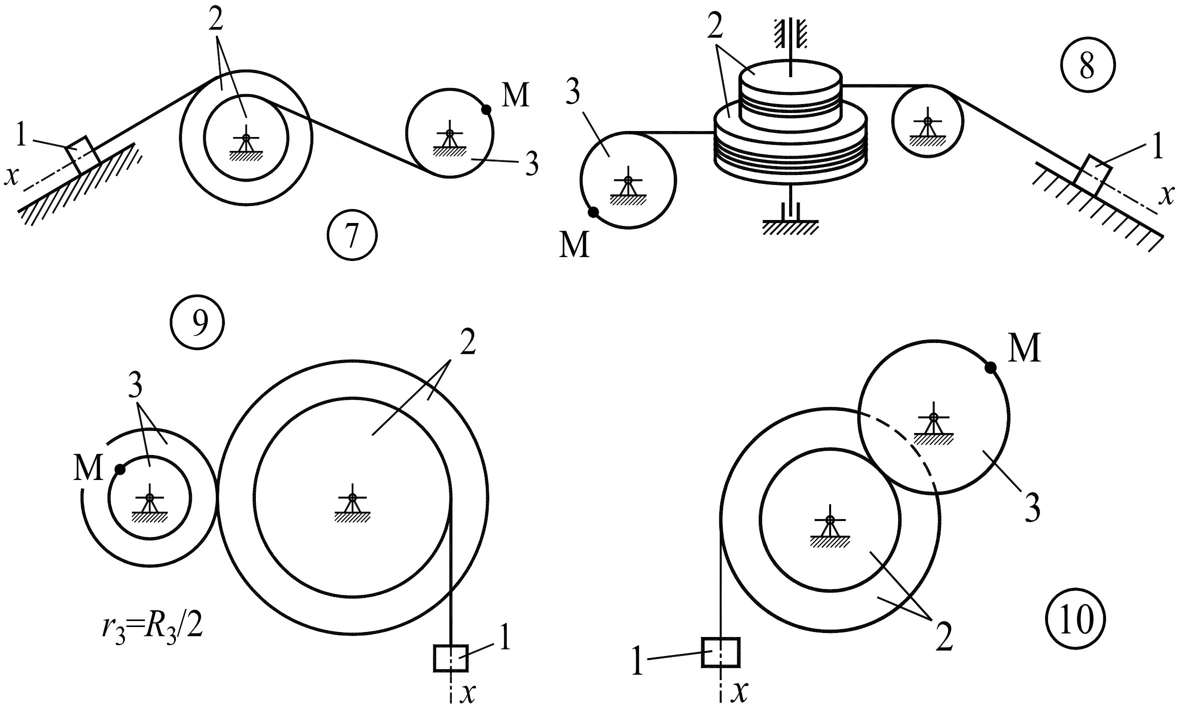


Рисунок К-1.1 – Схемы механических систем (конец)

Таблица К-1.1 – **Исходные данные к задаче К-1**

Вар.	Радиусы, см			Уравнение движения груза 1 $x(t)$, см	Координата s_1, см
	R_2	r_2	R_3		
1	10	6	12	$20+80t^2$	40
2	11	7	10	$5+60t$	95
3	12	6	8	$6+4t^2$	10
4	12	10	6	$30t^2$	30
5	13	9	10	$15+45t$	60
6	15	8	12	$10+50t$	35
7	16	12	8	$5+20t^2$	85
8	17	10	14	$10+10t$	25
9	18	15	15	$4+8t^2$	6
10	14	9	11	$10+35t$	80

Указания к решению задачи К-1.

Расчетный момент времени t_1 (с) определяется из уравнения

$$x(t_1)=s_1.$$

Скорость груза 1 (см/с) находится дифференцированием по времени уравнения его движения:

$$v_1=\frac{dx}{dt}.$$

Между вращательной (окружной) скоростью точки v (см/с) на колесе и угловой скоростью вращения ω (рад/с=1/с=с$^{-1}$) этого колеса справедливо соотношение

$$v=\omega\cdot R \quad \text{или} \quad \omega=\frac{v}{R},$$

где R – расстояние от точки до центра вращения колеса, см.

Вектор скорости совпадает с касательной к колесу в месте нахождения точки и направлен в сторону вращения колеса.

Угловые скорости колес 2 и 3, связанных гибкой связью или за счет сил трения, обратно пропорциональны радиусам дисков, через которые эта связь осуществляется. Например, для схемы 3 имеем

$$\omega_2\cdot r_2=\omega_3\cdot R_3.$$

Угловое ускорение колеса ε (рад/с^2=1/с^2=с$^{-2}$) находится дифференцированием по времени закона изменения во времени угловой скорости этого колеса:

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}.$$

Направление углового ускорения совпадает с направлением угловой скорости, если результат в расчетный момент времени получился положительным. В этом случае движение является ускоренным. В противном случае ω и ε противоположно направлены (движение замедленное).

Вращательное a^{τ} и центростремительное a^{n} ускорения (см/с^2) точки, расположенной на колесе, связаны с угловым ускорением и угловой скоростью этого колеса соотношениями:

$$a^{\tau}=\varepsilon\cdot R;$$
$$a^{n}=\omega^2\cdot R,$$

где R – расстояние от точки до центра вращения колеса.

Центростремительное ускорение a^{n} направлено по радиусу от точки к центру колеса, а вращательное ускорение a^{τ} имеет одинаковое со скоростью точки v направление, если вращение колеса ускоренное (при замедленном движении вектора a^{τ} и v направлены противоположно).

Полное ускорение точки М вычисляется по теореме Пифагора:

$$a=\sqrt{\left(a^{\mathrm{n}}\right)^2+\left(a^{\tau}\right)^2}.$$

Пример выполнения задачи К-1.

ЗАДАЧА К-1

Найти скорость и ускорение точки М в момент $t = t_1$ ($v_M(t_1)$ и $a_M(t_1)$).
Дано: схема механической системы (рис. К-1.2); $x(t) = 2 + 70t^2$; $R_2 = 50$ см; $r_2 = 30$ см; $R_3 = 60$ см; $r_3 = 40$ см; $s_1 = 42$ см.

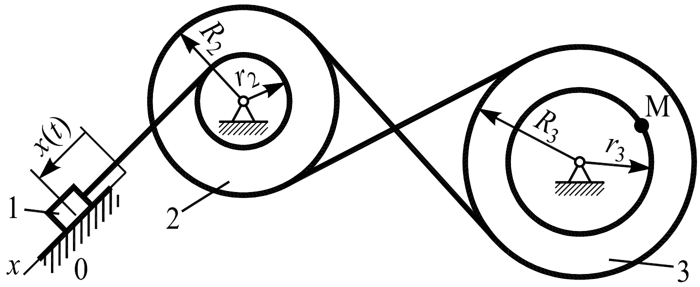


Рисунок К-1.2 – Схема механической системы

Решение.

Находим значение расчетного момента времени t_1:

$$s_1 = x(t_1) = 2 + 70 \cdot t_1^2 .$$

Откуда
$$t_1 = \sqrt{\frac{s_1 - 2}{70}} = \sqrt{\frac{42 - 2}{70}} = 0.756 \text{ с.}$$

Закон изменения скорости груза 1:

$$v_1(t) = \frac{dx}{dt} = 140 \cdot t, \ \frac{\text{ñì}}{\text{ñ}} .$$

Уравнение для угловой скорости колеса 2:

$$\omega_2(t) = \frac{v_1(t)}{r_2} = \frac{140 \cdot t}{30} = 4.667 \cdot t, \text{ с}^{-1}.$$

На основании соотношения $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$ находим угловую скорость колеса 3:

$$\omega_3(t) = \omega_2(t) \cdot \frac{R_2}{R_3} = 4.667 \cdot t \cdot \frac{50}{60} = 3.889 \cdot t, \text{ с}^{-1}.$$

Уравнения для угловых ускорений колес 2 и 3:

$$\varepsilon_2(t) = \frac{d\omega_2}{dt} = 4.667 \ \text{ с}^{-2};$$

$$\varepsilon_3(t)=\frac{d\omega_3}{dt}=3.889\ \text{ñ}^{-2}.$$

Законы изменения скорости, вращательного и центростремительного ускорений точки М:

$$v_{\text{M}}(t)=r_3\cdot\omega_3(t)=40\cdot 3.889\cdot t=155.56\cdot t\text{, см/с;}$$

$$a_{\text{M}}^{\tau}(t)=r_3\cdot\varepsilon_3(t)=40\cdot 3.889=155.56\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{\text{M}}^{n}(t)=r_3\cdot\omega_3(t)^2=40\cdot(3.889\cdot t)^2=604.973\cdot t^2\text{, см/с}^2.$$

Определяем скорость и полное ускорение точки М (и его составляющих) в расчетный момент времени t_1:

$$v_{\text{M}}(t_1)=155.56\cdot t_1=155.56\cdot 0.756=117.6\ \text{см/с;}$$

$$a_{\text{M}}^{\tau}(t_1)=155.56\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{\text{M}}^{\text{n}}(t_1)=604.973\cdot t_1^2=604.973\cdot 0.756^2=345.76\ \text{см/с}^2;$$

$$a_{\text{M}}(t_1)=\sqrt{a_{\text{M}}^{\text{n}}(t_1)^2+a_{\text{M}}^{\tau}(t_1)^2}=\sqrt{345.76^2+155.56^2}=379.146\ \text{см/с}^2.$$

Определяем угловые скорости и угловые ускорения колес 2 и 3 в момент времени t_1:

$$\omega_2(t_1)=4.667\cdot t_1=4.667\cdot 0.756=3.528\ \text{с}^{-1};$$

$$\omega_3(t_1)=3.889\cdot t_1=3.889\cdot 0.756=2.94\ \text{с}^{-1};$$

$$\varepsilon_2(t_1)=4.667\ \text{с}^{-2};$$

$$\varepsilon_3(t_1)=3.889\ \text{с}^{-2}.$$

Направления линейных скоростей груза 1 и точки М, ускорения точки М, угловых скоростей и ускорений колес 2 и 3 в момент t_1 показаны на рисунке К-1.3.

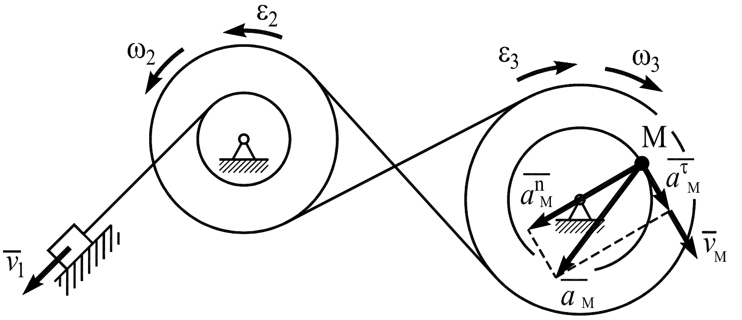


Рисунок К-1.3 – Направления скоростей и ускорений тел механической системы

Ответ: $v_{\text{M}}(t_1)=117.6$ см/с; $a_{\text{M}}(t_1)=379.146$ см/с^2.

ЗАДАЧА К-2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ СКОРОСТИ И АБСОЛЮТНОГО УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСНОГО ДВИЖЕНИЯ

Постановка задачи. По заданным уравнениям переносного движения $x_e(t)$ тела D и относительного движения $\varphi_r(t)$ определить абсолютную скорость v и абсолютное ускорение w точки M для момента времени t=t_1. Схемы механических систем показаны на рисунке К-2.1, а необходимые для расчета данные приведены в таблице К-2.1.

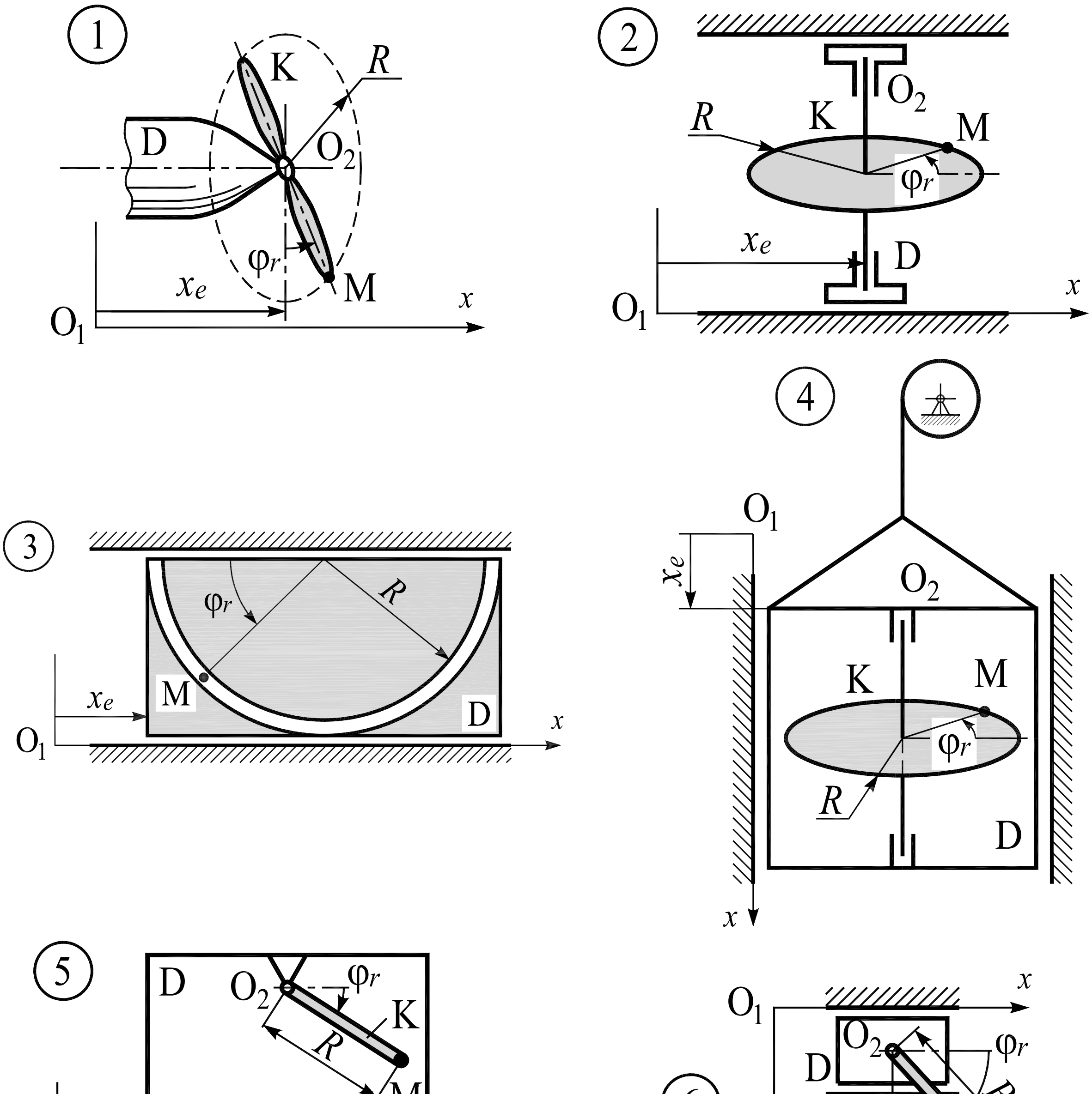


Рисунок К-2.1 – Схемы механических систем (начало)

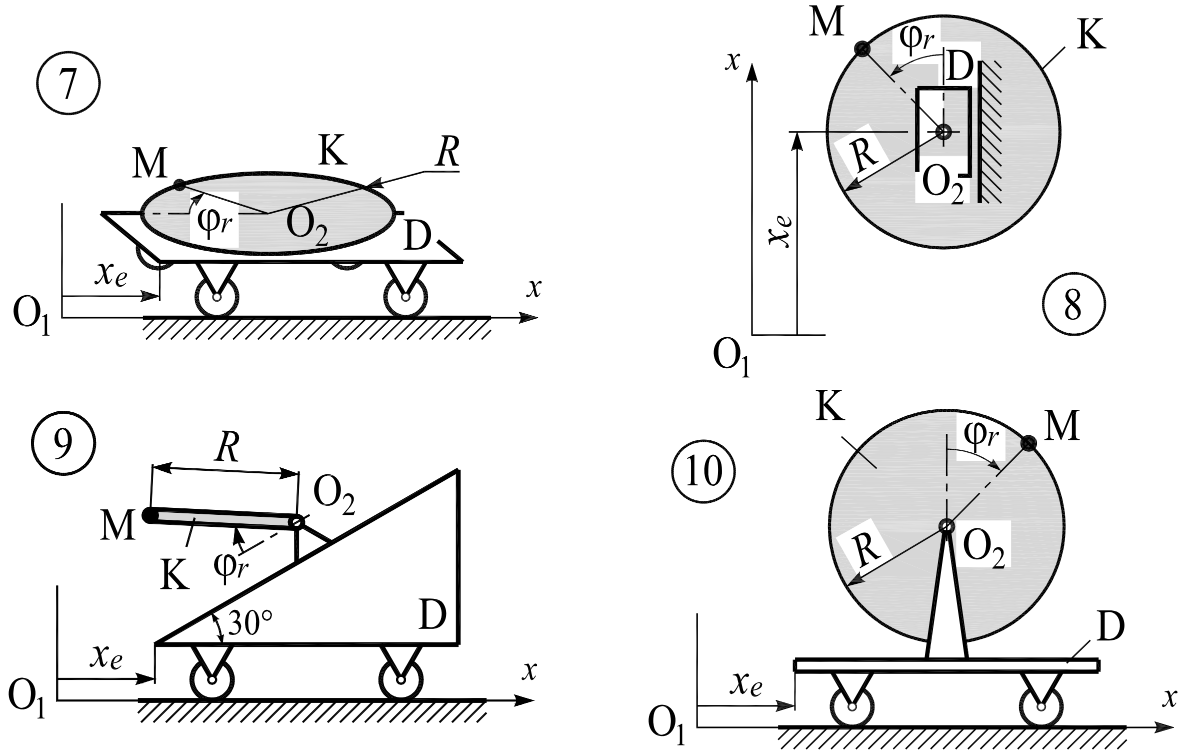


Рисунок К-2.1 – Схемы механических систем (конец)

Таблица К-2.1 – **Исходные данные к задаче К-2**

Вар.	$x_e(t)$, см	$\varphi_r(t)$, рад	R, см	t_1, с
1	$60t^2$	$0.036\pi t^3$	20	5/3
2	$18t^2+2t$	$(5\pi/6)\sin(\pi t/12)$	25	2
3	$10+2\sin(\pi t/2)$	$0.24\pi t^2$	10	5/3
4	$20t^2+15t$	$(\pi/3)\cos(2\pi t)$	20	1/6
5	$50t^2$	$5\pi t^3/48$	30	2
6	$25+25\sin(\pi t/3)$	$2\pi t^2/3$	15	1
7	$0.27t^3+3t$	$0.15\pi t^2$	70	10/3
8	$20+20\sin(\pi t/2)$	$0.36\pi t^2$	40	5/6
9	$250t^2$	$3\pi t^2$	12	5/3
10	$10t^2+t$	$0.5\pi\sin(\pi t/4)$	50	2

Указания к решению задачи К-2.

На первом этапе решения задач необходимо определить положение точки М в расчетный момент времени в подвижной системе координат.

Абсолютная скорость точки М определяется как геометрическая сумма относительной v_r и переносной v_e скоростей:

$$\vec{v}=\overrightarrow{v_e}+\overrightarrow{v_r}\,,$$

а ее модуль можно вычислить по теореме косинусов (рис. К-2.2):

$$v=\sqrt{v_e^2+v_r^2+2v_e v_r \cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{v_e}$ и $\vec{v_r}$.

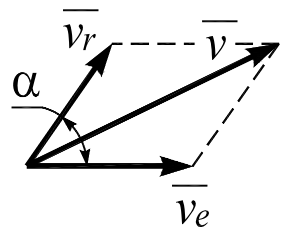


Рисунок К-2.2 – Сложение векторов

Для приведенных на рисунке К-1.1 схем (в случае поступательного переносного движения) модуль переносной скорости $\vec{v_e}$ находится дифференцированием уравнения переносного движения тела D по времени –

$$v_e=\frac{dx_e}{dt}.$$

Если при вычислении скорости v_e в расчетный момент времени t_1 получен положительный знак в значении, то движение тела D происходит в направлении возрастания координаты x_e.

Алгебраическая величина относительной скорости (см/с) точки для схем, представленных на рис. К-2.1, равна

$$v_r=\omega_r \cdot R,$$

где угловая скорость относительного движения ω_r определяется формулой

$$\omega_r=\frac{d\varphi_r}{dt}, \text{ рад/с.}$$

Положительный знак ω_r показывает, что относительное движение точки происходит в направлении положительного отсчета φ_r. Вектор скорости v_r совпадает с касательной к колесу в положении точки и направлен в сторону угловой скорости ω_r.

Абсолютное ускорение точки при сложном движении вычисляется по формуле Кориолиса

$$\overline{a}=\overline{a_e}+\overline{a_r}+\overline{a_c},$$

где $\overline{a_c}$ – ускорение Кориолиса, направление которого можно определить по правилу Жуковского, а значение – по формуле $a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin\left(\widehat{\overline{\omega_e}, \overline{v_r}}\right)$.

При поступательном переносном движении (рис. К-2.1) $\omega_e = 0$, а, следовательно, ускорение Кориолиса тождественно равно нулю. В результате, абсолютное ускорение точки М равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r}\,.$$

В развернутом виде при вращательном относительном движении (рис. К-2.1) формула примет вид

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r^{\mathrm{n}}} + \overrightarrow{a_r^{\tau}}\,, \qquad (1)$$

в которой модули переносного и составляющих относительного ускорений (см/с^2) равны

$$a_e = \frac{dv_e}{dt} = \frac{d^2 x_e}{dt^2};$$

нормальное: $\qquad a_r^{\mathrm{n}} = \omega_r^2 \cdot R \quad$ или $\quad a_r^{\mathrm{n}} = \dfrac{v_r^2}{R}$;

касательного: $\qquad a_r^{\tau} = \varepsilon_r \cdot R \quad$ или $\quad a_r^{\tau} = \dfrac{dv_r}{dt}$,

где $\varepsilon_r = \dfrac{d\omega_r}{dt}$ – угловое ускорение относительного движения точки.

При этом вектор $\overrightarrow{a_r^{\mathrm{n}}}$ направлен по радиусу от точки М к центру кривизны траектории относительного ее движения. Вектор $\overrightarrow{a_r^{\tau}}$ направлен в сторону $\overrightarrow{v_r}$, если у величины a_r^{τ} в расчетный момент времени $t = t_1$ знак «+» (относительное движение точки – ускоренное). В противном случае – наоборот.

Модуль абсолютного ускорения можно найти способом проекций:

$$a = \sqrt{a_{x'}^2 + a_{y'}^2}\,,$$

где $a_{x'}$ и $a_{y'}$ – проекции уравнения (1) на локальную систему координат y'Мx' с началом в точке М.

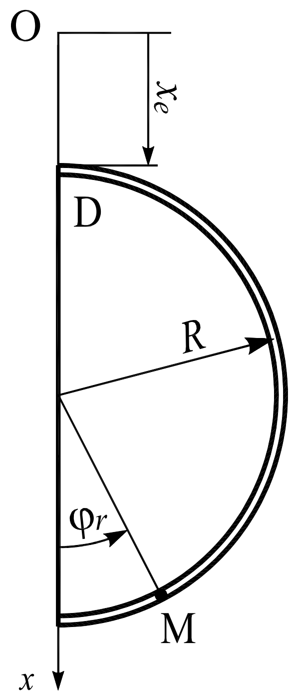


Рисунок К-2.3 – Схема механической системы

Пример выполнения задачи К-2.

ЗАДАЧА К-2

Найти скорость и ускорение точки М в момент времени $t=t_1$ ($v_M(t_1)$ и $a_M(t_1)$). *Дано*: схема механической системы (рис. К-2.3); $x_e(t)=2\cdot t^3$, см; R=16 см; $\varphi_r(t)=\pi\cdot t^2/16$, рад; t_1=2 с.

Решение.

Найдем положение точки М на теле D в расчетный момент времени $t=t_1$. Это положение определяется углом φ_r. При t_1=2 с

$$\varphi_r(t_1)=\frac{\pi\cdot t_1^2}{16}=\frac{\pi\cdot 2^2}{16}=\frac{\pi}{4}\text{ рад} = 45°.$$

Точка М в заданный момент времени показана на рис. К-2.4,а, на котором через β обозначен угол $\varphi_r(t_1)$ (β=45°).

Вычисляем значения составляющих абсолютной скорости. Модуль переносной скорости

$$v_e(t)=\frac{dx_e}{dt}=4\cdot t^2\text{, см/с.}$$

При t_1=2 с $\qquad v_e(t_1)=4\cdot t_1^2=4\cdot 2^2=16$ см/с.

Модуль относительной скорости точки М:

$$v_r(t)=\omega_r\cdot R=\frac{\pi\cdot t}{8}\cdot 16=2\pi\cdot t,$$

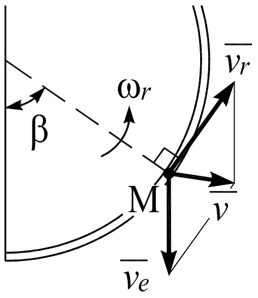
где $\omega_r=\dfrac{d\varphi_r}{dt}=\dfrac{\pi t}{8}$, рад/с.

В момент времени t_1

$$v_r(t_1)=2\pi\cdot t_1=2\pi\cdot 2=4\cdot\pi=12.6\text{ см/с.}$$

Векторы переносной и относительной скоростей точки М показаны на рисунке К-2.4,а. Модуль абсолютной скорости точки М найдем по теореме косинусов. Согласно рисунку К-2.4,а:

$$v=\sqrt{v_e^2+v_r^2+2v_ev_r\cos(90°+\beta)}=\sqrt{16^2+12.6^2+2\cdot 16\cdot 12.6\cdot\cos(90°+45°)}=11.39\text{ см/с.}$$



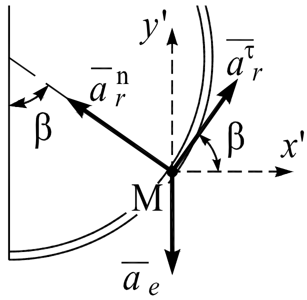


Рисунок К-2.4 – К определению абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки М

Вычисляем значения составляющих абсолютного ускорения. Модуль переносного ускорения

$$a_e = \frac{dv_e}{dt} = 8 \cdot t \text{, см/с}^2.$$

При t=t_1 $\quad a_e(t_1) = 8 \cdot t_1 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ см/с}^2.$

Поскольку знаки у величин v_e и a_e совпадают (т.е. они сонаправлены), то движение тела D ускоренное.

Модули касательного и нормального ускорений относительного движения в рассматриваемом случае равны:

$$a_r^{\tau} = \frac{dv_r}{dt} = 2 \cdot \pi = 6.28 \text{ см/с}^2;$$

$$a_r^{n}(t) = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(2\pi t)^2}{16} = \frac{\pi^2 t^2}{4} \text{, см/с}^2.$$

При t=t_1 $\quad a_r^{n}(t_1) = \frac{\pi^2 t_1^2}{4} = \frac{\pi^2 \cdot 2^2}{4} = 9.87 \text{ см/с}^2.$

Направления ускорений показаны на рисунке К-2.4,б. Модуль абсолютного ускорения находим способом проекций. Как следует из рис. К-2.4,б:

$$a_{x'} = a_r^{\tau} \cdot \cos\beta - a_r^{n} \cdot \sin\beta = 6.28 \cdot \cos 45° - 9.87 \cdot \sin 45° = -2.54 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{y'} = a_r^{\tau} \cdot \sin\beta + a_r^{n} \cdot \cos\beta - a_e = 6.28 \cdot \sin 45° + 9.87 \cdot \cos 45° - 16 = -4.58 \text{ см/с}^2.$$

Тогда значение абсолютного ускорения точки М в расчетный момент времени равно:

$$a = \sqrt{a_{x'}^2 + a_{y'}^2} = \sqrt{(-2.54)^2 + (-4.58)^2} = 5.24 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $v_{\text{M}}(t_1) = 11.39$ см/с; $a_{\text{M}}(t_1) = 5.24$ см/с^2.

ЗАДАЧА Д-1
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ
ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Постановка задачи. Механическая система, начальное положение которой показано на рис. Д-1.1, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Пренебрегая силами трения и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в момент, когда пройденный им путь s станет равным s_1. Необходимые для решения данные приведены в таблице Д-1.1, где приняты следующие обозначения: m_j – масса j-го тела; R_j, r_j – радиусы больших и малых окружностей j-го составного цилиндра; $i_{j\xi}$ – радиус инерции составного цилиндра под номером j относительно оси вращения, проходящей через его центр тяжести; α – угол наклона плоскости к горизонту. Наклонные участки нити считать параллельными соответствующим наклонным плоскостям.

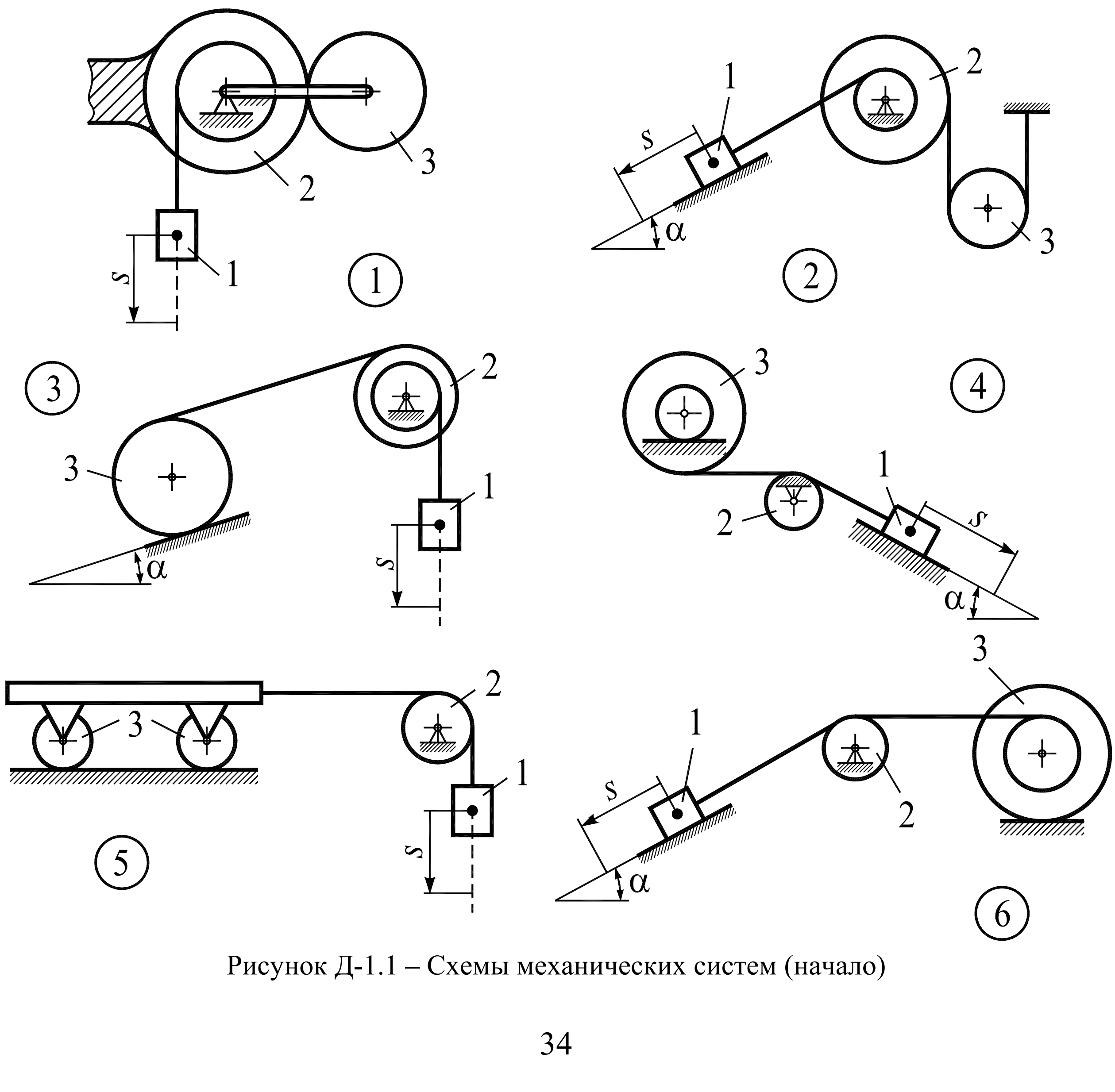


Рисунок Д-1.1 – Схемы механических систем (начало)

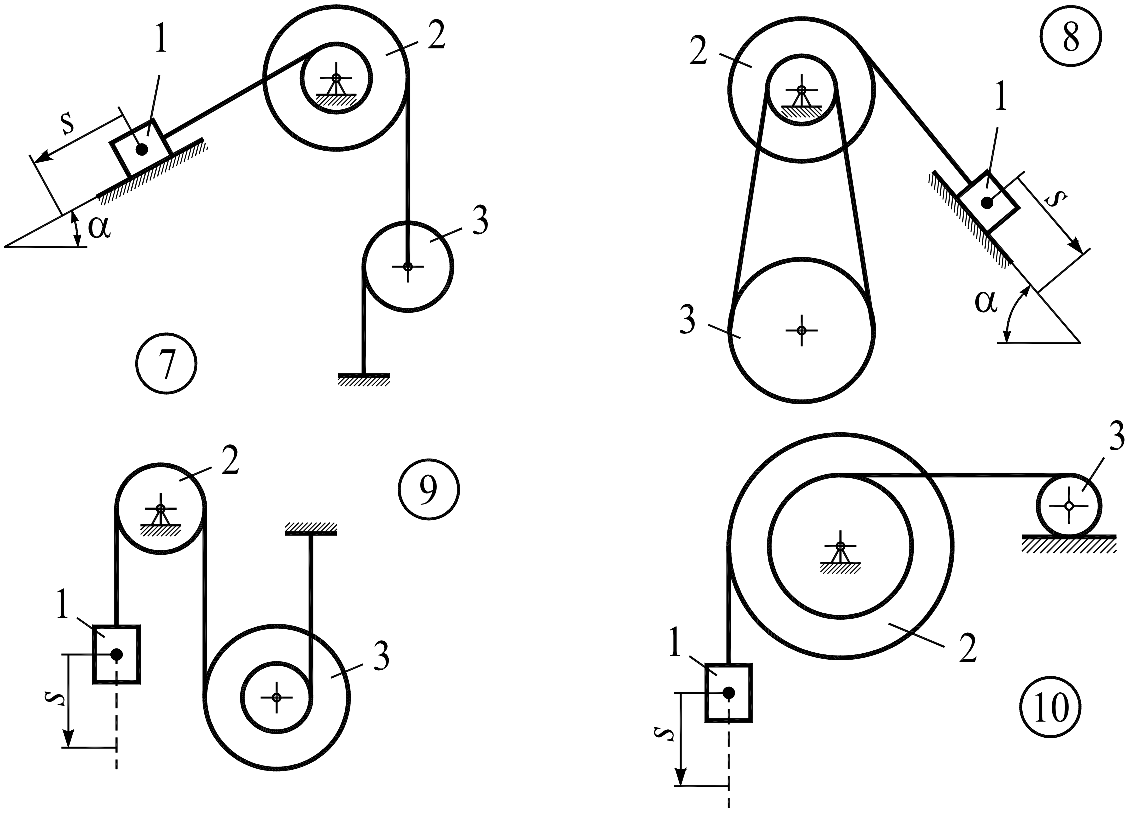


Рисунок Д-1.1 – Схемы механических систем (конец)

Таблица Д-1.1 – **Исходные данные к задаче Д-1**

Вар.	m_2	m_3	R_2, см	R_3, см	r_j/R_j	$i_{j\xi}/R_j$	α, °	s_1, м
1	$2.0{\cdot}m_1$	$0.2{\cdot}m_1$	20	15	0.5	0.8	30	0.2
2	$1.5{\cdot}m_1$	$0.3{\cdot}m_1$	18	14	0.8	0.9	35	0.1
3	$3.0{\cdot}m_1$	$0.4{\cdot}m_1$	25	20	0.75	0.8	40	0.5
4	$1.0{\cdot}m_1$	$0.5{\cdot}m_1$	28	18	0.7	0.75	30	0.3
5	$2.0{\cdot}m_1$	$0.6{\cdot}m_1$	16	12	0.6	0.7	25	0.2
6	$3.0{\cdot}m_1$	$0.4{\cdot}m_1$	15	14	0.75	0.6	30	0.1
7	$4.0{\cdot}m_1$	$0.2{\cdot}m_1$	22	16	0.8	0.9	40	0.4
8	$3.5{\cdot}m_1$	$0.7{\cdot}m_1$	26	20	0.7	0.8	35	0.2
9	$2.0{\cdot}m_1$	$0.3{\cdot}m_1$	24	16	0.6	0.7	30	0.4
10	$2.5{\cdot}m_1$	$0.5{\cdot}m_1$	17	13	0.5	0.75	45	0.1

Указания к решению задачи Д-1.

Решение задачи основано на теореме об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^E + \sum A_k^J , \tag{1}$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях (Дж); $\sum A_k^E$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе (Дж);

$\sum A_k^J$ – сумма работ внутренних сил системы (Дж).

Так как в начальном положении система находилась в покое, то T_0=0. Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, $\sum A_k^J = 0$. Следовательно, уравнение (1) принимает вид:

$$T = \sum A_k^E . \qquad (2)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы T в конечном ее положении равна сумме кинетических энергий тел, входящих в систему:

$$T = \sum T_j .$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно (рис. Д-1.2,а), равна

$$T = \frac{m v_S^2}{2},$$

где m – масса тела, кг; v_S – скорость центра его тяжести, м/с.

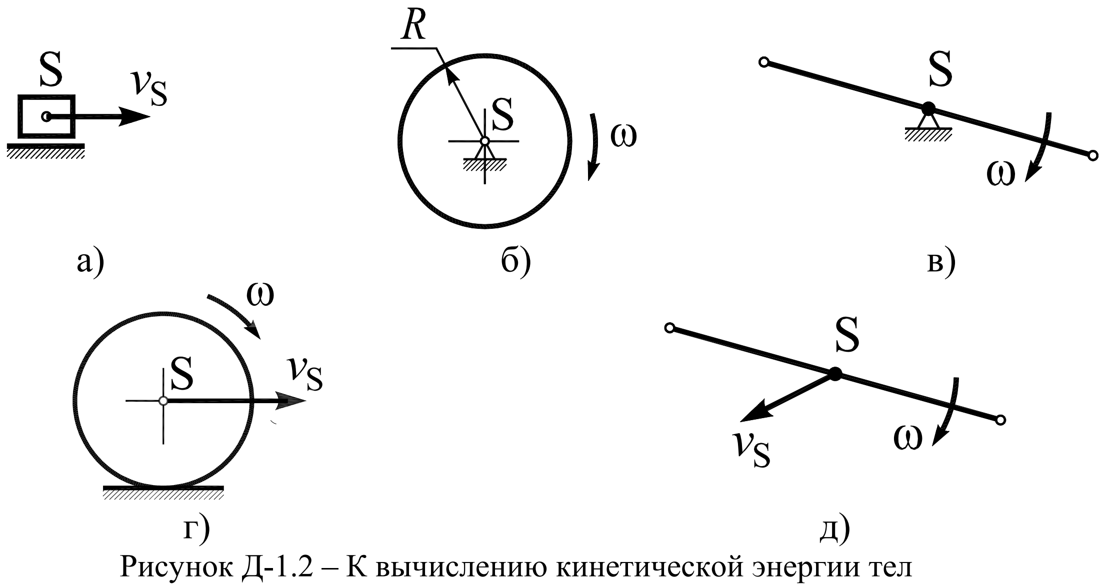


Рисунок Д-1.2 – К вычислению кинетической энергии тел

Кинетическая энергия вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω тела, центр тяжести которого расположен на оси вращения (v_S=0) (рис. Д-1.2,б,в), равна

$$T = \frac{J_\xi \omega^2}{2},$$

где J_ξ – момент инерции тела относительно центральной оси, проходящей через центр его тяжести S.

Для однородного сплошного цилиндра радиуса R (м) и массой m (кг) момент инерции (кг·м^2) вычисляется по формуле:

$$J_\xi = \frac{mR^2}{2}.$$

Для тела, составленного из дисков разного радиуса, применима обобщающая формула:

$$J_\xi = m \cdot i_\xi^2,$$

где m – масса тела, кг; i_ξ – радиус инерции, м.

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение (рис. Д-1.2,г,д),

$$T = \frac{mv_S^2}{2} + \frac{J_\xi \omega^2}{2},$$

где используются те же обозначения, что и ранее.

Для рис. Д-1.2,г при отсутствии проскальзывания цилиндра очевидно следующее соотношение между угловой его скоростью и скоростью центра тяжести:

$$v_S = \omega \cdot R.$$

Работа A_F постоянной силы $\vec{F}$ при прямолинейном движении точки ее приложения равна произведению модуля силы F (Н) на пройденное точкой расстояние s (м) и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения:

$$A_F = F \cdot s \cdot \cos\left(\widehat{\vec{F},\vec{s}}\right).$$

При вычислении работы силы тяжести $\overrightarrow{G_j}$ можно пользоваться частным случаем этого определения:

$$A_G = G \cdot h,$$

где h – вертикальное перемещение центра тяжести тела S из начального положения в его конечное положение (за положительное направление измерения перемещения h принять движение вниз).

При вычислениях рекомендуется обращать внимание на размерности величин (расчеты следует выполнять в системе СИ).

Пример выполнения задачи Д-1.

ЗАДАЧА Д-1

Найти скорость груза 1 в положении, когда $s=s_1$. *Дано*: механическая система в начальном положении (рис. Д-1.3); $m_2 = 2\cdot m_1$; $m_3 = m_1$; $R_2 = R_3 = 12$ см; $r_2 = 0.5\cdot R_2$; $i_{2\xi} = 8$ см; $\alpha=30°$; $s_1=0.06\cdot\pi$ м.

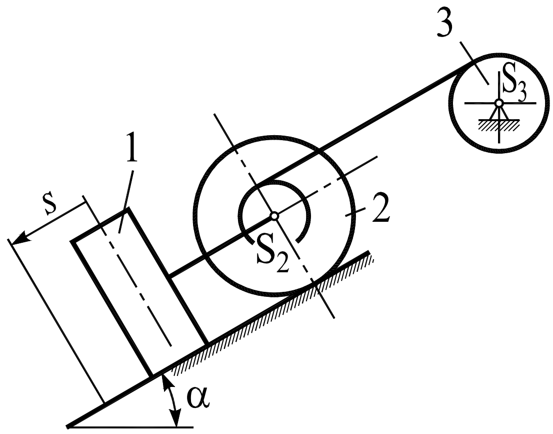


Рисунок Д-1.3 – Схема механической системы

Решение.

Кинетическая энергия системы (рис. Д-1.3), состоящей из трех тел, равна сумме кинетических энергий этих тел:

$$T = \sum_{j=1}^{3} T_j \,. \tag{3}$$

Кинетическая энергия тела 1

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \,. \tag{4}$$

Кинетическая энергия катка 2

$$T_2 = \frac{m_2 v_{S2}^2}{2} + \frac{J_{2\xi}\omega_2^2}{2} \,, \tag{5}$$

где ω_2 – угловая скорость катка; $v_{S2} = v_1$ – скорость его центра тяжести S_2; $J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2$ – момент инерции катка.

Так как каток катится без скольжения, то его мгновенный центр скоростей находится в точке P_2 (рис. Д-1.4). Поэтому

$$\omega_2 = \frac{v_{S2}}{(S_2P_2)} = \frac{v_1}{R_2} \,.$$

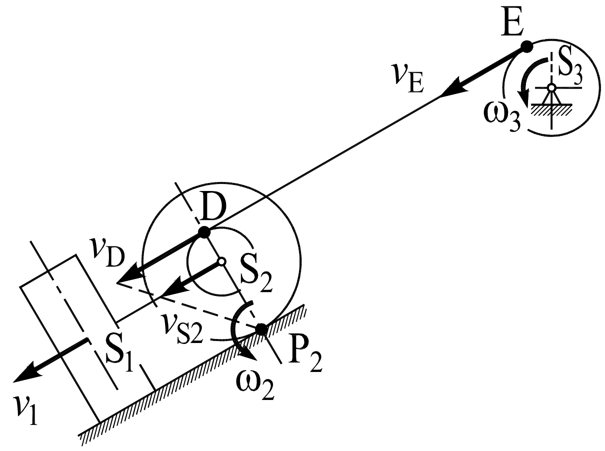


Рисунок Д-1.4 – Линейные и угловые скорости тел механической системы

Подставляя полученные выражения в формулу (5) с учетом заданного значения массы m_2, получаем:

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2 v_1^2}{2R_2^2} = \frac{1}{2} m_2 v_1^2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) = m_1 v_1^2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right). \tag{6}$$

Кинетическая энергия сплошного цилиндра 3 ($v_{S3} = 0$):

$$T_3 = \frac{J_{3\xi}\omega_3^2}{2}, \tag{7}$$

где $J_{3\xi} = m_3 \cdot R_3^2 / 2$ – момент инерции; ω_3 – угловая скорость цилиндра:

$$\omega_3 = \frac{v_E}{R_3}.$$

Скорость точки E цилиндра 3 равна скорости точки D катка 2, которую можно найти из соотношения:

$$v_D = \omega_2 \cdot (r_2 + R_2).$$

А так как $\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$ и $R_2=2\cdot r_2$, то

$$v_D = v_E = \frac{3}{2} v_1$$

и

$$\omega_3 = \frac{3v_1}{2R_3}. \tag{8}$$

После подстановки результатов в (7) выражение принимает вид:

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{m_3 R_3^2}{2}\left(\frac{3v_1}{2R_3}\right)^2 = m_3\frac{9}{16}v_1^2 = m_1 v_1^2 \frac{9}{16}. \qquad (9)$$

Кинетическая энергия всей механической системы в конечном положении определяется по формуле (3) с учетом выражений (4), (6) и (9):

$$T = m_1 v_1^2\left[\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) + \frac{9}{16}\right],$$

или после подстановки значений R_2 и $i_{2\xi}$:

$$T = 2.507 \cdot m_1 v_1^2. \qquad (10)$$

Вычисляем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном перемещении. Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис. Д-1.5). На этом рисунке $\overrightarrow{N_j}$ – реакция связи j-го тела с опорной поверхностью; $F_{\text{ñö}2}$ – сила сцепления катка 2. Работы этих сил равны нулю, поскольку $\left(\widehat{\overrightarrow{N_j}, \overrightarrow{s_j}}\right) = 90°$, а $F_{\text{ñö}2}$ приложена в мгновенном центре скоростей. Также на рисунке Д-1.5 $\overrightarrow{G_j}$ – сила тяжести j-го тела ($j = \overline{1,3}$):

$$G_j = m_j \cdot g,$$

где g – ускорение свободного падения.

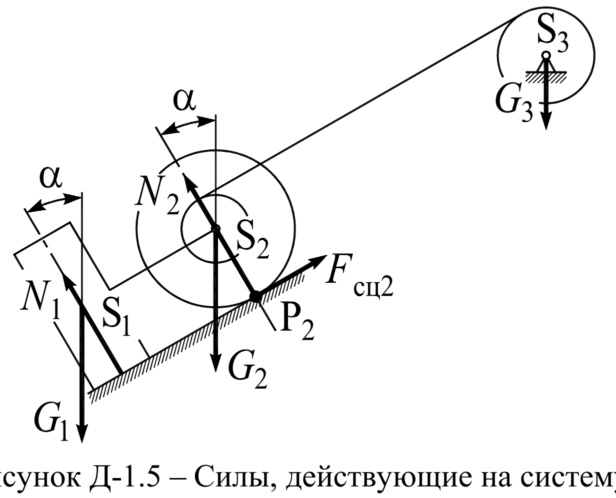


Рисунок Д-1.5 – Силы, действующие на систему

Работы сил тяжести равны:

$$A_{G1} = G_1 \cdot h_{S1} = m_1 \cdot g \cdot s_1 \cdot \sin\alpha;$$

$$A_{G2} = G_2 \cdot h_{S2} = m_2 \cdot g \cdot s_1 \cdot \sin\alpha = 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot s_1 \cdot \sin\alpha;$$

$$A_{G3} = 0,$$

где h_{Sj} – вертикальное перемещение центра тяжести j-го тела из начального положения (рис. Д-1.3) в конечное (когда s=s_1).

Сумма работ внешних сил определится сложением этих работ:

$$\sum A_k^E = 3 \cdot m_1 \cdot g \cdot s_1 \cdot \sin\alpha,$$

или после подстановки значения α

$$\sum A_k^E = 1.5 \cdot m_1 \cdot g \cdot s_1. \tag{11}$$

Согласно теоремы (2) приравниваем значения T и $\sum A_k^E$, определяемые по формулам (10) и (11):

$$2.507 \cdot m_1 \cdot v_1^2 = 1.5 \cdot m_1 \cdot g \cdot s_1,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{1.5 \cdot g \cdot s_1}{2.507}} = \sqrt{\frac{1.5 \cdot 9.81 \cdot 0.06 \cdot \pi}{2.507}} = 1.05 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_1 = 1.05$ м/с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Кафедра деталей машин и ТММ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по технической механике

Схема – 10

Вариант – 5

Выполнил: ст. гр. ТС-18
Иванов И. И.

Проверил: доц. Петров П. П.

Харьков
2011

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розрахунково-графічної роботи
з дисципліни «Технічна механіка»
для студентів спеціальності 6.100400

(російською мовою)

Укладачі: ЯНЧЕВСЬКИЙ Ігор Владиславович
ШАРАПАТА Андрій Сергійович

Відповідальний за випуск *В. А. Перегон*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *І. В. Янчевський*

План 2011 р. Поз. 1.
Підписано до друку . . .
Формат 60×84 1/16. Папір газетний. Гарнітура Times New Roman Cyr.
Віддруковано на різографі. Ум. друк. арк. 2,5. Обл.-вид. арк. 2,9.
Зам. № / . Тираж 100 прим. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, м. Харків - МСП, вул. Петровського, 25.
Тел./факс: (057) 700-38-64, 707-37-03; e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення
та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04.2002 р.