# ВВЕДЕНИЕ

**“Техническая механика”** – дисциплина, представляющая собой основу общетехнической подготовки студентов не машиностроительных специальностей высших технических учебных заведений.

***Цель изучения дисциплины*** – формирование представлений об общих методах исследования механических систем, получение знаний из различных разделов механики, получение сведений об основных гипотезах и моделях механики и границах их применимости, которые необходимы при эксплуатации машин и приборов.

В курсе “Техническая механика” изучаются следующие темы [1]:

1. *Статика*;
2. *Кинематика механического движения*;
3. *Динамика механического движения*;
4. *Структурный и кинематический анализы механизмов*;
5. *Силовой анализ механизмов*;
6. *Анализ динамики механизмов*;
7. *Оценка надежности деталей машин*;
8. *Материаловедение*;
9. *Анализ отдельных групп деталей и механизмов*.

Эти темы читаются с единых позиций, логически дополняя друг друга. Программа курса объединяет учебный материал следующих дисциплин, большинство из которых относятся к классу прикладных[*]:

- “*Теоретическая механика*” (темы 1÷3);
- “*Теория механизмов и машин*” (темы 4÷6);
- “*Сопротивление материалов*” (тема 7);
- “*Материаловедение*” (тема 8);
- “*Детали машин и основы конструирования*” (тема 9).

Курс технической механики базируется на таких фундаментальных дисциплинах[†] как математика, физика и инженерная графика.

---

[*] *Прикладные дисциплины* изучают действие фундаментальных законов природы в частных областях жизни.

[†] *Фундаментальные науки* представляют собой системы знаний о наиболее общих законах и принципах нашего мира.

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Теоретическая механика** – наука, изучающая наиболее общие законы механического движения.

Исходные определения курса:

- *движение* – перемещение во времени и пространстве одного материального объекта относительно другого;
- *механическая система* – совокупность материальных точек (тел), движение и положение, которых связано между собой;
- *материальная точка* – тело, размерами которого можно пренебречь;
- *твердое тело* – неизменная механическая система, для которой расстояние между двумя ее точками остается неизменным.

Теоретическую механику принято делить на три раздела: ***статика***, ***кинематика*** и ***динамика***. В зависимости от них известны различные последовательности изложения курса – его могут начинать со статики, с кинематики и с динамики. Наиболее распространена последовательность «статика – кинематика – динамика». Она и принята в данном изложении. Такой подход обоснован по следующим причинам:

- знания наращиваются мелкими, посильными порциями;
- постепенное продвижение от простых знаний к сложным;
- изучение последующих учебных предметов прежде всего требует знания раздела «Статики».

## 1.1. Статика

### *1.1.1. Аннотация*

***Статика*** – раздел механики, в котором рассматриваются следующие задачи:

- преобразование систем сил в эквивалентные им системы;
- определение условий равновесия тела, на которые действуют силы;
- определение положений центра тяжести твердого тела или системы твердых тел.

Основные понятия раздела:

***Сила*** – мера механического взаимодействия двух тел:

- По способу действия силы различают:
  - *сосредоточенные** $\overline{F_1}$, $\overline{R_A}$, $\overline{N}$ … [Н];
  - *распределенные*:
    - по линии – *погонная нагрузка* $q$ [Н/м];
    - по площади – *удельное давление* $p$ [Н/м$^2$].

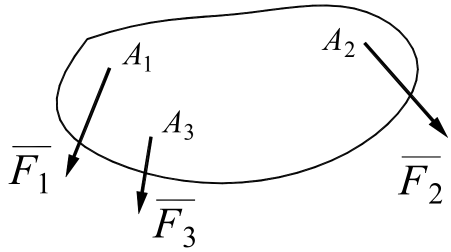
Силы характеризуются:

- значением (модули);
- направлением;
- точкой приложения.

---

* Для обозначения сил будем использовать прописные буквы латинского алфавита с буквенными или численными нижними индексами справа. Буквенный индекс отображает точку приложения этой силы. Модули этих сил обозначаются без символа вектора ($F_1$, $R_A$, $N$…).

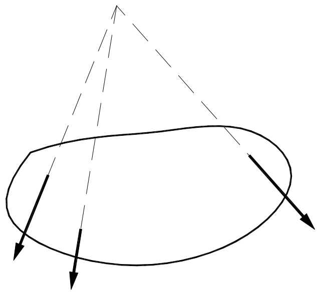
***Система сил*** $\left(\overline{F_1},\overline{F_2},...,\overline{F_m}\right)$ – совокупность сил, действующих на механическую систему.



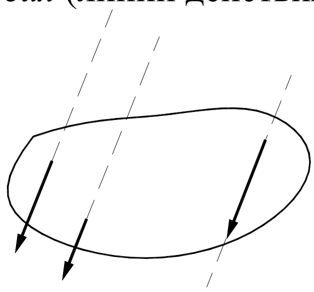

$$\left(\overline{F_1},\overline{F_2},\overline{F_3}\right)$$

По способу расположения в пространстве различают:

- *система сходящихся сил* (линии действия сил пересекаются в одной точке);



- *система параллельных сил* (линии действия сил параллельны);

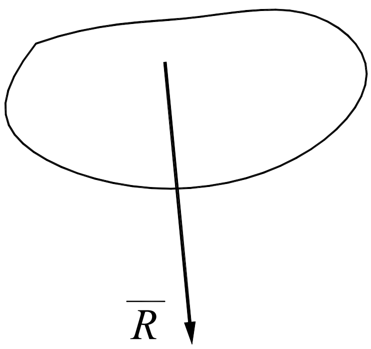


- *плоская система сил* (линии действия сил расположены в одной плоскости);
- *произвольная система сил*.

Две системы называются *эквивалентными*, если их замена не нарушает состояние твердого тела.

$$\left(\overline{F_1},\overline{F_2},...,\overline{F_m}\right)=\left(\overline{Q_1},\overline{Q_2},...,\overline{Q_n}\right).$$

*Равнодействующей системы сил* $\overline{R}$ называется сила, действие которой на твердое тело эквивалентно действию заданной системы сил.




$$\left(\overline{F_1},\overline{F_2},...,\overline{F_m}\right)=\overline{R}.$$

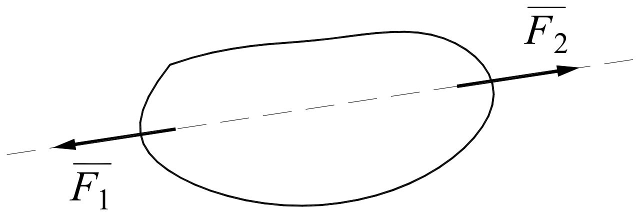
*Уравновешенной системой сил* называется система, приложение которой к твердому телу не изменяет его состояния.

$$\left(\overline{F_1},\overline{F_2},...,\overline{F_m}\right)=\overline{R}=0.$$

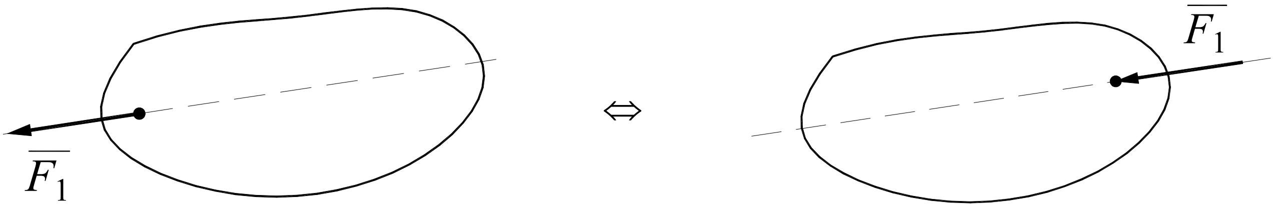
Под действием уравновешенной системы сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

### *1.1.2. Исходные положение статики – аксиомы статики*

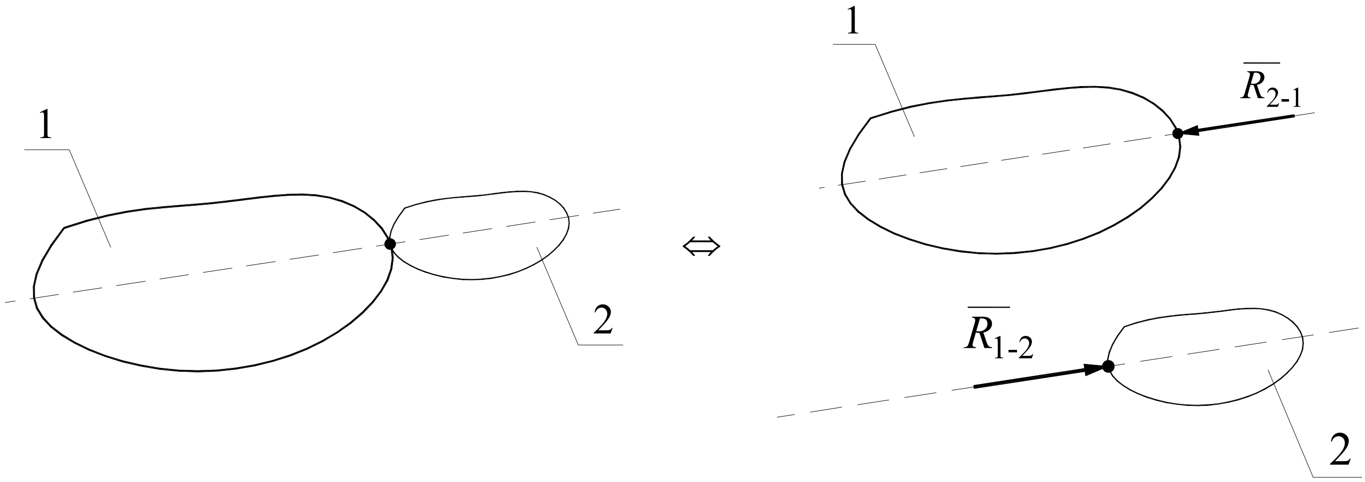
***Аксиома 1.*** Две силы, которые приложены к твердому телу, уравновешены только в том случае, если они равны по модулю, лежат на одной прямой и противоположно направлены – $\overline{F_1}=-\overline{F_2}$ .



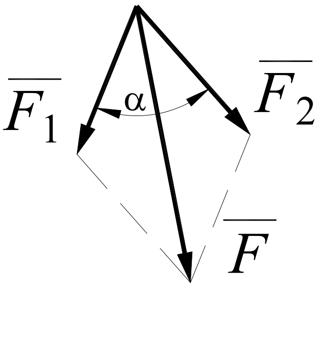

***Аксиома 2.*** Силу можно переносить вдоль линии ее действия, эффект от этого не изменится.




***Аксиома 3.*** Действие равно противодействию – $\overline{R_{2-1}}=-\overline{R_{1-2}}$ :

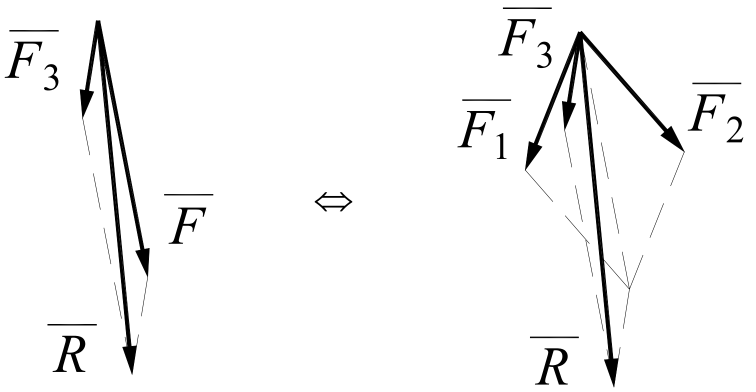



***Аксиома 4.*** Силу можно разложить по правилу параллелограмма, эффект от действия $\overline{F}$ такой же, как от $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ (*аксиома параллелограмма*):



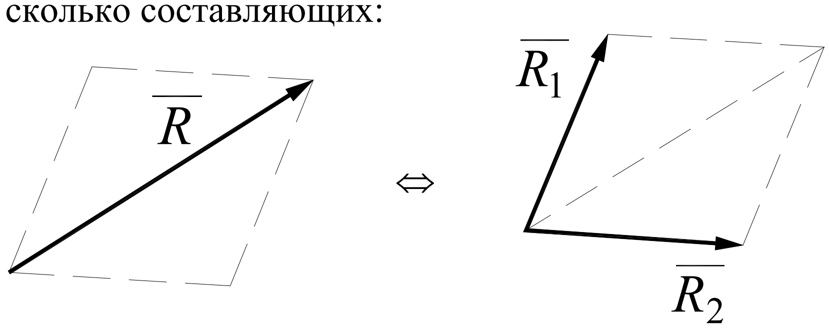

$$\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}$$

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\alpha}$$



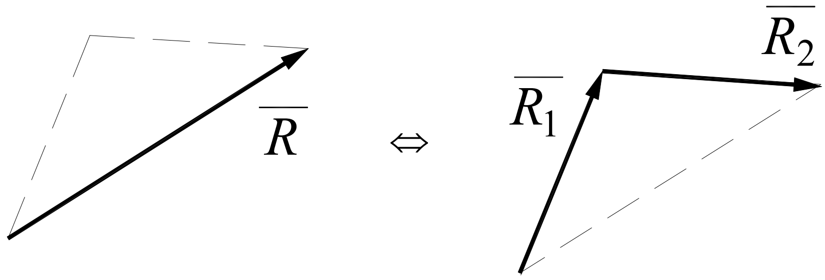

$$\overline{R} = \overline{F} + \overline{F_3}$$
$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$$

На основании этой аксиомы следует, что любую силу можно разложить на насколько составляющих:




$$\overline{R} = \overline{R_1} + \overline{R_2}$$

Правило параллелограмма может быть заменено *правилом треугольника*:



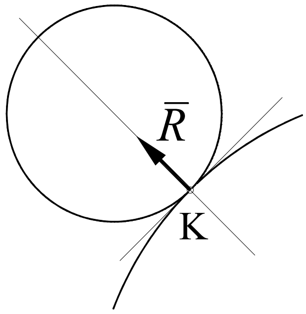

$$\overline{R} = \overline{R_1} + \overline{R_2}$$

## *1.1.3. Связи и реакции связей*

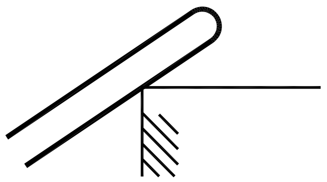
Тела бывают *свободные* и *несвободные*. На действие свободного тела не наложено никаких ограничений (оно имеет 6 степеней свободы – 3 поступательные движения и 3 вращательные относительно координат осей *x*, *y*, *z*). Все то, что ограничивает свободу действия называется ***связью***, а сила, действующая со стороны связи, называется ***реакцией связи*** $\overline{R}$. Вектор $\overline{R}$ направлен противоположно направлению, в котором связь не разрешает двигаться телу.

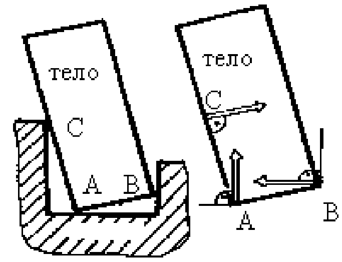
<u>Виды связей и направление реакций связи:</u>

- идеально-гладкая поверхность – реакция связи направлена по нормали к поверхности (перпендикулярно касательной)

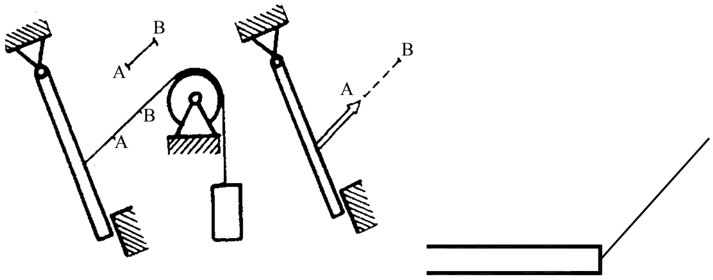


- точечная опора – реакция связи направлена по нормали к поверхности

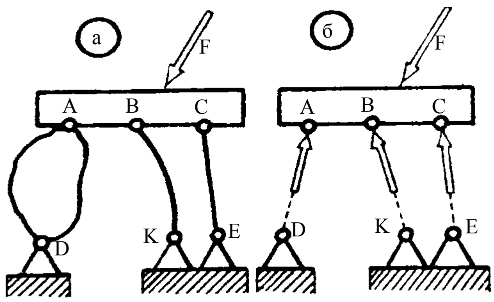




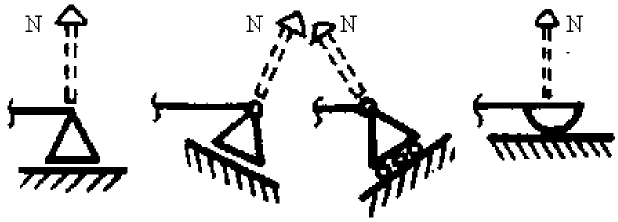

- гибкое тело (нить, трос, канат) – реакция связи направлена вдоль гибкого тела к точке подвеса и вызывает растяжение



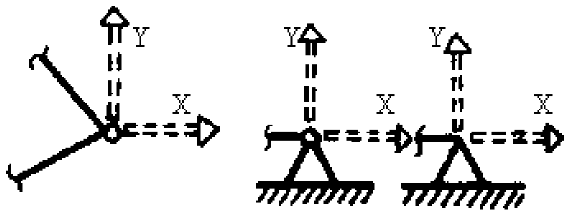

- невесомый стержень с шарнирами – реакция связи направлена вдоль стержня




- шарнирно-подвижная опора – реакция связи перпендикулярна опорной поверхности

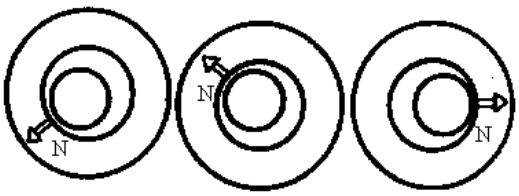


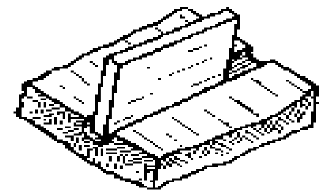

- шарнирно-неподвижная опора (цилиндрический шарнир) – реакция связи может иметь любое направление в плоскости, поэтому при решении задач она заменяется двумя взаимно перпендикулярными составляющими



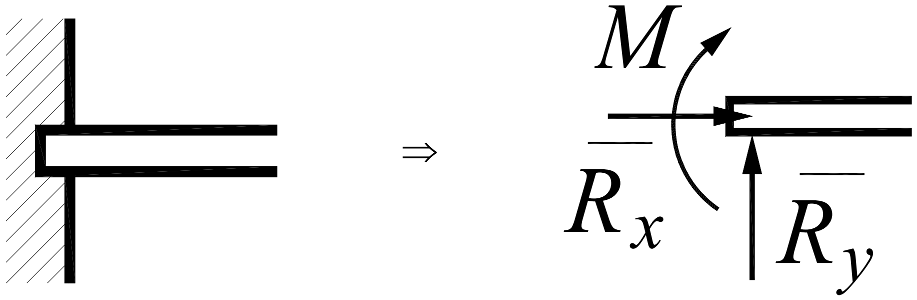

Цилиндрический шарнир – это обобщающее понятие различных конструктивных решений. Одно из них ясно из ниже приведенных рисунков. Главная сущность шарнира – беспрепятственность поворота* тела относительно связи.

* Речь идёт о микроповоротах, происходящих по причине деформаций тел от действующих на них сил. Это могут быть единицы угловых минут и даже единицы угловых секунд.



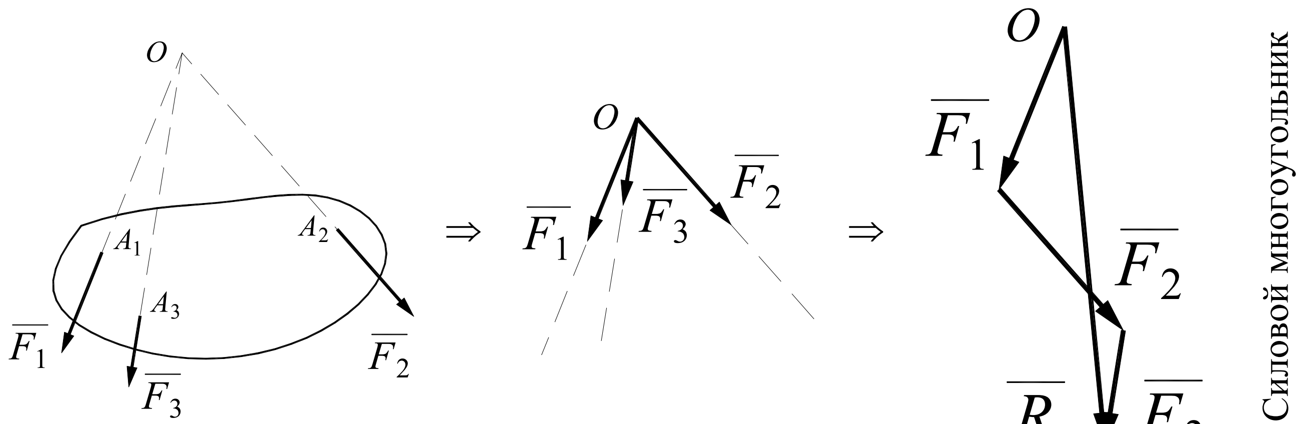



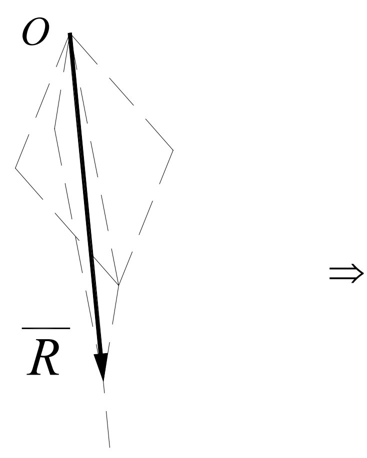
- жесткое защемление (заделка) – реакция связи включает произвольно направленную силу и реактивный момент, также неизвестный по направлению

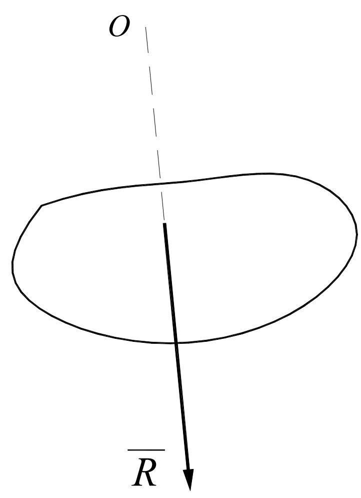



## 1.1.4. Приведение плоских систем сил к равнодействующей

***Пример №1.*** Приведение плоской сходящейся системы сил $\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}\right)$ к равнодействующей $\overline{R}$, графическим методом (путем построения силового многоугольника).



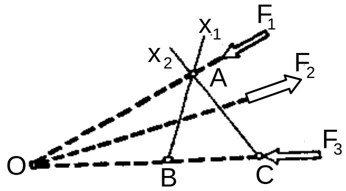



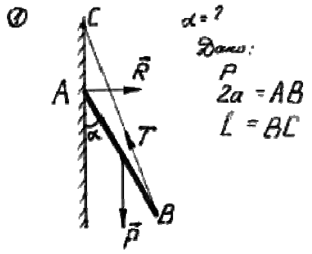



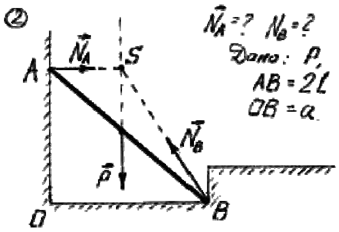

$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$

Система сходящихся сил является *уравновешенной*, если $\overline{R} = 0$. В этом случае $\overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = 0$ – силовой многоугольник замкнут.

***Теорема***. Плоская система из трех непараллельных сил, действующих на твердое тело, может быть уравновешена только в том случае, если линии их действия пересекаются в одной точке.



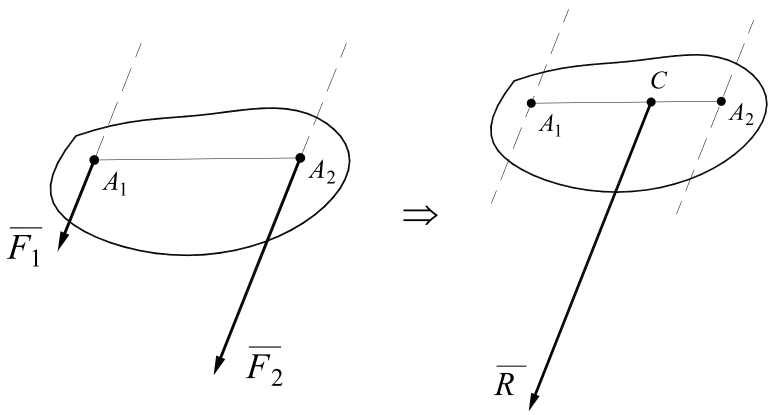




***Пример №2.*** Приведение системы параллельных сил к равнодействующей аналитическим методом.

- $\overline{F_1} \uparrow\uparrow \overline{F_2}$

$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ ($R$=$F_2$+$F_1$, $\overline{R} \uparrow\uparrow \overline{F_2}$)

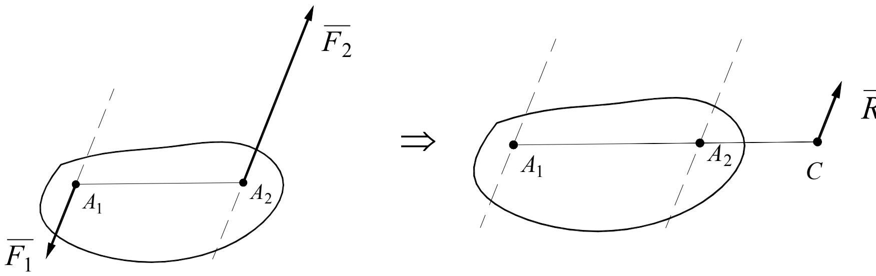



Точка $C$ приложения $\overline{R}$ делит отрезок между точками приложения сил $A$ и $B$ на части обратно пропорциональные модулям сил:

$$\frac{A_1C}{F_2} = \frac{A_2C}{F_1},$$

$C$ – центр двух параллельных сил

- $\overline{F_1} \uparrow\downarrow \overline{F_2}$, $F_2$>$F_1$




$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ ($R$=$F_2$–$F_1$, $\overline{R} \uparrow\uparrow \overline{F_2}$)

$$\frac{A_1C}{F_2} = \frac{A_2C}{F_1}$$

***Пример №3.*** Определение равнодействующей системы сходящихся сил аналитическим методом.

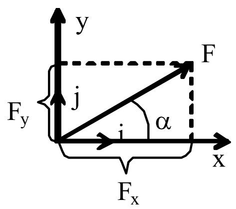
$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_m}$$
$$\overline{R} = \overline{R_x} + \overline{R_y},$$

где $\overline{R_x}$, $\overline{R_y}$ – проекции равнодействующей на координатные оси.

$$\overline{R_x} = \overline{F_{1x}} + \overline{F_{2x}} + ... + \overline{F_{mx}} = \sum X_i$$
$$\overline{R_y} = \overline{F_{1y}} + \overline{F_{2y}} + ... + \overline{F_{my}} = \sum Y_i$$

– сумма проекции всех сил системы на координатные оси

Проекции силы определяются по формулам




$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos(\alpha)$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin(\alpha)$$
$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2}$$

Для уравновешенной плоской системы сходящихся сил $R$=0, что эквивалентно равенствам

$$\sum X_i = 0;$$
$$\sum Y_i = 0.$$

***Пример №4.*** Приведение плоской системы произвольно направленных сил, действующих на твердое тело, к главному вектору сил системы $\overline{R^*}$ и главному моменту системы сил $M^*$, приложенных к точке $O$:

$\overline{R^*} = \sum \overline{F_i}$ – векторная сумма всех сил, входящих в систему;

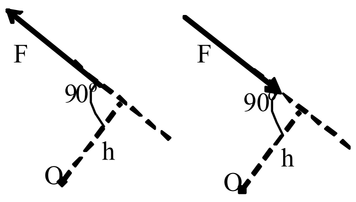
$M^* = \sum M_O\left(\overline{F_i}\right)$.

Для доказательства такого приведения введем понятия момент силы и пара сил:

- ***момент силы*** $M$ – это произведение силы $F$ на ее плечо $h$[*] с учетом знака ("+" – вращение против часовой стрелки, "–" – по часовой стрелке).

Если линия действия силы $F$ проходит через точку $O$, то $M_O(F)$=0, поскольку в этом случае плечо $h \equiv 0$.

Т.о.




$M_o(F)=+Fh$ $\quad$ $M_o(F)=–Fh$

$M_O(F) = \pm F \cdot h$, $[M]$=Н·м.

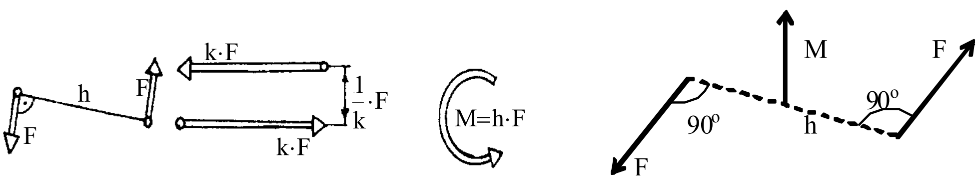
***Теорема.*** Момент равнодействующей $\overline{R}$ плоской системы сил относительно точки $C$ равен сумме моментов сил системы относительно этой точки:

Т.е., если $\overline{R} = \sum \overline{F_i}$, то $M_O\left(\overline{R}\right) = \sum M_O\left(\overline{F_i}\right)$

Для приведенного рисунка $\overline{F} = \overline{F_x} + \overline{F_y}$ и $M_O(F) = F \cdot h = –F_x \cdot h_x + F_y \cdot h_y$.

- ***пара сил*** – система двух равных по величине, но противоположно направленных сил.

$$\overline{F'} = -\overline{F''}$$




[*] «Плечо силы» – кратчайшее расстояние от точки, относительно которой вычисляется момент, до линии действия силы.

Главной характеристикой пары является *момент* – $M=\pm F'\cdot h$, где $h$ – плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия сил. Модуль момента пары равно произведению модуля силы на плечо пары ($M=F'\cdot h$).

Две пары, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости, с моментом, равным сумме моментов данных двух пар: $\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2$. Две пары, имеющие геометрически равные моменты, называются *эквивалентными*. Не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскости ее действия. Т.е. вектор момента пары сил является свободным вектором, который перпендикулярен плоскости действия пары, причём направлен так, чтобы глядя ему навстречу можно было видеть пару сил стремящейся повернуть тело (к которому она приложена) против хода часовой стрелки.

Т.о., при приведении к плоской системе произвольно направленных сил $\left(\overline{F_1},\overline{F_2},\overline{F_3}\right)$ к $R^*$ и $M^*$ справедливы следующие рассуждения:

1. Вводится пара сил $(\overline{F_1'},\overline{F_1''})$ $F_1'=F_1''=F_1$ с моментом $M'$;
2. Для компенсации момента от пары сил вводится момент $M_1=-M_1'$;
3. Поскольку $\overline{F_1''}=-\overline{F_1}$, то согласно первой аксиомы статики они уравновешиваются.
4. Вместо исходной силы получим $\overline{F_1}$ и $M_1$
5. Аналогично для сил $\overline{F_2}$ и $\overline{F_3}$.
6. Тогда для системы сил $\left(\overline{F_1},\overline{F_2},\overline{F_3}\right)$ получим:

$$\overline{R^*}=\sum\overline{F'_i}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3};$$

$$M^*=\sum M_i\left(\overline{F_i}\right).$$

Плоская система произвольно направленных сил является *уравновешенной*, если $\overline{R^*}=0$ и $M^*=0$.

В аналитическом виде условия равновесия плоской системы произвольно направленных сил могут быть представлены в виде следующих возможных комбинациях:

$$\begin{cases}\sum X_i=0;\\ \sum Y_i=0;\\ \sum M_A\left(\overline{F_i}\right)=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum X_i=0 \text{ или } \sum Y_i=0;\\ \sum M_A\left(\overline{F_i}\right)=0;\\ \sum M_B\left(\overline{F_i}\right)=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum M_A\left(\overline{F_i}\right)=0;\\ \sum M_B\left(\overline{F_i}\right)=0;\\ \sum M_C\left(\overline{F_i}\right)=0.\end{cases}$$

В последней записи точки $A$, $B$, $C$ не должны лежать на одной прямой.

Каждая из систем представляет собой *условие статического равновесия тела*.

Поскольку в системах имеем по три уравнения, то можно найти не более трех неизвестных (для большинства задач вычисляются реакции связей). Поэтому в том случае, когда количество неизвестных не более трех, система сил называется *статистически определимой*, в противном случае – *статически неопределимой*.

## 1.2. Кинематика механического движения

### *1.2.1. Аннотация*

***Кинематика*** – раздел механики, в котором изучается движение материальных объектов (МО) без учета сил, вызвавших это движение.

Основные понятия раздела:

- *уравнение движения* – это математические уравнения, с помощью которых можно определить положение МО в любой момент времени;
- *траектория* – геометрическое место последовательных положений точки в пространстве;
- *скорость v* – характеристика движения, которая указывает на интенсивность и направление перемещения МО за единицу времени;
- *ускорение a* – характеристика движения, которая указывает на интенсивность и направление изменения скорости за единицу времени.

Задачи кинематики:

- определение $v$ и $a$;
- построение траекторий;
- составление уравнения движения.

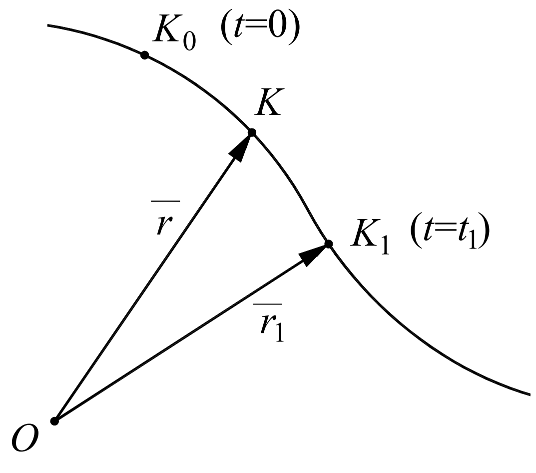
Различают кинематику точки и кинематику твердого тела.

### *1.2.2. Кинематика точки*

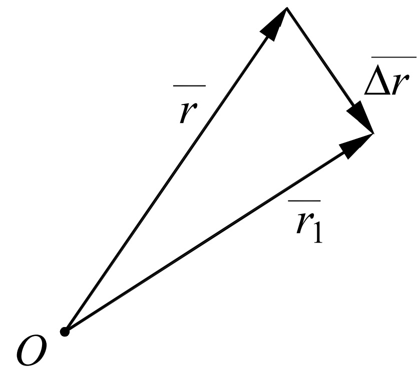
Движение точки бывает *простое* и *сложное*, *плоское* и *пространственное*. Движение точки может быть задано *векторным*, *координатным* или *естественным* (*натуральным*) способами.

#### *1.2.2.1. Векторный способ задания движения*

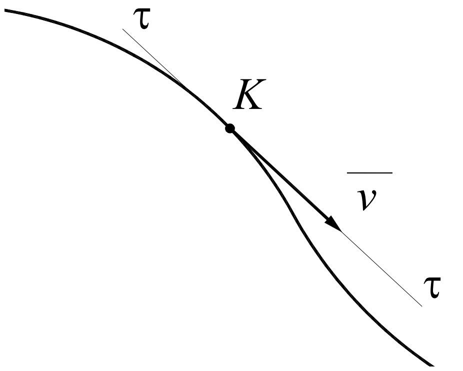
Положение точки $K$ определяется радиус-вектором $\overline{OK} = \overline{r}$ с началом в точке $O$. Линия, которую описывает в пространстве конец $\overline{r}$, представляет собой траекторию движения точки $K$.




Рассмотрим два последовательных положения точки – положение $K$ в момент времени $t$ и положение $K_1$ в момент времени $t_1$, причем $t_1 = t + \Delta t$ (за время $\Delta t$ точка переместилась на $\overline{\Delta r}$).




- Скорость точки.

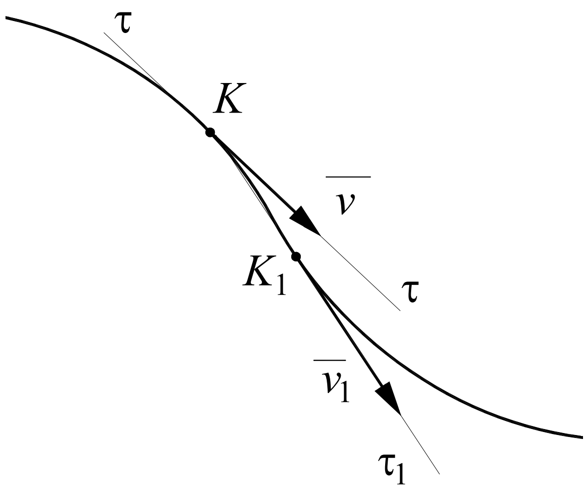


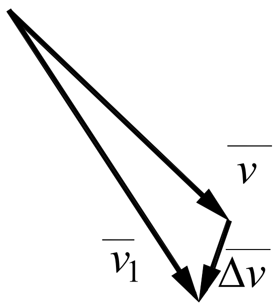

Согласно определению

$$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\Rightarrow\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}.$$

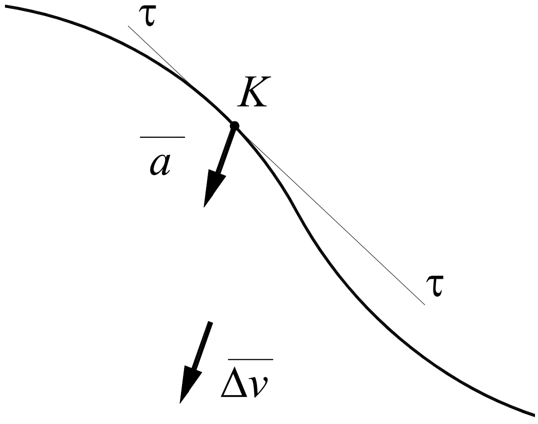
Поскольку при $\Delta t\to 0$ $\Delta\bar{r}$ совпадает с касательной к траектории τ–τ в положении $K$, то и скорость $v$ направлена по касательной к траектории.

- Рассмотрим ускорение. В положении $K$ точка имела скорость $\bar{v}$, в положении $K_1$ – $\overline{v_1}$, при этом за промежуток времени $\Delta t\to 0$ скорость точки изменилась на $\overline{\Delta v}$, т.е. справедливо соотношение $\overline{v_1}=\bar{v}+\overline{\Delta v}$.




Тогда




$$\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$$

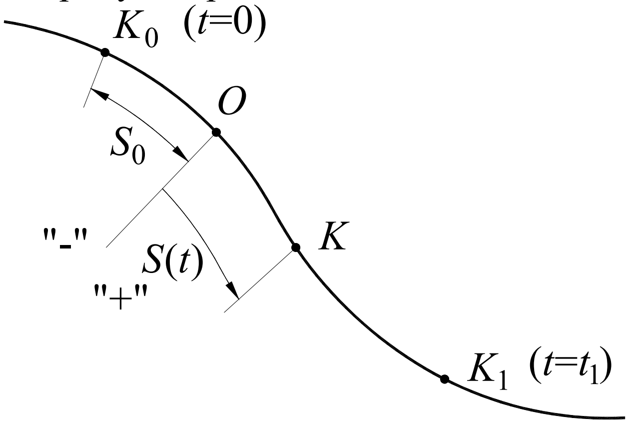
$$\Rightarrow\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow\bar{a}\uparrow\uparrow\Delta\bar{v}.$$

Ускорение направлено в сторону вогнутости траектории.

### *1.2.2.2. Естественный способ задания движения точки.*

При естественном способе известна траектория движения точки $K$, а уравнение движения задается в виде $S=f(t)$ ($S$ – дуговая координата, отсчитываемая от начала отсчета точки $O$ в сторону выбранного положительного направления*).




- Скорость точки

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{r}}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}\Rightarrow\bar{v}=\bar{\tau}\cdot\frac{dS}{dt},$$

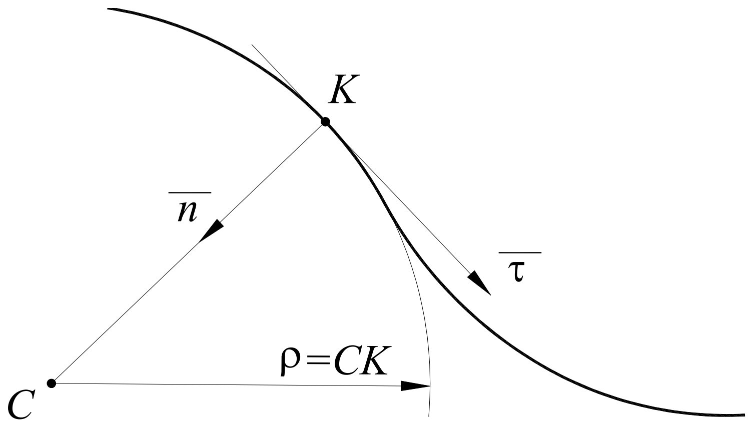
где $\dfrac{d\bar{r}}{dS}=\bar{\tau}$ – орт† касательной к траектории.

Если $\dfrac{dS}{dt}>0$, то $\bar{v}$ совпадает с выбранным положительным направлением отсчета дуговой координаты $S$ и наоборот.

- Ускорение точки:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\bar{\tau}\frac{dS}{dt}\right)=\frac{d\bar{\tau}}{dt}\cdot\frac{dS}{dt}+\bar{\tau}\frac{d^2S}{dt^2}\Rightarrow\bar{a}=\bar{n}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{dS}{dt}\right)^2+\bar{\tau}\frac{d^2S}{dt^2},$$

где использованы промежуточная запись $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt}=\dfrac{d\bar{\tau}}{dS}\cdot\dfrac{dS}{dt}=\bar{n}\cdot\dfrac{1}{\rho}\cdot\left(\dfrac{dS}{dt}\right)^2$ и формула Френе $\dfrac{d\bar{\tau}}{dS}=\bar{n}\cdot\dfrac{1}{\rho}$, а также введены обозначения: $\bar{n}$ – орт нормали к траектории ($\bar{n}\perp\bar{\tau}$); $\rho$ – радиус кривизны траектории в положении $K$ ($\rho=CK$, $C$ – центр кривизны).




* Следует отличать $S$ от пройденного пути.

† Длина орта равна единице, т. е. $|\bar{\tau}|=1$.

С учетом того, что $\frac{dS}{dt}=v$, то $\overline{a}=\overline{n}\frac{v^2}{\rho}+\overline{\tau}\frac{dv}{dt}$. Полученное выражение для полного ускорения $\overline{a}$ представим в виде

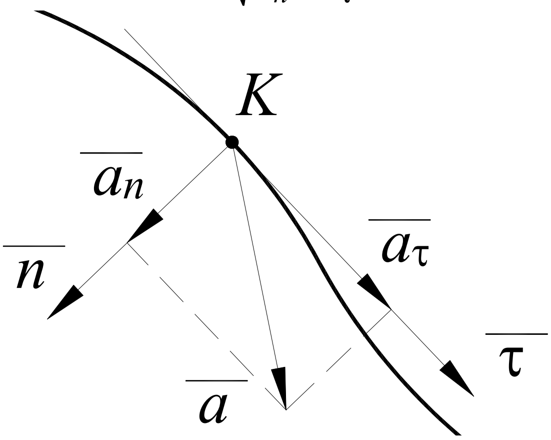
$$\overline{a}=\overline{a_n}+\overline{a_\tau},$$

где $a_n=\frac{v^2}{\rho}$ – нормальное (центростремительное) ускорение, вектор которого направлен к центру кривизны траектории (точке $C$, $\overline{a}_\tau \| \overline{n}$); $a_\tau=\frac{dv}{dt}$ – касательное (тангенциальное) ускорение, вектор направленно вдоль касательной к траектории ($\overline{a}_\tau \| \overline{\tau}$).

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению, касательное – по значению.

Поскольку эти два вектора ортогональны ($\overline{a}_\tau \perp \overline{a}_n$), то

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}.$$




***Пример:*** Уравнение движения точки задано в виде $S(t)= -1+3\cdot t-t^2$, м. Определить положение, скорость и ускорение точки в моменты времени 0, 1 и 4 с.

Решение. Выражение для скорости получим в виде $v(t)=dS/dt= 3-2\cdot t$, м/с, а математические уравнения для ускорений:

$$a_\tau(t)=dv/dt= -2,\ \text{м/с}^2;$$
$$a_n(t)=v^2/\rho=(3-2\cdot t)^2/\rho,\ \text{м/с}^2.$$

Подставляем значения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t_0=0$: | $S=S_0= -1$ м; | $v=v_0=3$ м/с; | $a_\tau=-2$ м/с$^2$; | $a_n=9/\rho$ |
| $t_1=1$ с: | $S= -1+3\cdot1-1^2=1$ м; | $v=3-2\cdot1=1$ м/с; | $a_\tau=-2$ м/с$^2$; | $a_n=1/\rho$ |
| $t_2=4$ с: | $S= -1+3\cdot4-4^2= -5$ м; | $v=3-2\cdot4=-5$ м/с; | $a_\tau=-2$ м/с$^2$; | $a_n=25/\rho$ |

### *1.2.2.3. Классификация движения точки*

Возможны следующие критерии классификации движения:

- *по режиму* – разгон, торможение, равномерное движение;
- *по траектории* – прямолинейное, криволинейное;
- *по скорости* – равномерное, равнопеременное, переменное;

Однако наиболее общая классификация *по ускорению*:

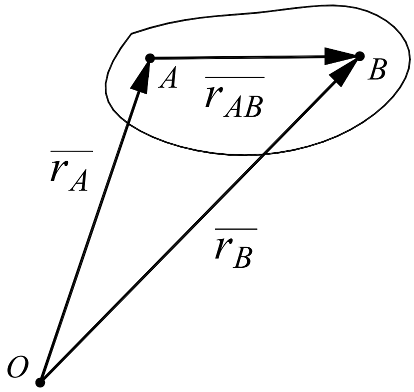
- $\overline{a_n}=0 \Rightarrow a_n=\dfrac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho=0$ ($v\neq0$) – прямолинейное движение, $a=a_\tau=\dfrac{dv}{dt}$;
- $\overline{a_n}\neq0 \Rightarrow \rho<\infty$ – криволинейное движение, $\overline{a}=\overline{a_n}+\overline{a_\tau}$;
- $a_\tau=0 \Rightarrow a_\tau=\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow v=\text{const}$ – равномерное движение;
- $a_\tau=\text{const} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt}=\text{const} \Rightarrow v=v_0+a_\tau\cdot t$ – равнопеременное движение;
- $\overline{v}\uparrow\uparrow\overline{a_\tau}$ ($v$ и $a_\tau$ имеют один знак) – ускоренное движение;
- $\overline{v}\uparrow\downarrow\overline{a_\tau}$ ($v$ и $a_\tau$ с разными знаками) – замедленное движение;
- $a=0 \Rightarrow a_\tau=a_n=0$ – равномерное прямолинейное движение.

## *1.2.3. Кинематика твердого тела*

### *1.2.3.1. Общие положения*

Тело представляет собой совокупность точек. Рассмотрим кинематику двух его точек – точек $A$ и $B$.

$$\overline{r_B}=\overline{r_A}+\overline{r_{AB}}, \text{ где } \left|\overline{r_{AB}}\right|=AB=\text{const}.$$




Вычисляем скорости точек:

$$\frac{d\overline{r_B}}{dt}=\frac{d\overline{r_A}}{dt}+\frac{d\overline{r_{AB}}}{dt} \Rightarrow$$

$$\overline{v_B}=\overline{v_A}+\overline{v_{B/A}}, \tag{1}$$

где $\dfrac{d\overline{r_{AB}}}{dt}=\overline{v_{B/A}}$ – скорость точки $B$ относительно точки $A$.

Вычисляем ускорения точек:

$$\frac{d^2\overline{r_B}}{dt^2}=\frac{d^2\overline{r_A}}{dt^2}+\frac{d^2\overline{r_{AB}}}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\overline{a_B}=\overline{a_A}+\overline{a_{B/A}}, \tag{2}$$

где $\dfrac{d^2\overline{r_{AB}}}{dt^2}=\overline{a_{B/A}}$ – ускорение точки $B$ относительно точки $A$.

При изучении движения твердого тела последовательно решаются две задачи:

- определение кинематических характеристик движения тела как целого объекта;
- определение кинематических характеристик движения его точек.

### *1.2.3.2. Поступательное движение*

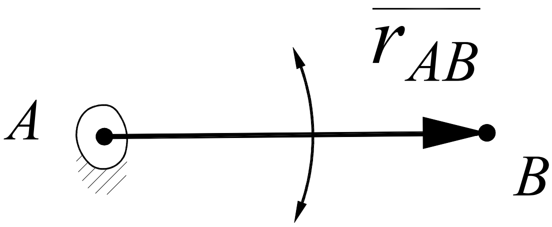
Простейшим примером движения тела является случай, когда $\overline{v_A}\neq0$ и

$\overline{r_{AB}}$=const. Поскольку о постоянстве длины вектора $\overline{r_{AB}}$ было оговорено ранее, то запись $\overline{r_{AB}}$=const означает о постоянстве его направления. Т.е. в этом случае отрезок *AB*, а следовательно любая прямая, соединяющая произвольные точки тела, остается параллельным своему первоначальному положению. Такое движение называется ***поступательным****. Примеры поступательного движения – движение поршня, засова, спарника, проч.

Поскольку $\overline{r_{AB}}$=const, то $\frac{d\overline{r_{AB}}}{dt}=\overline{v_{B/A}}=0$ и согласно (2) $\overline{v_B}=\overline{v_A}$. Аналогично $\overline{a_B}=\overline{a_A}$. Т. о. все точки тела в каждый момент времени имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения (геометрически равны), и соответственно описывают одинаковые траектории. Поэтому при изучении поступательного движения тела рассматривают движение одной его точки (обычно, центра тяжести).

#### *1.2.3.3. Вращательное движение*

Рассмотрим ситуацию, когда $\overline{v_A}$=0 и $\overline{r_{AB}}$≠const. Такая комбинация условий соответствует случаю вращения вектора $\overline{r_{AB}}$ вокруг неподвижной точки *A*, т.е. тело совершает вращательное движение – второй вид простого движения тела. ***Вращательное движение тела*** – такое движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой связанной с телом прямой, остаются неподвижными. Эта прямая называется *осью вращения тела*. В данном случае ось проходит через точку *A* и перпендикулярна плоскости рисунка.




Поскольку $\overline{v_A}$=0, то на основании (1) и (2) получим:

$$\overline{v_B}=\overline{v_{B/A}};$$
$$\overline{a_B}=\overline{a_{B/A}}.$$

Рассмотрим два положения точки *B* – в моменты времени $t_0$=0 и *t*. За этот промежуток времени вектор $\overline{r_{AB}}$=*AB* повернулся на угол φ относительно первоначального положения $AB_0$, а точка *B* прошла расстояние *S*(*t*)

$$S(t)=\overset{\frown}{B_0B}=r_{AB}\cdot\varphi(t),$$

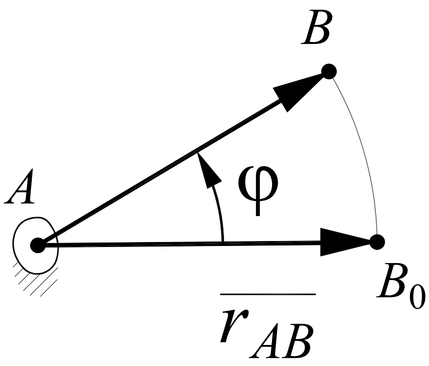
где φ=φ(*t*) – угол поворота, [φ]=рад† (радиан); $r_{AB}$=*AB* – радиус кривизны траектории движения точки, расстояние от точки до оси вращения. Как оговаривалось ранее

* Поступательное движение не обязательно прямолинейное.

† 1 рад = 180 °/π ≈ 57.3 °.

$\left|\overline{r_{AB}}\right|=AB=R=\text{const}$. Таким образом, при вращательном движении математическое уравнение движения тела записывается в виде

$$\varphi=\varphi(t).$$




Скорость точки $B$:

$$v=\frac{dS}{dt}=\frac{d}{dt}(R\cdot\varphi)=R\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Введем понятие $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$ – угловая скорость, которая определяет интенсивность изменения угла поворота. Размерность угловой скорости $[\omega]$=рад/с=с$^{-1}$. Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения, причем за положительное направление принимается такое, чтобы глядя ему навстречу вращение тела происходило против хода часовой стрелки.

Если скорость вращательного движения задана в виде частоты вращения $n$ ($[n]$=об/мин), то $\omega=\frac{\pi\cdot n}{30}$. Следовательно, скорость точки при вращательном движении определяется по формуле

$$v=\omega\cdot R.$$

Полное ускорение точки $B$

$$\overline{a}=\overline{a_n}+\overline{a_\tau}, \qquad \overline{a}_\tau\perp\overline{a}_n,$$

где $a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(\omega\cdot R)^2}{R}=\omega^2\cdot R$ – центростремительное ускорение; $a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega\cdot R)=R\cdot\frac{d\omega}{dt}$ – касательное ускорение.

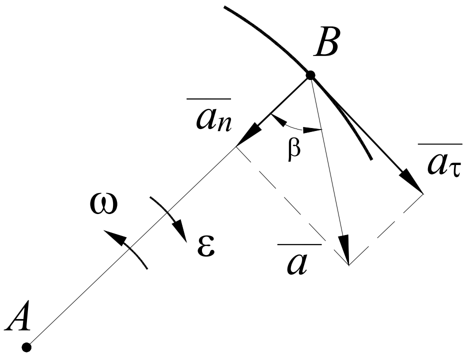
Введем понятие $\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\varepsilon$ – угловое ускорение тела, которое характеризует интенсивность изменения угловой скорости за единицу времени ($[\varepsilon]$=рад/с$^2$=с$^{-2}$).

Следовательно, при вращательном движении скорость точки определяется по формуле

$$a_n=\omega^2\cdot R; \qquad a_\tau=\varepsilon\cdot R.$$

Полное ускорение точки $B$

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{\left(\omega^2\cdot R\right)^2+(\varepsilon\cdot R)^2}=R\cdot\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}\ .$$




$$\mathrm{tg}\beta=\frac{a_\tau}{a_n}=\frac{\varepsilon}{\omega^2}\ \Rightarrow\ \beta=\mathrm{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

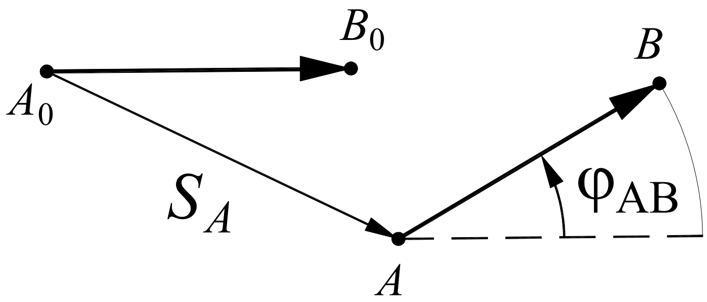
- вектор $\overline{a}_n \| AB$ и направлен от точки к центру вращения;
- вектор $\overline{a}_\tau \perp AB$ и направлен в сторону ε.

Классификация движения точки тела, совершающего вращательное движение, подобна рассмотренной ранее, в частности:

- если ε=0 ⇒ ω=const ⇒ имеет место равномерное вращение;
- если ε=const ⇒ $\omega=\omega_0+\varepsilon\cdot t$ ⇒ равнопеременное вращение;
- $\overline{\omega}\uparrow\uparrow\overline{\varepsilon}$ – ускоренное вращение;
- $\overline{\omega}\uparrow\downarrow\overline{\varepsilon}$ – замедленное вращение.

### *1.2.3.4. Плоское движение тела*

*Сложное* движение тела является комбинацией простых. Простейшим примером сложного движения – плоское (плоскопараллельное) движение. ***Плоскопараллельное движение*** – такое движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.




### *1.2.3.5. Сложное движение точки*

Для исследования кинематики сложного движения точки введем следующие понятия:

- ***абсолютное движение*** – движение относительно неподвижной системы координат. Скорость, ускорение абсолютного движения в этом случае называются абсолютными и не имеют индексов;
- ***переносное движение*** – движение подвижной системы координат относительно неподвижной. Скорость и ускорение переносного движения имеют индекс *e* (*ertragen* – переносить);
- ***относительное движение*** – движение относительно подвижной системы координат. Скорость и ускорение относительного движения имеют индекс *r* (*relative* – относительный).

*Абсолютная скорость* точки вычисляется по формуле

$$\overline{v}=\overline{v_e}+\overline{v_r}\ ,$$

где $\overline{v_e}$ – переносная скорость; $\overline{v_r}$ – относительная скорость.

*Переносная скорость* навязывается движением подвижной системы координат, т.е. это скорость того места, где в данный момент времени находится точка. *Относительная скорость* – скорость точки в подвижной системе координат.

*Абсолютное ускорение* точки вычисляется по формуле Кориолиса

$$\bar{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_c},$$

где $\overline{a_e}$ – переносное ускорение; $\overline{a_r}$ – относительное ускорение; $\overline{a_c}$ – ускорение Кориолиса.

*Переносное ускорение* определяется как ускорение того места в подвижной системе отсчета, в которой точка находится в рассматриваемый момент времени. *Ускорение Кориолиса* получается от дифференцирования по времени переносной и относительной скоростей. Направление вектора $\overline{a_c}$ можно определить по *правилу Жуковского*: чтобы определить направление кориолисовой составляющей ускорения точки, нужно вектор относительной скорости $\overline{v_r}$ спроектировать на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\overline{\omega_e}$ и полученную проекцию повернуть на угол $90^{\circ}$ в направлении переносного вращения.

Модуль кориолисового ускорения:

$$a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin\left(\widehat{\overline{\omega_e}, \overline{v_r}}\right).$$

## 1.3. Динамика механического движения

**Динамика** – это раздел механики, в котором изучается движение механических систем (твердых тел) под действием приложенных к ним сил.

### *1.3.1. Основные законы динамики*

*Первый закон динамики – закон инерции –*
любое тело будет сохранять свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения или не способствовать изменению этого состояния за счет приложения внешних сил.

Этот закон указывает на динамическое равноправие состояний покоя и равномерного прямолинейного движения.

*Второй закон динамики – закон действия сил –*
изменение во времени количества движения пропорционально приложенной движущей силы и происходит в направлении той линии, вдоль которой действует эта сила:

$$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \bar{v}\right) = \overline{F},$$

где $m$ – масса; $\bar{v}$ – скорость; $m \cdot \bar{v} = \overline{S}$ – количество механического движения.

Если $m$=const, то

$$\frac{d}{dt}\left(m\cdot\overline{v}\right)=m\cdot\frac{d\overline{v}}{dt}=\overline{F} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m\cdot\overline{a}=\overline{F}\,.$$

Если сил несколько, то $\overline{F}=\sum\overline{F_i}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к этой точке (системе).

Системы координат, в которых выполняются I-ый и II-ой законы, называются *инерциальными*.

*Третий закон динамики – закон взаимодействия сил –*
действию всегда отвечает равное по величине, но противоположно направленное, противодействие (см. также 3-ью аксиому статики).

*Четвертый закон динамики – закон независимости действия сил –*
при одновременном действии на тело нескольких сил, полное ускорение равно геометрической сумме тех ускорений, которые были бы при раздельном действии на тело этих сил:

$$m\cdot\overline{a}=\overline{F}\,; \quad \overline{F}=\sum\overline{F_i}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\cdots;$$
$$\overline{a}=\sum\overline{a_i}\,; \quad m\overline{a_i}=\overline{F_i}\,, \quad \overline{a_i}\uparrow\uparrow\overline{F_i}\,.$$

## *1.3.2. Дифференциальное уравнение движения материальной точки. Основное уравнение динамики.*

В общем виде

$$m\cdot\overline{a}=\overline{F}\,, \quad \overline{F}=\sum\overline{F_i}\,.$$

При векторном способе задания уравнения движения:

$$m\cdot\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\overline{F}\,.$$

При естественном способе задания движения:

$$m\cdot\left(\overline{n}\cdot\frac{1}{\rho}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2+\overline{\tau}\cdot\frac{d^2S}{dt^2}\right)=\overline{F}\,.$$

Воспользовавшись IV-ым законом динамики и разложив полную силу на составляющие $\overline{F}=\overline{F_n}+\overline{F_\tau}$, где $\overline{F_n}$ и $\overline{F_\tau}$ – нормальная и касательная по отношению к траектории движения точки силы, будут справедливы выражения:

$$\overline{n}\cdot m\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{dS}{dt}\right)^2=\overline{F_n}\,; \quad \overline{\tau}\cdot m\cdot\frac{d^2S}{dt^2}=\overline{F_\tau}\,.$$

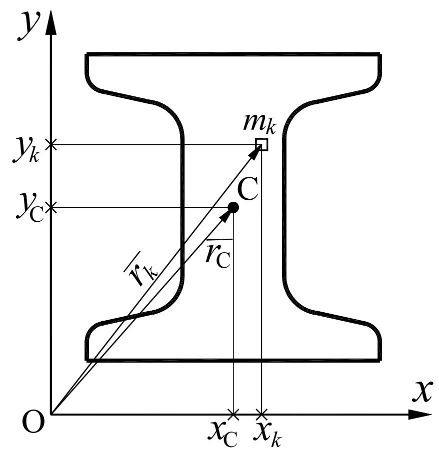
В соответствии с полученными выражениями различают ***две основные задачи динамики***:

- *I-ая задача – прямая задача* – по известному закону движения (как функция $\overline{r}(t)$ или $S(t)$), требуется определить равнодействующую $\overline{F}(t)$, которая обусловливает заданное движение тела;

- *II-ая задача – обратная задача* – найти закон движения точки в виде уравнения $\overline{r}=f(t)$ или $S=f(t)$, если задана равнодействующая $\overline{F}(t)$ (или её составляющие $\overline{F_i}(t)$) и масса тела.

### 1.3.3. Основные характеристики твердого тела

Прежде чем рассматривать дифференциальное уравнение движения твердого тела необходимо ввести следующие понятия:




**1. Масса тела**

При дискретном распределении массы

$$M=\sum m_k .$$

где $m_k$ – масса элемента тела (масса материальной точки).

При равномерном распределении массы по объему

$$M=\int_m dm=\int_V \rho dV .$$

**2. Центр масс тела** (*центр инерции*) – такая точка *C*, для которой радиус-вектор определяется формулой

$$\overline{r_C}=\frac{\sum m_k\overline{r_k}}{M},$$

где $\overline{r_k}$ – радиус-вектор точки $m_k$.

В декартовой системе координат:

$$x_C=\frac{\sum m_k x_k}{M}; \quad y_C=\frac{\sum m_k y_k}{M},$$

где $x_C$, $y_C$ – координаты точки *C*.

**3. Статические моменты** относительно плоскостей *Oyz* и *Oxz* называются величины, которые вычисляются по формулам

$$S_x=\sum m_k\cdot x_k=M\cdot x_C;$$
$$S_y=\sum m_k\cdot y_k=M\cdot y_C.$$

**4. Моменты инерции** относительно координатных осей *Ox* и *Oy*

$$J_x=\sum m_k\cdot y_k^2;$$
$$J_y=\sum m_k\cdot x_k^2.$$

### 1.3.4. Теорема о движении центра масс механической системы.

Рассмотрим механическую систему, которая состоит из *n* точек с массами $m_1$, $m_2$, $m_k$,…, $m_n$. Радиус-вектор каждой точки обозначен через $\overline{r_k}$.

Все действующие на механическую систему силы будем разделять на внешние и внутренние. Под внутренними силами понимаются силы взаимодействия между точками. Равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к $k$-ой точке, обозначим через $\overline{F_k^E}$ и $\overline{F_k^I}$, соответственно. Тогда основное уравнение динамики для каждой точки запишется в виде

$$m_k \cdot \overline{a_k} = m_k \cdot \frac{d^2 \overline{r_k}}{dt^2} = \overline{F_k^E} + \overline{F_k^I} .$$

Просуммируем эти уравнения движения:

$$\sum m_k \cdot \frac{d^2 \overline{r_k}}{dt^2} = \sum \overline{F_k^E} + \sum \overline{F_k^I} ;$$

$$\sum \left( m_k \cdot \frac{d^2 \overline{r_k}}{dt^2} \right) = \sum \frac{d^2 \left( m_k \cdot \overline{r_k} \right)}{dt^2} = \frac{d^2 \left( \sum m_k \cdot \overline{r_k} \right)}{dt^2} = \frac{d^2 \left( M \cdot \overline{r_C} \right)}{dt^2} = M \frac{d^2 \overline{r_C}}{dt^2} = M \cdot \overline{a_C} ;$$

$$M \cdot \frac{d^2 \overline{r_C}}{dt^2} = \sum \overline{F_k^E} + \sum \overline{F_k^I} ;$$

$$M \cdot \overline{a_C} = \underbrace{\sum \overline{F_k^E}}_{\overline{\mathbf{R}^E}} + \underbrace{\sum \overline{F_k^I}}_{\overline{\mathbf{R}^I} \equiv 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M \cdot \overline{a_C} = \overline{\mathbf{R}^E} ,$$

где $\overline{\mathbf{R}^E}$ ($\overline{\mathbf{R}^I}$) – равнодействующая внешних (внутренних) сил, приложенных к телу, $M = \sum m_k$ – масса механической системы. Справедливость равенства $\overline{\mathbf{R}^I} \equiv 0$ вытекает из 3-его закона динамики.

Дифференциальное уравнение в проекции на координатные оси при плоском движении:

$$Ox\text{:}\ M \cdot \overline{\ddot{x}_C} = \overline{\mathbf{R}_x^E} ;$$

$$Oy\text{:}\ M \cdot \overline{\ddot{y}_C} = \overline{\mathbf{R}_y^E} ,$$

где $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси;

$\overline{\mathbf{R}_x^E}$, $\overline{\mathbf{R}_y^E}$ – проекции равнодействующей всех внешних сил $\overline{\mathbf{R}^E}$ на координатные оси $x$ и $y$.

Эта система представляет собой *уравнения движения центра масс механической системы в дифференциальной форме*. Из уравнений вытекает:

1. центр механической системы (т. С) движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на эту систему;
2. если главный вектор внешних сил $\overline{\mathbf{R}^E}$ все время остается равным нулю, то центр масс механической системы С либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно;

3. если проекция главного вектора $\overline{\mathbf{R}^{E}}$ на какую-либо неподвижную координатную ось ($\overline{\mathbf{R}_{x}^{E}}$ или $\overline{\mathbf{R}_{y}^{E}}$) все время остается равным нулю, то проекция центра масс на эту ось либо находится в покое, либо движется равномерно.

## *1.3.5. Теорема об изменении количества движения механической системы*

***Количеством движения*** материальной точки $k$ называется векторная величина $\overline{S_k}$, сонаправленная с вектором скорости точки $\overline{v_k}$ и по модулю равная произведению массы точки $m_k$ на значение ее скорости

$$\overline{S_k} = m_k \cdot \overline{v_k}\text{, кг·м/с.}$$

*Количество движения* характеризует меру передачи механического движения от одной механической системы к другой, при этом форма энергии не меняется.

На основании второго закона динамики уравнение изменения количества материальной точки в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{d\left(m_k \overline{v_k}\right)}{dt} = \overline{F_k}\,.$$

Умножая обе части на $dt$ и интегрируя по времени $t$ в пределах от $t_1$ до $t_2$ ($t_2$–$t_1$=Δ$t$), за который произошло изменение скорости точки от $v_1$ до $v_2$

$$\int_{v_1}^{v_2} d\left(m_k \overline{v_k}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F_k}\,dt\,.$$

$$m\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} P dt \quad \Rightarrow \quad mv_2 - mv_1 = S\,;$$

$$S = S_1 + S_2 + \ldots S_n$$

В предположении что $m_k = const$ и за промежуток времени $\Delta t$ $\overline{F_k} = const$ теорема об изменении количества движения для материальной точки примет вид

$$m_k\left(\overline{v_2} - \overline{v_1}\right) = \overline{F_k} \cdot \Delta t\,,$$

где $\overline{F_k} \cdot \Delta t$ – импульс силы $\overline{F_k}$, приложенной к точке, за промежуток времени Δ$t$.

# МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

Свойства материалов и их назначение изучаются в дисциплине «**Материаловедение**».

*Материалы* бывают:

- металлические;
- неметаллические;
- композиты.

*Металлы* являются результатом производства:

- черной металлургии – сплавы с железом, стали и чугуны;
- цветной металлургии – сплавы без железа.

К *неметаллам* относятся:

- резина;
- керамика;
- пластмасса, проч.

*Композиты* – это сложные или составленные материалы, искусственно созданные человеком (например, стеклопластик).

Наибольшее распространение получили *стали* (сочетание железа $Fe$ и углерода $C$, при этом содержание углерода менее 2 %) и *чугуны* ($C > 2.14$ %).

***Классификация стали***:

- *по химическому составу*:
  - углеродистые ($Fe + C$ );
  - легирование (сплавы $Fe + C$ и легирующего элемента: алюминий, хром, никель, титан, проч.).
- для углеродистых сталей *по содержанию углерода*:
  - низкоуглеродистые ($C < 0.25\%$);
  - среднеуглеродистые ($0.3 < C < 0.6\%$);
  - высокоуглеродистые ($C > 0.7\%$);
- для легированных сталей *по степени легирования*:
  - низколегированные;
  - среднелегированные;
  - высоколегированные.
- для легированных сталей *по количеству легированных элементов*:
  - трехкомпонентные ($Fe + C + 1$ легирующий элемент)
  - четырехкомпонентные ($Fe + C + 2$ легирующих элемента)
- *по качеству* (содержанию вредных примесей):
  - обыкновенного качества;
  - высококачественные;
  - качественные.
- *по назначению*:
  - конструкционные (для изготовления деталей и элементов конструкций);
  - инструментальные;
  - специальные;
  - магниты.

***Чугуны*** в зависимости от состояния углерода *C* бывают:

- *белый* (*C* находится в связанном состоянии);
- *серый* (*C* находится в свободном состоянии в виде графита);
- *половинчатый*.

Для увеличения прочности и жесткости, придания требуемых свойств и подготовке к последующим техническим операциям, применяют следующие виды ***обработки***:

- *термообработка*;
- *химико-термическая (термохимическая) обработка*;
- *термомеханическая обработка*.

Эти обработки делят на предварительную (предтехнологическую) и окончательную, для формирование требуемых свойств уже готового изделия.

***Виды термической обработки***:

- *отжиг 1-го рода* (*нормализация*) – нагрев детали выше критической температуру *t* °С и медленное ее охлаждение (на воздухе);
- *отжиг 2-го рода* – нагрев выше критической *t* °С и очень медленное охлаждение (вместе с печью);
- *закалка* – нагревание выше критической *t* °С и очень быстрое охлаждение;
- *отпуск* – как правило, многократный нагрев до температуры, ниже критической *t* °С, и охлаждение.

***Виды химико-термической обработки***:

- *цементация* – диффузионное насыщение поверхности изделия атомами углерода *C*;
- *азотирование* – насыщение атомами азота *N*;
- *цианирование* – насыщение атомами *C* и *N*;
- *нитроцементация* – насыщение атомами азота *C* и *N* в газообразной среде.