

## *Лекция 1.*

Краткое содержание: Введение. Цель и задачи курса ОПМ-ТММ. Краткая историческая справка. Место курса в системе подготовки инженера. Инженерное проектирование. Основные этапы процесса проектирования. Методы проектирования. Машинный агрегат и его составные части. Классификация машин. Механизм и его элементы. Классификация механизмов.

Введение. Курс «Теория машин и механизмов» является первой частью общеинженерной дисциплины «Основы проектирования машин». Вторая часть этой дисциплины называется «Детали машин» или «Основы конструирования машин». На специальности, по которой Вы проходите подготовку, курс ТММ изучается в течение двух семестров и состоит из:

1-ый семестр. Курс лекций объемом 36 часов, практических занятий (включая два рубежных контроля) - 16 часов, лабораторного практикума - 16 часов. В разделе самостоятельная работа два домашних задания: 1-ое домашнее задание «Структурный и кинематический анализ рычажного механизма»; 2-ое домашнее задание «Кинестатический силовой расчет рычажного механизма». Семестр завершается дифференцированным зачетом с учетом рейтинга по домашним заданиям, рубежным контролям и лабораторным работам.

2-ой семестр. Курсовая работа (проект) с объемом 4 листа графической части и пояснительная записка на 30-50 рукописных (машинописных) страниц. Содержание листов курсовой работы: лист 1 - динамический анализ машинного агрегата, лист 2 - кинестатический силовой расчет основного рычажного механизма, лист 3 - проектирование механизмов с зубчатыми передачами, лист 4 - проектирование кулачковых механизмов. Курсовая работа защищается комиссии из двух преподавателей, по ней проставляется дифференцированный зачет.

### *Рекомендуемая основная литература*

1. Теория механизмов и машин. Под ред. К.В.Фролова. М.: Высшая школа, 1987.
2. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин. - М.: Высшая школа, 1986.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1988.
4. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1990.

### *Рекомендуемая дополнительная литература*

5. Теория механизмов. Под ред. В.А.Гавриленко. М.: Высшая школа, 1973.
6. Заблонский К.И. и др. Теория механизмов и машин. - Киев.: Выша школа, 1989.

### Цель и задачи курса.

Теория механизмов и машин - научная дисциплина (или раздел науки), которая изучает строение (структуру), кинематику и динамику механизмов в связи с их анализом и синтезом. (И.И.Артоболевский)

Цель ТММ - анализ и синтез типовых механизмов и их систем.

Задачи ТММ: разработка общих методов исследования структуры, геометрии, кинематики и динамики типовых механизмов и их систем.

Типовыми механизмами будем называть простые механизмы, имеющие при различном функциональном назначении широкое применение в машинах, для которых разработаны типовые методы и алгоритмы синтеза и анализа.

Рассмотрим в качестве примера кривошипно-ползунный механизм. Этот механизм широко применяется в различных машинах: двигателях внутреннего сгорания, поршневых компрессорах и насосах, станках, ковочных машинах и прессах. В каждом варианте функционального назначения при проектировании необходимо учитывать специфические требования к механизму. Однако математические зависимости, описывающие структуру, геометрию, кинематику и динамику механизма при всех различных применениях будут практически одинаковыми. Главное или основное отличие ТММ от учебных дисциплин изучающих методы проектирования специальных машин в том, что ТММ основное внимание уделяет изучению методов синтеза и анализа, общих для данного вида механизма, независимых от его конкретного функционального назначения. Специальные дисциплины изучают проектирование только механизмов данного конкретного назначения, уделяя основное внимание специфическим требованиям. При этом широко используются и общие методы синтеза и анализ, которые изучаются в курсе ТММ.

Краткая историческая справка. Как самостоятельная научная дисциплина ТММ, подобно другим прикладным разделам науки, возникла в результате промышленной революции начало которой относится к 30-м годам XVIII века. Однако машины существовали за долго до этой даты. Поэтому в истории развития ТММ можно условно выделить четыре периода:

1-й период до начала XIX века - период эмпирического машиностроения в течение которого изобретается большое количество простых машин и механизмов: подъемники, мельницы, камнедробилки, ткацкие и токарные станки, паровые машины (Леонардо да Винчи, Вейст, Ползунов, Уатт). Одновременно закладываются и основы теории: теорема о изменении кинетической энергии и механической работы, «золотое правило механики», законы трения, понятие о передаточном отношении, основы геометрической теории циклоидального и эвольвентного зацепления (Карно, Кулон, Амонтон, Кадано Дж., Ремер, Эйлер).

2-й период от начала до середины XIX века - период начала развития ТММ. В это время разрабатываются такие разделы как кинематическая геометрия механизмов (Савари, Шаль, Оливье), кинестатика (Кариолис), расчет маховика (Понселе), классификация механизмов по функции преобразования движения (Монж, Лану) и другие разделы. Пишутся первые научные монографии по механике машин (Виллис, Бориньи), читаются первые курсы лекций по ТММ и издаются первые учебники (Бетанкур, Чижев, Вейсбах).

3-й период от второй половины XIX века до начала XX века - период фундаментального развития ТММ. За этот период разработаны: основы структурной теории (Чебышев, Грюблер, Сомов, Малышев), основы теории регулирования машин (Вышнеградский), основы теории гидродинамической смазки (Грюблер), основы аналитической теории зацепления (Оливье, Гохман), основы графоаналитической динамики (Виттенбауэр, Мерцалов), структурная классификация и структурный анализ (Ассур), метод планов скоростей и ускорений (Мор, Манке), правило проворачиваемости механизма (Грасгоф) и многие другие разделы ТММ.

4-й период от начала XX века до настоящего времени - период интенсивного развития всех направлений ТММ как в России, так и за рубежом. Среди русских ученых необходимо отметить обобщающие работы Артоболевского И.И., Левитского Н.И., Фролова К.В.; в области структуры механизмов - работы Малышева, Решетова Л.Н., Озола

О.Г.; по кинематике механизмов - работы Колчина Н.И., Смирнова Л.П., Зиновьева В.А.; по геометрии зубчатых передач - работы Литвина Ф.Л., Кетова Х.Ф., Гавриленко В.А., Новикова М.Л.; по динамике машин и механизмов - Горячкин В.П., Кожевников С.Н., Коловский М.З. и др. Данное перечисление не охватывает и малой доли работ выдающихся ученых, внесших существенный вклад в развитие ТММ в этот период. Из зарубежных ученых необходимо отметить работы Альта Х., Бегельзака Г., Бейера Р., Крауса Р., Кросли Ф. и многих других.

#### Основные разделы курса ТММ:

- структура механизмов и машин;
- геометрия механизмов и их элементов;
- кинематика механизмов;
- динамика машин и механизмов.

#### Связь курса ТММ с общеобразовательными, инженерными и специальными дисциплинами.

Лекционный курс ТММ базируется на знаниях полученных студентом на младших курсах при изучении физики, высшей и прикладной математики, теоретической механики, инженерной графики и вычислительной техники. Знания, навыки и умение приобретенные студентом при изучении ТММ служат базой для курсов детали машин, подъемно-транспортные машины, системы автоматизированного проектирования, проектирование специальных машин и основы научных исследований.

#### Понятие о инженерном проектировании.

Инженерное проектирование - это процесс, в котором научная и техническая информация используется для создания новой системы, устройства или машины, приносящих обществу определенную пользу [ 7 ].

Проектирование ( по ГОСТ 22487-77) - это процесс составления описания, необходимого для создания еще несуществующего объекта (алгоритма его функционирования или алгоритма процесса), путем преобразования первичного описания, оптимизации заданных характеристик объекта (или алгоритма его функционирования), устранения некорректности первичного описания и последовательного представления (при необходимости) описаний на различных языках.

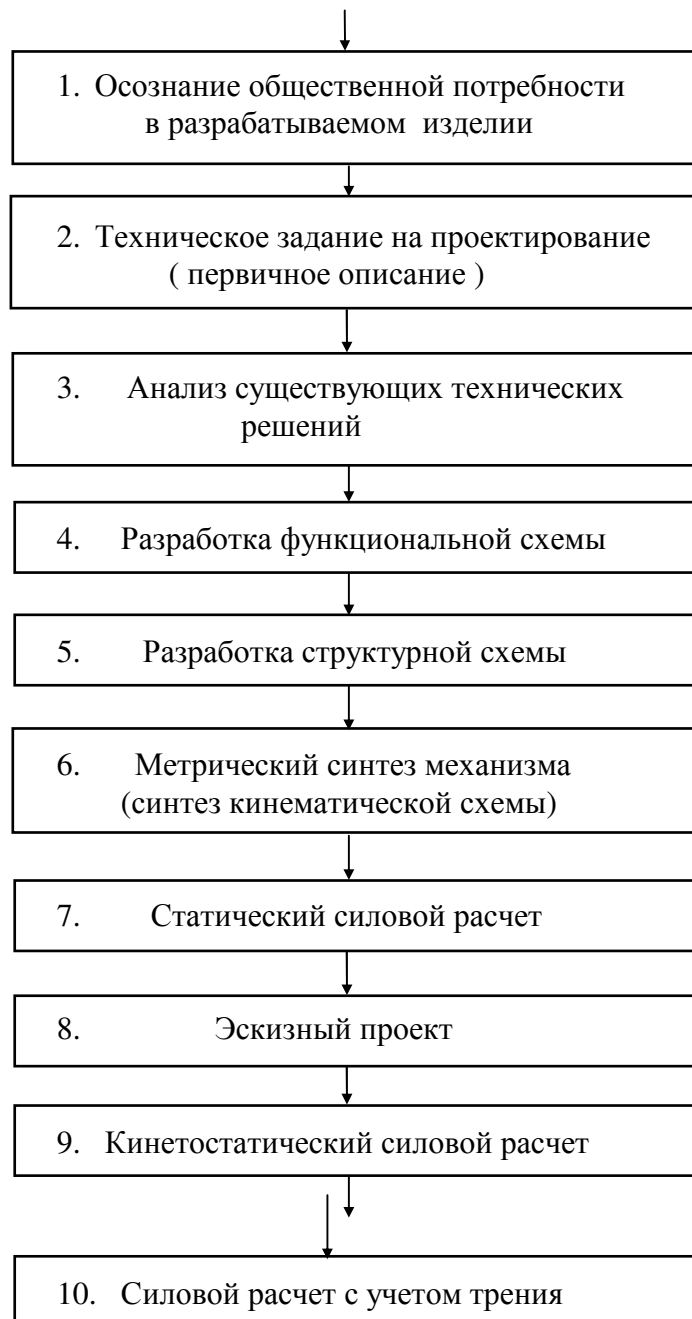
Проект ( от латинского projectus - брошенный вперед ) - совокупность документов и описаний на различных языках (графическом - чертежи, схемы, диаграммы и графики; математическом - формулы и расчеты; инженерных терминов и понятий - тексты описаний, пояснительные записки), необходимая для создания какого-либо сооружения или изделия.

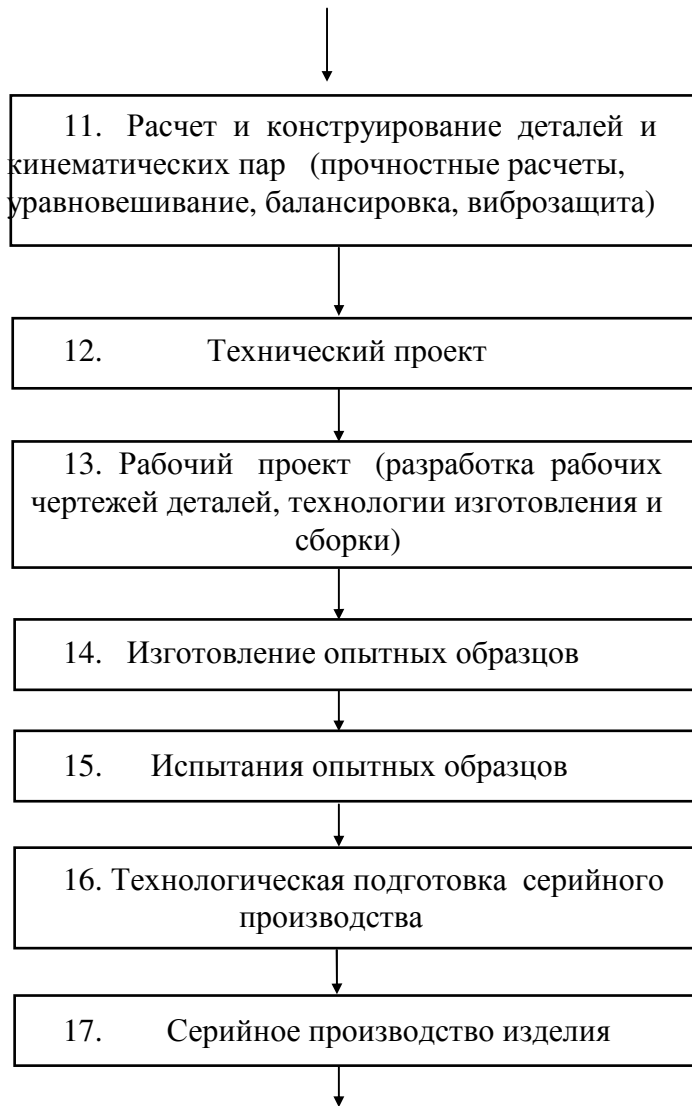
#### Методы проектирования.

- Прямые аналитические методы синтеза (разработаны для ряда простых типовых механизмов);
- Эвристические методы проектирования - решение задач проектирования на уровне изобретений ( например, алгоритм решения изобретательских задач [ 8 ]);

- Синтез методами анализа - перебор возможных решений по определенной стратегии (на пример, с помощью генератора случайных чисел - метод Монте-Карло) с проведением сравнительного анализа по совокупности качественных и эксплуатационных показателей ( часто используются методы оптимизации - минимизация сформулированной разработчиком целевой функции, определяющей совокупность качественных характеристик изделия);
- Системы автоматизированного проектирования или САПР - компьютерная программная среда моделирует объект проектирования и определяет его качественные показатели, после принятия решения - выбора проектировщиком параметров объекта, система в автоматизированном режиме выдает проектную документацию.
- Другие методы проектирования [ 9 , 10 , 11 ].

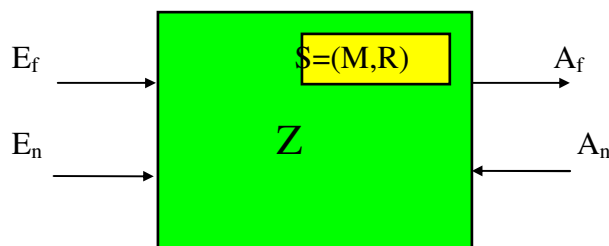
Основные этапы процесса проектирования.





Понятие о технической системе и ее элементах.  
(из теории технических систем по [ 11 ])

Техническая система - ограниченная область реальной действительности, взаимодействующая с окружающей средой  $U$ , выполняющая определенные функции  $F$  и имеющая структуру  $S$ .



$E_f, A_f$  - параметры, характеризующие функции  $F$  системы;  
 $E_n, A_n$  - параметры, не относящиеся к функциям прибора ( условия работы, внешние и дополнительные воздействия ),  
 $Z$  - системный оператор,  
 $M$  - элементы системы,  
 $R$  - отношения между элементами системы.

Окружающая среда  $U$  - совокупность внешних объектов, взаимодействующих с системой.

Функция  $F$  - свойство системы, используемое для преобразования входных величин  $E_f$ , при внешних и дополнительных воздействиях  $A_n$  и условиях работы  $E_n$ , в выходные величины  $A_f$ . Функция является объективно измеряемое свойство, которое может быть охарактеризовано параметрами системы. Количество реализуемых системой функций соответствует количеству используемых системой физических свойств. Если система выполняет несколько функций, то различают общую и частные функции. Общая функция охватывает множество всех входных и выходных величин, которое характеризует рассматриваемую систему как одно целое. Частные функции делятся на: главные и вспомогательные - по их значению в выполнении задачи; основные и элементарные - по типу изменения изменений функций в процессе их выполнения.

Структура  $S$  - совокупность элементов  $M$  и отношений  $R$  между ними внутри системы  $S=(M,R)$ . Элемент системы при проектировании рассматривается как одно целое, хотя он может иметь различную степень сложности. Если при рассмотрении элемента, не принимается во внимание его форма и внутреннее строение, а рассматривается только выполняемая им функция, то такой элемент называется функциональным. Для механической системы элементами могут быть: деталь, звено, группа, узел, простой или типовой механизм. Деталь - элемент конструкции не имеющий в своем составе внутренних связей (состоящий из одного твердого тела). Звено - твердое тело или система жестко связанных твердых тел (может состоять из одной или нескольких деталей) входящая в состав механизма. Группа - кинематическая цепь, состоящая из подвижных звеньев, связанных между собой кинематическими парами (отношениями), и удовлетворяющая некоторым заданным условиям. Узел - несколько деталей связанных между собой функционально, конструктивно или каким-либо другим образом. С точки зрения системы узлы, группы, простые или типовые механизмы рассматриваются как подсистемы. Самым низким уровнем разбиения системы при конструировании является уровень деталей ; при проектировании - уровень звеньев. Элементы из системы можно выделить только после определения взаимосвязей между ними, которые описываются отношениями. Для механических систем интерес представляют отношения определяющие структуру системы и ее функции, т. е. расположения и связи. Расположения - такие отношения между элементами, которые описывают их геометрические относительные положения. Связи - отношения между элементами, предназначенные для передачи материала, энергии или информации между элементами. Связи могут осуществляться с помощью различных физических средств: механических соединений, жидкостей, электромагнитных или других полей, упругих элементов. Механические соединения могут быть подвижными (кинематические пары) и неподвижными. Неподвижные соединения делятся на разъемные (винтовые, штифтовые) и неразъемные (сварные, клеевые).

### Машины и их классификация.

Машина - техническое устройство, выполняющее преобразование энергии, материалов и информации с целью облегчения физического и умственного труда человека, повышения его качества и производительности.

Существуют следующие виды машин:

1. Энергетические машины - преобразующие энергию одного вида в энергию другого вида. Эти машины бывают двух разновидностей:

Двигатели ( рис.1.2) , которые преобразуют любой вид энергии в механическую (например, электродвигатели преобразуют электрическую энергию, двигатели внут-

ренного сгорания преобразуют энергию расширения газов при сгорании в цилиндре).



Рис.1.2

Генераторы ( рис.1.3), которые преобразуют механическую энергию в энергию другого вида (например, электрогенератор преобразует механическую энергию паровой или гидравлической турбины в электрическую)

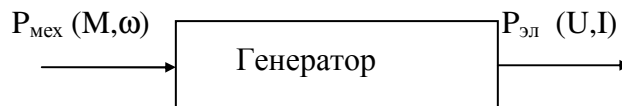


Рис.1.3

2. Рабочие машины - машины использующие механическую энергию для совершения работы по перемещению и преобразованию материалов. Эти машины тоже имеют две разновидности:

Транспортные машины ( рис.1.4), которые используют механическую энергию для изменения положения объекта ( его координат ).



Рис.1.4

Технологические машины (рис.1.5), использующие механическую энергию для преобразования формы, свойств, размеров и состояния объекта.



Рис.1.5

3. Информационные машины - машины, предназначенные для обработки и преобразования информации. Они подразделяются на:

Математические машины (рис.1.6), преобразующие входную информацию в математическую модель исследуемого объекта.



Рис.1.6

Контрольно-управляющие машины (рис.1.7), преобразующие входную информацию (программу) в сигналы управления рабочей или энергетической машиной.

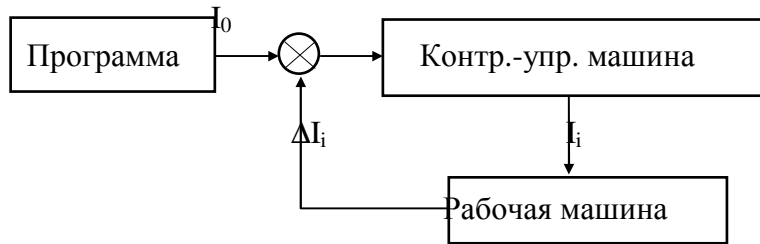


Рис.1.7

4.Кибернетические машины (рис.1.8) - машины управляющие рабочими или энергетическими машинами, которые способны изменять программу своих действий в зависимости от состояния окружающей среды ( т.е. машины обладающие элементами искусственного интеллекта).

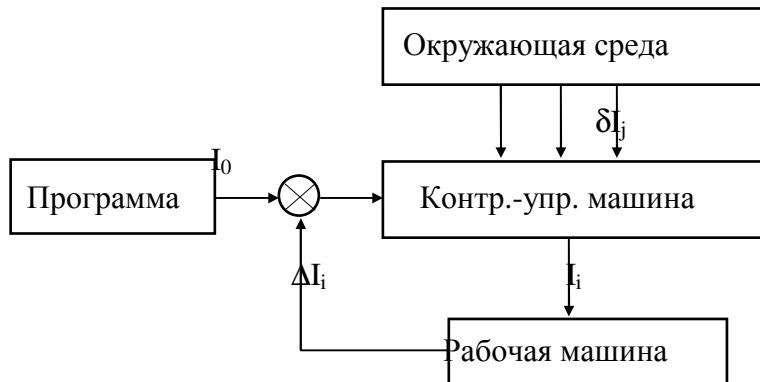


Рис.1.8

Понятие о машинном агрегате.

Машинным агрегатом называется техническая система, состоящая из одной или нескольких соединенных последовательно или параллельно машин и предназначенная для выполнения каких-либо требуемых функций. Обычно в состав машинного агрегата входят : двигатель, передаточный механизм и рабочая или энергетическая машина. В настоящее время в состав машинного агрегата часто включается контрольно-управляющая или кибернетическая машина. Передаточный механизм в машинном агрегате необходим для согласования механических характеристик двигателя с механическими характеристиками рабочей или энергетической машины.

Схема машинного агрегата.

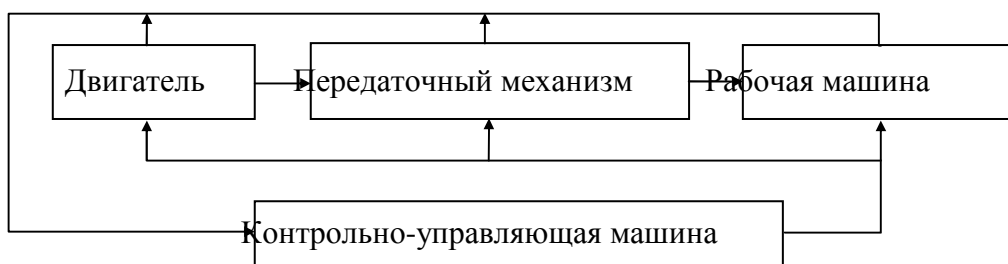


Рис.1.9



### Механизм и его элементы.

В учебной литературе используются несколько определений механизма:

Первое: Механизмом называется система твердых тел, предназначенная для передачи и преобразования заданного движения одного или нескольких тел в требуемые движения других твердых тел [ 4 , 12 ].

Второе: Механизм - кинематическая цепь, в состав которой входит неподвижное звено (стойка) и число степеней свободы которой равно числу обобщенных координат, характеризующих положение цепи относительно стойки. [ 1 , 3 , 5 , 6 ].

Третье: Механизмом называется устройство для передачи и преобразования движений и энергий любого рода [ 13 ].

Четвертое: Механизм - система твердых тел, подвижно связанных путем соприкосновения и движущихся определенным, требуемым образом относительно одного из них, принятого за неподвижное [ 14 ].

В этих определениях использованы ранее не определенные понятия:

Звено - твердое тело или система жестко связанных тел, входящих в состав механизма. Кинематическая цепь - система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Кинематическая пара - подвижное соединение двух звеньев, допускающее их определенное относительное движение. Стойка - звено, которое при исследовании механизма принимается за неподвижное. Число степеней свободы или подвижность механизма - число независимых обобщенных координат однозначно определяющее положение всех его звеньев на плоскости или в пространстве.

*Из теоретической механики:* Системы материальных тел (точек), положения и движения которых подчинены некоторым геометрическим или кинематическим ограничениям, заданным наперед и не зависящим от начальных условий и заданных сил, называется несвободной. Эти ограничения наложенные на систему и делающие ее несвободной называются связями. Положения точек системы допускаемые наложенными на нее связями называются возможными. Независимые друг от друга величины  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , вполне и однозначно определяющие возможные положения системы в произвольный момент времени называются обобщенными координатами системы.

Недостатками этих определений являются: первое не отражает способности механизма преобразовывать не только движение, но и силы; второе не содержит указания выполняемой механизмом функции. Оба определения входят в противоречия с определением технической системы. Учитывая сказанное, дадим следующую формулировку понятия механизм:

Механизмом называется система, состоящая из звеньев и кинематических пар, образующих замкнутые или разомкнутые цепи, которая предназначена для передачи и преобразования перемещений входных звеньев и приложенных к ним сил в требуемые перемещения и силы на выходных звеньях.

Здесь: *входные звенья* - звенья, которым сообщается заданное движение и соответствующие силовые факторы (силы или моменты); *выходные звенья* - те, на которых получают требуемое движение и силы.

Начальное звено - звено, координата которого принята за обобщенную. Начальная кинематическая пара - пара, относительное положение звеньев в которой принято за обобщенную координату.

### *Классификация механизмов.*

Механизмы классифицируются по следующим признакам:

1. По области применения и функциональному назначению:
  - механизмы летательных аппаратов;
  - механизмы станков;
  - механизмы кузнечных машин и прессов;
  - механизмы двигателей внутреннего сгорания;
  - механизмы промышленных роботов (манипуляторы);
  - механизмы компрессоров;
  - механизмы насосов и т.д.
2. по виду передаточной функции на механизмы:
  - с постоянной передаточной функцией;
  - с переменной передаточной функцией:
    - ⇒ с нерегулируемой (синусные, тангенсные);
    - ⇒ с регулируемой:
      - ◇ со ступенчатым регулированием (коробки передач);
      - ◇ с бесступенчатым регулированием (вариаторы).
3. по виду преобразования движения на механизмы преобразующие :
  - вращательное во вращательное:
    - ⇒ редукторы  $\omega_{вх} > \omega_{вых}$ ;
    - ⇒ мультипликаторы  $\omega_{вх} < \omega_{вых}$ ;
    - ⇒ муфты  $\omega_{вх} = \omega_{вых}$ ;
  - вращательное в поступательное;
  - поступательное во вращательное;
  - поступательное в поступательное.
4. по движению и расположению звеньев в пространстве:
  - пространственные;
  - плоские;
  - сферические.

Все механизмы являются пространственными механизмами, часть механизмов, звенья которых совершают движение в плоскостях параллельных одной плоскости, являются одновременно и плоскими, другая часть механизмов, звенья которых движутся по сферическим поверхностям экивидистантным какой-либо одной сфере, являются одновременно и сферическими.



Рис. 1.10

5. по изменяемости структуры механизма на механизмы:

- с неизменяемой структурой;
- с изменяемой структурой.

В процессе работы кривошипно-ползунного механизма насоса его структурная схема все время остается неизменной. В механизмах манипуляторов в процессе работы структурная схема механизма может изменяться. Так если промышленный робот выполняет сборочные операции, например, вставляет цилиндрическую деталь в отверстие, то при транспортировке детали его манипулятор является механизмом с открытой или разомкнутой кинематической цепью. В тот момент когда деталь вставлена в отверстие, кинематическая цепь замыкается, структура механизма изменяется, подвижность уменьшается на число связей во вновь образованной кинематической паре деталь-стойка.

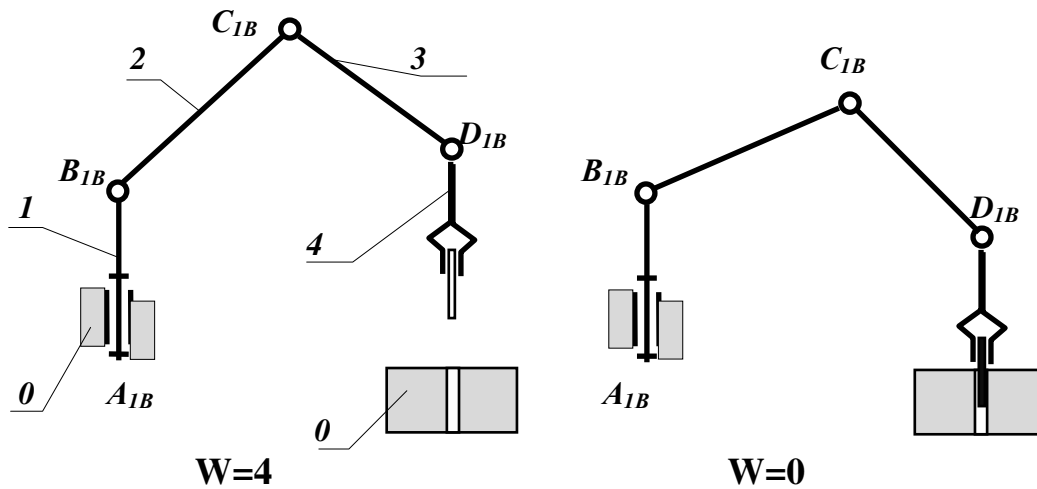


Рис.1.11

Структура манипулятора изменяется и тогда, когда в одной или нескольких кинематических парах включается тормоз. Тогда подвижное соединение двух звеньев заменяется неподвижным, два звена преобразуются в одно. На рис. 1.13 тормоз включен в паре С.

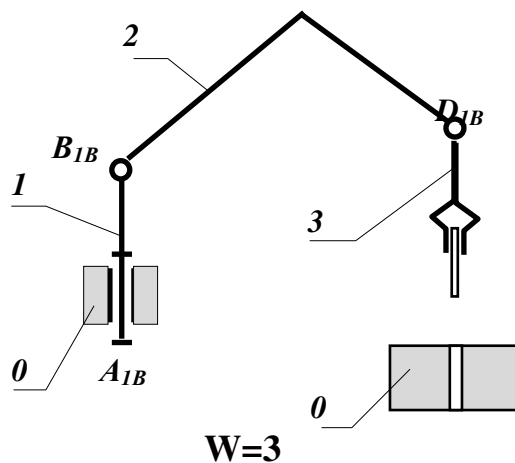


Рис. 1.12

6. по числу подвижностей механизма:
- с одной подвижностью  $W=1$ ;
  - с несколькими подвижностями  $W>1$ :
    - ⇒ суммирующие (интегральные);
    - ⇒ разделяющие (дифференциальные).

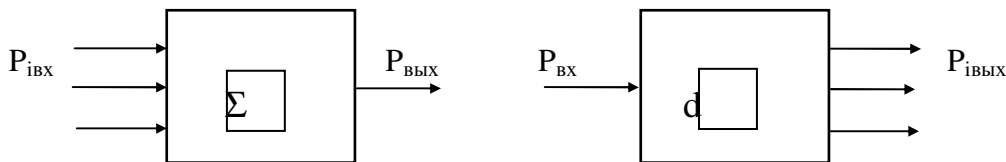


Рис.1.13

7. по виду кинематических пар (КП):
- с низшими КП ( все КП механизма низшие );
  - с высшими КП ( хотя бы одна КП высшая );
  - шарнирные ( все КП механизма вращательные - шарниры ).
8. по способу передачи и преобразования потока энергии:
- фрикционные ( сцепления );
  - зацеплением;
  - волновые (создание волновой деформации);
  - импульсные.
9. по форме, конструктивному исполнению и движению звеньев:
- рычажные ( рис.1.14);
  - зубчатые ( рис.1.15);
  - кулачковые ( рис. 1.16);
  - планетарные ( рис. 1.17);
  - манипуляторы ( рис.1.11-1.12).

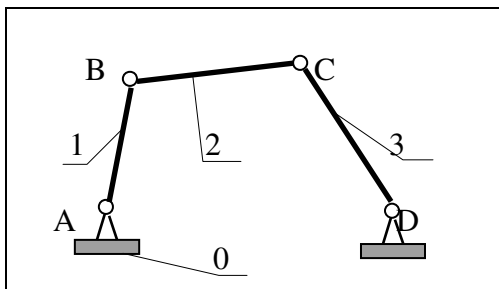


Рис. 1.14

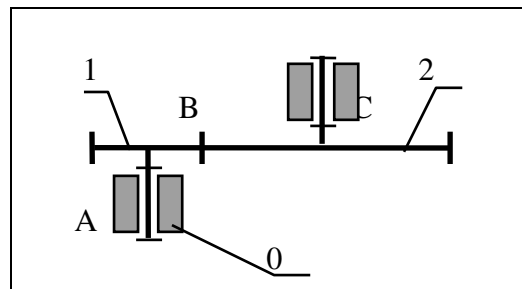


Рис. 1.15

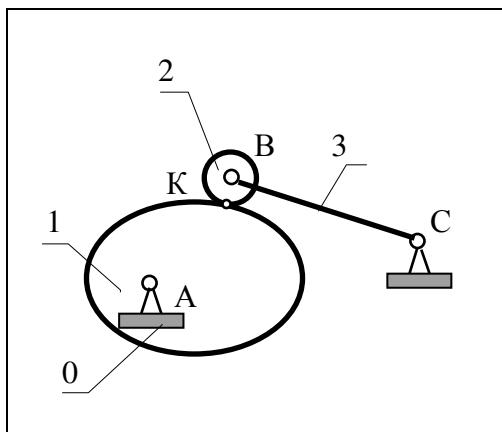


Рис. 1.16

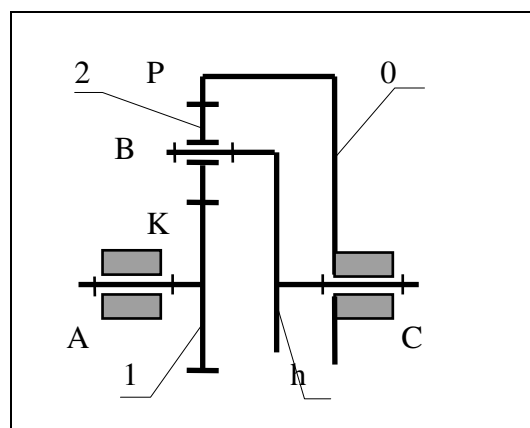


Рис. 1.17

### Список дополнительной литературы к лекции 1.

7. П.Хилл Наука и искусство проектирования. Методы проектирования, научное обоснование решений. Пер. с англ., Под ред. Венды В.Ф., М.: Мир, 1973.
8. Альтшуллер Г.С. Алгоритм изобретения. М.: Московский рабочий, 1973.
9. Джонс Дж. К. Методы проектирования. / Пер. с англ. 2-е изд. М.: Мир. 1986.
10. Дитрих Я. Проектирование и конструирование: Системный подход. Пер. с польск. - М.: Мир, 1981.
11. Конструирование приборов. В 2-х книгах. / Под ред. В.Краузе. - М.: Машиностроение. 1987.
12. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. - М.: Машиностроение. 1981.
13. Р.Бейер Кинематический синтез механизмов: Основы теории метрического синтеза плоских механизмов. / Пер. с нем. М.: Машгиз. 1959.
14. Теория механизмов и механика машин. Под ред. К.В.Фролова. М.: Высшая школа, 1998.

## Лекция 2.

**Краткое содержание:** Классификация кинематических пар. Модели машин. Методы исследования механизмов. Понятие о структурном анализе и синтезе. Основные структурные формулы. Структурная классификация механизмов по Ассуру и по Артолеву. Структурный анализ механизма. Подвижности и связи в механизме. Понятие об избыточных связях и местных подвижностях. Рациональная структура механизма. Методы определения и устранения избыточных связей и местных подвижностей.

### Классификация кинематических пар.

Кинематические пары (КП) классифицируются по следующим признакам:

1. по виду места контакта (места связи) поверхностей звеньев:
  - низшие, в которых контакт звеньев осуществляется по плоскости или поверхности ( пары скольжения );
  - высшие, в которых контакт звеньев осуществляется по линиям или точкам (пары, допускающие скольжение с перекатыванием).
2. по относительному движению звеньев, образующих пару:
  - вращательные;
  - поступательные;
  - винтовые;
  - плоские;
  - сферические.
3. по способу замыкания (обеспечения контакта звеньев пары):
  - силовое (за счет действия сил веса или силы упругости пружины);
  - геометрическое (за счет конструкции рабочих поверхностей пары).

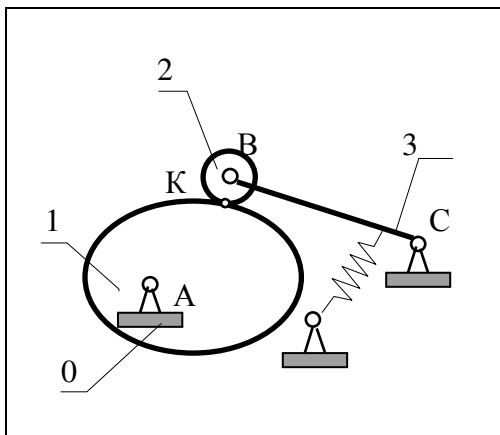


Рис. 2.1

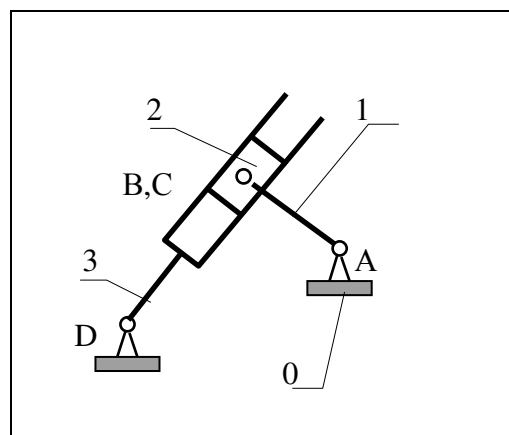


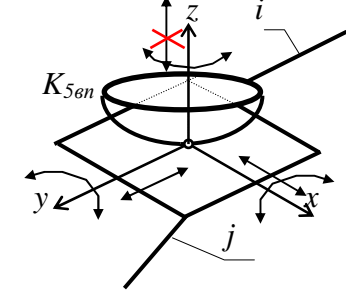
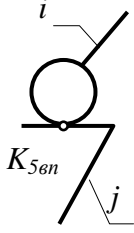
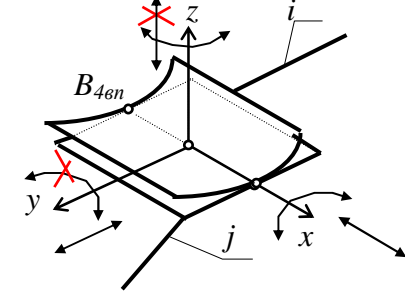
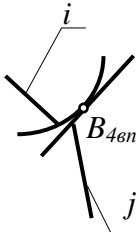
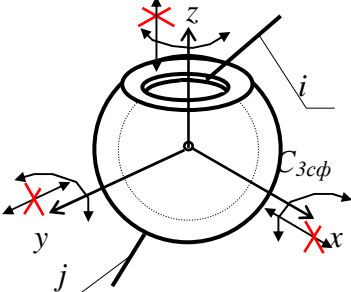
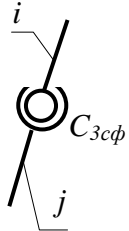
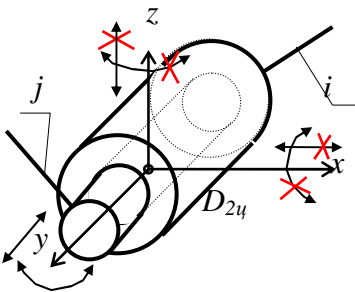
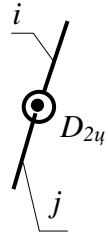
Рис. 2.2

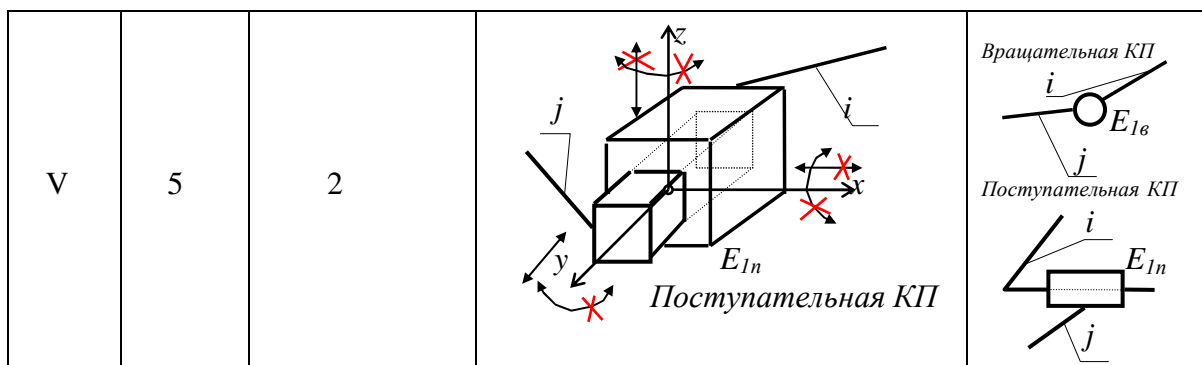
1. по числу условий связи, накладываемых на относительное движение звеньев ( число условий связи определяет класс кинематической пары );
2. по числу подвижностей в относительном движении звеньев.

Классификация КП по числу подвижностей и по числу связей приведена в таблице 2.1.

Классификация кинематических по числу связей и по подвижности.

Таблица 2.1

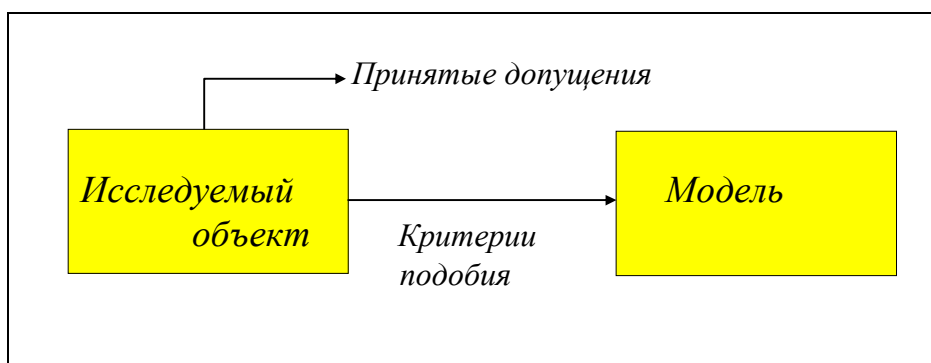
Клас пары	Число свя-	Подвижность	Пространственная схема ( пример )	Условные обозначения
I	1	5		
II	2	4		
III	3	3		
IV	4	2		



Примечание: Стрелки у координатных осей показывают возможные угловые и линейные относительные перемещения звеньев. Если стрелка перечеркнута, то данное движение в КП запрещено (т.е. на данное относительное движение наложена связь).

### ***Модели машин.***

**Модель** ( от лат. modulus - мера, образец ) - устройство или образ (мысленный или условный: схема, чертеж, система уравнений и т.п.) какого-либо объекта или явления (оригинала данной модели), адекватно отражающей его исследуемые свойства и используемый в качестве заместителя объекта в научных или иных целях ( рис.2.3).



### **Виды моделей.**

1. По форме представления :
  - физические;
  - математические:
    - ⇒ аналоговые;
    - ⇒ цифровые.
2. По назначению:
  - функциональные;
  - структурные;
  - геометрические;
  - кинематические;
  - динамические.
3. По методу исследования:
  - графические;
  - численные;



- графо-аналитические;
- энергетические;
- кинето-статические;
- экспериментальные.

### ***Структура механизмов.***

Как отмечалось выше, структура любой технической системы определяется функционально связанной совокупностью элементов и отношений между ними. При этом для механизмов под элементами понимаются звенья, группы звеньев или типовые механизмы, а под отношениями подвижные (КП) или неподвижные соединения. Поэтому под структурой механизма понимается совокупность его элементов и отношений между ними, т.е. совокупность звеньев, групп или типовых механизмов и подвижных или неподвижных соединений. Геометрическая структура механизма полностью описывается заданием геометрической формы его элементов, их расположения, указания вида связей между ними. Структура механизма может быть на разных стадиях проектирования описываться различными средствами, с разным уровнем абстрагирования: на функциональном уровне - функциональная схема, на уровне звеньев и структурных групп - структурная схема и т.п. Структурная схема - графическое изображение механизма, выполненное с использованием условных обозначений рекомендованных ГОСТ (см. например ГОСТ 2.703-68) или принятых в специальной литературе, содержащее информацию о числе и расположении элементов (звеньев, групп), а также о виде и классе кинематических пар, соединяющих эти элементы. В отличие от кинематической схемы механизма, структурная схема не содержит информации о размерах звеньев и вычерчивается без соблюдения масштабов. (Примечание: кинематическая схема - графическая модель механизма, предназначенная для исследования его кинематики.)

### ***Понятие о структурном синтезе и анализе.***

Как на любом этапе проектирования при структурном синтезе различают задачи синтеза и задачи анализа.

Задачей структурного анализа является задача определения параметров структуры заданного механизма - числа звеньев и структурных групп, числа и вида КП, числа подвижностей (основных и местных), числа контуров и числа избыточных связей.

Задачей структурного синтеза является задача синтеза структуры нового механизма, обладающего заданными свойствами: числом подвижностей, отсутствием местных подвижностей и избыточных связей, минимумом числа звеньев, с парами определенного вида (например, только вращательными, как наиболее технологичными) и т.п.

### ***Основные понятия структурного синтеза и анализа.***

Подвижность механизма - число независимых обобщенных координат однозначно определяющее положение звеньев механизма на плоскости или в пространстве.

Связь - ограничение, наложенное на перемещение тела по данной координате.

Избыточные (пассивные) - такие связи в механизме, которые повторяют или дублируют связи, уже имеющиеся по данной координате, и поэтому не изменяющие реальной подвижности механизма. При этом расчетная подвижность механизма уменьшается, а степень его статической неопределимости увеличивается. Иногда используется иное определение: Избыточные связи - это связи число которых в механизме определяется разностью между суммарным числом связей, наложенных кинематическими

парами, и суммой степеней подвижности всех звеньев, местных подвижностей и заданной (требуемой) подвижностью механизма в целом.

Местные подвижности - подвижности механизма, которые не оказывают влияния на его функцию положения (и передаточные функции), а введены в механизм с другими целями (например, подвижность ролика в кулачковом механизме обеспечивает замену в высшей паре трения скольжения трением качения).

**Основные структурные формулы.**

Основные структурные формулы были составлены для плоских механизмов Чебышевым П.Л. и Грюблером М., для пространственных - Сомовым П.О. и Малышевым . Так как принципы заложенные в построение всех этих формул одинаковы, то их можно записать в обобщенном виде:

$$W = H * n + \sum_{i=1}^{H-1} (H - i) * p_i,$$

где  $H$  - число степеней подвижности твердого тела (соответственно при рассмотрении механизма в пространстве  $H=6$  , на плоскости  $H=3$ );

$n$  - число подвижных звеньев в механизме,

$$n = k - 1 ;$$

$k$  - общее число звеньев механизма (включая и неподвижное звено - стойку);

$i$  - число подвижностей в КП;

$p_i$  - число кинематических пар с  $i$  подвижностями.

Для расчета избыточных связей, согласно второму определению, используется следующая зависимость:

$$q = W_0 + W_m - W,$$

где  $q$  - число избыточных связей в механизме;

$W_0$  - заданная или требуемая подвижность механизма;

$W_m$  - число местных подвижностей в механизме;

$W$  - расчетная подвижность механизма.

**Пример структурного анализа механизма.**

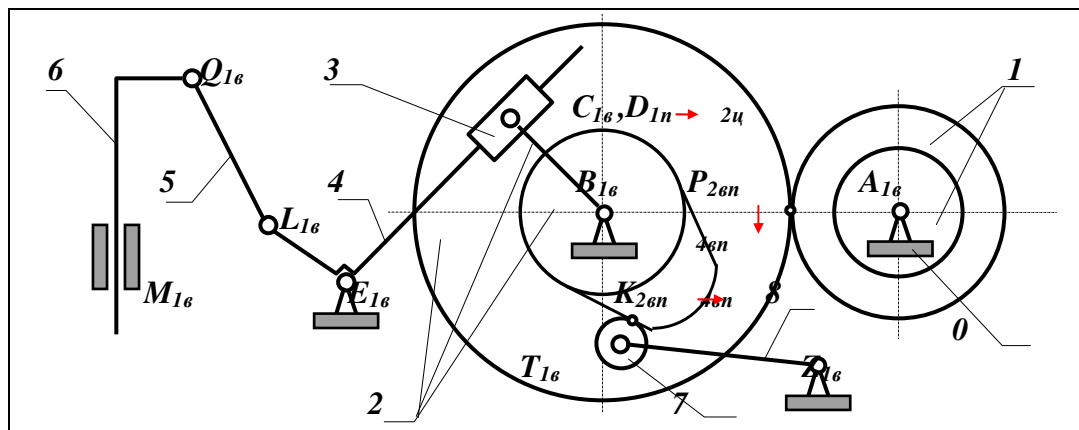


Рис. 2.4

**Функциональная схема на уровне типовых механизмов.**

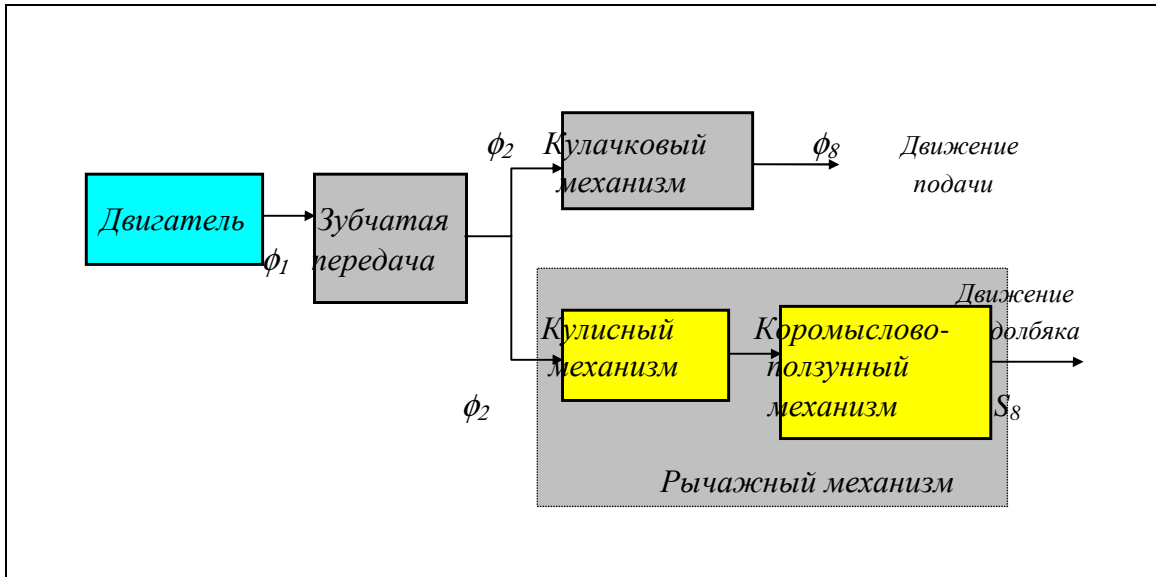


Рис. 2.5

На рис.2.4 изображена структурная схема плоского механизма долбежного станка, а на рис.2.5 его функциональная схема на уровне типовых механизмов. Структурная схема механизма в соответствии с принятыми условными обозначениями изображает звенья механизма, их взаимное расположение, а также подвижные и неподвижные соединения между звеньями. На схеме звенья обозначены цифрами, кинематические пары - заглавными латинскими буквами. Цифры в индексах обозначения КП указывают относительную подвижность звеньев в паре, буквы - на вид пары, который определяется видом относительного движения звеньев (*в* - вращательное, *п* - поступательное, *ц* - цилиндрическое, *вп* - обозначает высшую пару в которой возможно относительное скольжение с одновременным перекачиванием). Схема на рис. 2.5 отражает структуру механизма в виде последовательного и параллельного соединения простых или типовых механизмов. В этом механизме вращательное движение вала двигателя  $\phi_1$  в согласованные движения подачи  $\phi_8$  и долбяка  $S_8$ . При этом механическая энергия двигателя преобразуется: скоростные составляющие энергетического потока по величине уменьшаются, а силовые - увеличиваются. Структурные элементы (типовые механизмы) в этой схеме связаны между собой неподвижными соединениями - муфтами. Схема показывает из каких простых механизмов состоит исследуемый, как эти механизмы взаимосвязаны между собой (последовательно или параллельно), как происходит преобразование входных движений в выходные (в нашем примере  $\phi_1$  в  $\phi_8$  и  $S_8$ ).

Проведем структурный анализ данного механизма. Число подвижных звеньев механизма  $n=8$ , число кинематических пар  $p_i=12$ , из них для плоского механизма одноподвижных  $p_1=10$  (вращательных  $p_{1в}=8$ , поступательных  $p_{1п}=2$ ) и двухподвижных  $p_2=2$ . Число подвижностей механизма на плоскости:

$$W^{пл} = 3*8 - (2*10 + 1*2) = 2 = 1 + 1,$$

полученные две подвижности делятся на основную или заданную  $W_0 = 1$  и местную  $W_m = 1$ . Основная подвижность определяет основную функцию механизма преобразование входного движения  $\phi_1$  в два функционально взаимосвязанных  $\phi_8$  и  $S_8$ . Местная

обеспечивает выполнение вспомогательной функции: заменяет в высшей паре кулачок - толкатель трение скольжения трением качения. Если рассматривать механизм как пространственный, то во-первых необходимо учесть, что с увеличением подвижности звеньев с трех до шести изменяются и подвижности некоторых кинематических пар. В нашем примере это высшие пары  $K$  и  $P$ , подвижность которых изменяется с двух до четырех, и низшая пара  $D$ , у которой подвижность увеличивается до двух. С учетом сказанного, подвижность пространственного механизма равна:

$$W^{np} = 6*8 - (4*1 + 5*9 + 2*2) = 48 - 53 = -5,$$

т. е. как пространственный данный механизм не имеет подвижности, так как число связей в нем существенно (на пять) превышает суммарную подвижность всех его звеньев. Однако от рассмотренного ранее плоского варианта пространственный механизм ничем не отличается, то есть он имеет две подвижности основную и местную. Как отмечено, выше связи, не изменяющие подвижности механизма, являются пассивными или избыточными. Для нашего механизма число избыточных связей:

на плоскости

$$q^{nl} = W_0 + W_m - W^{nl} = 1 + 1 - 2 = 0;$$

в пространстве

$$q^{np} = W_0 + W_m - W^{np} = 1 + 1 - (-5) = 7.$$

Возникает вопрос: почему при переходе от плоской к пространственной модели механизма возникают избыточные связи? При анализе плоской модели механизма мы исключаем из рассмотрения три координаты, а, следовательно, и связи наложенные по этим координатам. В плоском механизме априорно задано, что оси всех вращательных и высших пар перпендикулярны, а оси поступательных параллельны плоскости, в которой рассматривается механизм. При пространственном анализе механизма это условие отсутствует. В нашем механизме 12 кинематических пар и, следовательно, 12 таких условий. Если учесть, что при переходе от плоской модели к пространственной общее число подвижностей в КП увеличилось на пять, то получим семь избыточных связей (т.к.  $12 - 5 = 7$ ). Известно, что избыточные связи возникают только в замкнутых кинематических цепях. Поэтому при анализе структуры механизма важно знать число независимых контуров, образованных его звеньями. Независимым считается контур отличающийся от остальных хотя бы на одно звено. Расчет числа контуров для механизма проводят по формуле Гохмана Х.И.:

$$K = p_i - n = 12 - 8 = 4,$$

где  $K$  - число независимых контуров в механизме;

$p_i$  - число КП в механизме;

$n$  - число подвижных звеньев в механизме.

### ***Структурная классификация механизмов по Ассурю Л.В.***

Для решения задач синтеза и анализа сложных рычажных механизмов профессором Петербургского университета Ассуром Л.В. была предложена оригинальная структурная классификация. По этой классификации механизмы не имеющие избыточ-

ных связей и местных подвижностей состоят из первичных механизмов и структурных групп Ассура (см. рис. 2.6).

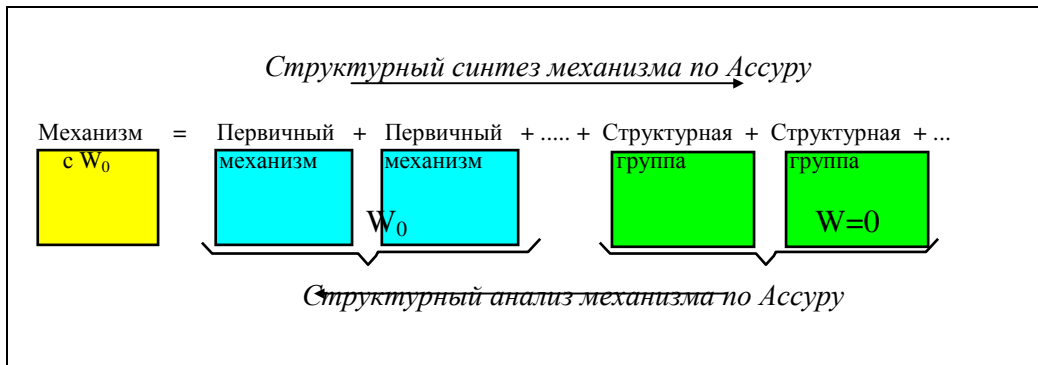


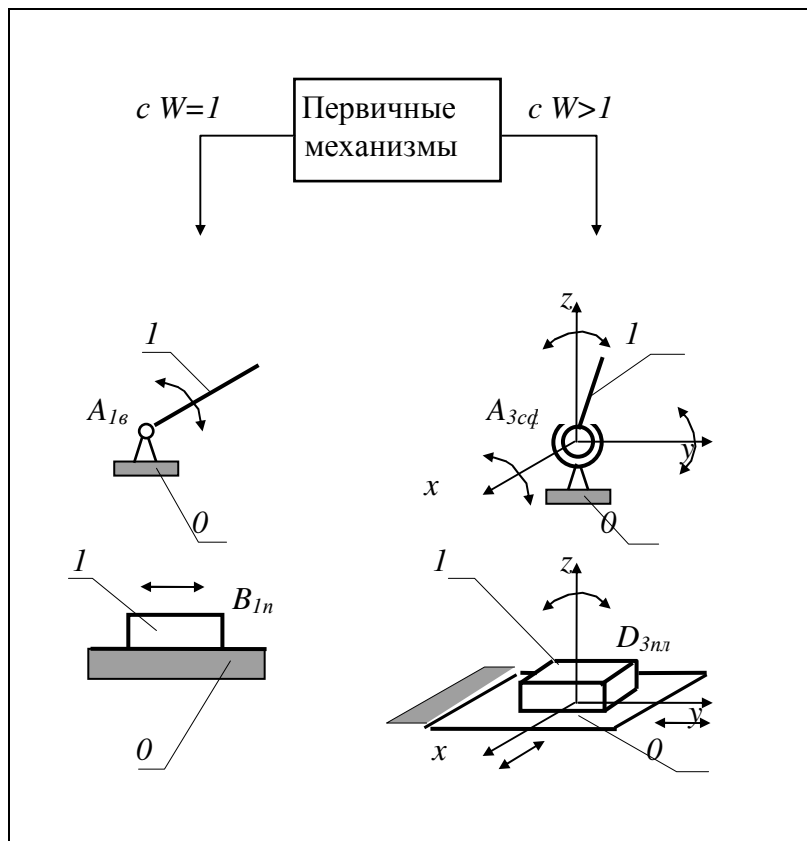
Рис. 2.6

Под первичным механизмом понимают механизм, состоящий из двух звеньев (одно из которых неподвижное) образующих кинематическую пару с одной  $W_{nm}=1$  или несколькими  $W_{nm}>1$  подвижностями. Примеры первичных механизмов даны на рис. 2.7.

Рис.2.7

Структурной группой Ассура (или группой нулевой подвижности) называется кинематическая цепь, образованная только подвижными звеньями механизма, подвижность которой (на плоскости и в пространстве) равна нулю ( $W_{sp} = 0$ ).

Конечные звенья групп Ассура, входящие в две кинематические пары, из которых одна имеет свободный элемент звена, называются поводками. Группы могут быть различной степени сложности. Структурные группы



Ассура делятся на классы в зависимости от числа звеньев, образующих группу, числа поводков в группе, числа замкнутых контуров внутри группы. В пределах класса (по Ассуру) группы подразделяются по числу поводков на порядки (порядок группы равен числу ее поводков). Механизмы классифицируются по степени сложности групп входящих в их состав. Класс и порядок механизма определяется классом и порядком наиболее сложной из входящих в него групп. Особенность структурных групп Ассура - их статическая определимость. Если группу Ассура свободными элементами звеньев при-

соединить к стойке, то образуется статически определимая ферма. Используя группы Ассура удобно проводить структурный, кинематический и силовой анализ механизмов. Наиболее широко применяются простые рычажные механизмы, состоящие из групп Ассура 1-го класса 2-го порядка. Число разновидностей таких групп для плоских механизмов с низшими парами невелико, их всего пять (см. рис. 2.8)

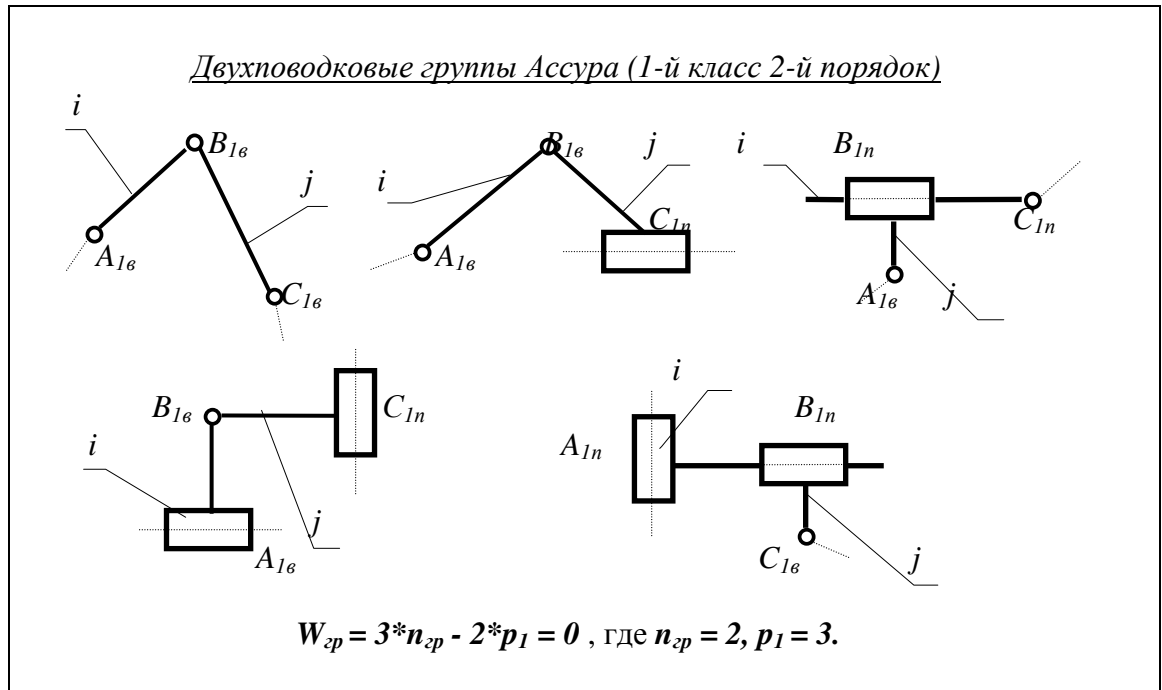


Рис. 2.8

Для этих групп разработаны типовые методы структурного, кинематического и силового анализа (см. например, алгоритмы в [ 6 ] и программу DIADA).

При структурном синтезе механизма по Ассуру (рис.2.6) к выбранным первичным механизмам с заданной подвижностью  $W_0$  последовательно присоединяются структурные группы с нулевой подвижностью. Полученный таким образом механизм обладает рациональной структурой, т.е. не содержит избыточных связей и подвижностей. Структурному анализу по Ассуру можно подвергать только механизмы не содержащие избыточных связей и подвижностей. Поэтому перед проведением структурного анализа необходимо устранить избыточные связи и выявить местные подвижности. Затем необходимо выбрать первичные механизмы и, начиная со звеньев наиболее удаленных от первичных, выделять из состава механизма структурные группы нулевой подвижности (схема на рис.2.6). При этом необходимо следить, чтобы звенья, остающиеся в механизме, не теряли связи с первичными механизмами.

Несколько слов о историческом развитии классификации Ассура. В диссертационной работе Ассур разработал структурную классификацию для плоских рычажных шарнирных механизмов (т.е. для механизмов только с вращательными КП). В дальнейшем Артоболевский И.И. усовершенствовал и дополнил эту классификацию, распространив ее на плоские механизмы и с поступательными КП. При этом были изменены и принципы классификации. В плоских механизмах группами являются кинематические цепи с низшими парами, которые удовлетворяют условию  $W_{zp} = 3 * n_{zp} - 2 * p_1 = 0$ . Решения этого уравнения в целых числах определяют параметры групп Ассура. Эти параметры, а также классы простейших групп Ассура по Ассуру и по Артоболевскому приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Класс и порядок по Ассур	1 кл. 2 пор.	1 кл. 3 пор.	и т. д.
Число звеньев группы $n_{гр}$	2	4	
Число кинематических пар $p_1$	3	6	
Класс и порядок по Артоболовскому	2 кл. 2 пор.	3 кл. 3 пор.	

Дальнейшее развитие эта структурная классификация получила в работе [6], где была распространена на механизмы с высшими кинематическими парами.

Проведем структурный анализ плоского механизма, схема которого приведена на рис. 2.4, и представим его в виде совокупности первичного механизма и структурных групп Ассур. Результаты структурного анализа изображены на рис. 2.9. Для рассматриваемого механизма структурный анализ можно проводить только для плоской модели, так как она не содержит избыточных связей. Механизм состоит из четырех структурных групп: двух рычажных двухповодковых ( группы звеньев 5-6 и 4-5) и двух групп с высшими парами одна из которых содержит только одно звено 2, вторая - два звена 7 и 8. Звено 7 и пара Т введены в структуру механизма с целью замены трения скольжения трением качения, т.е. они обеспечивают местную подвижность ролика 7. За вычетом этой подвижности группа 7-8 имеет нулевую подвижность и является группой Ассур (точнее группой нулевой подвижности). Механизм имеет одну основную подвижность и, следовательно, один первичный механизм, состоящий из звеньев 1 и 0. Если рассмотреть полученные структурные группы как пространственные, то они не будут группами нулевой подвижности ибо обладают избыточными связями. Чтобы преобразить их в группы с нулевой подвижностью необходимо снизить классы кинематических пар, не допуская при этом возникновения местных подвижностей. При переходе от анализа механизма на плоскости к анализу в пространстве изменяются классы пар: одноподвижная поступательная КП  $D$  изменяется на двухподвижную цилиндрическую, двухподвижные высшие  $P$  и  $K$  на четырехподвижные. Далее по группам классы пар изменялись так:

группа звеньев 5-6	пара $Q$ $\rightarrow 1в$ $\rightarrow 2и,$
	пара $L$ $\rightarrow 1в$ $\rightarrow 3сф;$
группа звеньев 3-4	пара $C$ $\rightarrow 1в$ $\rightarrow 2и,$
	пара $E$ $\rightarrow 1в$ $\rightarrow 2сф;$
группа звеньев 7-8	пара $K$ $\rightarrow 4вп$ $\rightarrow 5вп,$
звено 2	пара $P$ $\rightarrow 4вп$ $\rightarrow 5вп.$

После таких изменений классов КП подвижность механизма

$$W^{mp} = 6*8 - (3*1 + 4*4 + 5*5 + 1*2) = 48 - 46 = 2,$$

где одна подвижность - основная, а вторая - местная.

В данном случае для устранения избыточных связей мы воспользовались способом снижения классов КП. Другой способ - введение в механизм дополнительных звеньев и КП. В заключение необходимо отметить, что устранять избыточные связи нужно не всегда. Многоподвижные КП сложнее и дороже в изготовлении, механизмы с такими парами часто обладают меньшей жесткостью и точностью, чем механизмы с одноподвижными КП.

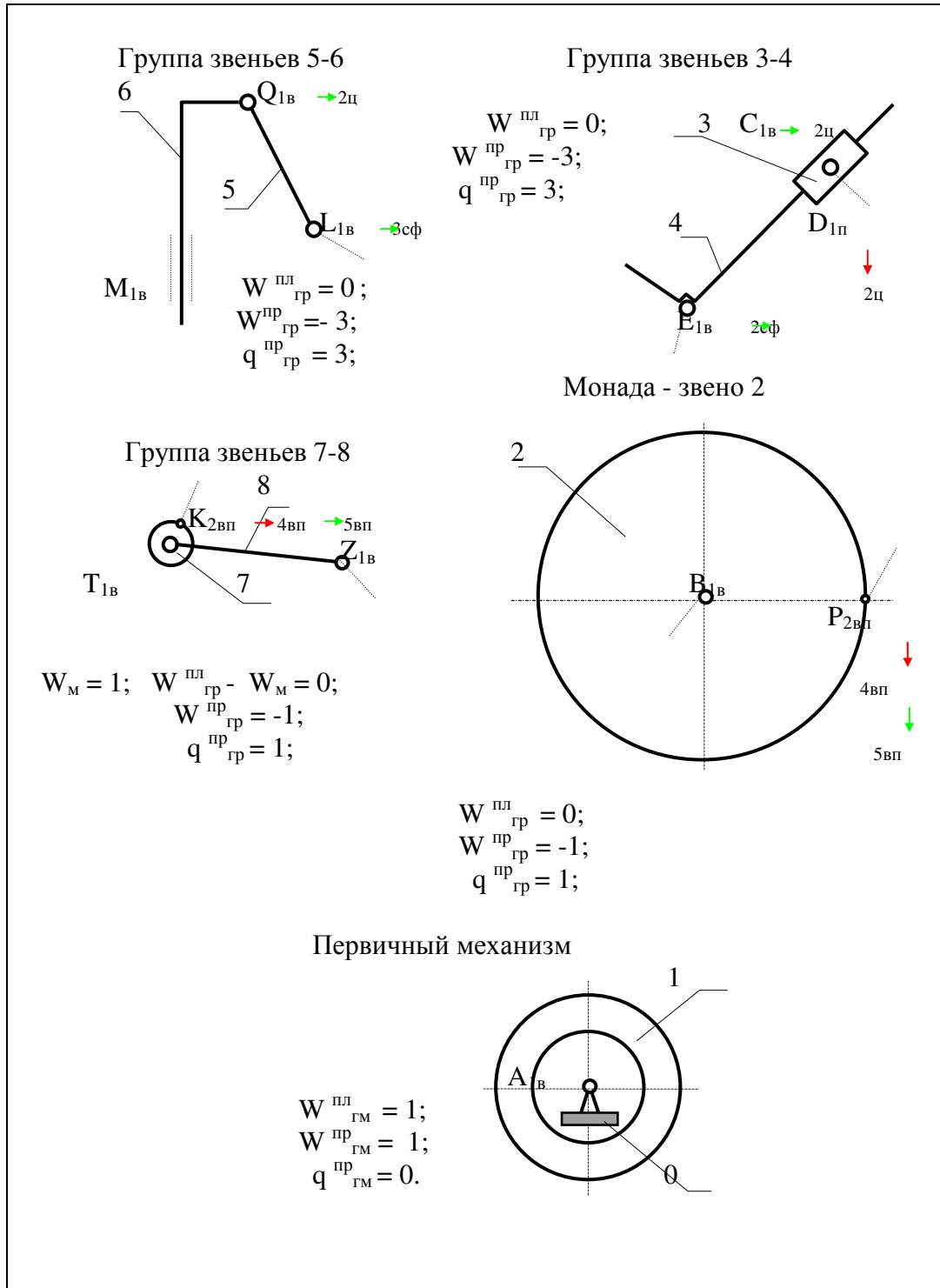


Рис. 2.9



### Лекция № 3

**Краткое содержание:** Понятие о геометрических и кинематических характеристиках механизмов (функция положения и ее производные по времени и по обобщенной координате). Методы определения геометро-кинематических характеристик механизма. Цикл и цикловые графики. Связь между кинематическими и геометрическими параметрами. Кинематическое исследование типовых механизмов: рычажных, зубчатых, кулачковых, манипуляторов.

#### Понятие о геометрических и кинематических характеристиках механизмов.

Функцией положения механизма называется зависимость углового или линейного перемещения точки или звена механизма от времени или обобщенной координаты.

#### Геометрические и кинематические характеристики механизма

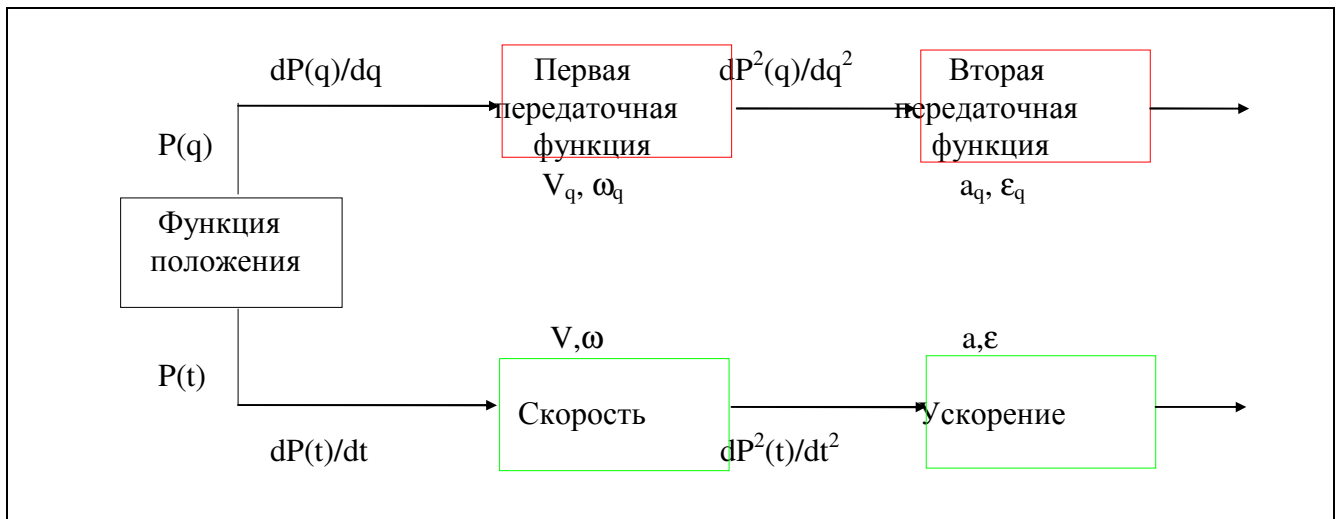


Рис. 3.1.

Кинематическими передаточными функциями механизма называются производные от функции положения по обобщенной координате. Первая производная называется первой передаточной функцией или аналогом скорости (обозначается  $V_q, \omega_q$ ), вторая - второй передаточной функцией или аналогом ускорения (обозначается  $a_q, \epsilon_q$ ).

Кинематическими характеристиками механизма называются производные от функции положения по времени. Первая производная называется скоростью (обозначается  $V, \omega$ ), вторая - ускорением (обозначается  $a, \epsilon$ ).

Механизм с одной подвижностью имеет одно заданное входное движение и бесчисленное множество выходных (движение любого звена или точки механизма). Передаточные функции тех движений, которые в данном случае используются как выходные, называются главными, остальные - вспомогательными.

Рассмотрим схему механической системы образованной последовательно-параллельным соединением типовых механизмов. Схема включает входное звено, зубчатую передачу, кулачковый и рычажный механизмы и имеет два выходных звена.

**Схема механической системы**

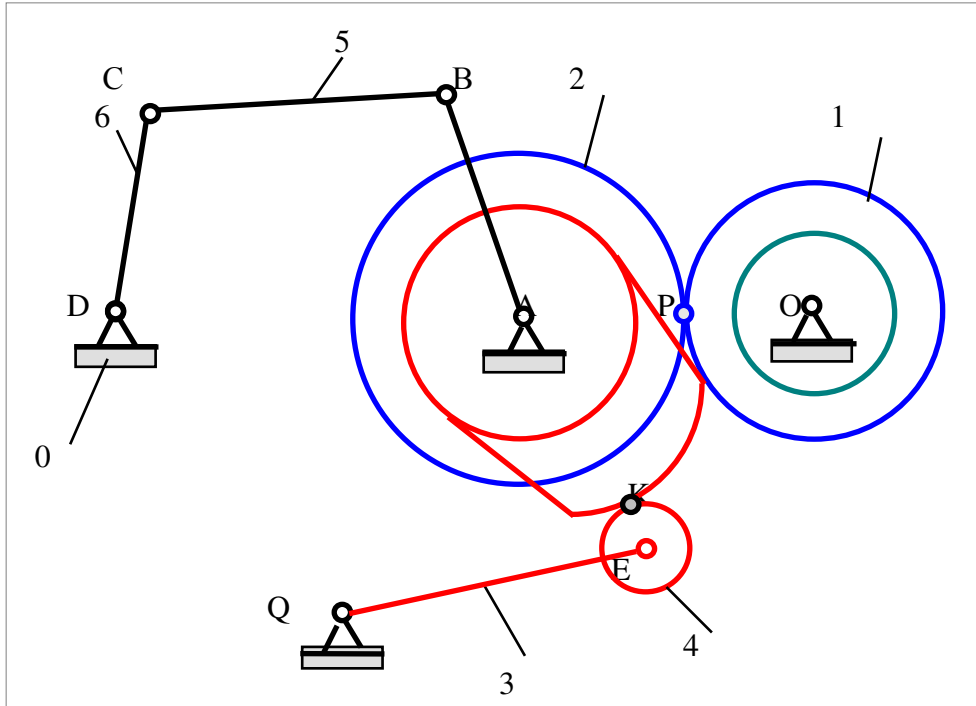


Рис. 3.2.

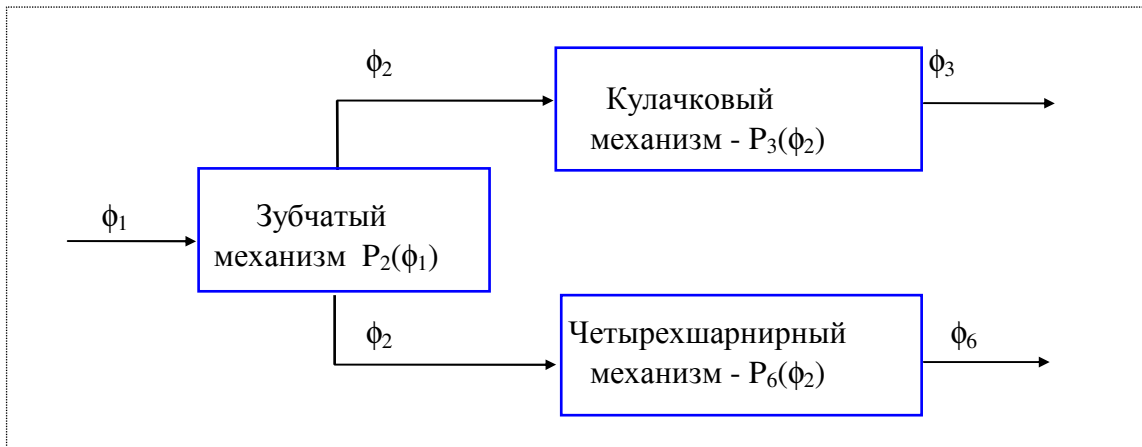


Рис. 3.3.

**Функции положения в механизмах**

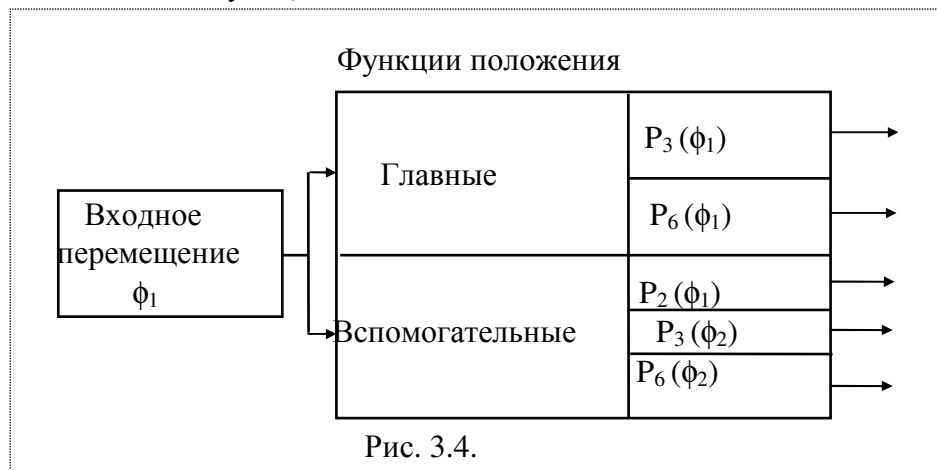


Рис. 3.4.

**Методы геометро-кинематического исследования механизмов**

- планов положений, скоростей и ускорений ,
- проекций векторного контура,
- кинематических диаграмм,
- центроид,
- преобразования координат,
- экспериментальный,
- другие.

**Связь кинематических и передаточных функций**

Линейные скорости

$$V_L = dS_L / dt = (dS_L / d\phi_1) * (d\phi_1 / dt) = V_{qL} * \omega_1 ;$$

$$a_L = d(V_{qL} * \omega_1) / dt = (dV_{qL} / d\phi_1) * (d\phi_1 / dt) * \omega_1 + V_{qL} * \epsilon_1 = a_{qL} * \omega_1^2 + V_{qL} * \epsilon_1 ;$$

Угловые скорости

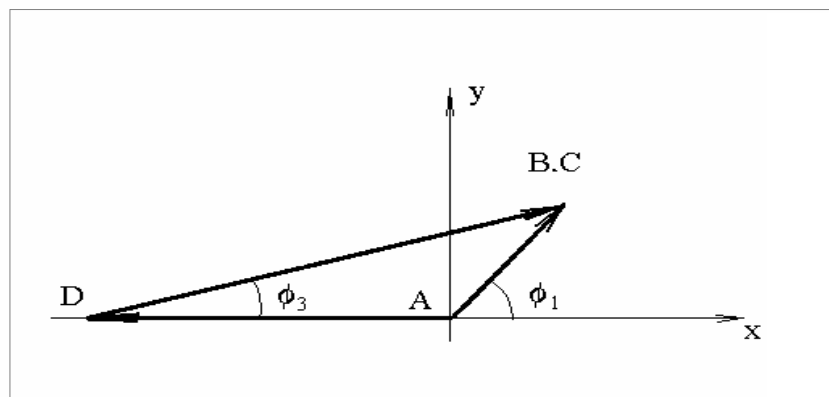
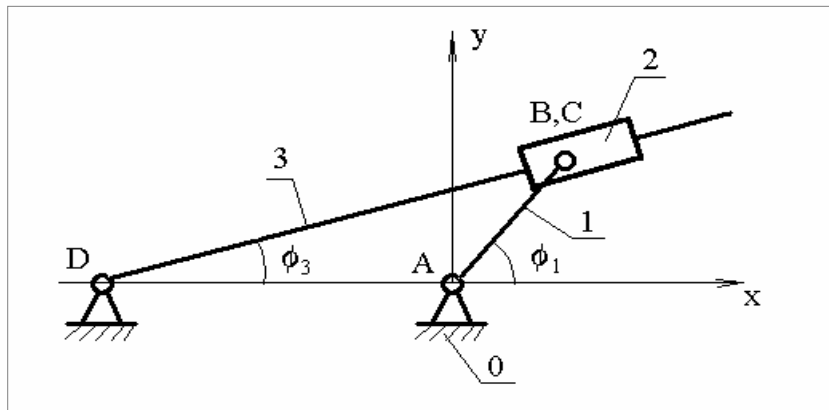
$$\omega_i = d\phi_i / dt = (d\phi_i / d\phi_1) * (d\phi_1 / dt) = \omega_{qi} * \omega_1 ;$$

$$\epsilon_i = d(\omega_{qi} * \omega_1) / dt = (d\omega_{qi} / d\phi_1) * (d\phi_1 / dt) * \omega_1 + \omega_{qi} * \epsilon_1 = \epsilon_{qi} * \omega_1^2 + \omega_{qi} * \epsilon_1 .$$

Так как данные формулы получены как производные от скалярных величин, то при операциях с векторными величинами они применимы только для проекций этих величин на оси координат.

**1. Метод проекций векторного контура . ( Рычажные механизмы ).**

Рассмотрим простейший кулисный механизм.



Заменим кинематическую схему механизма эквивалентным векторным контуром

Тогда уравнение замкнутости векторного контура запишется

$$\vec{l}_{AB} = \vec{l}_{AD} + \vec{l}_{DB}$$

### 1. 1. Задача о положениях звеньев механизма

Проецируем векторный контур на оси координат и получаем координаты точки В механизма :

$$x_B = l_{AB} * \cos (\phi_1) = l_{AD} * \cos (\pi) + l_{DB} * \cos (\phi_3);$$

$$y_B = l_{AB} * \sin (\phi_1) = l_{AD} * \sin (\pi) + l_{DB} * \sin (\phi_3);$$

из решения этой системы уравнений определяем неизвестные величины  $\phi_3$  и  $l_{DB}$ , которые определяют положение звеньев и точек механизма

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\phi_3) &= \sin (\phi_3) / \cos (\phi_3) = \\ &= l_{AB} * \sin (\phi_1) / (l_{AB} * \cos (\phi_1) - l_{AD} * \cos (\pi)); \end{aligned}$$

$$l_{DB} = (l_{AB} * \sin (\phi_1)) / \sin (\phi_3);$$

### 1.2. Задача о первых кинематических передаточных функциях механизма

Продифференцируем уравнения проекций векторного контура по обобщенной координате и получим

$$V_{qBx} = -l_{AB} * \sin (\phi_1) = V_{qDB} * \cos (\phi_3) - l_{DB} * \omega_{q3} * \sin (\phi_3);$$

$$V_{qBy} = l_{AB} * \cos (\phi_1) = V_{qDB} * \sin (\phi_3) + l_{DB} * \omega_{q3} * \cos (\phi_3).$$

Из этой системы уравнений определяем первые передаточные функции  $V_{qB}$  и  $\omega_{q3}$ .

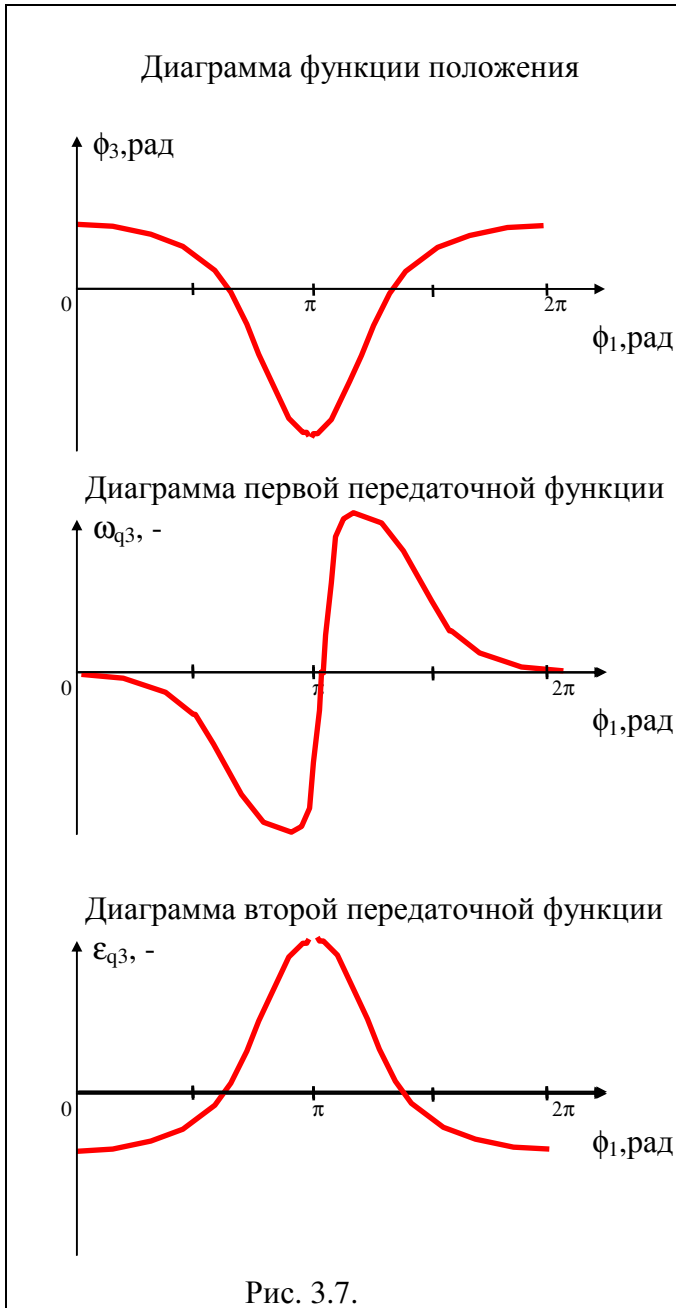
### 1.3. Задача о вторых передаточных функциях механизма.

Вторично продифференцируем уравнения проекций векторного контура по обобщенной координате и получим

$$\begin{aligned} a_{qBx} &= -l_{AB} * \cos (\phi_1) = a_{qDB} * \cos (\phi_3) - 2 * V_{qDB} * \omega_3 * \sin (\phi_3) \\ &- l_{DB} * \epsilon_{q3} * \sin (\phi_3) - l_{DB} * \omega_3^2 * \cos (\phi_3); \end{aligned}$$

$$a_{qBy} = -l_{AB} * \sin(\phi_1) = a_{qDB} * \sin(\phi_3) + 2 * V_{qDB} * \omega_3 * \cos(\phi_3) + l_{DB} * \epsilon_{q3} * \cos(\phi_3) - l_{DB} * \omega_3^2 * \sin(\phi_3);$$

Из этой системы уравнений определяем вторые передаточные функции  $a_{qB}$  и  $\epsilon_{q3}$ .



Цикловые кинематические (геометрические) диаграммы для кулисного механизма.

Циклом называется период времени или изменения обобщенной координаты по истечении которого все параметры системы принимают первоначальные значения.

Поэтому значения величин в начале и в конце цикла одинаковы.

## 2. Метод центроид (Зубчатые передачи).

Центроидой (полоидой) называется геометрическое место центров (полюсов) относительного вращения в системах координат связанных со звеньями механизма. В зубчатом механизме при передаче движения центроиды колес перекатываются друг по другу без скольжения.

*Схема зубчатого механизма*

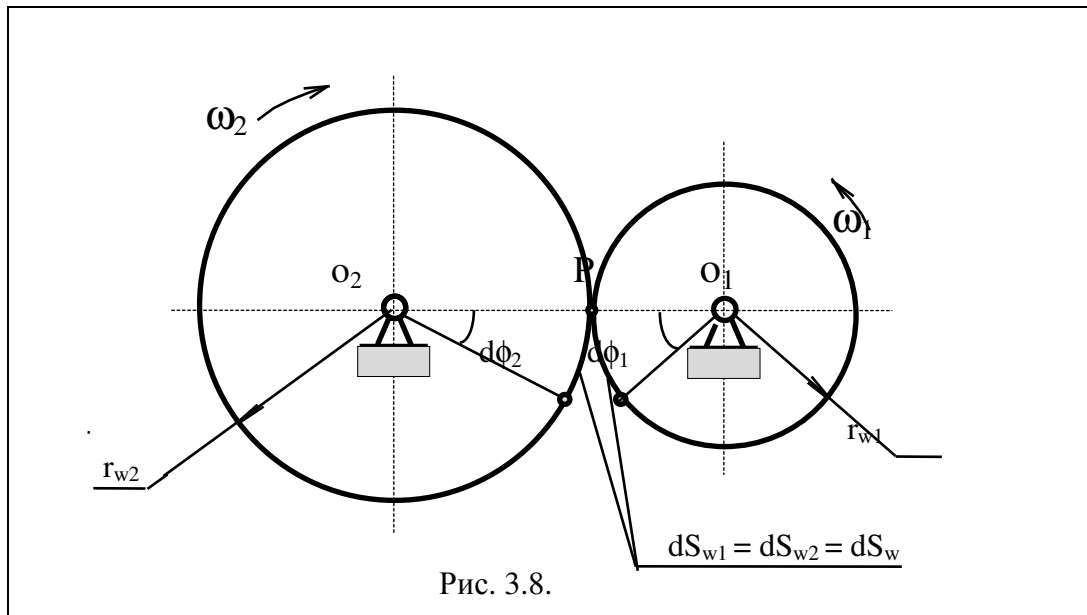


Рис. 3.8.

Повернем ведущее колесо на малый угол  $d\phi_1$ , тогда ведомое колеса повернется на угол  $d\phi_2$ . Так как центры или начальные окружности колес перекачиваются друг по другу без скольжения, то дуга  $dS_{w1}$  будет равна дуге  $dS_{w2}$ . Тогда можно записать следующее равенство

$$dS_{w1} = dS_{w2} = dS_w,$$

где  $dS_{w1} = r_{w1} * d\phi_1,$   $dS_{w2} = r_{w2} * d\phi_2.$

Откуда

$$u_{21} = d\phi_2/d\phi_1 = r_{w1}/r_{w2} = \text{const.}$$

Функция положения для выходного звена зубчатой передачи

$$\phi_2 = \int_0^{\phi_1} u_{21} * d\phi_1 = u_{21} * \phi_1.$$

Вторая передаточная функция для выходного звена зубчатой передачи

$$\epsilon_{q2} = du_{21}/d\phi_1 = 0.$$

Механизм зубчатой передачи не является цикловым механизмом, так как угловое перемещение выходного звена увеличивается при увеличении углового перемещения входного. Поэтому кинематические диаграммы построим только для одного оборота входного звена.

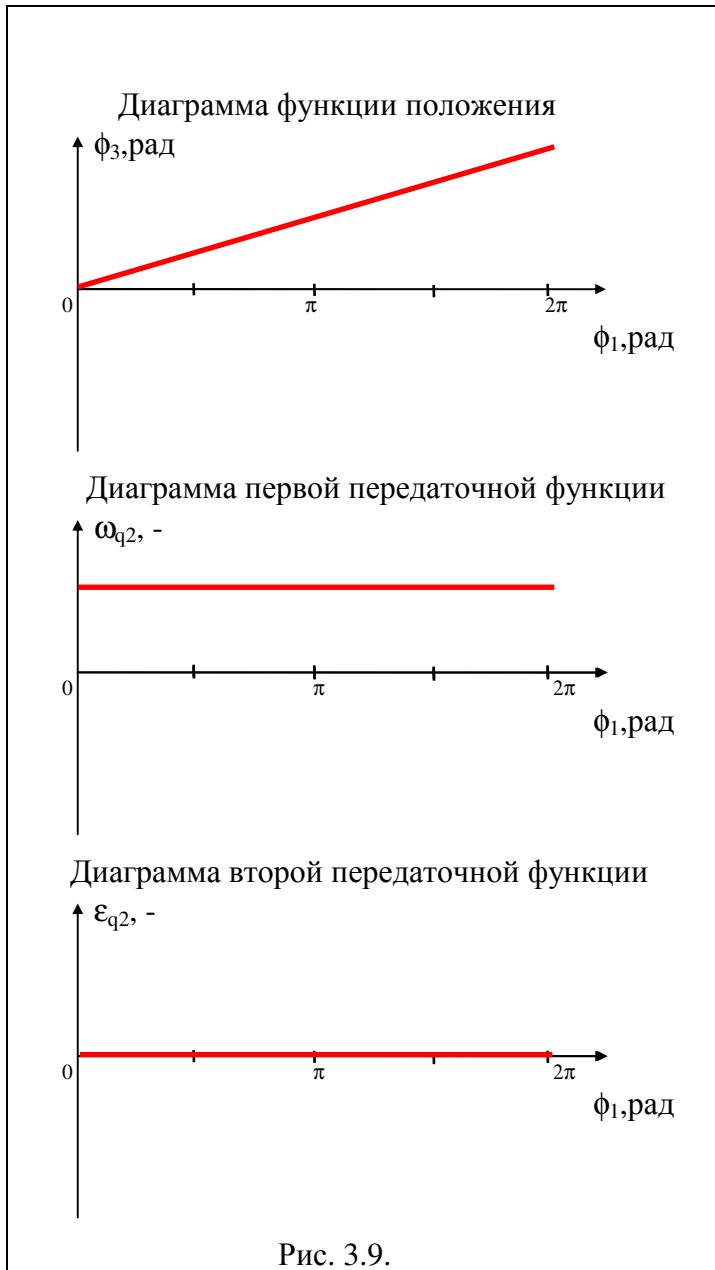


Рис. 3.9.

Диаграммы функции положения и передаточных функций для зубчатой передачи.

**3. Метод цикловых кинематических диаграмм (Кулачковые механизмы).**

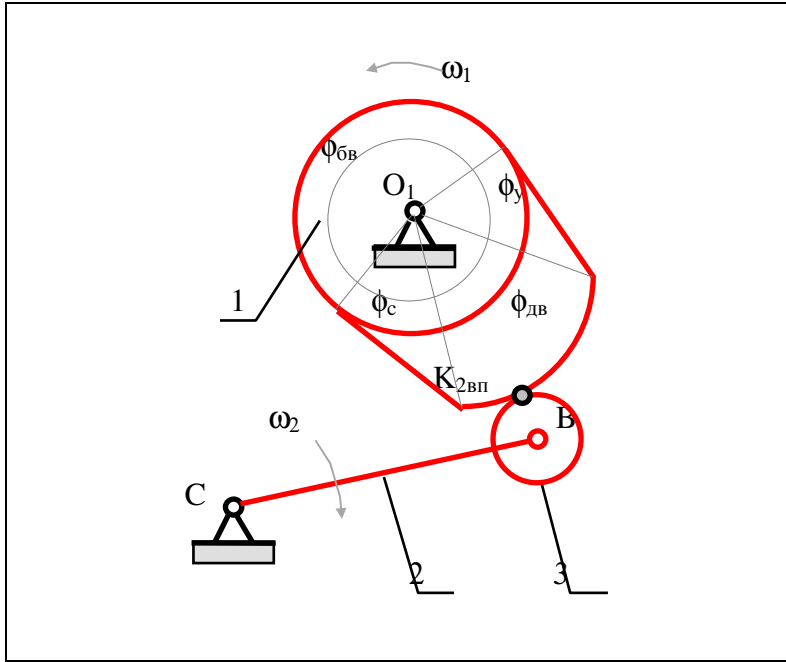
Кулачковым называется трехзвенный механизм состоящий из двух подвижных звеньев - кулачка и толкателя, соединенных между собой высшей кинематической парой. Часто в состав механизма входит третье подвижное звено - ролик, введенное в состав механизма с целью замены в высшей паре трения скольжения трением качения. При этом механизм имеет две подвижности одну основную и одну местную (подвижность ролика).

Основные параметры кулачкового механизма:

$\phi_{раб}$  - фазовый рабочий угол кулачкового механизма;

$$\phi_{раб} = \delta_{раб} = \phi_c + \phi_{дв} + \phi_y;$$

$\phi_c$  - угол сближения;  
 $\phi_{дв}$  - фазовый угол дальнего выстоя;  
 $\phi_y$  - фазовый угол удаления;



$\delta_{раб}$  - профильный рабочий угол;  
 $\phi_{бв}$  - угол ближнего выстоя;  
 $h_{Вм}$  - максимальное перемещение точки В толкателя;  
 $r_0$  - радиус начальной шайбы кулачка;  
 $r_p$  - радиус ролика.

Диаграмма функции положения

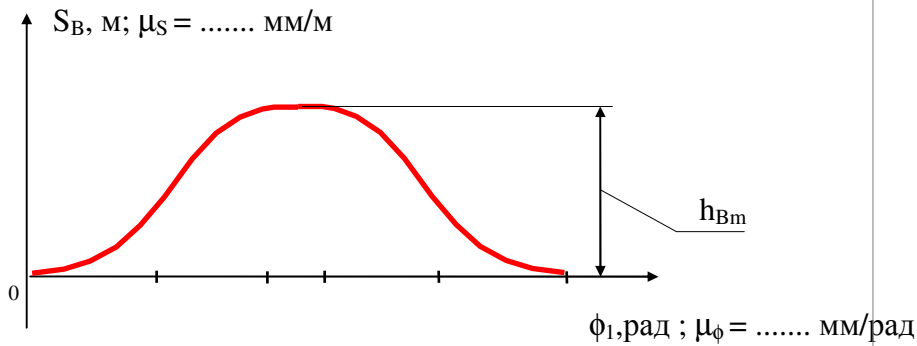


Диаграмма первой передаточной функции

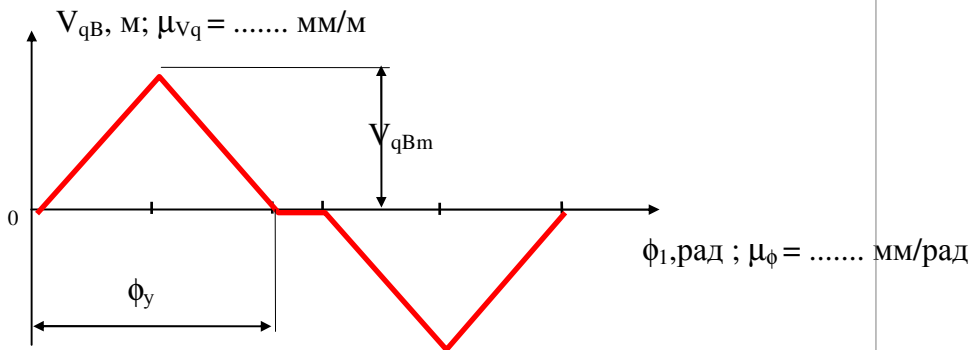
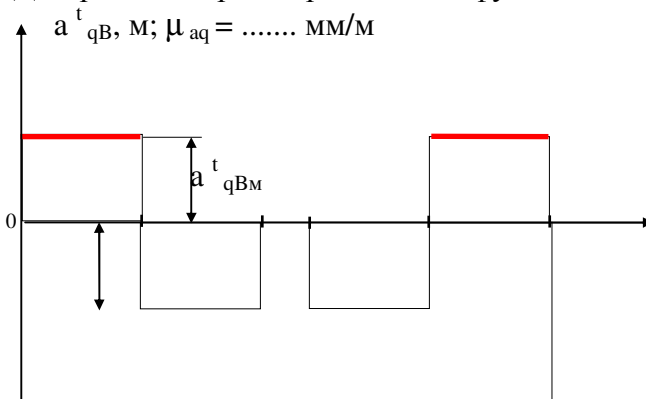
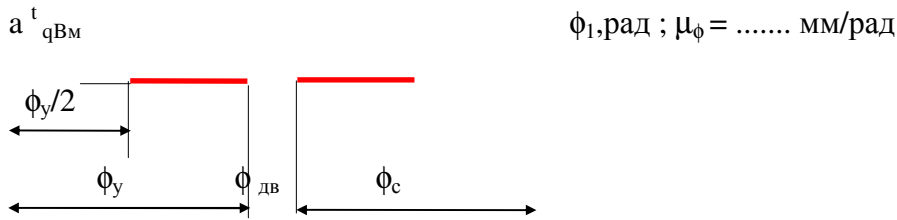


Диаграмма второй передаточной функции







При кинематическом анализе кулачкового механизма задан конструктивный профиль кулачка и радиус ролика  $r_p$ . Методом обращенного движения (перекатывая ролик по неподвижному конструктивному профилю кулачка) находим центральный профиль кулачка (траекторию центра ролика толкателя в обращенном движении). Наносим на профиль фазовые углы и определяем в зоне ближнего выстоя начальный радиус центрального профиля кулачка  $r_0$ . В зоне рабочего угла проводим ряд траекторий центра ролика толкателя (точки В) и по ним измеряем от точки лежащей на окружности  $r_0$  до точки лежащей на центровом профиле текущее перемещение толкателя  $S_B$ . По этим перемещениям строим диаграмму  $S_B = f(\phi_1)$ . Дифференцируя эту диаграмму по времени или обобщенной координате получаем кинематические или геометрические характеристики механизма. При графическом дифференцировании масштабы диаграмм зависят от масштабов исходной диаграммы и выбранных отрезков дифференцирования:

$$\mu_S = y_{hb} / h_B \text{ мм/м}; \quad \mu_\phi = b / \phi_p \text{ мм/рад}; \quad \mu_t = b / t_p \text{ мм/с};$$

$$\mu_{vq} = k_1 * \mu_S / \mu_\phi \text{ мм/м}; \quad \mu_{aq} = k_2 * \mu_{vq} / \mu_\phi \text{ мм/м};$$

$$\mu_v = k_1 * \mu_S / \mu_t \text{ мм/м.с}^{-1}; \quad \mu_a = k_2 * \mu_v / \mu_t \text{ мм/м.с}^{-2};$$

где  $b$  - база диаграммы по оси абсцисс в мм,  $y_{hb}$  - ордината максимального перемещения толкателя в мм,  $h_B$  - максимальное перемещение толкателя в м,  $t_p$  - время поворота кулачка на фазовый угол  $\phi_p$  в с,  $k_1$  и  $k_2$  - отрезки дифференцирования в мм.

#### 4. Метод преобразования координат ( Манипуляторы )

При использовании метода преобразования координат задача о положении выходного звена решается путем перехода из системы в которой это положение известно в систему в которой его требуется определить. Переход от системы к системе осуществляется перемножением матриц перехода в соответствующей последовательности.

4.1. Формирование матрицы перехода для плоских механизмов.

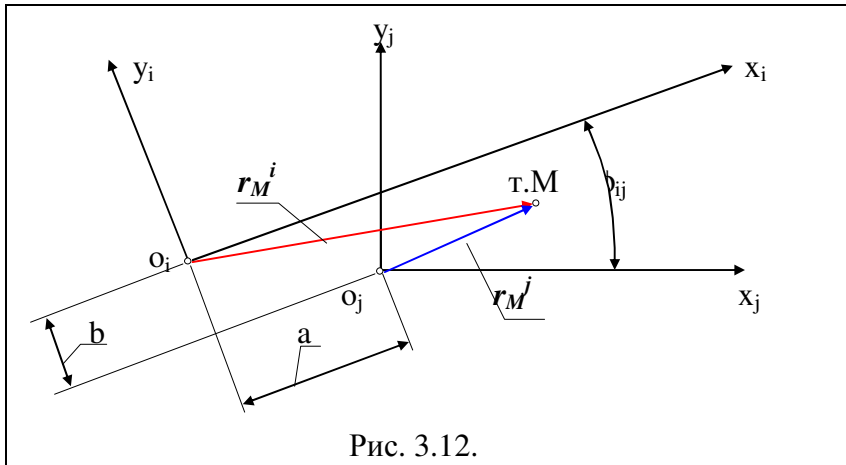


Рис. 3.12.

Координаты точки М в системе \$i\$ через координаты этой точки в системе \$j\$ определяются следующей системой уравнений

$$\begin{cases} x_M^i = a + x_M^j \cdot \cos \phi_{ij} + y_M^j \cdot \sin \phi_{ij} \\ y_M^i = -b - x_M^j \cdot \sin \phi_{ij} + y_M^j \cdot \cos \phi_{ij} \end{cases}$$

$$y_M^j \cdot \cos \phi_{ij}$$

$$1 = 1 + 0 + 0$$

Тогда векторы столбцы координат точки М и матрица перехода из системы \$j\$ в систему \$i\$

$$\bar{r}_M^i = \begin{pmatrix} x_M^i \\ y_M^i \\ 1 \end{pmatrix}; \quad M_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \phi_{ij} & \sin \phi_{ij} & a \\ -\sin \phi_{ij} & \cos \phi_{ij} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{r}_M^j = \begin{pmatrix} x_M^j \\ y_M^j \\ 1 \end{pmatrix};$$

Векторное уравнение перехода из системы \$j\$ в систему \$i\$

$$\bar{r}_M^i = M_{ij} * \bar{r}_M^j.$$

Пример применения метода преобразования координат для плоского трехподвижного манипулятора:

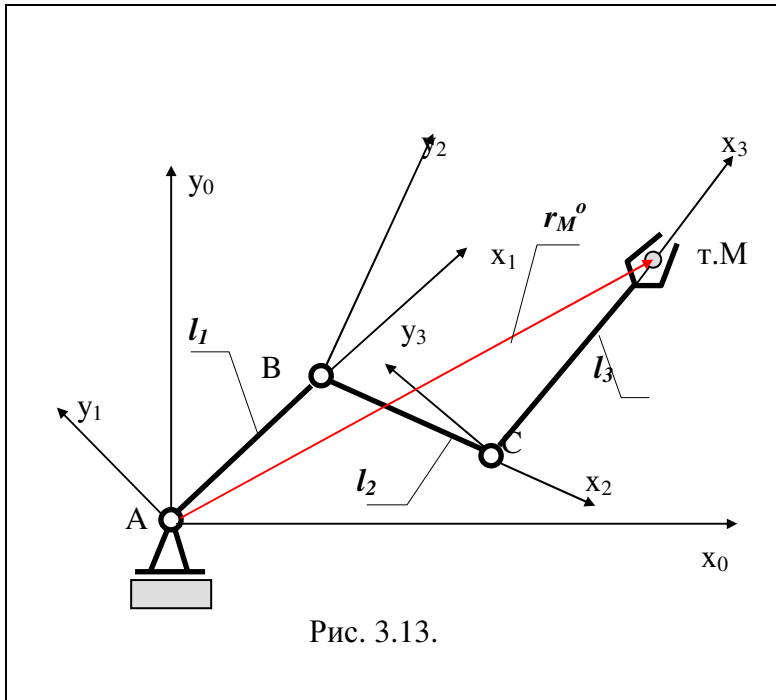


Рис. 3.13.

### 5. Экспериментальный метод кинематического исследования.

При экспериментальном исследовании кинематики механизмов кинематические характеристики звеньев и точек механизма определяются и регистрируются с помощью чувствительных элементов - датчиков, которые используя различные физические эффекты преобразуют кинематические параметры в пропорциональные электрические сигналы. Эти сигналы регистрируются измерительными самопишущими приборами (самописцами, осциллографами и др.).

В последнее время для регистрации и обработки экспериментальных данных все более широко используются специальные или универсальные компьютеры. Для примера рассмотрим экспериментальную установку для исследования кинематических характеристик синусного механизма:

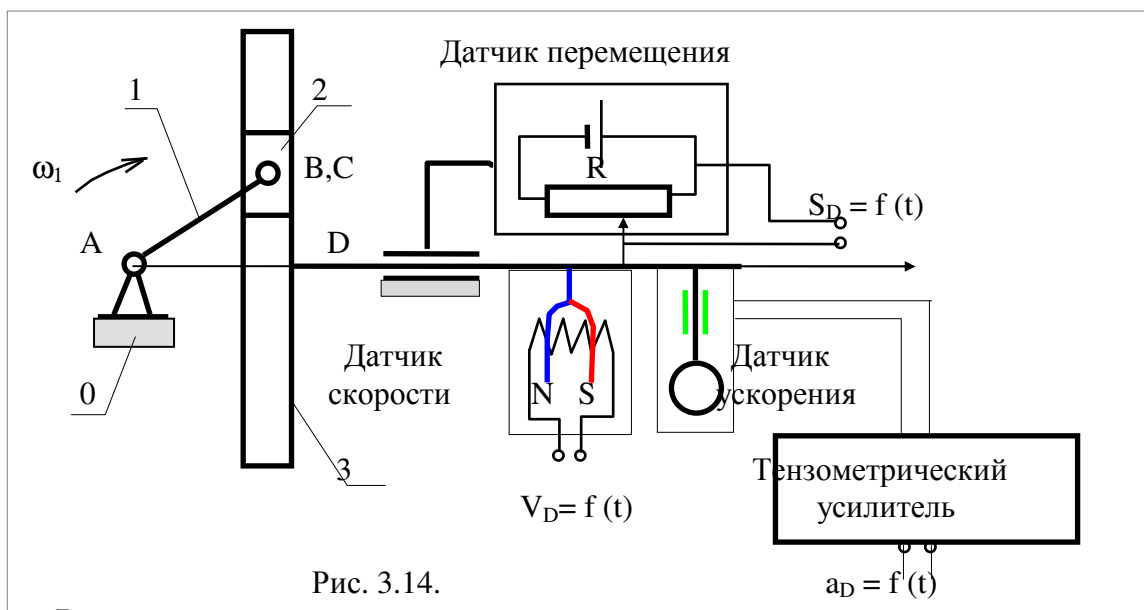


Рис. 3.14.

В этой экспериментальной установке:

- для измерения перемещения выходного звена используется потенциометрический датчик перемещения, в котором пропорционально положению движка потенциометра изменяется его сопротивление;
- для измерения скорости выходного звена используется индукционный датчик скорости, в котором напряжение на концах катушки движущейся в поле постоянного магнита пропорционально скорости катушки;
- для измерения ускорения выходного звена используется тензометрический акселерометр. Он состоит из пластинчатой пружины один конец которой закреплен на выходном звене механизма, а на втором закреплена масса. На пластину наклеены проволочные тензопреобразователи. При движении выходного звена с ускорением инерционность массы вызывает изгиб пластины, деформацию тензопреобразователей и изменение их сопротивления пропорциональное ускорению выходного звена.

**Передаточные функции механизмов с несколькими подвижностями**

( $W>1$ ).

Рассмотрим простой двухподвижный манипулятор

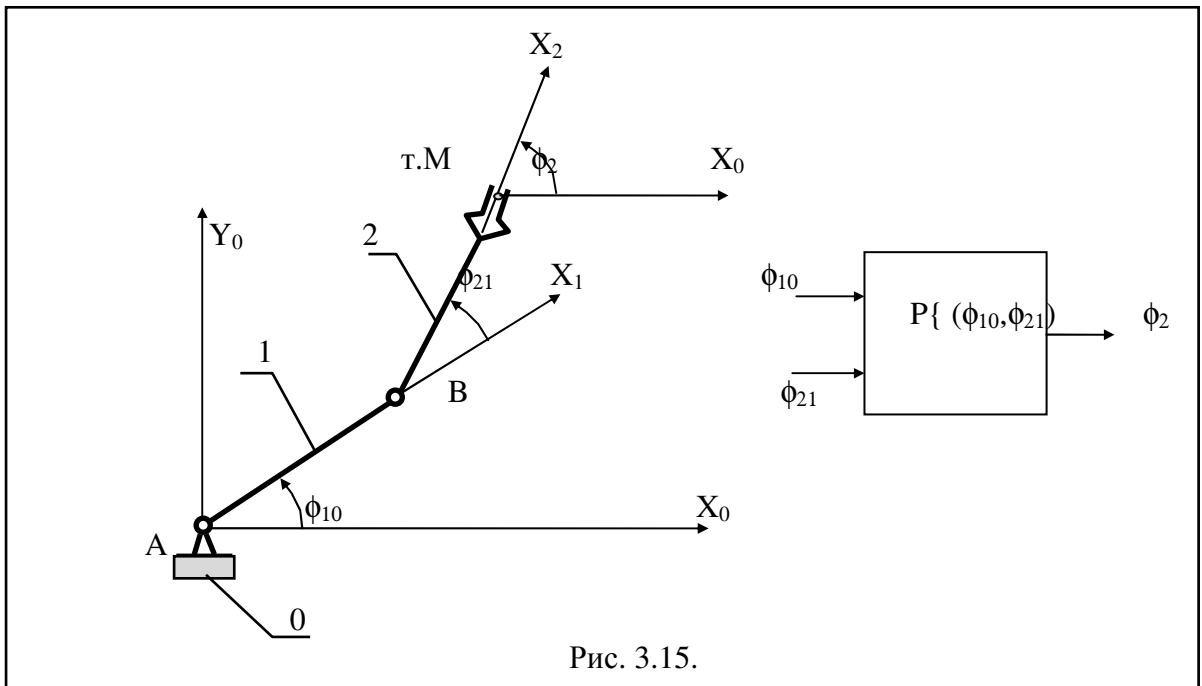


Рис. 3.15.

Функция положения для выходного звена этого механизма является функцией двух переменных

$$\phi_2 = P(\phi_{10}, \phi_{21}),$$

и ее производная определится как производная функции двух переменных

$$d\phi_2 = [dP(\phi_{10}, \phi_{21})/\delta\phi_{10}] d\phi_{10} + [dP(\phi_{10}, \phi_{21})/\delta\phi_{21}] d\phi_{21} = \omega_{q10} \cdot d\phi_{10} + \omega_{q21} \cdot d\phi_{21},$$

где  $\omega_{q10}$  и  $\omega_{q21}$  - частные производные по обобщенным координатам.

## ***Лекция 4.***

Краткое содержание: Динамика машин и механизмов. Динамические параметры машины и механизма. Прямая и обратная задачи динамики. Механическая энергия и мощность. Работа внешних сил. Преобразование механической энергии механизмами. Аксиома об освобождении от связей. Силы и их классификация. Силы в КП без учета трения. Статический и кинетостатический силовой расчет типовых механизмов. Методы силового расчета (графоаналитический - планов сил, аналитический - метод проекций на оси координат).

### ***Динамика машин и механизмов.***

Динамика - раздел механики машин и механизмов, изучающий закономерности движения звеньев механизма под действием приложенных к ним сил. В [ ] дано такое определение: «Динамика рассматривает силы в качестве причины движения тел».

В основе динамики лежат три закона, сформулированные Ньютоном, из которых следует:

*Из первого закона:* Если равнодействующая всех внешних сил, действующих на механическую систему равно нулю, то система находится в состоянии покоя.

*Из второго закона:* Изменение состояния движения механической системы может быть вызвано либо изменением действующих на нее внешних сил, либо изменением ее массы.

Из этих же законов следует, что динамическими параметрами механической системы являются:

- инерциальные (массы  $m$  и моменты инерции  $I$ );
- силовые (силы  $F_{ij}$  и моменты сил  $M_{ij}$ );
- кинематические (линейные  $a$  и угловые  $\varepsilon$  ускорения).

В общей постановке динамика - изучение каких-либо процессов или явлений в функции времени. Динамическая модель - модель системы, предназначенная для исследования ее свойств в функции времени (или модель системы, предназначенная для исследования в ней динамических явлений).

### ***Прямая и обратная задачи динамики машин.***

Прямая задача динамики - определение закона движения системы при заданном управляющем силовом воздействии.

Обратная задача динамики - определение требуемого управляющего силового воздействия, обеспечивающего заданный закон движения системы.

Методы составления уравнений (динамической модели системы):

- энергетический (уравнения энергетического равновесия - закон сохранения энергии);
- кинетостатический (уравнения силового равновесия с учетом сил инерции по принципу Д'Аламбера).

### ***Механическая работа, энергия и мощность.***

Работой называется интеграл скалярного произведения вектора силы  $F$  на вектор элементарного приращения перемещения точки ее приложения  $dS$

$$A = \int_{s_0}^{s_k} F \cdot dS \cdot \cos(\widehat{F, dS})$$

где  $s_k, s_0$  - конечное и начальное перемещение точки приложения силы  $F$ ,

$(\widehat{F, dS})$  - острый угол между вектором силы  $F$  и вектором перемещения точки ее приложения  $dS$ .

Энергией называется способность системы совершать работу или запас работы. Любая работа совершаемая над системой увеличивает его энергию. В механических системах различают кинетическую и потенциальную энергии. Чтобы сообщить системе ускорение и заставить ее двигаться с требуемой скоростью, нужно совершить работу. Эта работа запасается системой в виде энергии движения или кинетической энергии. Для механической системы, в которой  $r$  звеньев вращаются,  $p$  совершают поступательное движение и  $k$  - плоское, кинетическая энергия равна:

$$T = \sum_{i=1}^{p+k} m_i \cdot V_{si}^2 / 2 + \sum_{i=1}^{r+k} I_i \cdot \omega_i^2 / 2,$$

где  $m_i$  - масса  $i$ -го звена,  $V_{si}$  - скорость центра масс  $i$ -го звена,  $I_i$  - момент инерции  $i$ -го звена относительно его центра масс,  $\omega_i$  - угловая скорость  $i$ -го звена.

Перемещение системы или ее элемента в потенциальном поле из точки с низким потенциалом в точку с более высоким или деформация звена системы требует совершения работы, которая запасается системой в виде потенциальной энергии. Для системы, в которой  $a$  звеньев подвергаются скручиванию и  $s$  звеньев - линейной деформации, потенциальная энергия деформации равна:

$$U = \sum_{i=1}^a c_i \cdot \delta\phi_i^2 / 2 + \sum_{i=1}^s \kappa_i \cdot \delta s_i^2 / 2,$$

где  $c_i$  - крутильная жесткость  $i$ -го звена,  $\delta\phi_i$  - угловая деформация  $i$ -го звена,  $\kappa_i$  - линейная жесткость  $i$ -го звена,  $\delta s_i$  - линейная деформация  $i$ -го звена.

Мощностью называется производная от работы по времени. Средняя мощность - отношение совершенной работы ко времени ее выполнения. Рассмотрим механическую систему на которую воздействуют  $m$  моментов и  $f$  сил. Элементарное приращение энергии системы (элементарная работа внешних сил, действующих на систему)

$$dA = \sum_{i=1}^f F_i \cdot dS_i \cdot \cos(F_i, dS_i) + \sum_{i=1}^m M_i \cdot d\phi_i,$$

ее мощность

$$P = dA/dt = \sum_{i=1}^f F_i \cdot V_i \cdot \cos(F_i, V_i) + \sum_{i=1}^m M_i \cdot \omega_i.$$

**Преобразование энергии в механизмах.**

Рассмотрим как преобразуется поток механической энергии в идеальном механизме с жесткими звеньями (по идеальным механизмом здесь понимаем механизм, в котором не потеря энергии, т.е. КПД которого равно  $\eta = 1$ ). При этом входная мощность равна выходной  $P_{вх} = P_{вых}$ .

1. Механизм преобразующий вращательное движение во вращательное.

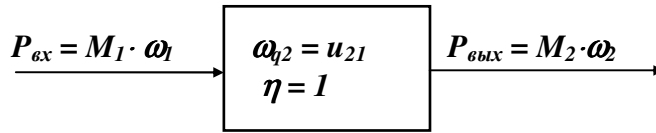


Рис.4.1

так как  $P_{вх} = P_{вых}$ , то  $M_1 \cdot \omega_1 = M_2 \cdot \omega_2$  и  $M_1 = M_2 \cdot \omega_2 / \omega_1 = M_2 \cdot u_{21}$ .

2. Механизм преобразующий вращательное движение в поступательное.

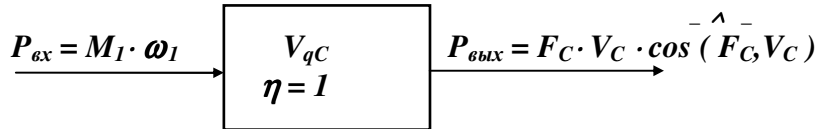


Рис.4.2

так как  $P_{вх} = P_{вых}$ , то  $M_1 \cdot \omega_1 = F_c \cdot V_c \cdot \cos(\alpha)$  и  $M_1 = F_c \cdot V_c \cdot \cos(\alpha) / \omega_1 = M_2 \cdot V_{qc} \cdot \cos(\alpha)$ .

**Аксиома освобождения от связей.**

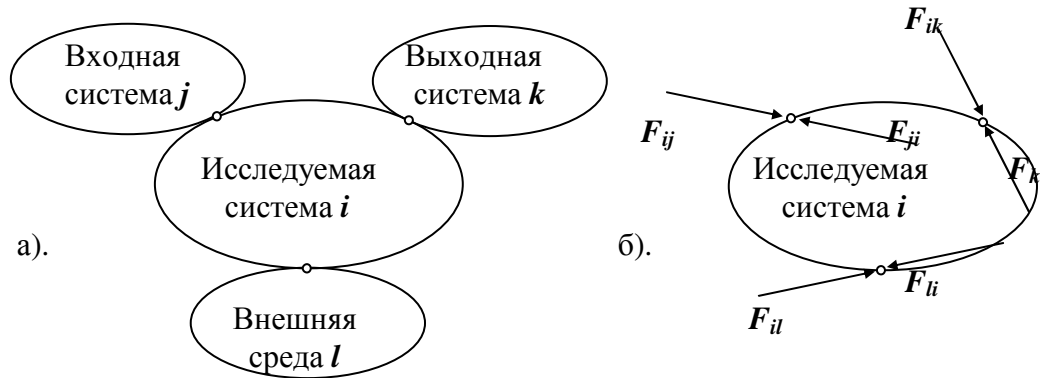


Рис. 4.3

*Из теоретической механики:* Не изменяя состояния механической системы (движения или равновесия) связь, наложенную на нее можно отбросить, заменив действие связи ее реакцией. На рис. 4.3а изображена исследуемая система  $i$  вместе с действующими на нее входной системой  $j$  и выходной системой  $k$  и внешней средой  $l$ . Освобождаясь от связей наложенных на исследуемую систему внешними системами, мы заменяем действие этих связей реакциями  $F_{ij}$ ,  $F_{ik}$  и  $F_{il}$ .

Силой называется мера механического воздействия одного материального тела на другое, характеризующая величину и направление этого воздействия. Т.е. сила - векторная величина, которая характеризуется величиной и направлением действия. Если одно тело действует с некоторой силой на другое тело, то на него со стороны последне-

го также действует сила, равная по величине и противоположно по направлению (третий закон Ньютона). Таким образом, силы всегда действуют парами, т.е. каждой силе  $F_{ij}$ , действующей с тела  $i$  на тело  $j$ , соответствует противодействующая сила  $F_{ji}$ . Согласно действующей договоренности, в индексе обозначения на первом месте указывается тело на которое действует сила, на втором - с которого.

### ***Классификация сил, действующих в механизмах.***

Все силы, действующие в механизмах, условно подразделяются на:

- внешние, действующие на исследуемую систему со стороны внешних систем и совершающие работу над системой. Эти силы в свою очередь подразделяются на:
  - ⇒ движущие, работа которых положительна (увеличивает энергию системы);
  - ⇒ сопротивления, работа которых отрицательна (уменьшает энергию системы). Силы сопротивления делятся на:
    - \* силы полезного (технологического) сопротивления - возникающие при выполнении механической системы ее основных функций (выполнение требуемой работы по изменению координат, формы или свойств изделия и т.п.);
    - \* силы трения (диссипативные) - возникающие в месте связи в КП и определяемые условиями физико-механического взаимодействия между звеньями (работа всегда отрицательна);
  - ⇒ взаимодействия с потенциальными полями (позиционные) - возникают при размещении объекта в потенциальном поле, величина зависит от потенциала точки, в которой размещается тело (работа при перемещении из точки с низким потенциалом в точку с более высоким - положительна; за цикл, т.е. при возврате в исходное положение, работа равна нулю). Потенциальное поле - силы тяжести или веса. Существуют электромагнитные, электростатические и другие поля.
- внутренние, действующие между звеньями механической системы. Работа этих сил не изменяет энергии системы. В механических системах эти силы называются реакциями в КП.
- расчетные (теоретические) - силы, которые не существуют в реальности, а только используются в различных расчетах с целью их упрощения:
  - ⇒ силы инерции - предложены Д'Аламбером для силового расчета подвижных механических систем. При добавлении этих сил к внешним силам, действующим на систему, устанавливается квазистатическое равновесие системы и ее можно рассчитывать, используя уравнения статики (метод кинетостатики).
  - ⇒ приведенные (обобщенные) силы - силы, совершающие работу по обобщенной координате равную работе соответствующей реальной силы на эквивалентном перемещении точки ее приложения.

Необходимо отметить, что под силами понимаются равнодействующие соответствующих распределенных в месте контакта КП нагрузок. Все вышесказанное относительно сил распространяется и на моменты сил.

### ***Силы в кинематических парах плоских механизмов (без учета трения).***



Сила, как векторная величина характеризуется относительно звеньев механизма тремя параметрами: координатами точки приложения, величиной и направлением. Рассмотрим с этих позиций реакции в КП плоских механизмов.

1. Поступательная КП. В поступательной КП связи, наложенные на относительное движение звеньев запрещают относительное поступательное движение по оси  $y$  и относительное вращение. Заменяя эти связи реакциями, получим реакцию  $F_{ij}$  и реактивный момент  $M_{ij}$  (см. рис. 4.4).

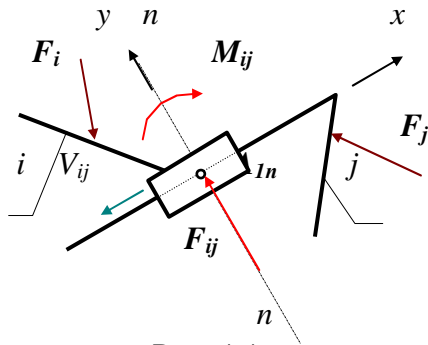


Рис. 4.4

Число связей в КП  $S^{мп} = 2$ , подвижность звеньев в КП  $W^{мп} = 1$ , число неизвестных при силовом расчете  $n_s = 2$ .

При силовом расчете поступательной КП определяются:

- реактивный момент  $M_{ij}$ ,
- величина реакции  $F_{ij}$ ;

известны: точка приложения силы - геометрический центр кинематической пары  $A_{1n}$  и направление - нормаль к контактирующим поверхностям звеньев.

2. Вращательная КП. Во вращательной КП связи, наложенные на относительное движение звеньев запрещают относительное поступательное движение по осям  $y$  и  $x$ . Заменяя эти связи реакциями, получим реакцию  $F_{ij}$  (см. рис. 4.5).

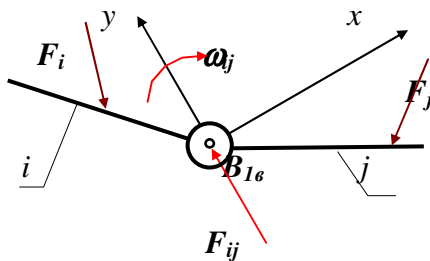


Рис.4.5

Число связей в КП  $S^{мп} = 2$ , подвижность звеньев в КП  $W^{мп} = 1$ , число неизвестных при силовом расчете  $n_s = 2$ .

При силовом расчете поступательной КП определяются:

- направление реакции  $F_{ij}$ ;
- величина реакции  $F_{ij}$ ;

известна: точка приложения силы - геометрический центр кинематической пары  $B_{1e}$ .

3. Высшая КП. В высшей паре связи, наложенные на относительное движение звеньев, запрещают движение в направлении нормали к контактирующим поверхностям (ось  $y$ ). Заменяя эту связь реакцией, получим реакцию  $F_{ij}$  (см. рис. 4.5).

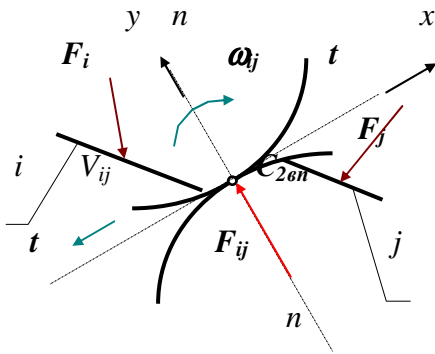


Рис.4.5

Число связей в КП  $S^{пл} = 1$ , подвижность звеньев в КП  $W^{пл} = 2$ , число неизвестных при силовом расчете  $n_s = 1$ .

**Силовой расчет типовых механизмов.**

Постановка задачи силового расчета: для исследуемого механизма при известных кинематических характеристиках и внешних силах определить уравнивающую силу или момент (управляющее силовое воздействие) и реакции в кинематических парах механизма.

Виды силового расчета:

- статический - для механизмов находящихся в покое или движущихся с малыми скоростями, когда инерционные силы пренебрежимо малы, или в случаях, когда неизвестны массы и моменты инерции звеньев механизма (на этапах, предшествующих эскизному проектированию);

Уравнения статического равновесия:

$$\sum_{i=1}^f F_i = 0; \quad \sum_{i=1}^m M_i = 0;$$

где  $F_i$  - внешние силы, приложенные к механизму или его звеньям,  
 $M_i$  - внешние моменты сил, приложенные к механизму или его звеньям.

- кинетостатический - для движущихся механизмов при известных массах и моментах инерции звеньев, когда пренебрежение инерционными силами приводит к существенным погрешностям;

Уравнения кинетостатического равновесия:

$$\sum_{i=1}^f F_i + \sum_{i=1}^n F_{ui} = 0; \quad \sum_{i=1}^m M_i + \sum_{i=1}^k M_{ui} = 0;$$

где  $F_{ui}$  - инерционные силы, приложенные к звеньям,  
 $M_{ui}$  - моменты сил инерции, приложенные к звеньям.

- кинетостатический с учетом трения - может быть проведен когда определены характеристики трения в КП и размеры элементов пар.

Определение числа неизвестных при силовом расчете. Для определения числа неизвестных, а, следовательно, и числа независимых уравнений, при силовых расчетах необходимо провести структурный анализ механизма и определить число и классы кинематических пар, число основных подвижностей механизма, число избыточных связей. Чтобы силовой расчет можно было провести, используя только уравнения кинестатики, необходимо устранить в нем избыточные связи. В противном случае, к систе-

При силовом расчете в высшей КП определяются:

- величина реакции  $F_{ij}$ ;
- известны:
  - точка приложения силы - точка контакта рабочих профилей кинематической пары  $C_{2en}$ ;
  - направление вектора силы - контактная нормаль к профилям.

ме уравнений кинестатики необходимо добавить уравнения деформации звеньев, необходимые для раскрытия статической неопределенности механизма. Так как каждая связь в КП механизма соответствует одной компоненте реакции, то число неизвестных компонент реакций равно суммарному числу связей накладываемых КП механизма. Уравновешивающая сила или момент должны действовать по каждой основной подвижности механизма. Поэтому суммарное число неизвестных в силовом расчете определяется суммой связей в КП механизма и его основных подвижностей

$$n_s = W_0 + \sum_{i=1}^{H-1} (H-i) p_i,$$

где  $n_s$  - число неизвестных в силовом расчете.

**Кинестатический силовой расчет типовых механизмов.**

Рассмотрим механизм, состоящий из трех соединенных последовательно простых механизмов: зубчатой передачи, кулачкового механизма и четырехшарнирного рычажного механизма (рис. 4.6).

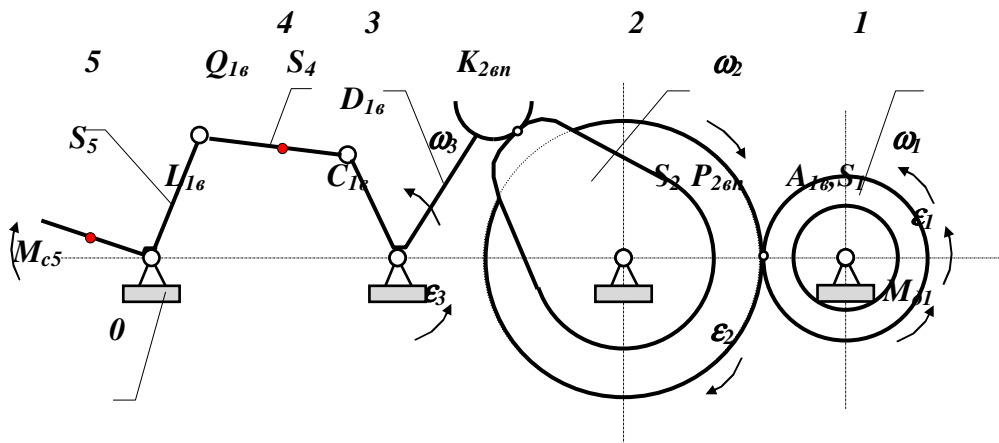


Рис. 4.6

Представим этот механизм в виде комбинации типовых механизмов:

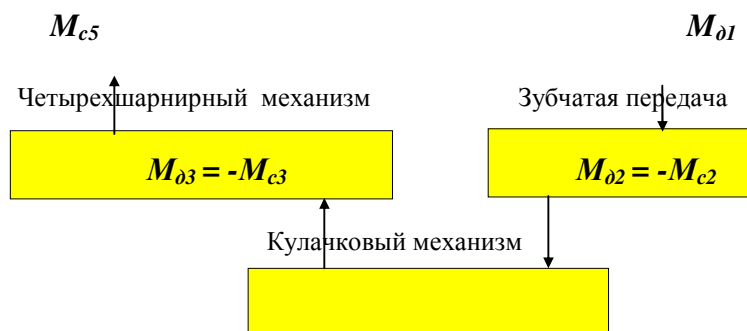


Рис. 4.7

1. Кинестатический расчет зубчатой передачи (метод планов сил).

Для примера рассмотрим цилиндрическую эвольвентную зубчатую передачу. При проведении расчета нам необходима информация о размерах зубчатых колес и положении контактной нормали в высшей КП. Для эвольвентной передачи необходимо знать радиусы основных  $r_{b1}, r_{b2}$  или начальных окружностей  $r_{w1}, r_{w2}$ , и угол зацепления  $\alpha_w$ , т.к.  $r_{bi} = r_{wi} \cdot \cos \alpha_w$ . По этим размерам в масштабе изображается кинематическая схема механизма, на которую наносятся все известные силы и моменты. Главные вектора и моменты сил инерции рассчитываются по формулам

$$F_{ui} = - m_i \cdot a_{Si}, \quad M_{ui} = I_{Si} \cdot \varepsilon_i,$$

так как кинематические параметры  $a_{Si}, \varepsilon_i$  механизма при кинетостатическом расчете заданы.

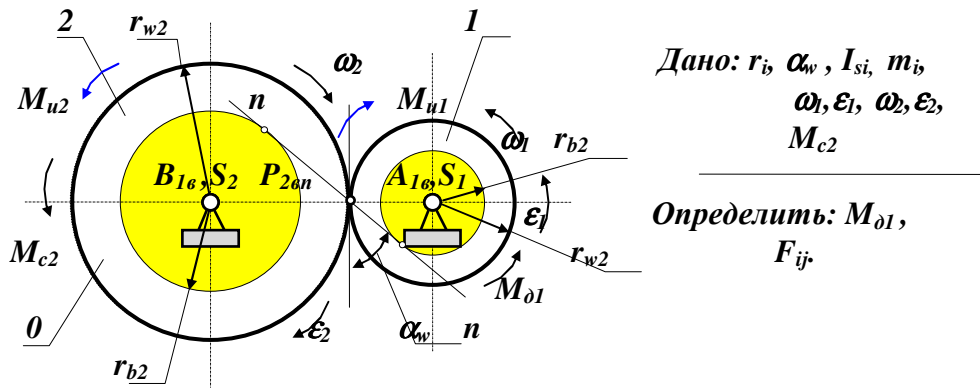


Рис. 4.8.

Определим подвижность, число избыточных связей в механизме, а также число неизвестных в силовом расчете:

$$W^{nl} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1, \quad q^{nl} = 1 + 0 - 1 = 0, \quad n_s = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 = 6,$$

т.е. в нашем механизме неизвестно 6 компонент реакций, для решения задачи силового расчета необходимо составить 6 уравнений кинетостатики. Структурный анализ механизма показывает что механизм состоит из одного первичного механизма (звено 1 и стойка) и монады (структурной группы, состоящей из одного звена 2). Анализ начнем со второго звена, так как о нем больше известно.

#### 1.1. Звено 2.

Расчетная схема для звена 2 приведена на рис. 4.9. Уравнения равновесия для звена 2:

векторное уравнение силового равновесия

$$\sum \bar{F} = 0; \quad \bar{F}_{21} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{20} = 0;$$

уравнение моментов относительно точки В

$$\sum M_B = 0; \quad M_{c2} + M_{u2} + F_{21} \cdot r_{b2} = 0.$$

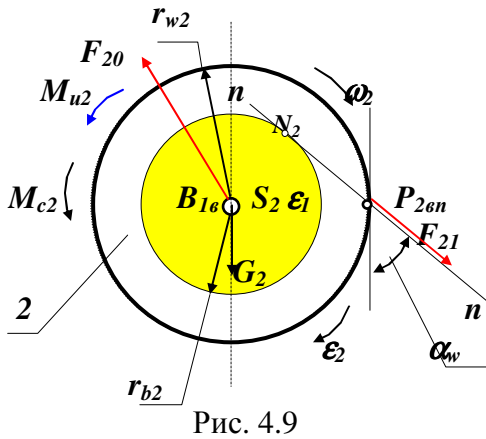


Рис. 4.9

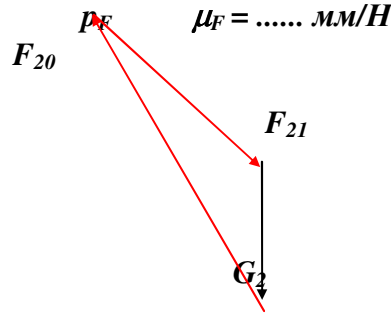


Рис. 4.10

В начале решается уравнение моментов и определяется величина силы  $F_{21}$ . Затем графически в масштабе  $\mu_F$ , по векторному уравнению сил строится многоугольник (рис.4.10), из которого определяется величина и направление реакции  $F_{20}$ .

2.1. Звено 1.

Расчетная схема для звена 1 приведена на рис. 4.11. Уравнения равновесия для звена 1:

векторное уравнение силового равновесия

$$\sum \bar{F} = 0; \quad \bar{F}_{12} + \bar{G}_1 + \bar{F}_{10} = 0;$$

уравнение моментов относительно точки А

$$\sum M_A = 0; \quad M_{c1} - M_{u1} + F_{12} \cdot r_{b1} = 0.$$

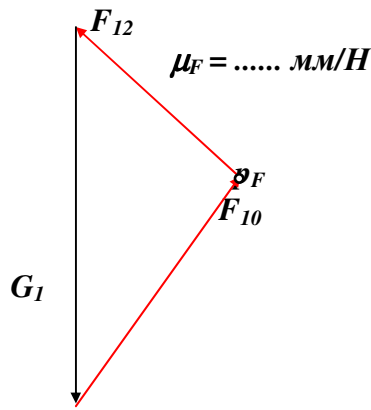


Рис. 4.12

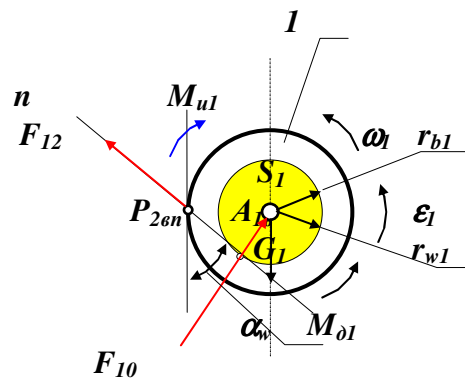


Рис. 4.11

Для звена 1 движущий момент  $M_{d1}$  рассчитывается по уравнению моментов, а величина и направление реакции  $F_{10}$  определяется графически (рис.4.12), построением плана сил в масштабе  $\mu_F$ .

Примечание: Кулачковый механизм рассчитывается аналогично, поэтому его силовой расчет не рассматриваем.

2. Кинетостатический расчет четырехшарнирного механизма (метод проекций или аналитический).

Изобразим расчетную схему механизма и нанесем на нее все внешние силы и моменты (рис.4.13).

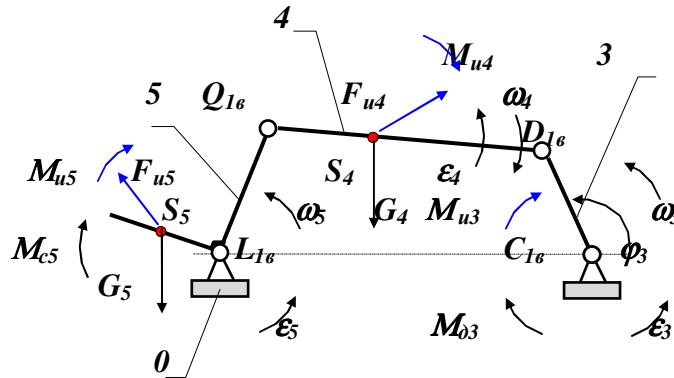


Рис. 4.13

Постановка задачи. Дано:  $l_i, \varphi_3, \omega_3, \epsilon_3, m_i, I_{Si}, M_{c5}$ .

Определить:  $F_{ij}, M_{03}$ .

1. Определение подвижности механизма, числа избыточных связей в КП и числа неизвестных в силовом расчете.

$$W^{nl} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1, \quad q^{nl} = 1 + 0 - 1 = 0, \quad n_s = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

2. Определение скоростей и ускорений звеньев и центров их масс.
3. Определение главных векторов и главных моментов сил инерции.

$$F_{ui} = - m_i \cdot a_{Si}, \quad M_{ui} = I_{Si} \cdot \epsilon_i.$$

4. Кинестатический расчет механизма.

4.1. Звено 5 (рис. 4.14).

Уравнения силового равновесия в проекциях на оси координат

$$\sum F^x_5 = 0; \quad -F^x_{54} + F^x_{50} - F^x_{u5} = 0;$$

$$\sum F^y_5 = 0; \quad -F^y_{54} + F^y_{50} + F^y_{u5} - G_5 = 0;$$

и сумма моментов сил относительно точки L

$$\sum M_L = 0; \quad -F^y_{54} \cdot x_Q + F^x_{54} \cdot y_Q - M_{c5} - M_{u5} + (-F^y_{u5} + G_5) \cdot x_{S5} + F^x_{u5} \cdot y_{S5} = 0.$$

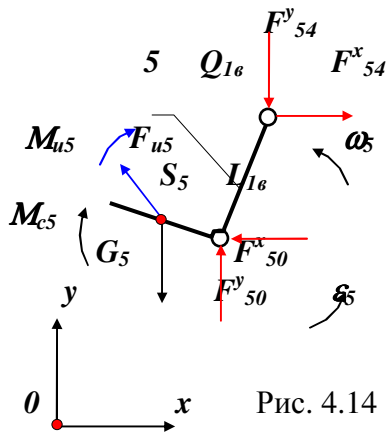


Рис. 4.14

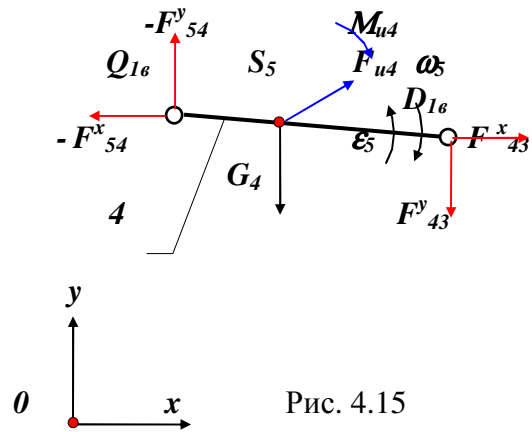


Рис. 4.15

4.2. Звено 4. (рис. 4.15).

Уравнения силового равновесия в проекциях на оси координат

$$\sum F^x_4 = 0; \quad F^x_{54} + F^x_{43} + F^x_{u4} = 0;$$

$$\sum F^y_5 = 0; \quad -F^y_{54} - F^y_{43} + F^y_{u4} - G_4 = 0;$$

и сумма моментов сил относительно точки Q

$$\sum M_Q = 0; \quad -F^y_{43} \cdot x_{D4} + F^x_{43} \cdot y_{D4} - M_{u4} + (F^y_{u4} - G_4) \cdot x_{S4} + F^x_{u4} \cdot y_{S4} = 0.$$

4.3. Звено 3. (рис. 4.16).

Уравнения силового равновесия в проекциях на оси координат

$$\sum F^x_3 = 0;$$

$$F^x_{30} + F^x_{43} = 0;$$

$$\sum F^y_3 = 0;$$

$$-F^y_{30} - F^y_{43} = 0;$$

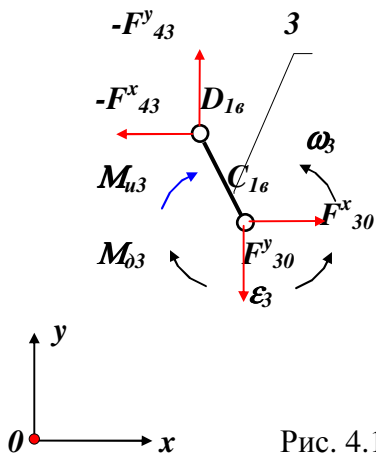


Рис. 4.16

и сумма моментов сил относительно точки С

$$\sum M_C = 0; \quad F^y_{43} \cdot x_{D3} - F^x_{43} \cdot y_{D3} - M_{u3} - M_{o3} = 0.$$

Таким образом мы составили систему 9-и уравнение с 9-ю неизвестными. При составлении этой системы были учтены равенства действия и противодействия  $F_{ij} = -$

$F_{ji}$  ( без учета этих равенств общее число неизвестных и уравнений системы 18 ). Составим матрицу этой системы:

$F^y_{50}$	$F^x_{50}$	$F^y_{54}$	$F^x_{54}$	$F^y_{43}$	$F^x_{43}$	$F^y_{30}$	$F^x_{30}$	$M_{03}$	=
	<b>1</b>		<b>-1</b>						$F^x_{u5}$
<b>1</b>		<b>-1</b>							$-F^y_{u5} + G_5$
		$-x_Q$	$y_Q$						$M_{c5} + M_{u5} + (F^y_{u5} - G_5) \cdot x_{S5} - F^x_{u5} \cdot y_{S5}$
			<b>1</b>		<b>1</b>				$-F^x_{u4}$
		<b>-1</b>		<b>-1</b>					$-F^y_{u4} + G_4$
				$-x_{D4}$	$y_{D4}$				$M_{u4} + (-F^y_{u4} + G_4) \cdot x_{S4} - F^x_{u4} \cdot y_{S4}$
					<b>1</b>		<b>1</b>		<b>0</b>
				<b>-1</b>		<b>-1</b>			<b>0</b>
				$x_{D3}$	$-y_{D3}$			<b>-1</b>	$M_{u3}$

Из решения этой системы уравнений определяются реакции в КП и движущий момент  $M_{03}$ .

Примечание: Более подробно с силовым расчетом рычажных механизмов Вы познакомитесь на упражнениях и при выполнении 2-го домашнего задания.



## *Лекция 5.*

Краткое содержание: Вибрации и колебания в машинах и механизмах, виброактивность и виброзащита. Понятие о неуравновешенности звена и механизма, статической и динамической уравновешенности механической системы. Статическое уравновешивание рычажных механизмов. Метод замещающих масс. Полное и частичное статическое уравновешивание механизма. Ротор и виды его неуравновешенности: статическая, моментная и динамическая. Балансировка роторов при проектировании. Балансировочные станки.

### ***Вибрации и колебания в машинах и механизмах.***

При движении механической системы под действием внешних сил в ней могут возникать механические колебания или вибрации. Причинами возникновения вибраций могут быть периодические изменения сил (силовое возмущение), перемещений (кинематическое возмущение) или инерционных характеристик (параметрическое возмущение). Вибрацией (от лат. vibratio - колебание) называют механические колебания в машинах или механизмах. Колебание - движение или изменение состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости или периодичностью. Если источник возникновения вибраций определяется внутренними свойствами машины или механизма, то говорят о его виброактивности. Чтобы вибрации механизма не распространялись на окружающие его системы или чтобы защитить механизм от вибраций, воздействующих на него со стороны внешних систем, применяются различные методы виброзащиты. Различают внешнюю и внутреннюю виброактивность. Под внутренней виброактивностью понимают колебания возникающие внутри механизма или машины, которые происходят по его подвижностям или обобщенным координатам. Эти колебания не оказывают непосредственного влияния на окружающую среду. При внешней виброактивности изменение положения механизма приводит к изменению реакций в опорах (т.е. связях механизма с окружающей средой) и непосредственному вибрационному воздействию на связанные с ним системы. Одна из основных причин внешней виброактивности - неуравновешенность его звеньев и механизма в целом.

### ***Понятие о неуравновешенности механизма (звена).***

Неуравновешенным будем называть такой механизм (или его звено), в котором при движении центр масс механизма (или звена) движется с ускорением. Так как ускоренное движение системы возникает только в случае, если равнодействующая внешних силовых воздействий не равна нулю. Согласно принципу Д'Аламбера, для уравновешивания внешних сил к системе добавляются расчетные силы - силы и моменты сил инерции. Поэтому уравновешенным будем считать механизм, в котором главные вектора и моменты сил инерции равны нулю, а неуравновешенным механизм, в котором эти силы неравны нулю. Для примера рассмотрим четырехшарнирный механизм (рис. 5.1).

Механизм будет находиться в состоянии кинетостатического равновесия, если сумма действующих на него внешних сил и моментов сил (включая силы и моменты сил инерции) будет равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n G_i + \sum_{i=1}^n F_{ii} + P_{oI} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{ii} + M_{c3} = 0.$$

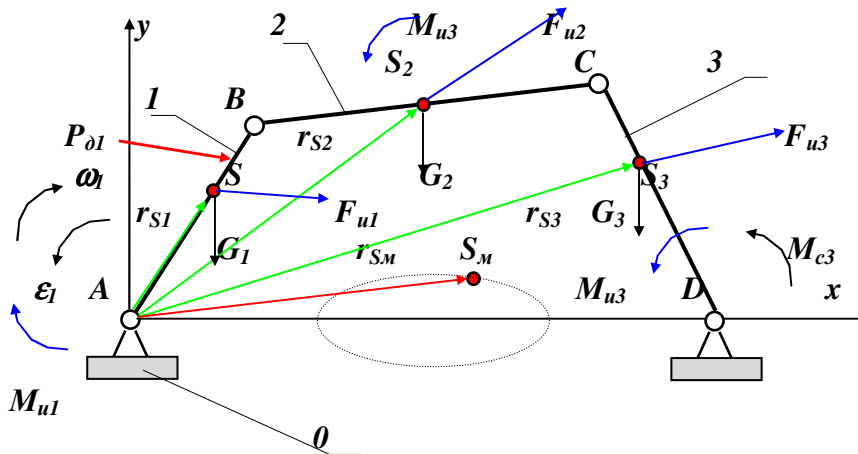


Рис. 5.1

Уравновешенность является свойством или характеристикой механизма и не должна зависеть от действующих на него внешних сил. Если исключить из рассмотрения все внешние силы, то в уравнении равновесия останутся только инерционные составляющие, которые определяются инерционными параметрами механизма - массами и моментами инерции и законом движения (например, центра масс системы). поэтому уравновешенным считается механизм для которого главный вектор и главный момент сил инерции равны нулю:

$$F_{SM} = \sum_{i=1}^n F_{ui} = -\sum_{i=1}^n m_i \cdot a_{SM} = 0; \quad M_{um} = \sum_{i=1}^n M_{ui} = 0.$$

Неуравновешенность - такое состояние механизма при котором главный вектор или главный момент сил инерции не равны нулю. Различают:

- статическую неуравновешенность  $F_{SM} \neq 0$  ;
- моментную неуравновешенность  $M_{um} \neq 0$  ;
- динамическую неуравновешенность  $F_{SM} \neq 0$  и  $M_{um} \neq 0$  .

При статическом уравновешивании механизма необходимо обеспечить

$$F_{SM} = 0 \text{ , так как } \sum_{i=1}^n m_i \neq 0 \text{ , то } a_{SM} = 0 \text{ .}$$

Это условие можно выполнить если: скорость центра масс механизма равна нулю  $V_{SM}=0$  или она постоянна по величине и направлению  $V_{SM} = const$ . Обеспечить выполнение условия  $V_{SM} = const$  в механизме практически невозможно. Поэтому при статическом уравновешивании обеспечивают выполнение условия  $V_{SM}=0$  . Это возможно, когда центр масс механизма лежит на оси вращения звена 1 -  $r_{SM}=0$  или когда он неподвижен  $r_{SM}=const$  , где

$$r_{SM} = (m_1 \cdot r_{S1} + m_2 \cdot r_{S2} + \dots + m_i \cdot r_{Si}) / (m_1 + m_2 + \dots + m_i).$$

На практике наиболее часто статическое уравновешивание проводят:

- выбирая симметричные схемы механизма (рис.5.2);

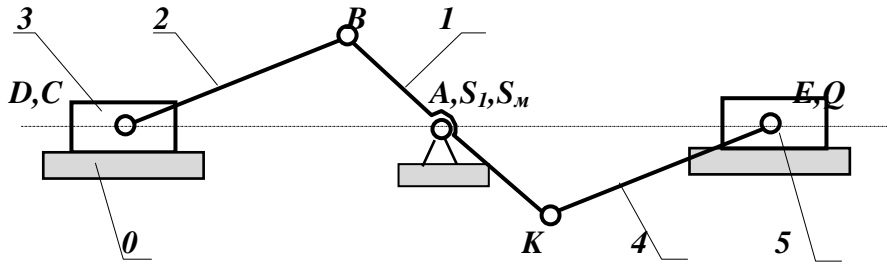


Рис. 5.2

- устанавливая на звеньях механизма противовесы (или корректирующие массы);
- размещая противовесы на дополнительных звеньях или кинематических цепях.

**Метод замещающих масс.**

При использовании метода замещающих масс, звено механизма с распределенной массой заменяется расчетной моделью, которая состоит из точечных масс.

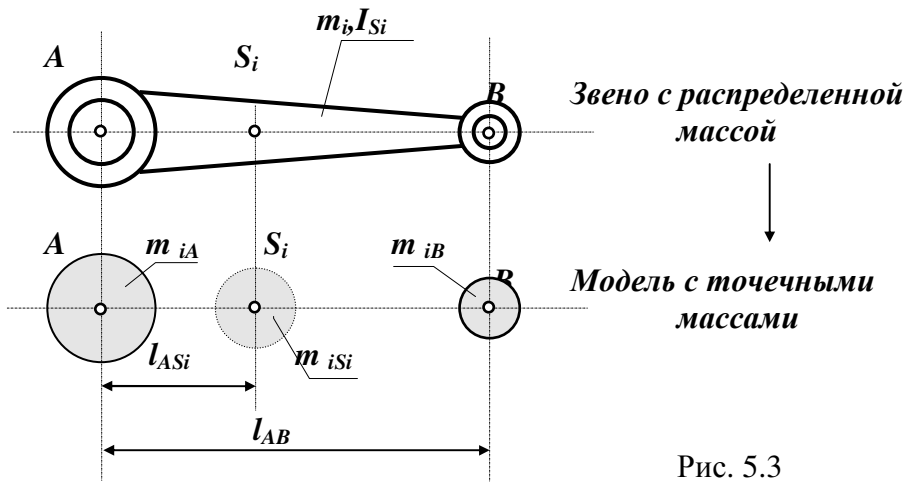


Рис. 5.3

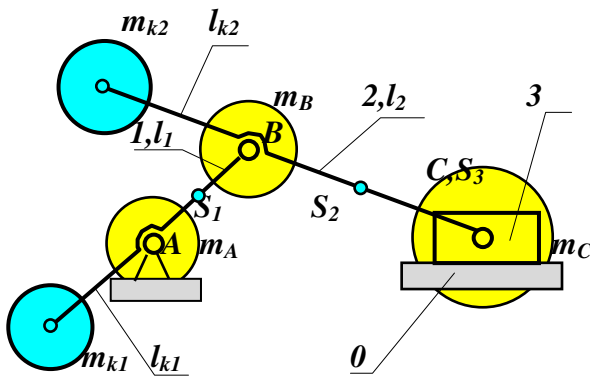
**Условия перехода от звена с распределенной массой к модели с точечными массами.**

1. Сохранение массы звена:  $m_{iA} + m_{iB} = m_i$ .
2. Сохранение положения центра масс  $l_{ASi} = const$ ,  
 $m_{iA} \cdot l_{ASi} = m_{iB} \cdot (l_{AB} - l_{ASi})$ .
3. Сохранение момента инерции  
 $m_{iA} \cdot l_{ASi}^2 + m_{iB} \cdot (l_{AB} - l_{ASi})^2 = I_{Si}$ .

Очевидно, что выполнить три условия системой с двумя массами невозможно, поэтому при статическом уравнивании механизмов ограничиваются выполнением только двух первых условий. Чтобы обеспечить выполнение всех трех условий необхо-

димом ввести третью массу  $m_{i3}$ . Рассмотрим применение метода замещающих масс при полном и частичном статическом уравнивании кривошипно-ползунного механизма.

**Полное статическое уравнивание кривошипно- ползунного механизма.**



Постановка задачи:

Дано:  $l_{AB}, l_{BC}, l_{AS1}, l_{BS2}, l_{CS3}=0,$

$m_1, m_2, m_3$

Определить:  $m_{k1}, m_{k2}$

Рис. 5.4

Распределим массы звеньев по методу замещающих масс и сосредоточим их в центрах шарниров  $A, B, C$ . Тогда

$$m_B = m_{B1} + m_{B2}, \quad m_C = m_3 + m_{C2}, \quad m_A = m_{A1},$$

где  $m_1 = m_{A1} + m_{B1}$  - масса первого звена, распределенная между массами, сосредоточенными в точках  $B$ ;

$m_2 = m_{B2} + m_{C2}$  - масса второго звена, распределенная между массами, сосредоточенными в точках  $B$  и  $C$ .

Вначале проведем уравнивание массы  $m_C$  корректирующей массой  $m_{k2}$ . Составим уравнение статических моментов относительно точки  $B$  для звеньев 2 и 3:

$$m_{k2} \cdot l_{k2} = m_C \cdot l_{BC}.$$

Задаемся величиной  $l_{k2}$  и получаем корректирующую массу  $m_{k2} = m_C \cdot l_{BC} / l_{k2}$ . Затем уравниваем массы центр, которых после установки корректирующей массы расположился в точке  $B$ :

$$m_B^* = m_2 + m_{k2} + m_3 + m_{B1}.$$

Составляем уравнение статических моментов относительно точки  $A$ :

$$m_{k1} \cdot l_{k1} = m_B^* \cdot l_{AB}.$$

Задаемся величиной  $l_{k1}$  и получаем корректирующую массу

$$m_{k1} = m_B^* \cdot l_{AB} / l_{k1}.$$

Окончательно величины корректирующих масс для полного уравнивания кривошипно-ползунного механизма

$$m_{k2} = m_C \cdot l_{BC} / l_{k2} = (m_{C2} + m_3) \cdot l_{BC} / l_{k2};$$

$$m_{k1} = m_B^* \cdot l_{AB} / l_{k1} = (m_2 + m_{k2} + m_3 + m_{B1}) \cdot l_{AB} / l_{k1}.$$

**Частичное статическое уравнивание кривошипно-ползунного механизма.**

**1. Уравновешивание вертикальной составляющей главного вектора сил инерции.**

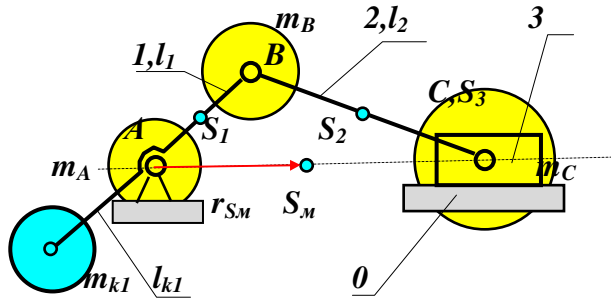


Рис. 5.5

В этом случае необходимо добиться, чтобы центр масс механизма при движении перемещался вдоль направляющей ползуна (для схемы на рис. 5.5 по горизонтали). Для этого достаточно уравновесить только массу  $m_B$ . Составляем уравнение статических моментов относительно точки  $A$ :  $m_{k1} \cdot l_{k1} = m_B \cdot l_{AB}$ . Задаемся величиной  $l_{k1}$  и получаем корректирующую массу  $m_{k1} = m_B \cdot l_{AB} / l_{k1}$ . Окончательно величина корректирующей массы для уравновешивания вертикальной составляющей главного вектора сил инерции кривошипно-ползунного механизма

$$m_{k1} = m_B \cdot l_{AB} / l_{k1} = (m_{B2} + m_{B1}) \cdot l_{AB} / l_{k1}.$$

**2. Уравновешивание горизонтальной составляющей главного вектора сил инерции.**

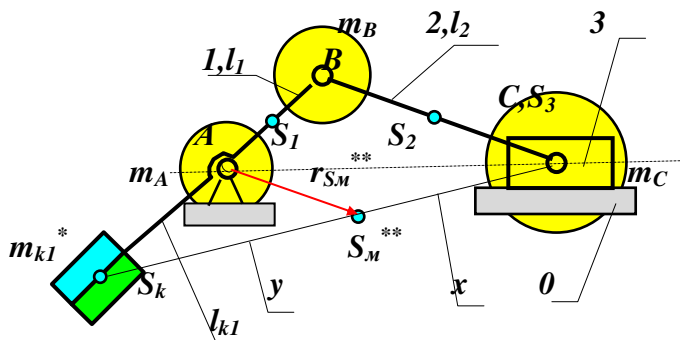


Рис. 5.6

В этом случае необходимо добиться, чтобы центр масс механизма при движении перемещался по дуге окружности радиуса  $r_{SM}^{**}$  (рис.5.6). Расчет корректирующей массы ведется в два этапа. В начале первой составляющей корректирующей массы  $m_{k1}^*$  уравновешивается масса  $m_B$ . Составляется, как и в предыдущем примере, уравнение стати-

Постановка задачи:

Дано:  $l_{AB}, l_{BC}, l_{AS1}, l_{BS2}, l_{CS3}=0,$

$m_1, m_2, m_3$

Определить:  $m_{k1}$

Постановка задачи:

Дано:  $l_{AB}, l_{BC}, l_{AS1}, l_{BS2},$   
 $l_{CS3}=0, m_1, m_2, m_3$

Определить:  $m_{k1}$

ческих моментов относительно точки  $A$  :  $m_{k1}^* \cdot l_{k1} = m_B \cdot l_{AB}$  . Задается величина  $l_{k1}$  и рассчитывается корректирующая масса  $m_{k1}^* = m_B \cdot l_{AB} / l_{k1} = (m_{B2} + m_{B1}) \cdot l_{AB} / l_{k1}$  . Затем с помощью второй составляющей корректирующей массы  $m_{k1}^{**}$  центр массы  $m_C$  перемещается в точку  $S_M^{**}$  . Величина  $m_{k1}^{**}$  определяется следующим образом: центр шарнира  $C$  соединяется прямой с концом отрезка  $l_{k1}$  точкой  $S_k$  . Радиус  $r_{S_M^{**}}$  проводится параллельно отрезку  $BC$  . Тогда

$$\Delta S_k B C \sim \Delta S_k A S_M^{**} \quad \text{и} \quad x/y = l_{k1} / l_{AB} .$$

Статический момент относительно точки  $S_M^{**}$  :

$$m_{k1}^{**} \cdot x = m_C \cdot y, \quad m_{k1}^{**} = m_C \cdot y/x = m_C \cdot l_{AB} / l_{k1} .$$

Радиус-вектор  $r_{S_M^{**}}$  определяется из подобия треугольников из пропорций

$$x / r_{S_M^{**}} = (x + y) / l_{BC}, \quad x / (x + y) = l_{k1} / (l_{k1} + l_{AB}),$$

откуда

$$r_{S_M^{**}} = [l_{k1} / (l_{k1} + l_{AB})] \cdot l_{BC} = const.$$

Корректирующая масса, обеспечивающая уравнивание горизонтальной составляющей главного вектора сил инерции кривошипно-ползунного механизма, размещается на первом звене механизма и равна сумме составляющих

$$m_{k1} = m_{k1}^* + m_{k1}^{**} = (m_2 + m_3 + m_{B1}) l_{AB} / l_{k1} .$$

Центр массы механизма при таком уравнивании расположен в точке  $S_M$  , которая движется по дуге радиуса  $r_{S_M}$

$$r_{S_M} = (m_{C2} + m_3 + m_{k1}^{**}) \cdot r_{S_M^{**}} / (m_1 + m_2 + m_3 + m_{k1}) .$$

Схема распределения масс в механизме после уравнивания дана на рис. 5.7.

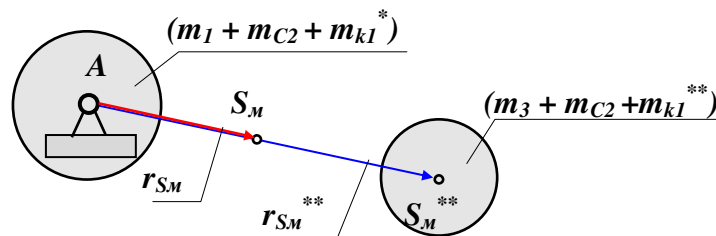


Рис. 5.7

### Балансировка роторов.

**1. Общие сведения о балансировке. Ротор, неуравновешенность ротора и ее виды. Задачи балансировки.**

Ротором ( по ГОСТ 19534-74 ) называют звенья механизмов, совершающие вращательное движение и удерживаемые при этом своими несущими поверхностями в опорах. Если масса ротора распределена относительно оси вращения равномерно, то главная центральная ось инерции  $x-x$  совпадает с осью вращения и ротор является уравновешенным или идеальным. При несовпадении оси вращения с осью  $x-x$ , ротор будет неуравновешенным и в его опорах при вращении возникнут переменные реакции, вызванные действием инерционных сил и моментов ( точнее, движением центра масс с ускорением ).

В зависимости от взаимного расположения оси вращения и главной центральной оси инерции  $x-x$ , по ГОСТ 19534-74, различают следующие виды неуравновешенности роторов (рис. 5.8): а - статическую, когда эти оси параллельны; б - моментную, когда оси пересекаются в центре масс ротора  $S$ ; в - динамическую, когда оси либо пересекаются вне центра масс, либо не пересекаются, а перекрещиваются в пространстве.

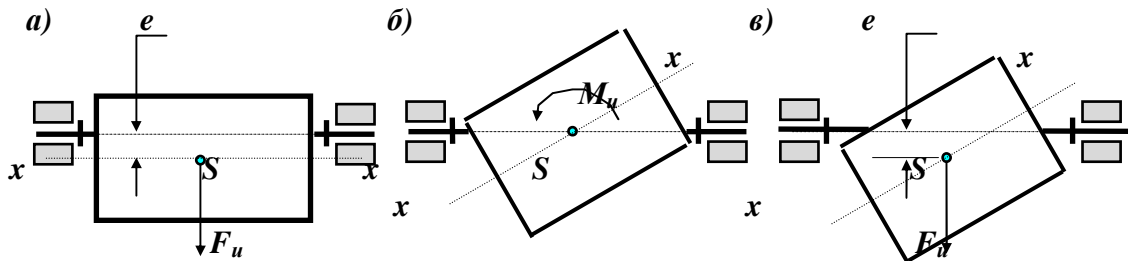


Рис. 5.8

Как отмечено выше, неуравновешенность определяется конструктивными характеристиками ротора или механизма и не зависит от параметров движения. Поэтому при балансировке оперируют не инерционными силами, а дисбалансами. Дисбаланс - мера статической неуравновешенности ротора, векторная величина, равная произведению неуравновешенной массы  $m$  на ее эксцентриситет  $e$ , где эксцентриситет  $e$  - радиус-вектор центра этой массы относительно оси ротора. Направление главного вектора дисбаланса  $D$  совпадает с направлением главного вектора сил инерции  $F_u$ , действующих на ротор при вращении:

$$F_u = m \cdot e \cdot \omega^2 = D \cdot \omega^2.$$

Моментная неуравновешенность характеризуется главным моментом дисбалансов ротора  $M_D$ , который пропорционален главному моменту сил инерции (рис. 5.9):

$$M_u = D_M \cdot l \cdot \omega^2 = M_D \cdot \omega^2.$$

Главный момент дисбалансов ротора полностью определяется моментом пары равных по величине и противоположных по направлению дисбалансов  $D_{M1} + D_{M2} = D_M$ , расположенных в двух произвольных плоскостях ( I и II ), перпендикулярных оси вращения ротора. Дисбаланс и момент дисбалансов не зависят от частоты вращения, они полностью определяются конструкцией ротора и точностью его изготовления. Балансировкой называют процесс определения значений и угловых координат дисбалансов ротора и их уменьшения с помощью корректировки размещения его масс. Балансировка эквивалентна уравновешиванию системы инерционных сил, прикладываемых к подвижному ротору для его равновесия.

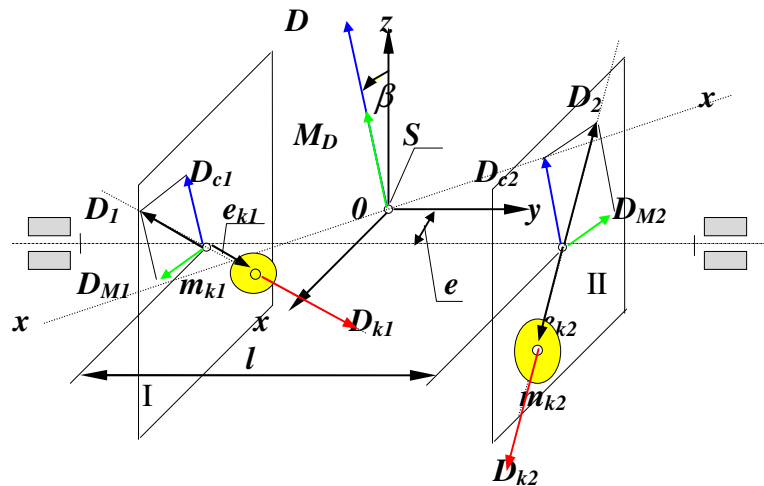


Рис. 5.9

Эту систему, как и любую произвольную систему сил, можно заменить равнодействующими - главным вектором и главным моментом или двумя векторами, расположенными в произвольных параллельных плоскостях. Для уравнивания системы сил достаточно уравновесить эти равнодействующие. При балансировке операции над силами заменяют действиями над дисбалансами. Поэтому для жестких роторов вышесказанное можно сформулировать так: жесткий ротор можно уравновесить двумя корректирующими массами, расположенными в двух произвольно выбранных плоскостях, перпендикулярных оси его вращения. Эти плоскости называют плоскостями коррекции.

Задача балансировки ротора заключается в определении, в выбранных плоскостях коррекции, значений и углов дисбалансов и размещении в этих плоскостях корректирующих масс, дисбалансы которых равны по величине и противоположны по направлению найденным дисбалансам ротора. На практике балансировку проводят: при конструировании - расчетными методами, в процессе изготовления деталей и узлов - экспериментально на специальных балансировочных станках. Балансировка на станках является более точным и надежным методом, по сравнению с расчетными. Поэтому она применяется для ответственных деталей с высокими рабочими частотами вращения. Корректировка масс ротора осуществляется либо присоединением к нему дополнительных корректирующих масс (наплавлением, наваркой или привинчиванием противовесов), либо удалением части массы ротора с «тяжелой» стороны (фрезерованием или высверливанием). Точность балансировки характеризуется величиной остаточного дисбаланса  $D_0$  ротора в каждой из плоскостей коррекции. Величина  $D_0$  не должна превышать допустимых для данного класса точности значений, регламентируемых ГОСТ 22061-76.



## 2. Балансировка роторов при различных видах неуравновешенности.

### 2.1. Статическая неуравновешенность.

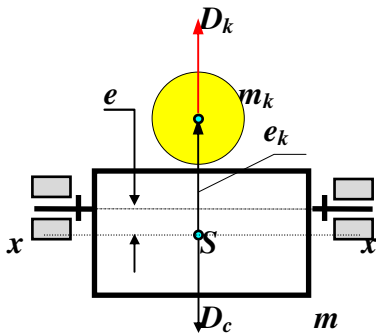


Рис. 5.10

При статической неуравновешенности (рис.5.10) главная центральная ось инерции параллельны оси вращения ротора, главный вектор дисбалансов больше нуля, а главный момент дисбалансов равен нулю

$$D_c > 0; M_D = 0,$$

т.е. необходимо уравновесить только вектор  $D_c = m \cdot e$ . Для этого достаточно установить на роторе только одну корректирующую массу  $m_k$  величине которой определяется из равенства  $D_k = m_k \cdot e_k = -D_c \Rightarrow m_k = D_k / e_k$ , где величиной  $e_k$  задаются из соображений удобства размещения противовесов. Направление вектора  $D_k$  противоположно направлению  $D_c$ .

Условие статической уравновешенности ротора:

$$\sum_{i=1}^n D_i = 0$$

### 2.2. Моментная неуравновешенность.

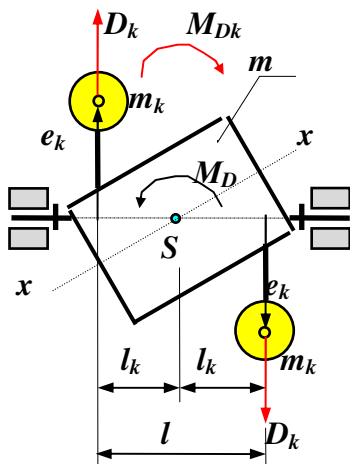


Рис. 5.11

При моментной неуравновешенности (рис.5.11) главная центральная ось инерции пересекает ось вращения в центре масс ротора точке  $S$ , главный вектор дисбалансов  $D_c$  равен нулю, главный момент дисбалансов  $M_D$  не равен нулю

$$D_c = 0, M_D \neq 0,$$

т.е. необходимо уравновесить только момент дисбалансов  $M_D$ . Для этого достаточно разместить на роторе две одинаковых корректирующих массы  $m_k$  на равных расстояниях от оси вращения  $e_k$  и от центра масс  $S$  -  $l_k$ . Массы выбираются и размещаются так, чтобы момент их дисбалансов  $M_{Dk}$  был по величине равен, а по направлению противоположен моменту дисбалансов ротора  $M_D$ :

$$M_{Dk} = -M_D, \quad M_{Dk} = D_k \cdot l_k + D_k \cdot l_k$$

$$= M_{Dk1} + M_{Dk2},$$

где  $D_k = m_k \cdot e_k$ .

В этих зависимостях величинами  $l_k$  и  $e_k$  задаются по условиям удобства размещения противовесов на роторе, а величину  $m_k$  рассчитывают. Необходимо отметить, что величины  $D_k$  в плоскостях коррекции необязательно должны быть равными, необходимо выполнять только неизменность положения центра масс - он должен оставаться на оси вращения.

Условие моментной уравновешенности ротора:

$$\sum_{i=1}^n M_{Di} = 0$$

### 2.3. Динамическая неуравновешенность.

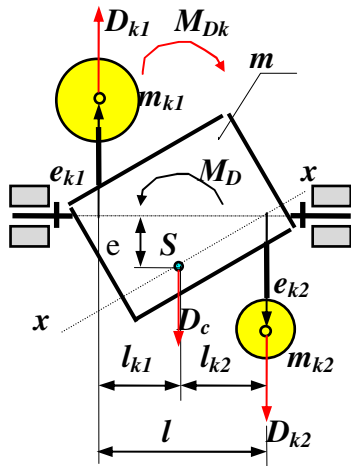


Рис. 5.12

При динамической неуравновешенности (рис. 5.12) главная центральная ось инерции  $\ddot{e}a\dot{a}$  пересекает ось вращения не в центре масс ротора точке  $S$ , либо перекрещивается с ней; и главный вектор дисбалансов  $D_c$ , и главный момент дисбалансов  $M_D$  не равны нулю

$$D_c \neq 0, M_D \neq 0,$$

т.е. необходимо уравновесить вектор  $D_c$  и момент дисбалансов  $M_D$ . Для этого достаточно разместить на роторе две корректирующие массы  $m_{k1}$  и  $m_{k2}$  на расстояниях от оси вращения  $e_{k1}$  и  $e_{k2}$ , а от центра масс  $S$ , соответственно на  $l_{k1}$  и  $l_{k2}$ . Массы выбираются и размещаются так, чтобы момент их дисбалансов  $M_{Dk}$  был по величине равен, а по направлению противоположен моменту дисбалансов ротора

$M_D$ :

$$M_{Dk} = -M_D, \quad M_{Dk} = D_{k1} \cdot l_{k1} + D_{k2} \cdot l_{k2} = M_{Dk1} + M_{Dk2},$$

$$\text{где } D_{k1} = m_{k1} \cdot e_{k1} \text{ и } D_{k2} = m_{k2} \cdot e_{k2},$$

а векторная сумма дисбалансов была равна и противоположно направлена вектору  $D_c$ :

$$D_c = -D_k = -(D_{k1} + D_{k2}).$$

В этих зависимостях величинами  $l_{ki}$  и  $e_{ki}$  задаются по условиям удобства размещения противовесов на роторе, а величины  $m_{ki}$  рассчитывают.

Условие динамической уравновешенности ротора:

$$\sum_{i=1}^n M_{Di} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n D_i = 0$$

### 3. Уравновешивание роторов при проектировании.

#### 3.1. Статическое уравновешивание при проектировании.

При проектировании статически уравновешивают детали, имеющие небольшие осевые размеры и конструктивно неуравновешенные, например, дисковые кулачки (рис. 5.13).

Когда кулачок неподвижен  $\omega_l = 0$ , реакция в опоре  $F_{10} = -G$ . При вращении кулачка  $\omega_l \neq 0$ , реакция в опоре равна векторной сумме сил тяжести и центробежной силы инерции  $F_{10} = -(G + F_u)$ , где  $F_u = -m_l \cdot e_l \cdot \omega_l^2$ . При проектировании детали типа кулачка уравновешиваются так: в деталь с центром на

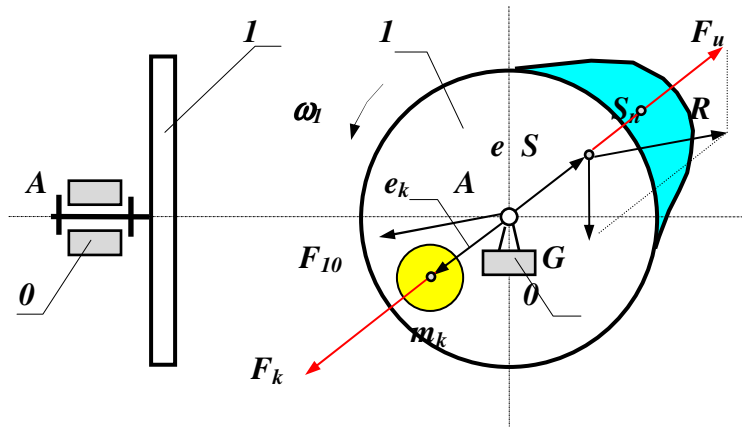


Рис. 5.13

оси вращения вписывается окружность, подсчитываются площади ограниченные контуром кулачка и расположенные вне или внутри окружности, определяется массы и центры масс  $S_n$  неуравновешенных частей кулачка, находится эксцентриситет  $e_l$  центра масс  $S_l$  кулачка по величине и направлению и определяется его дисбаланс  $D_l = m_l \cdot e_l$ , с помощью корректирующей массы  $m_k$ , размещаемой на эксцентриситете  $e_k$ , создается дисбаланс  $D_k$  равный по величине и противоположный по направлению  $D_l$ .

### 3.2. Динамическое уравновешивание при проектировании.

Динамическое уравновешивание при проектировании проводят с деталями и узлами, в которых массы распределены относительно оси вращения неравномерно, например, детали типа коленчатого вала. Эти детали делят на несколько дисков и в каждом диске, также как при статическом уравновешивании, определяют величину и направление дисбаланса  $D_i$ . На детали выбирают две плоскости коррекции и каждый вектор дисбаланса раскладывают на две составляющие, расположенные в плоскостях коррекции. Затем составляющие векторы дисбалансов в плоскостях коррекции суммируются и их равнодействующий дисбаланс, например,  $D_l$ , уравновешивается соответствующей корректирующей массой  $m_{lk}$ . Пример такого уравновешивания изображен на рис. 5.14.

Схема определения векторов равнодействующих дисбалансов.

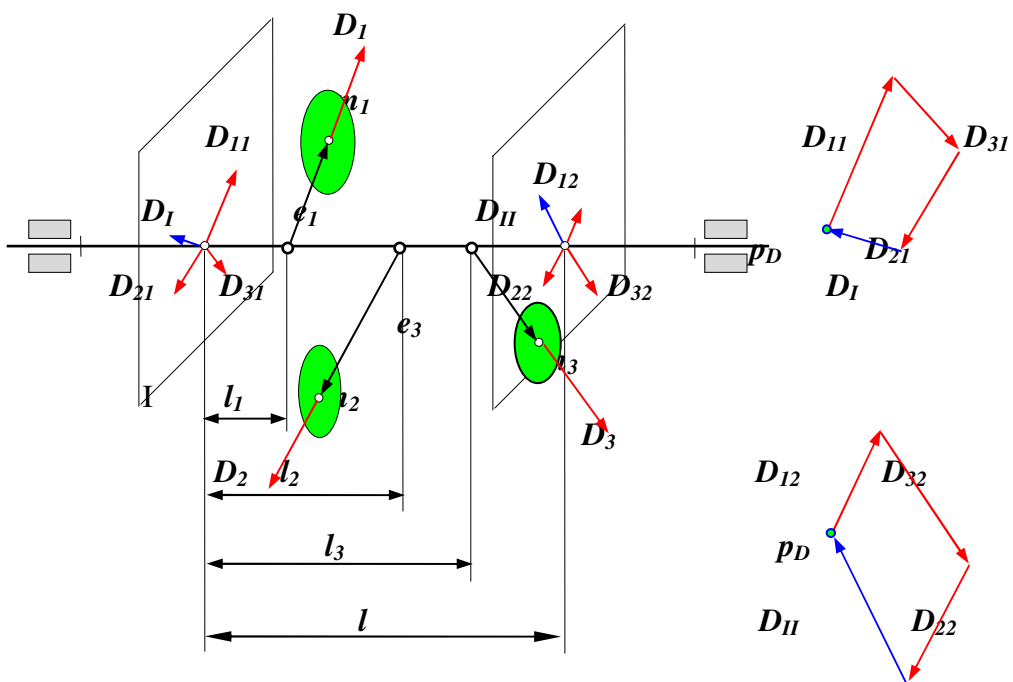


Схема размещения корректирующих масс в плоскостях коррекции.

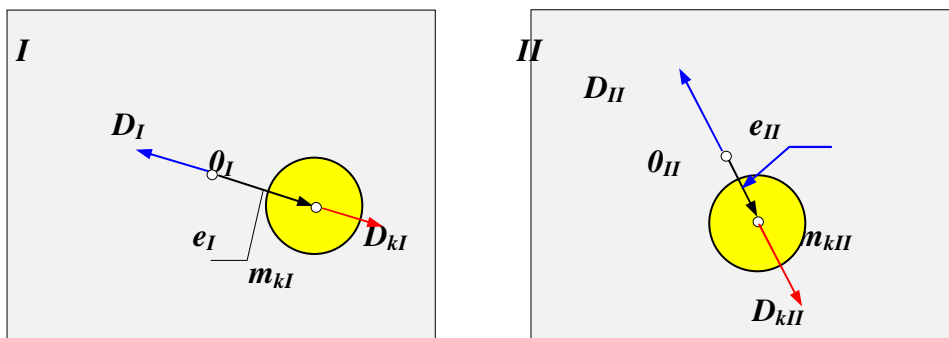


Рис. 5.14

## Лекция 6.

Краткое содержание: Прямая задача динамики машин. Понятие о динамической модели машины при  $W=I$ . Уравнения движения динамической модели. Параметры динамической модели:  $I^{\Sigma}$  - приведенный суммарный момент инерции механизма и  $M^{\Sigma}$  - приведенный суммарный момент внешних сил. Механические характеристики машин. Пример на определение параметров динамической модели. Режимы движения машины. Режим движения пуск-останов. Определение управляющих сил по параметрам движения при пуске и останове. Алгоритм решения прямой задачи динамики при неустановившемся режиме движения машины.

### Прямая задача динамики машин.

Прямая задача динамики машины, как отмечалось и ранее, является задачей анализа, задачей по определению закона движения механической системы под действием заданных внешних сил. При решении этой задачи параметры машинного агрегата и действующие на него внешние силы известны, необходимо определить закон движения: скорости и ускорения в функции времени или обобщенной координаты. Иначе эту задачу можно сформулировать так: заданы управляющие силы и силы внешнего сопротивления, определить обеспечиваемый ими закон движения машины. Обратная задача - это задача синтеза управления, когда задан требуемый закон движения машины и внешние силы сопротивления, а определяются управляющие силы. При решении задач динамики используются либо уравнения силового равновесия системы - метод кинестатики, либо уравнения энергетического равновесия - закон сохранения энергии. Для идеальной механической системы, в которой не потеря энергии и звенья абсолютно жесткие, этот закон можно применять в виде теоремы о изменении кинетической энергии. Согласно этой теореме работа всех внешних сил действующих на систему расходуется только на изменение ее кинетической энергии. При этом потенциальные силы - силы веса рассматриваются как внешние силы.

$$\Delta T = T - T_{нач} = \sum_{i=1}^{f+m} A_i,$$

где  $\Delta T$  - изменение кинетической энергии системы,

$T$  - текущее значение кинетической энергии системы,

$T_{нач}$  - начальное значение кинетической энергии системы,

$\sum_{i=1}^n A_i$  - суммарная работа внешних сил, действующих на систему.

Рассмотрим сложную механическую систему (рис.6.1), состоящую из  $n$  подвижных звеньев из которых  $r$  - звеньев совершают вращательное движение,  $j$  - плоское,  $k$  - поступательное. Основная подвижность системы равна  $W=I$ . На систему действуют:  $f$  - внешних сил и  $m$  - внешних моментов. Движение этой системы определяется изменением одной независимой обобщенной координаты. Такую систему при решении задач динамики можно заменить более простой динамической моделью. Положение звена этой модели определяется обобщенной координатой, а динамические параметры заменяются: инерционные - суммарным приведенным моментом инерции  $I^{\Sigma}$ , силовые - суммарным приведенным моментом  $M^{\Sigma}$ . Эти параметры динамической модели рассчитываются по критериям подобия модели и объекта, которые определяются соответственно из равенства правых и левых частей уравнений изменения кинетической энергии для модели и объекта, т.е.

$$\sum_{i=1}^{f+m} A_i = A_{Mnp\Sigma} \qquad \sum_{i=1}^n \Delta T_i = \Delta T_M$$

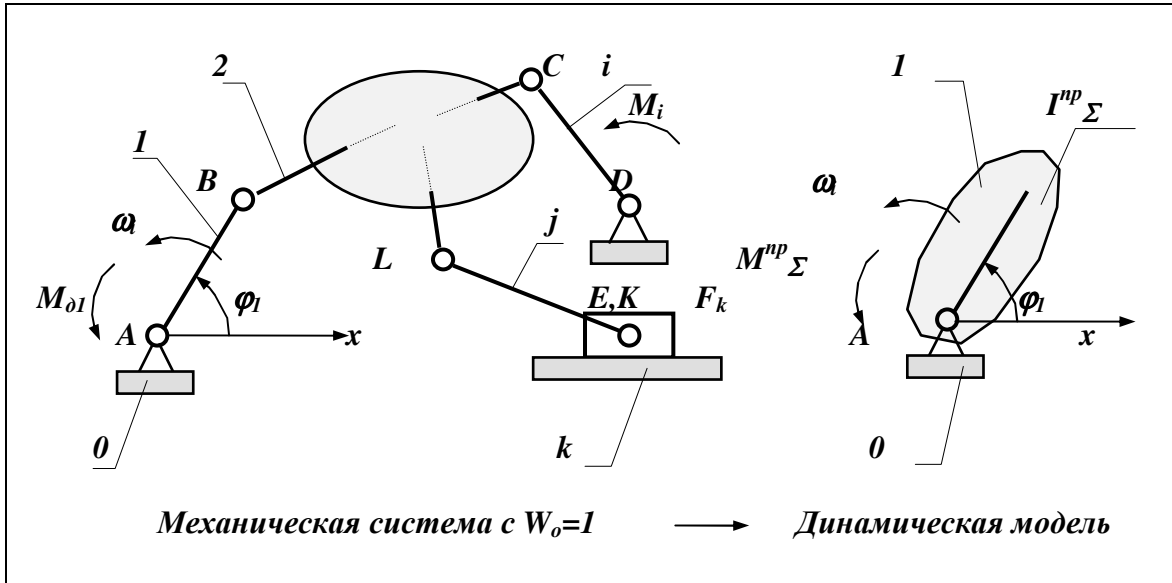


Рис. 6.1

где

$\sum_{i=1}^{f+m} A_i$  - сумма работ всех внешних сил, действующих на систему,

$A_{Mnp\Sigma}$  - работа суммарного приведенного момента,

$\sum_{i=1}^n \Delta T_i$  - сумма кинетических энергий звеньев системы,

$\Delta T_M$  - кинетическая энергия динамической модели.

### Уравнения движения динамической модели

1. Уравнение движения динамической модели в интегральной форме.

Запишем для динамической модели теорему о изменении кинетической энергии

$$\Delta T = T - T_{нач} = A_{Mnp\Sigma},$$

где  $T = I^{np\Sigma} \dot{\omega}_1^2 / 2$ ;  $T_{нач} = I^{np\Sigma}_{нач} \dot{\omega}_{1нач}^2 / 2$ ;  $A_{Mnp\Sigma} = \int_{\phi_{1нач}}^{\phi_1} M^{np\Sigma} d\phi_1$ ;

и уравнение движения динамической модели в интегральной или энергетической форме

$$I^{np\Sigma} \dot{\omega}_1^2 / 2 - T_{нач} = A_{Mnp\Sigma}$$

Из этого уравнения после преобразований

$$\omega_l = \sqrt{2 \cdot (A_{Mnp\Sigma} + T_{нач}) / I^{np}_{\Sigma}},$$

получим формулу для расчета угловой скорости звена приведения.

Для машин работающих в режиме пуск-останов

$$\omega_{нач} = 0 \quad \text{и} \quad T_{нач} = 0,$$

формула принимает вид

$$\omega_l = \sqrt{2 \cdot A_{Mnp\Sigma} / I^{np}_{\Sigma}}.$$

2. Уравнение движения динамической модели в дифференциальной форме.

Продифференцируем полученное выше уравнение по обобщенной координате

$$I^{np}_{\Sigma} \cdot d(\omega_l^2) / (2 \cdot d\varphi_l) + (d I^{np}_{\Sigma} / d\varphi_l) \cdot (\omega_l^2 / 2) = d(A_{Mnp\Sigma}) / d\varphi_l,$$

где  $0.5 \cdot (d(\omega_l^2) / dt) \cdot (dt / d\varphi_l) = 0.5 \cdot 2 \cdot \omega_l \cdot d\omega_l / dt \cdot (1 / \omega_l) = d\omega_l / dt = \varepsilon_l$ ,

$$d(A_{Mnp\Sigma}) / d\varphi_l = M^{np}_{\Sigma}.$$

После подстановки получим

$$I^{np}_{\Sigma} \cdot d\omega_l / dt + (\omega_l^2 / 2) \cdot (d I^{np}_{\Sigma} / d\varphi_l) = M^{np}_{\Sigma},$$

уравнение движения динамической модели в дифференциальной форме.

Из этого уравнения после преобразований

$$\varepsilon_l = d\omega_l / dt = M^{np}_{\Sigma} / I^{np}_{\Sigma} - \omega_l^2 / (2 \cdot I^{np}_{\Sigma}) \cdot (d I^{np}_{\Sigma} / d\varphi_l),$$

получим формулу для расчета углового ускорения звена приведения.

Для механических систем в которых приведенный момент не зависит от положения звеньев механизма ( $I^{np}_{\Sigma} = const$ )

$$\varepsilon_l = d\omega_l / dt = M^{np}_{\Sigma} / I^{np}_{\Sigma}.$$

**Определение параметров динамической модели машины  
(приведение сил и масс).**

Рассмотрим изображенную на рис. 6.1 механическую систему и ее динамическую модель. Запишем для них уравнение изменения кинетической энергии. Кинетическая энергия:

$$\text{для механической системы} \quad T_c = \sum_{i=1}^{r+k} m_i \cdot V_{Si}^2 / 2 + \sum_{i=1}^{r+j} I_{Si} \cdot \omega_i^2 / 2,$$

$$\text{для модели} \quad T_m = I^{np}_{\Sigma} \cdot \omega_l^2 / 2;$$

Суммарная работа внешних сил:

$$f \quad \quad \quad - \wedge - \quad \quad \quad m$$

для механической системы 
$$A_{\Sigma c} = \sum_{i=1} \int F_i \cdot dS_i \cdot \cos(F_i, dS_i) + \sum_{i=1} \int M_i \cdot d\phi_i,$$

для модели 
$$A_{\Sigma m} = \int M^{np} \Sigma d\phi_l.$$

Модель будет с энергетически эквивалентна рассматриваемой механической системе, если правые и левые части уравнений изменения кинетической энергии для модели и для системы будут соответственно равны. То есть для левых частей выполняется условие  $T_c = T_m$ , а для правых -  $A_{\Sigma c} = A_{\Sigma m}$ . Для того чтобы второе равенство выполнялось в течение всего диапазона изменения обобщенной координаты, необходимо обеспечить не равенство интегралов, а равенство подинтегральных выражений  $dA_{\Sigma c} = dA_{\Sigma m}$ . Подставляя в равенства, записанные ранее выражения для кинетических энергий и работ получим:

для левых частей

$$I^{np} \Sigma \omega_l^2 / 2 = \sum_{i=1}^{r+k} m_i \cdot V_{Si}^2 / 2 + \sum_{i=1}^{r+j} I_{Si} \cdot \omega_i^2 / 2,$$

для правых частей

$$M^{np} \Sigma d\phi_l = \sum_{i=1}^f F_i \cdot dS_i \cdot \cos(F_i, dS_i) + \sum_{i=1}^m M_i \cdot d\phi_i.$$

Из уравнения для левых частей получаем формулу для определения *приведенного суммарного момента инерции динамической модели*

$$I^{np} \Sigma = \sum_{i=1}^{r+k} m_i \cdot (V_{Si} / \omega_l)^2 + \sum_{i=1}^{r+j} I_{Si} \cdot (\omega_i / \omega_l)^2,$$

$$I^{np} \Sigma = \sum_{i=1}^{r+k} m_i \cdot (V_{qSi})^2 + \sum_{i=1}^{r+j} I_{Si} \cdot (\omega_{qi})^2.$$

Из уравнения для правых частей получаем формулу для определения *приведенного суммарного момента динамической модели*

$$M^{np} \Sigma = \sum_{i=1}^f F_i \cdot (dS_i / d\phi_l) \cdot \cos(F_i, dS_i) + \sum_{i=1}^m M_i \cdot (d\phi_i / d\phi_l).$$

$$M^{np} \Sigma = \sum_{i=1}^f F_i \cdot V_{qSi} \cdot \cos(F_i, dS_i) + \sum_{i=1}^m M_i \cdot \omega_{qi}.$$

***Механические характеристики машин.***

Механической характеристикой машины называется зависимость силы или момента на выходном валу или рабочем органе машины от скорости или перемещения точки или звена ее приложения.

Рассмотрим примеры механических характеристик различных машин.

1. Двигатели внутреннего сгорания (ДВС):

- четырехтактный ДВС



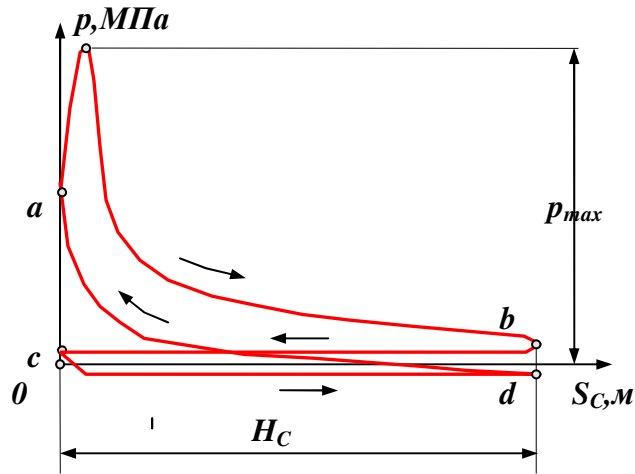


Рис. 6.2

- ab* - расширение (рабочий ход);
- bc* - выхлоп;
- cd* - всасывание;
- da* - сжатие.

Индикаторная диаграмма - графическое изображение зависимости давления в цилиндре поршневой машины от хода поршня.

- двухтактный ДВС

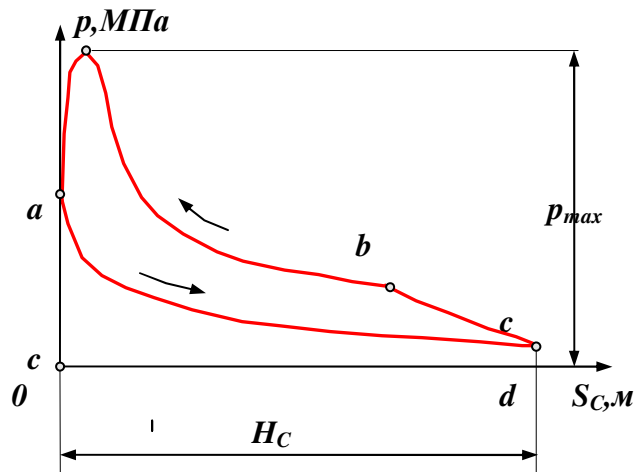


Рис. 6.3

- ab* - расширение (рабочий ход);
- bc* - продувка;
- ca* - сжатие.

## 2. Электродвигатели

- асинхронный электродвигатель переменного тока

На диаграмме:  $M_{\partial n}$  - пусковой момент;  $M_{\partial n}$  - номинальный крутящий момент;  $M_{\partial k}$  или  $M_{\partial max}$  - критический или максимальный момент;  $\omega_{\partial n}$  - номинальная круговая частота вращения вала двигателя;  $\omega_{\partial хх}$  или  $\omega_{\partial с}$  - частота вращения вала двигателя холостого хода или синхронная. Уравнение статической характеристики асинхронного электродвигателя на линеаризованном участке устойчивой части

$$M_{\partial} = b_1 + k_1 \cdot \omega_{\partial},$$

где  $M_{\partial}$  - движущий момент на валу двигателя,

$\omega_{\partial}$  - круговая частота вала двигателя,

$$b_1 = M_{\partial n} \cdot \omega_{\partial с} / (\omega_{\partial с} - \omega_{\partial n}), \quad k_1 = - M_{\partial n} / (\omega_{\partial с} - \omega_{\partial n}).$$

Статическая характеристика асинхронного двигателя, выражающая зависимость нагрузки от скольжения, определяется формулой Клосса

$$M_{\delta} = 2 \cdot M_{\delta K} \cdot (S/S_K + S_K/S), \text{ где } S = 1 - \omega_{\delta}/\omega_{\delta c}, S_K = 1 - \omega_{\delta K}/\omega_{\delta c}, \omega_{\delta} \geq \omega_{\delta c}.$$

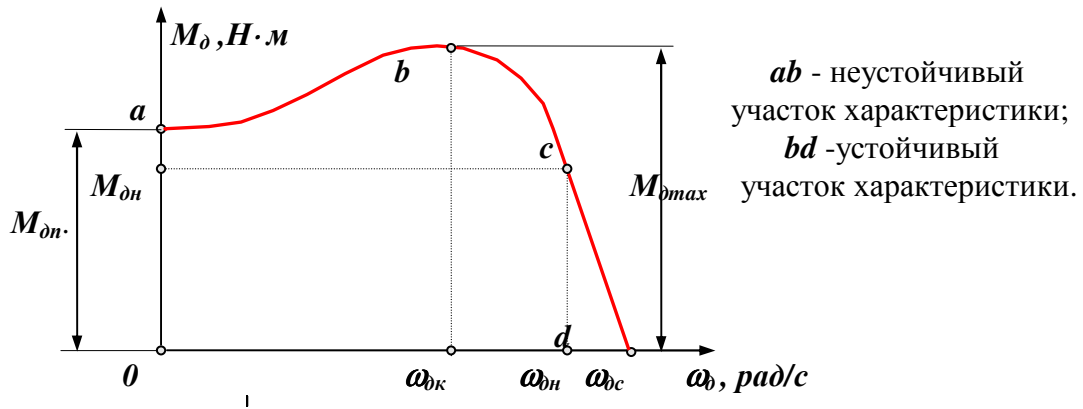


Рис. 6.3

- двигатель постоянного тока с независимым возбуждением

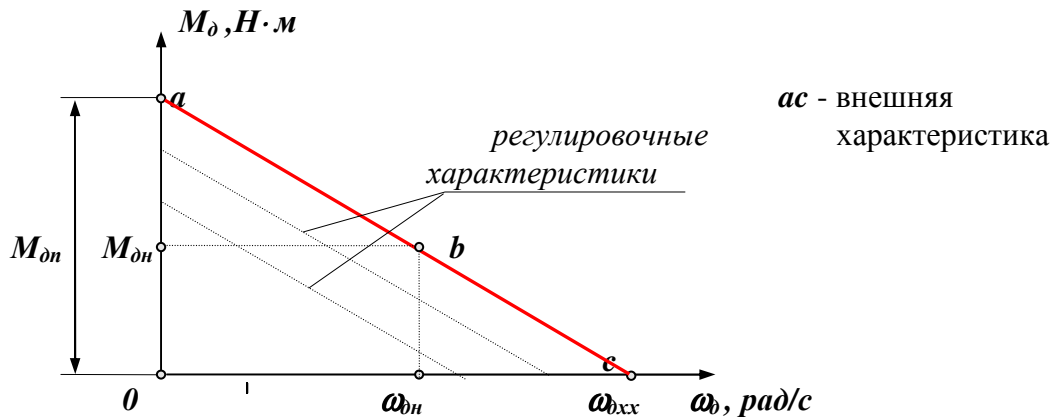


Рис. 6.4

Уравнение статической характеристики для двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

$$M_{\delta} = M_{\delta n} + k \cdot (\omega_{\delta n} - \omega_{\delta}),$$

где  $k = M_{\delta n} / (\omega_{\delta cx} - \omega_{\delta n})$ .

В электрических параметрах характеристика записывается в следующем виде

$$M_{\delta} = k_M \cdot (U_{\delta} - k_{\omega} \cdot \omega_{\delta}) / R_{\delta},$$

где

$k_M = M_{\delta n} / I_{\delta n}$  - коэффициент момента,  $k_{\omega} = (U_{\delta n} - R_{\delta} \cdot I_{\delta n}) / \omega_{\delta n}$  - коэффициент противоэлектродвижущей силы,  $U_{\delta}$  - напряжение в цепи якоря,  $R_{\delta}$  - сопротивление цепи якоря

### 3. Рабочие машины

- поршневой насос

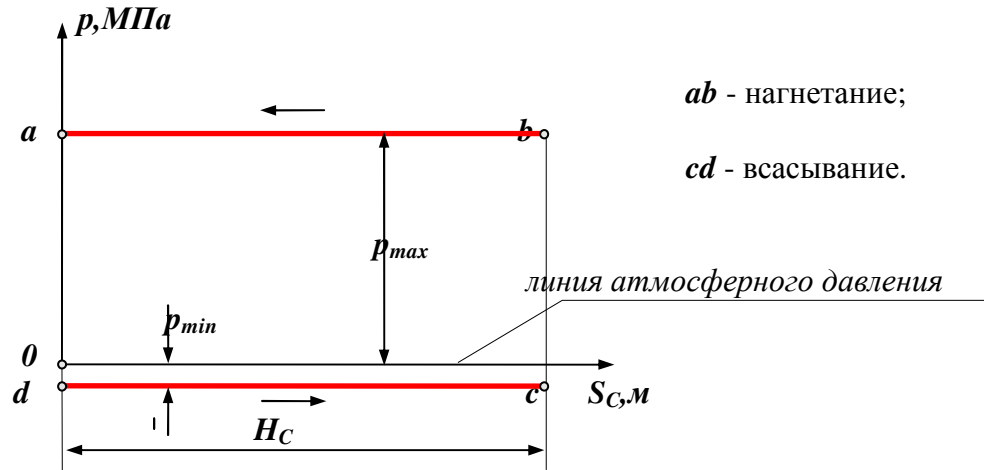


Рис. 6.5

- поршневой компрессор

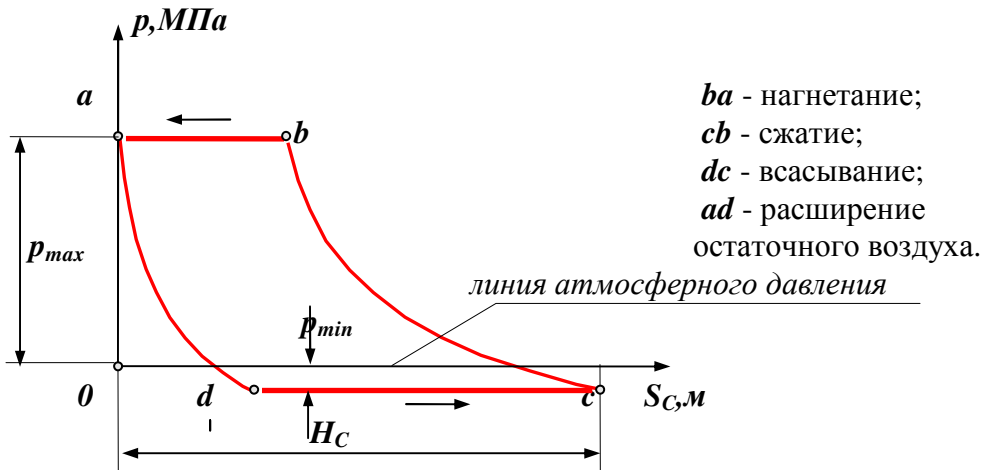
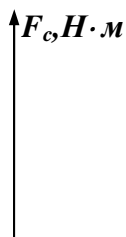


Рис. 6.6

Линии *bc* и *ad* - линии сжатия и расширения газа (воздуха) определяются параметрами газа (объемом, давлением и температурой) и в общем виде описываются уравнением политропы  $p \cdot V^n = const$ , где  $n$  - показатель политропы ( $1 < n < 0$ ).

- строгальный станок



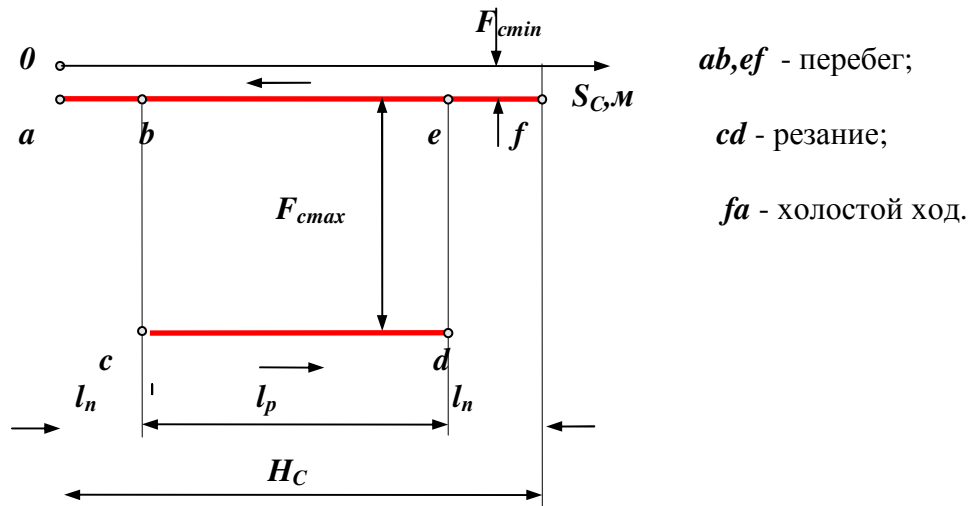


Рис. 6.7

Механические характеристики определяют внешние силы и моменты, действующие на входные и выходные звенья, рассматриваемой механической системы со стороны взаимодействующих с ней внешних систем и окружающей среды. Характеристики определяются экспериментально, по результатам экспериментов получают регрессионные эмпирические модели, которые в дальнейшем используются при проведении динамических расчетов машин и механизмов.

**Пример на определение параметров динамической модели  
 ( на приведение сил и масс ).**

**Дано:** Кинематическая схема механизма поршневого насоса ( $l_i, \varphi$ ),  
 $M_\theta, F_c, m_i, I_{Si}$ ;

**Определить:**  $M^{np}_\Sigma, I^{np}_\Sigma - ?$

1. Определение сил веса  $G_i = m_i \cdot g$ .
2. Определение кинематических передаточных функций.

Простой и наглядный метод определения передаточных функций - графоаналитический метод планов возможных скоростей. При этом в произвольном масштабе строятся планы скоростей для ряда положений цикла движения механизма. По отрезкам плана скоростей рассчитываются соответствующие передаточные функции по следующим формулам ( для машины, схема которой изображена на рис.6.8 ):

Векторное уравнение скоростей: 
$$\underline{V_C} = \underline{V_B} + \underline{V_{CB}};$$
гориз.     $\angle AB$      $\angle CB$

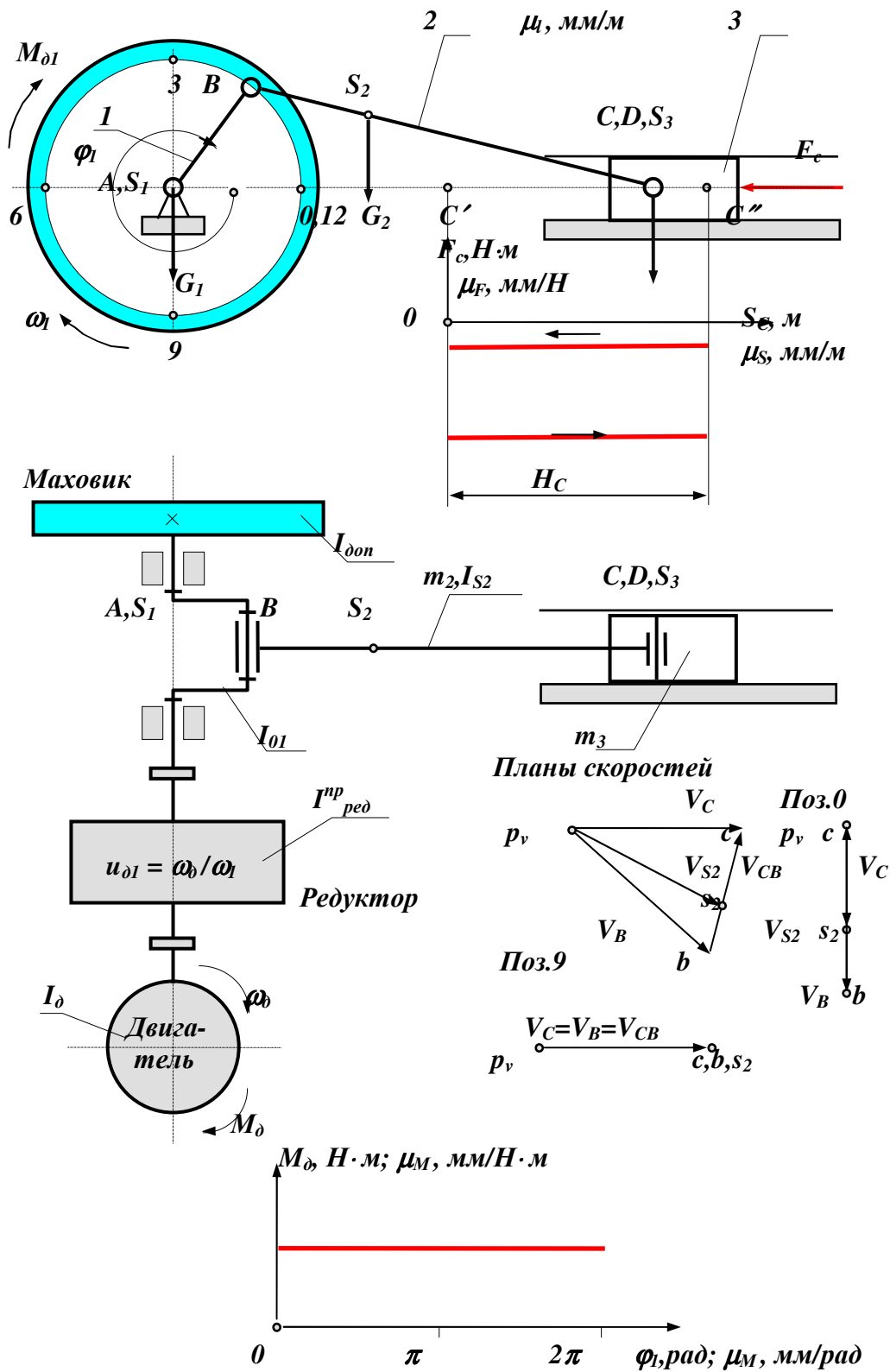


Рис. 6.8

Передаточные функции:

точки С  $V_{qC} = dS_C/d\varphi_1 = V_C/\omega_1 = (V_C/V_B) \cdot l_{AB} = (p_{vC}/p_{vb}) \cdot l_{AB};$

точки S<sub>2</sub>  $V_{qS2} = dS_{S2}/d\varphi_1 = V_{S2}/\omega_1 = (V_{S2}/V_B) \cdot l_{AB} = (p_{vS2}/p_{vb}) \cdot l_{AB};$

звена 2  $\omega_2 = u_{21} = d\varphi_2/d\varphi_1 = \omega_2/\omega_1 = (V_{CB}/V_B) \cdot (l_{AB}/l_{BC}) =$   
 $= (cb/p_{vb}) \cdot (l_{AB}/l_{BC});$

По этим формулам строятся цикловые диаграммы передаточных функций для рассматриваемого механизма ( см. рис. 6.9 ).

Диаграммы передаточных функций

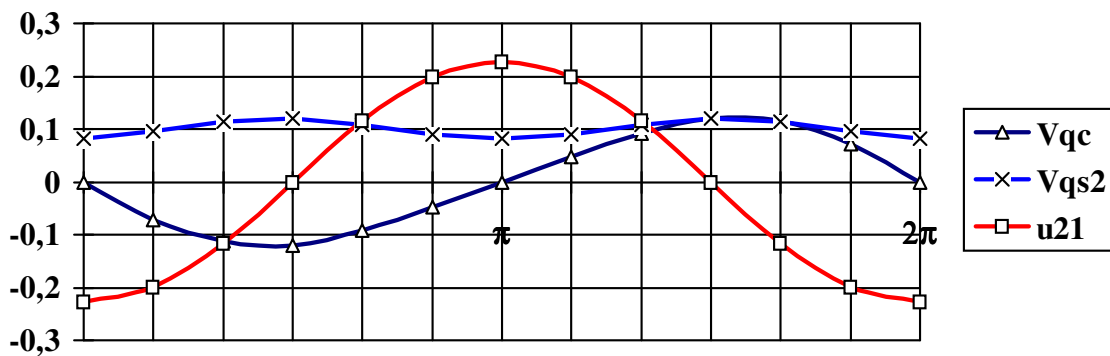


Рис. 6.9

3. Определение суммарного приведенного момента  $M^{np}_{\Sigma}$ .

Для определения суммарного приведенного момента необходимо просуммировать приведенные моменты от всех внешних сил, действующих на рассматриваемую систему. Приведенный момент от силы равен скалярному произведению вектора силы на вектор передаточной функции точки ее приложения, от момента - произведению момента на передаточное отношение от звена приложения момента к звену приведения. На рассматриваемую систему действуют силы веса звеньев  $G_i$ , сила сопротивления  $F_c$  и движущий момент  $M_{\delta}$ . Приведенный момент от этих сил рассчитывается по формуле:

$$M^{np}_{\Sigma} = M^{np}_{\delta} + M^{np}_{G2} + M^{np}_{G3} + M^{np}_{F_c} = M_{\delta} \cdot u_{\delta 1} + G_2 \cdot V_{qS2} \cdot \cos(\widehat{G_2, V_{qS2}}) + G_3 \cdot V_{qC} \cdot \cos(\widehat{G_3, V_{qC}}) + F_c \cdot V_{qC} \cdot \cos(\widehat{F_c, V_{qC}}) = M_{\delta} \cdot u_{\delta 1} + G_2 \cdot V_{qS2y} + G_3 \cdot V_{qCy} + F_c \cdot V_{qC} \cdot \cos(\widehat{F_c, V_{qC}}).$$

Диаграмма приведенных моментов.

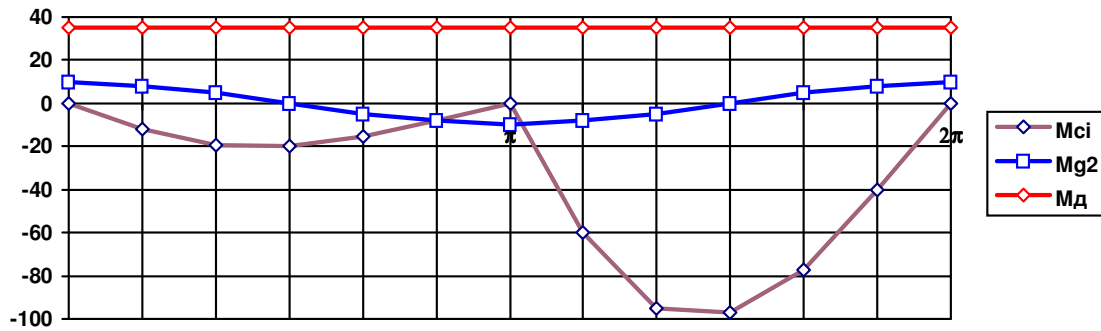


Рис. 6.10

Диаграмма суммарного приведенного момента.

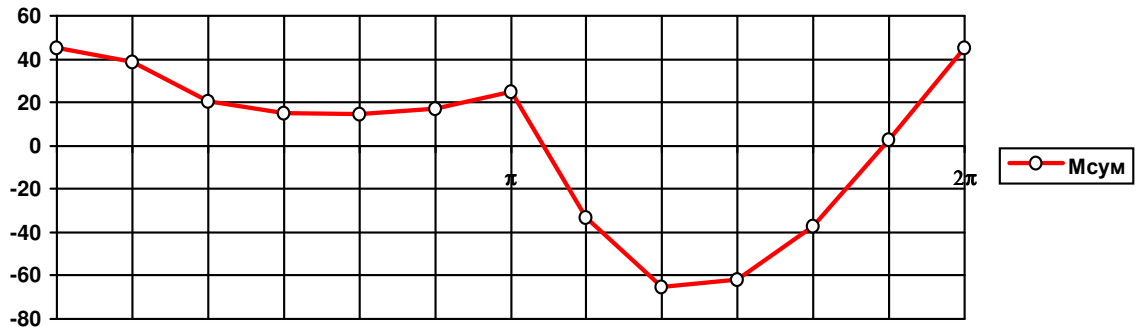


Рис. 6.11

4. Определение суммарного приведенного момента инерции  $I^{np}_{\Sigma}$ .

Для определения суммарного приведенного момента инерции необходимо просуммировать приведенные моменты инерции от всех масс и моментов инерции подвижных звеньев рассматриваемой системы. Приведенный момент инерции от массы равен произведению массы на квадрат передаточной функции ее центра, от момента инерции - произведению момента инерции звена на квадрат передаточного отношения от этого звена к звену приведения. Инерционность рассматриваемой системы определяется массами звеньев 2 и 3 и моментами инерции ротора двигателя, редуктора, колчатого вала, маховика и звена 2. В суммарный приведенный момент инерции входят как составляющие не зависящие от положения механизма, так и составляющие, зависящие от обобщенной координаты. Первые имеют постоянный момент инерции и относятся к первой группе звеньев, момент инерции других - переменный, они образуют вторую группу. Приведенный момент для рассматриваемой системы определяется по формуле:

$$I^{np}_{\Sigma} = I^{np}_I + I^{np}_{II} = I^{np}_C + I^{np}_V =$$

$$= I_{\delta} \cdot (\omega_{q\delta 1})^2 + I^{np}_{ред} + I_{01} + I_M + m_2 \cdot (V_{qs2})^2 + I_{S2} \cdot (\omega_2)^2 + m_3 \cdot (V_{qc})^2,$$

где  $I^{np}_I = I^{np}_C = I_{\delta} \cdot (\omega_{q\delta 1})^2 + I^{np}_{ред} + I_{01} + I_M = const,$

$$I^{np}_{II} = I^{np}_V = m_2 \cdot (V_{qs2})^2 + I_{S2} \cdot (\omega_2)^2 + m_3 \cdot (V_{qc})^2 = I^{np}_{2II} + I^{np}_{2B} + I^{np}_3 = var.$$

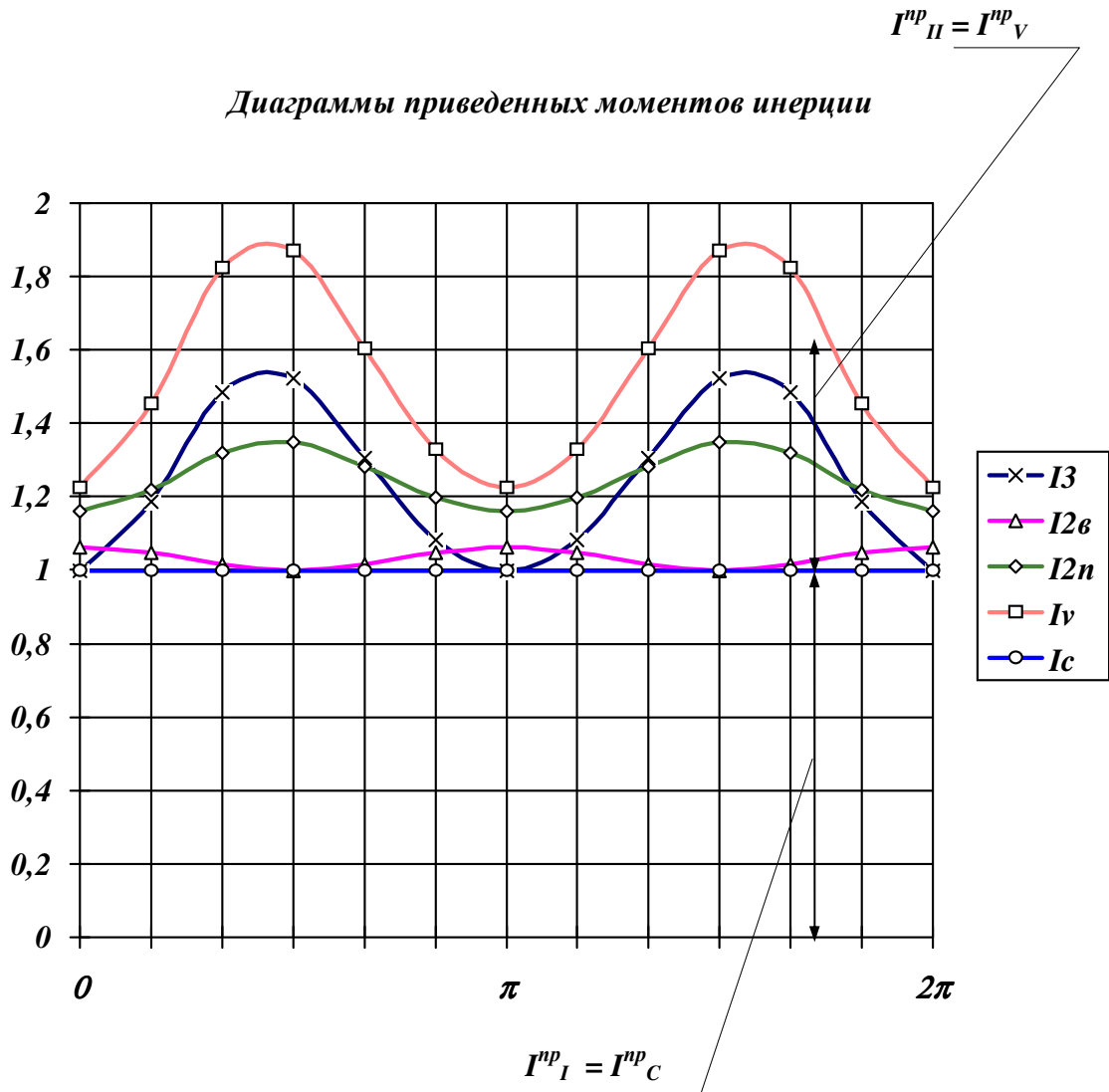


Рис. 6.12

Таким образом выполнена поставленная задача - определены параметры динамической модели поршневого насоса: приведенный суммарный момент  $M^{np}_\Sigma$  и приведенный суммарный момент инерции  $I^{np}_\Sigma$ .



### Лекция 7.

Краткое содержание: Режимы движения машины. Режим движения пуск-останов. Определение управляющих сил по параметрам движения при пуске и останове. Алгоритм решения прямой задачи динамики при неустановившемся режиме движения машины.

#### Режимы движения машины.

В зависимости от того какую работу совершают внешние силы за цикл движения машины различают три режима движения: разгон, торможение и установившееся движение. Циклом называют период времени или период изменения обобщенной координаты через который все параметры системы принимают первоначальные значения.

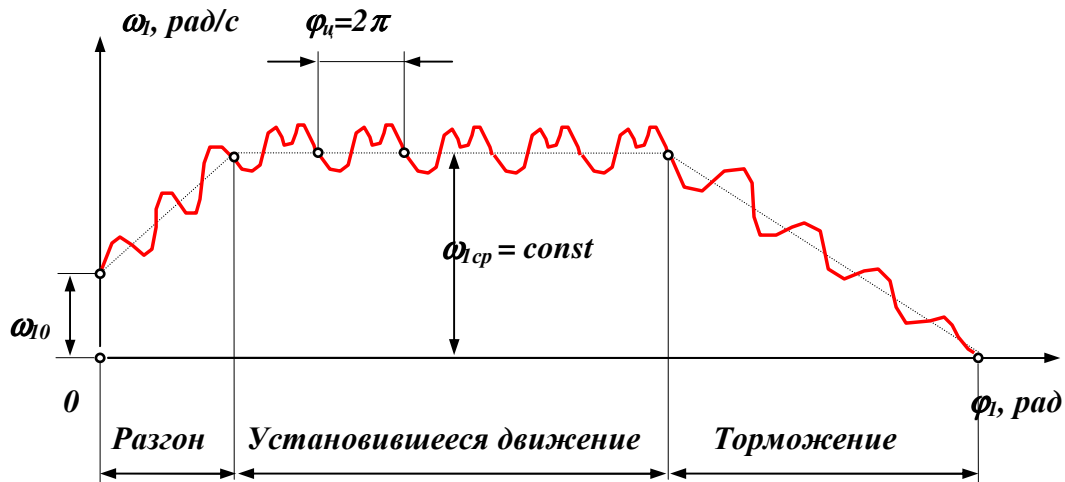


Рис. 7.1

1. Разгон  $\Rightarrow A_d'' > A_c''$ ,  $A_{\Sigma}'' > 0$ ;
2. Установившееся движение  $\Rightarrow A_d'' = A_c''$ ,  $A_{\Sigma}'' = 0$ ;
3. Торможение (выбег)  $\Rightarrow A_d'' < A_c''$ ,  $A_{\Sigma}'' < 0$ .

#### Режим движения «пуск - останов».

Существует большое количество машин и механизмов: гидropодъемники, манипуляторы, механизмы управления метательными аппаратами, механизмы шасси, механизмы автоматических дверей и многие другие, исполнительное звено которых перемещается из начального положения в конечное. При этом в начале и в конце цикла движения исполнительное звено неподвижно. Такой режим движения механизма называется режимом «пуск-останов». Механизм начинает движение из состояния покоя, в конце цикла выходное звено механизма должно остановиться и зафиксироваться в заданном положении. Возможны три варианта остановки выходного звена:

- остановка с жестким ударом (рис.7.2)  $\omega_{1n} > 0$ ,  $\epsilon_{1n} \Rightarrow \infty$ ;
- остановка с мягким ударом (рис. 7.3)  $\omega_{1n} = 0$ ,  $\epsilon_{1n} \neq 0$ .

Для динамической модели в конечном положении

$$\omega_{1n} = \sqrt{2 \cdot (A_{\Sigma n} + T_{нач}) / I^{np}_{\Sigma n}}$$

Если  $T_{нач} = 0$ ,  $I^{np}_{\Sigma n} > 0$ , то  $A_{\Sigma n} = 0$ .

- безударная остановка или остановка с удержанием в конечном положении (рис. 7.4)  $\omega_{ln} = 0, \epsilon_{ln} = 0$ .

В этом случае к рассмотренному выше условию  $\omega_{ln} = 0$ , добавляется условие  $\epsilon_{ln} = 0$ . Для динамической модели в конечном положении

$$\epsilon_{ln} = d\omega_{ln}/dt = M^{np}_{\Sigma_n} / I^{np}_{\Sigma_n} - \omega_{ln}^2 / (2 \cdot I^{np}_{\Sigma_n}) \cdot (dI^{np}_{\Sigma_n} / d\varphi),$$

Если  $\omega_{ln} = 0, I^{np} > 0$ , то  $\epsilon_{ln} = 0$  при  $M^{np}_{\Sigma_n} = 0$ .

Таким образом при остановке с мягким ударом необходимо выполнить условие

$$\omega_{ln} = 0 \Rightarrow A_{\Sigma_n} = 0;$$

при безударной остановке и фиксации объекта в конечном положении нужно выполнить одновременно два условия

$$\begin{aligned} \omega_{ln} = 0 &\Rightarrow A_{\Sigma_n} = 0; \\ \epsilon_{ln} = 0 &\Rightarrow M^{np}_{\Sigma_n} = 0. \end{aligned}$$

**1. Жесткий удар.**

**2. Мягкий удар.**

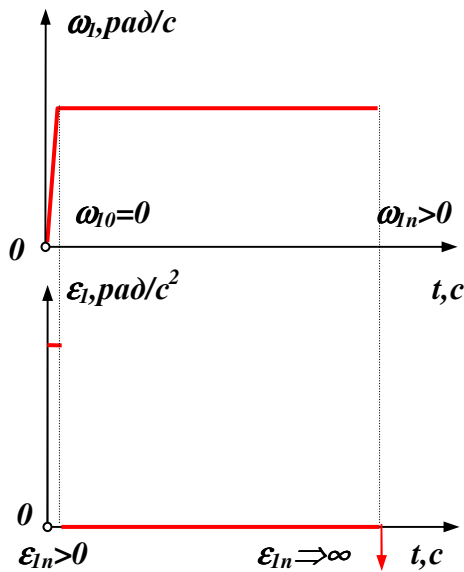


Рис. 7.2

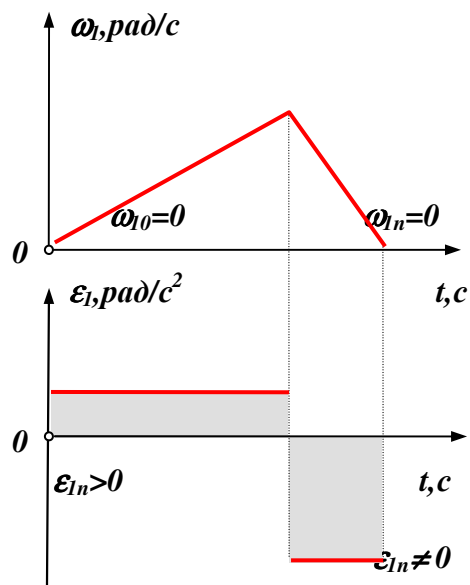


Рис. 7.3

**3. Безударная остановка объекта в конечном положении с фиксацией.**

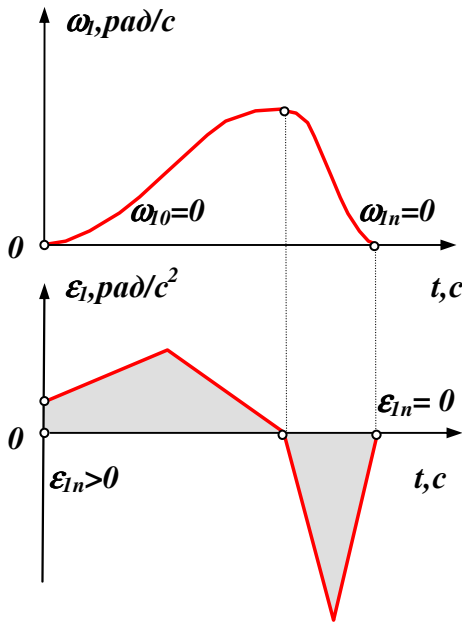


Рис. 7.4

Для того, чтобы выполнить условия начала движения и остановки выходного звена в конечном положении необходимо соответствующим образом выбрать закон изменения движущих или управляющих сил. Три возможных диаграммы изменения движущих сил даны на рис. 7.5. Определение величин сил на этих диаграммах осуществляется из рассмотренных выше условий. Выведем формулы для расчета сил, используя в качестве примера механизм гидравлического подъемника, схема которого приведена на рис. 7.6.

*Типовые диаграммы движущей силы.*

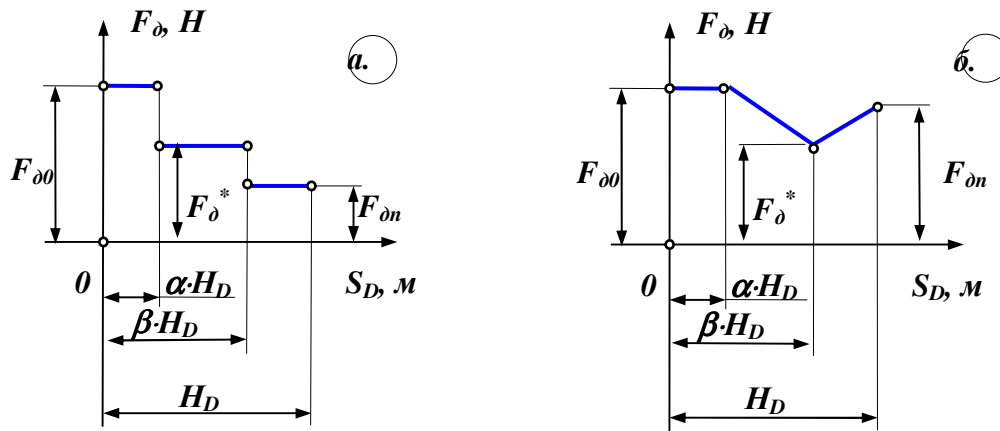


Рис. 7.5

Гидроподъемник поворачивает платформу - звено 1 на заданный угол  $\Delta\varphi$ , при этом центр масс  $S_I$  поднимается на высоту  $H_{SI}$  под воздействием силы давления в гидrocилиндре  $F_\delta$ , закон изменения которой за цикл определяется одной из диаграмм, изображенных на рис. 7.5.

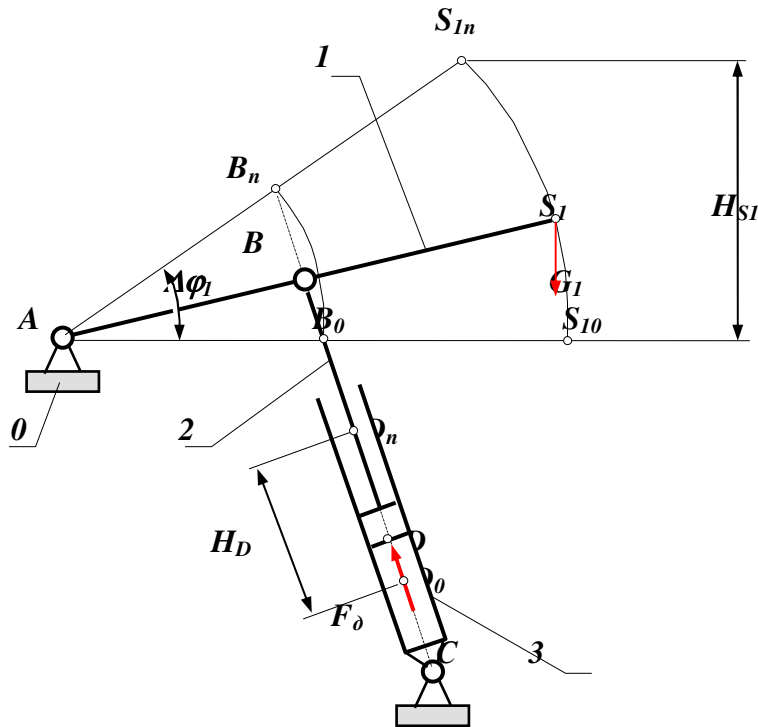


Рис. 7.6

1. Определение величины силы  $F_{\partial 0}$  по условию начала движения  $\epsilon_{10} > 0$

$$k \cdot \text{abs} (M_{c0}^{np}) = M_{\partial 0}^{np},$$

где  $k = 1.05 \dots 2$  - коэффициент запаса по моменту для разгона системы.  
 Раскрывая это уравнение, получим

$$k \cdot \text{abs} [ G_1 \cdot V_{qS10} \cdot \cos (G_1, dS_{S10}) ] = F_{\partial 0} \cdot V_{qD0} \cdot \cos (F_{\partial 0}, dS_{D0}),$$

откуда

$$F_{\partial 0} = \{ k \cdot \text{abs} [ G_1 \cdot V_{qS10} \cdot \cos (G_1, dS_{S10}) ] \} / V_{qD0} \cdot \cos (F_{\partial 0}, dS_{D0}).$$

2. Определение величины силы  $F_{\partial n}$  по условию в конце цикла  $\epsilon_{1n} = 0$

$$\text{abs} (M_{cn}^{np}) = M_{\partial n}^{np}.$$

Раскрывая это уравнение, получим

$$\text{abs} [ G_1 \cdot V_{qS1n} \cdot \cos (G_1, dS_{S1n}) ] = F_{\partial n} \cdot V_{qDn} \cdot \cos (F_{\partial n}, dS_{Dn}),$$

откуда

$$F_{\partial n} = \{ \text{abs} [ G_1 \cdot V_{qS1n} \cdot \cos (G_1, dS_{S1n}) ] / V_{qDn} \cdot \cos (F_{\partial n}, dS_{Dn}) \}.$$

3. Определение величины силы  $F_{\partial}^*$  по условию в конце цикла  $\omega_{1n} = 0$ ,

$$A_{\Sigma n} = 0, \quad A_{\partial n} = \text{abs} ( A_{cn} );$$

- для диаграммы движущей силы, изображенной на рис. 7.5 а

$$F_{\partial 0} \cdot \alpha \cdot H_D + F_{\partial}^* \cdot (\beta - \alpha) \cdot H_D + F_{\partial n} \cdot (1 - \beta) \cdot H_D = G_1 \cdot H_{S1},$$

$$F_{\partial}^* = G_1 \cdot H_{S1} - [ F_{\partial 0} \cdot \alpha + F_{\partial n} \cdot (1 - \beta) ] \cdot H_D / [ (\beta - \alpha) \cdot H_D ].$$

- для диаграммы движущей силы, изображенной на рис. 7.5 б

$$F_{\partial 0} \cdot \alpha \cdot H_D + 0.5 \cdot (F_{\partial 0} + F_{\partial}^*) \cdot (\beta - \alpha) \cdot H_D + 0.5 \cdot (F_{\partial}^* + F_{\partial n}) \cdot (1 - \beta) \cdot H_D = G_1 \cdot H_{S1},$$

$$F_{\partial}^* = G_1 \cdot H_{S1} - [ F_{\partial 0} \cdot \alpha + 0.5 \cdot F_{\partial 0} \cdot (\beta - \alpha) + 0.5 \cdot F_{\partial n} \cdot (1 - \beta) ] / \{ 0.5 \cdot [ (\beta - \alpha) + (1 - \beta) ] \cdot H_D \}.$$

**Прямая задача динамики машины: определение закона движения при неустановившемся (переходном) режиме.**

В отличие от установившегося режима движения режимы разгона и торможения называются неустановившимися. К этому режиму относят и режим движения «пуск-останов». Прямая задача динамики: определение закона движения машины при заданных внешних силовых воздействиях ( как сил и моментов сопротивления, так и движущих или управляющих сил ). Эта задача относится к задачам анализа, при которых параметры механизмов заданы, либо могут быть определены на предварительных этапах расчета. Для простоты и наглядности рассмотрим алгоритм решения этой задачи на примере конкретного механизма гидроподъемника. По условиям функционирования гидроподъемник за цикл движения должен переместить платформу 1 (рис. 7.6) на угол  $\Delta\varphi_1$  и зафиксировать ее в конечном положении. При этом силы сопротивления определяются силами веса платформы и звеньев гидроцилиндра, движущие силы - давлением жидкости в цилиндре.

**Алгоритм решения прямой задачи динамики при неустановившемся режиме.**

Постановка задачи.

Дано: Кинематическая схема механизма и его размеры

$$l_{AB} = 1 \text{ м}, l_{BS1} = 2 \text{ м}, l_{BD} = 0.7 \text{ м}, l_{AC} = 1.45 \text{ м},$$

$$l_{BS2} = 0.35 \text{ м}, l_{BS3} = 0.4 \text{ м};$$

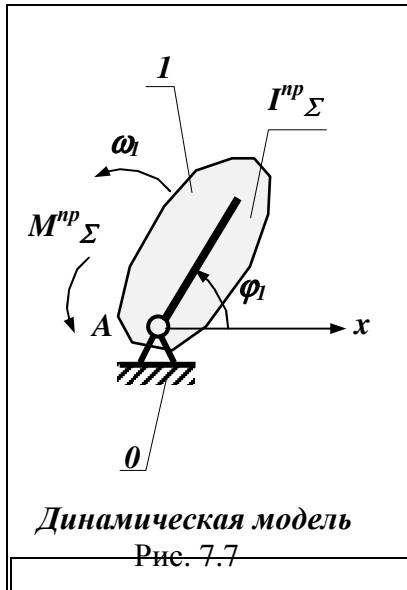
массы и моменты инерции звеньев  $m_1 = 1000 \text{ кг}$ ,

$$I_{S1} = 800 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, m_2 = 50 \text{ кг}, I_{S2} = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, m_3 = 100 \text{ кг},$$

$$I_{S3} = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad \omega_{1нач} = 0, \quad \Delta\varphi_1 = 30^\circ, \quad \varphi_{1нач} = 0.$$

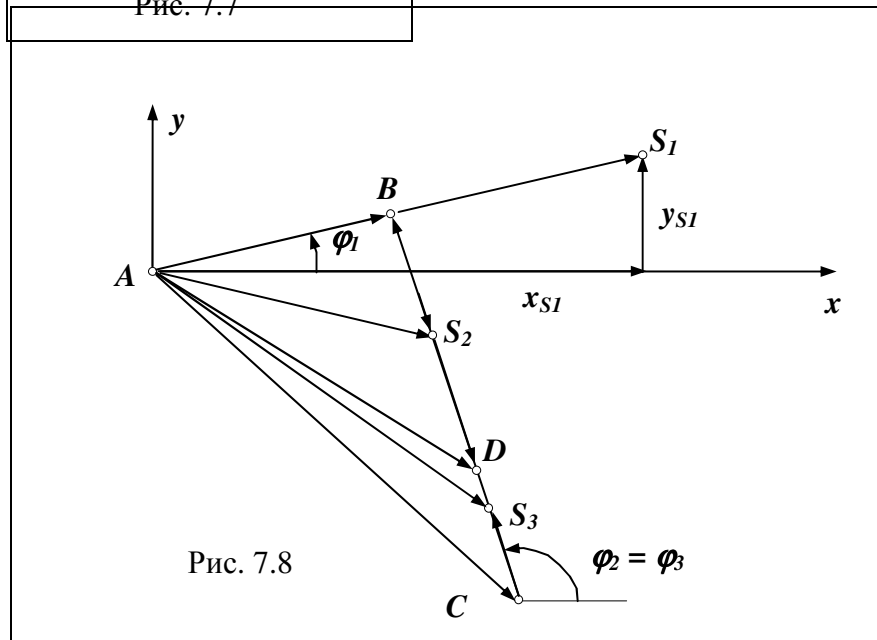
Определить:  $\omega_1 = f(\varphi_1)$ ,  $t = f(\varphi_1)$ ,  $\omega_1 = f(t)$ ,  $\varepsilon_1 = f(\varphi_1)$ .

1. Выбор динамической модели и определение ее параметров.



В качестве динамической модели принимаем звено 1, совершающее вращательное движение вокруг точки А с круговой частотой  $\omega_1$ , положение которого определяется обобщенной координатой  $\varphi_1$ . Параметры динамической модели: суммарный приведенный момент инерции звеньев механизма  $I^{np} \Sigma$  и суммарный приведенный момент, действующих на него внешних сил,  $M^{np} \Sigma$  определяются в следующей последовательности:

1.1. Определение кинематических передаточных функций для звеньев механизма  $u_{21} = u_{31}$ , центров масс  $V_{qS1}$ ,  $V_{qS2}$  и  $V_{qS3}$  и точки приложения движущей силы  $V_{qD}$ . Для определения этих функций воспользуемся методом проекций векторного контура механизма.



Рассмотрим следующие векторные контуры:

$$l_{AB} = l_{AC} + l_{CB};$$

$$l_{AD} = l_{AB} + l_{BD};$$

$$l_{AS2} = l_{AC} + l_{CS2};$$

$$l_{AS3} = l_{AC} + l_{CS3};$$

$$l_{AS1} = x_{S1} + y_{S1}.$$

Для первого векторного контура  $l_{AB} = l_{AC} + l_{CB}$  про-

екции на оси координат

$$\begin{aligned} l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 &= x_C + l_{CB} \cdot \cos \varphi_2, \\ l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 &= y_C + l_{CB} \cdot \sin \varphi_2, \\ \varphi_2 &= \arctg [(l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 - y_C) / (l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 - x_C)]. \end{aligned}$$

Производные от этих выражений по  $\varphi_1$

$$\begin{aligned} -l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 &= V_{qCB} \cdot \cos \varphi_2 - l_{CB} \cdot u_{21} \cdot \sin \varphi_2, \\ l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 &= V_{qCB} \cdot \sin \varphi_2 + l_{CB} \cdot u_{21} \cdot \cos \varphi_2, \end{aligned}$$

позволяют определить первые передаточные функции

$$\begin{aligned} u_{21} &= l_{AB} \cdot (\sin \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 + \cos \varphi_1) / [l_{CB} \cdot (\sin \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 + \cos \varphi_2)], \\ V_{qCB} &= -l_{AB} \cdot (\sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2) / (\sin \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 + \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Для второго векторного контура  $l_{AD} = l_{AB} + l_{BD}$  проекции на оси координат

$$\begin{aligned} x_D &= x_B + l_{BD} \cdot \cos (\varphi_2 + \pi), \\ y_D &= y_B + l_{BD} \cdot \sin (\varphi_2 + \pi). \end{aligned}$$

Производные от этих выражений по  $\varphi_1$

$$V_{qDx} = V_{qBx} - l_{BD} \cdot u_{21} \cdot \sin(\varphi_2 + \pi),$$

$$V_{qDy} = V_{qBy} + l_{BD} \cdot u_{21} \cdot \cos(\varphi_2 + \pi),$$

позволяют определить первую передаточную функцию

$$V_{qD} = \sqrt{V_{qDx}^2 + V_{qDy}^2}.$$

Для третьего векторного контура  $l_{AS2} = l_{AB} + l_{BS2}$  проекции на оси координат

$$x_{S2} = x_B + l_{BS2} \cdot \cos(\varphi_2 + \pi),$$

$$y_{S2} = y_B + l_{BS2} \cdot \sin(\varphi_2 + \pi).$$

Производные от этих выражений

$$V_{qS2x} = V_{qBx} - l_{BS2} \cdot u_{21} \cdot \sin(\varphi_2 + \pi),$$

$$V_{qS2y} = V_{qBy} + l_{BS2} \cdot u_{21} \cdot \cos(\varphi_2 + \pi),$$

позволяют определить первую передаточную функцию

$$V_{qS2} = \sqrt{V_{qS2x}^2 + V_{qS2y}^2}.$$

Для четвертого векторного контура  $l_{AS3} = l_{AC} + l_{CS3}$  проекции на оси координат

$$x_{S3} = x_C + l_{BS3} \cdot \cos \varphi_2,$$

$$y_{S3} = y_C + l_{BS3} \cdot \sin \varphi_2.$$

Производные от этих выражений

$$V_{qS3x} = -l_{CS3} \cdot u_{21} \cdot \sin \varphi_2,$$

$$V_{qS3y} = l_{CS3} \cdot u_{21} \cdot \cos \varphi_2,$$

позволяют определить первую передаточную функцию

$$V_{qS2} = \sqrt{V_{qS2x}^2 + V_{qS2y}^2}.$$

Для последнего пятого векторного контура  $l_{AS1} = x_{S1} + y_{S1}$  проекции на оси координат

$$x_{S1} = l_{AS1} \cdot \cos \varphi_1,$$

$$y_{S1} = l_{AS1} \cdot \sin \varphi_1.$$

Производные от этих выражений по  $\varphi_1$

$$V_{qS1x} = l_{AS1} \cdot \sin \varphi_1,$$

$$V_{qS1y} = l_{AS1} \cdot \cos \varphi_1,$$

позволяют определить первую передаточную функцию

$$V_{qS1} = \sqrt{V_{qS1x}^2 + V_{qS1y}^2}.$$

Построим графики передаточных функций и передаточных отношений, которые необходимы для определения параметров динамической модели в нашем примере.

*Диаграмма передаточных функций.*

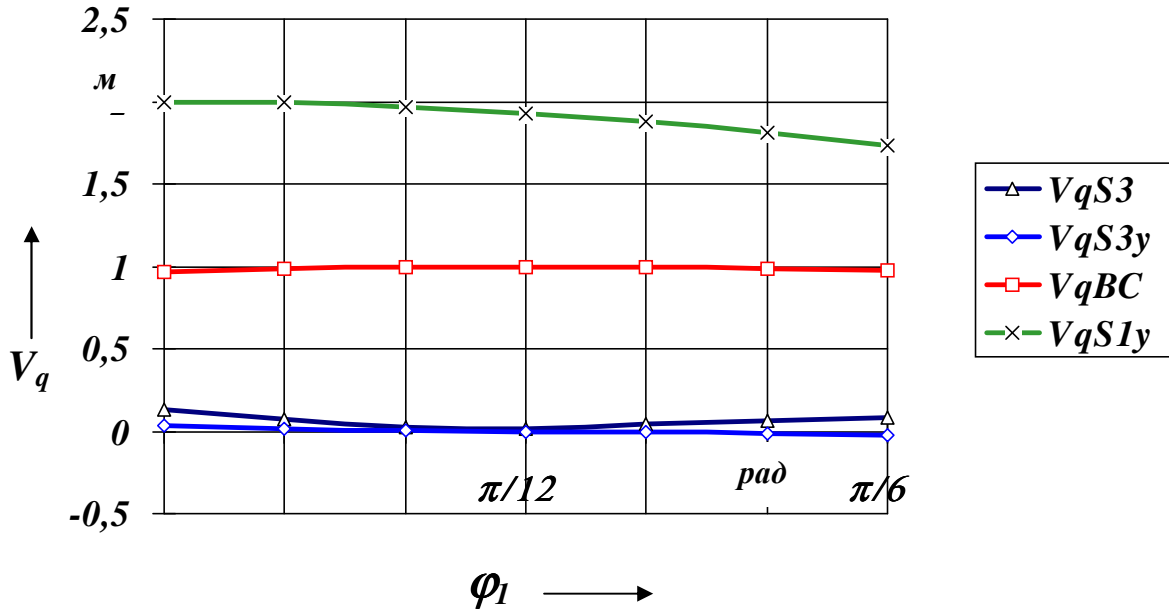


Рис. 7.9

*Диаграмма передаточных отношений.*

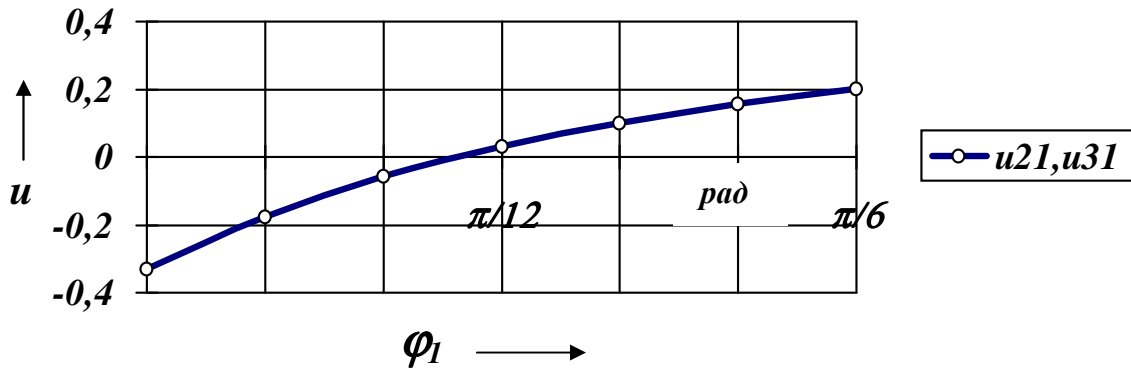


Рис. 7.10

*Диаграмма передаточных функций.*

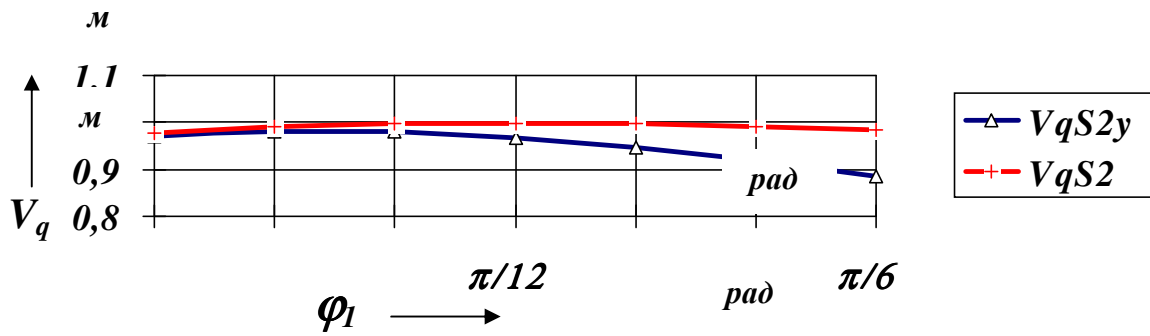


Рис. 7.11



1.2. Определение движущей силы по условиям в начале и в конце цикла.

Расчет проведем для закона изменения движущей силы, который изображен на рис.7.5. Величина движущей силы в начальном положении механизма рассчитывается по формуле

$$F_{\partial 0} = \{ k \cdot \text{abs} [ G_1 \cdot V_{qS10} \cdot \cos (G_1, dS_{S10}) + G_2 \cdot V_{qS20} \cdot \cos (G_2, dS_{S20}) + G_3 \cdot V_{qS30} \cdot \cos (G_3, dS_{S30}) ] \} / V_{qD0} \cdot \cos (F_{\partial 0}, dS_{D0}) =$$

$$= [ k \cdot \text{abs} (G_1 \cdot V_{qS1y0} + G_2 \cdot V_{qS2y0} + G_3 \cdot V_{qS3y0}) ] / V_{qBC0} .$$

Принимаем  $k=1.1$  и получаем

$$F_{\partial 0} = 1.1 \cdot \text{abs} (10000 \cdot 2 + 500 \cdot 0.97 + 1000 \cdot 0.0342) / 0.967 = 23341.3 \text{ Н}.$$

В конечном положении величина движущей силы рассчитывается по формуле:

$$F_{\partial n} = \text{abs} [ G_1 \cdot V_{qS1n} \cdot \cos (G_1, dS_{S1n}) + G_2 \cdot V_{qS2n} \cdot \cos (G_2, dS_{S2n}) + G_3 \cdot V_{qS3n} \cdot \cos (G_3, dS_{S3n}) ] / V_{qDn} \cdot \cos (F_{\partial n}, dS_{Dn}) =$$

$$= \text{abs} (G_1 \cdot V_{qS1yn} + G_2 \cdot V_{qS2yn} + G_3 \cdot V_{qS3yn}) / V_{qBCn} .$$

$$F_{\partial n} = \text{abs} (10000 \cdot 1.732 + 500 \cdot 0.984 + 1000 \cdot 0.0207) / 0.9731 = 18325.7 \text{ Н}.$$

Значение движущей силы в интервале  $(\beta - \alpha) \cdot H_D$  определим по формуле:

$$F_{\partial}^* = \{ \text{abs} (G_1 \cdot H_{S1} + G_2 \cdot H_{S2} + G_3 \cdot H_{S3}) - [ F_{\partial 0} \cdot \alpha + F_{\partial n} \cdot (1 - \beta) ] \cdot H_D \} / [ (\beta - \alpha) \cdot H_D ] .$$

Примем  $\alpha = 0.32$  и  $\beta = 0.65$  и рассчитаем перемещения центров масс

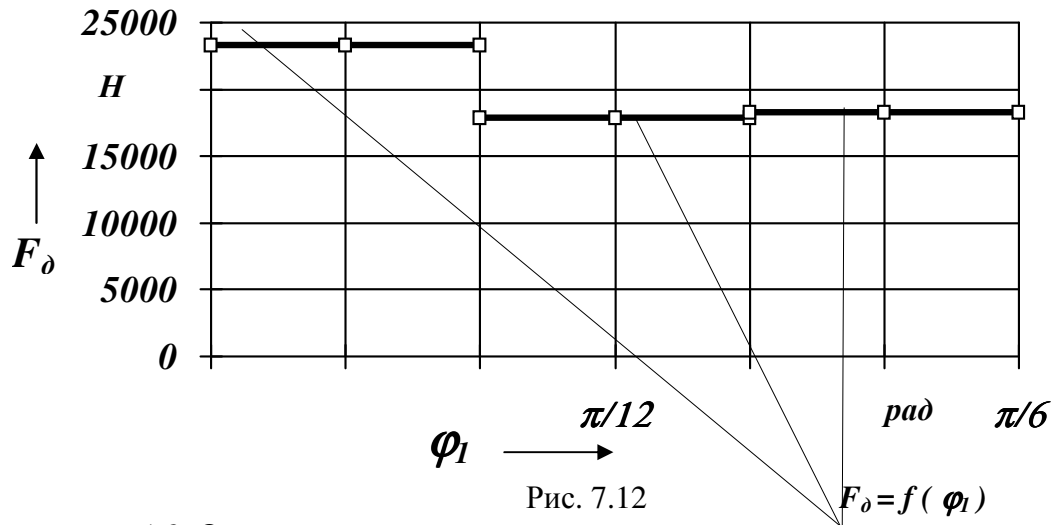
$$H_{S1} = y_{S1n} - y_{S10} = 1 - 0 = 1 \text{ м}; \quad H_{S2} = y_{S2n} - y_{S20} = 0.162 - (-0.338) = 0.5 \text{ м};$$

$$H_{S3} = y_{S3n} - y_{S30} = -0.364 - (-0.364) = 0;$$

подставим полученные значения в формулу и получим

$$F_{\partial}^* = \{ \text{abs} (10000 \cdot 1 + 500 \cdot 0.5 + 1000 \cdot 0) - [23341.3 \cdot 0.32 + 18325.7 \cdot (1 - 0.65)] \cdot 0.518 \} / [ (0.65 - 0.32) \cdot 0.518 ] = (10250 - 7191) / 0.171 = 17889 \text{ Н}.$$

*Диаграмма движущей силы.*



1.3. Определение приведенного суммарного момента .

- определение приведенного суммарного момента сил сопротивления

В нашем примере силами сопротивления являются силы веса звеньев механизма, поэтому расчет суммарного приведенного момента сил сопротивления проводим по формуле

$$M^{np}_{\Sigma c} = \sum_{i=1}^m G_i \cdot V_{qSi} \cdot \cos(F_i, \bar{dS}_i) = \sum_{i=1}^m G_i \cdot V_{qSyi}.$$

- определение приведенного момента движущей силы

В нашем примере только одна движущая сила, создаваемая давлением жидкости в гидроцилиндре. Приведенный момент от этой силы

$$M^{np}_{F\delta i} = F_{\delta i} \cdot V_{qDi} \cdot \cos(F_{\delta i}, \bar{V}_{Di}) = F_{\delta i} \cdot V_{qBCi}.$$

На рис. 7.13 приведены диаграммы приведенных моментов: сопротивления  $M^{np}_{\Sigma c}$ , движущего  $M^{np}_{F\delta i}$  и суммарного  $M^{np}_{\Sigma c} = M^{np}_{\Sigma} + M^{np}_{F\delta i}$ .

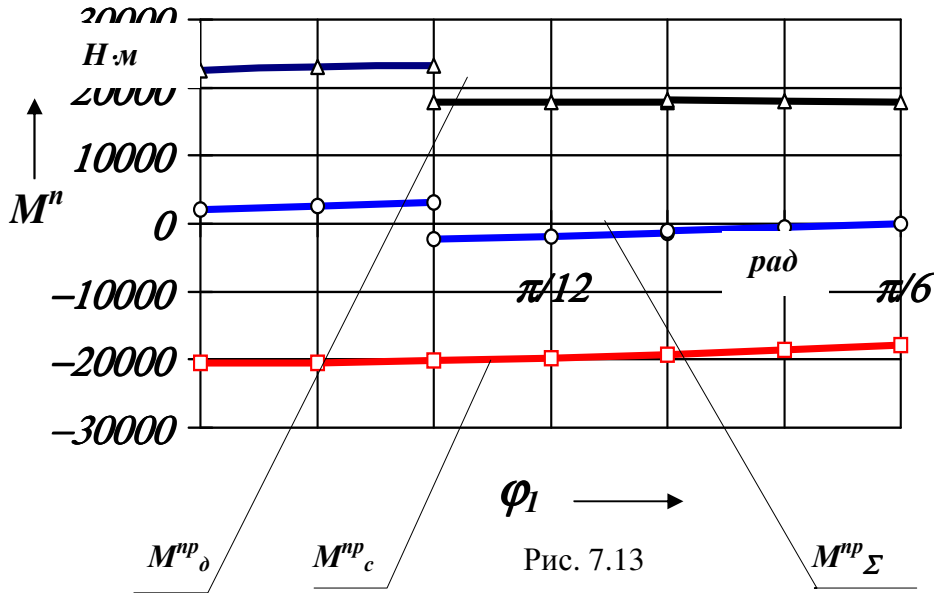
1.4. Определение суммарного приведенного момента инерции

В рассматриваемом механизме приведенный момент инерции суммируется из масс и моментов инерции звеньев и может быть рассчитан по следующей зависимости

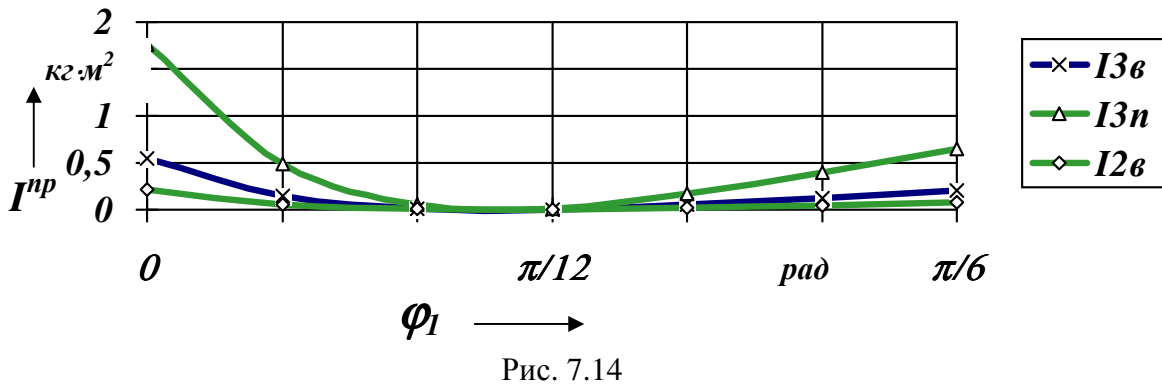
$$I^{np}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot (V_{qSi})^2 + \sum_{i=1}^3 I_{Si} \cdot (\omega_i)^2 =$$

$$= m_1 \cdot (V_{qS1})^2 + m_2 \cdot (V_{qS2})^2 + m_3 \cdot (V_{qS3})^2 + I_{S1} + I_{S2} \cdot (\omega_2)^2 + I_{S3} \cdot (\omega_3)^2.$$

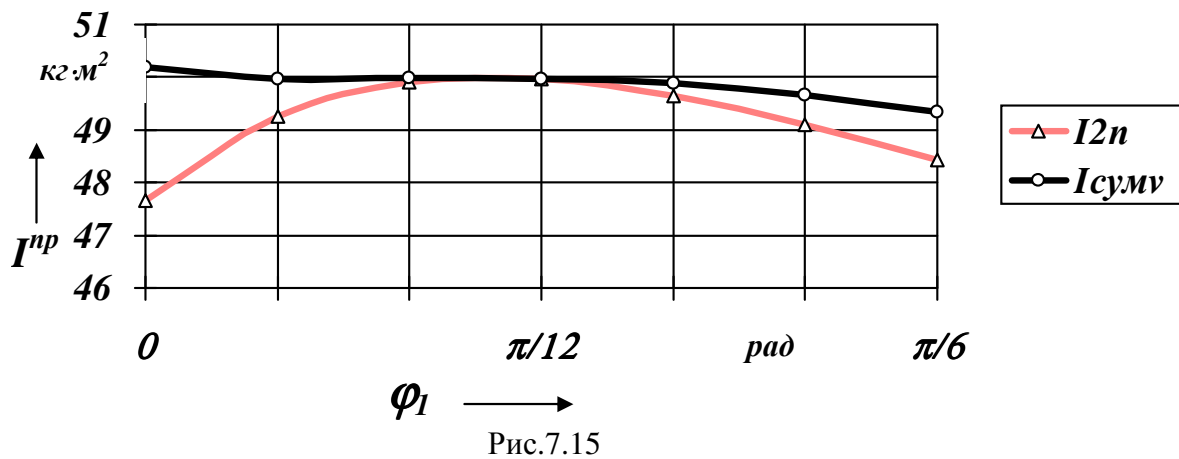
### Диаграмма приведенных моментов



### Диаграммы приведенных моментов инерции



### Диаграммы приведенных моментов инерции



Графики переменной части суммарного приведенного момента инерции даны на рис. 7.13 и 7.14. Кроме того, имеется и постоянная часть  $I^{np}_{\Sigma}$ , определяемая массой и моментом инерции звена 1

$$I^{np}_{\Sigma} = m_1 \cdot (V_{qSI})^2 + I_{SI} = 1000 \cdot (2)^2 + 800 = 4800 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 .$$

Суммарный приведенный момент инерции и равен сумме постоянной и переменной частей

$$I^{np}_{\Sigma} = I^{np}_{\Sigma x} + I^{np}_{\Sigma y} .$$

## 2. Определение суммарной работы внешних сил.

Суммарную работу внешних сил получим интегрированием суммарного приведенного момента  $M_{np\Sigma}$  по обобщенной координате  $d\varphi_1$

$$A_{\Sigma M} = \int_0^{\pi/6} M_{np\Sigma} \cdot d\varphi_1 .$$

Интегрирование можно проводить различными методами. Воспользуемся методом графического интегрирования. При этом методе участок изменения обобщенной координаты, на котором проводится интегрирование, разбирается на несколько малых частей (в нашем примере 6). В пределах каждого  $i$ -го участка кривая  $M_{np\Sigma} = f(\varphi_1)$  заменяется прямой, соответствующей среднеинтегральному значению  $M_{np\Sigma}$  на этом участке. На продолжении оси абсцисс, влево от начала координат откладываем отрезок интегрирования  $k_I$ . Ординаты среднеинтегральных значений  $M_{np\Sigma}$  проецируем на ось ординат. Точки пересечения проецирующих линий с осью ординат соединяем прямыми с концом отрезка интегрирования. На диаграмме работы из начала первого участка (и до его конца) под углом  $\psi_1$  к оси абсцисс проводим прямую. Для второго участка аналогичная прямая проводится под углом  $\psi_2$ . Ее начало выбирается в точке пересечения предыдущего отрезка прямой с вертикалью проходящей начало второго участка. Проведя построения для всего интервала интегрирования, получим график работы. Масштаб этого графика определим из подобия треугольников

$$\text{tg } \psi_1 = y_{M_{np\Sigma}cp} / k_I = y_{\Delta A_{\Sigma I}} / x_{\Delta \varphi_1} ,$$

или

$$\mu_M \cdot M^{np}_{\Sigma Icp} / k_I = \mu_A \cdot \Delta A_{\Sigma I} / \mu_{\varphi} \cdot \Delta \varphi_1 ,$$

так как  $M^{np}_{\Sigma Icp} = \Delta A_{\Sigma I} / \Delta \varphi_1$ , то

$$\mu_A = \mu_M \cdot \mu_{\varphi} / k_I .$$

Графики, иллюстрирующие построение диаграммы работы, приведены на рис.7.16 и 7.17

## 3. Определение угловой скорости звена приведения

Определение закона движения звена приведения в виде диаграммы изменения угловой скорости в функции обобщенной координаты  $\omega_1 = f(\varphi_1)$  проводится по формуле

$$\omega_{1i} = \sqrt{2 \cdot (A_{Mnp\Sigma} + T_{нач}) / I^{np}_{\Sigma}} ,$$

*Диаграмма приведенного суммарного момента.*

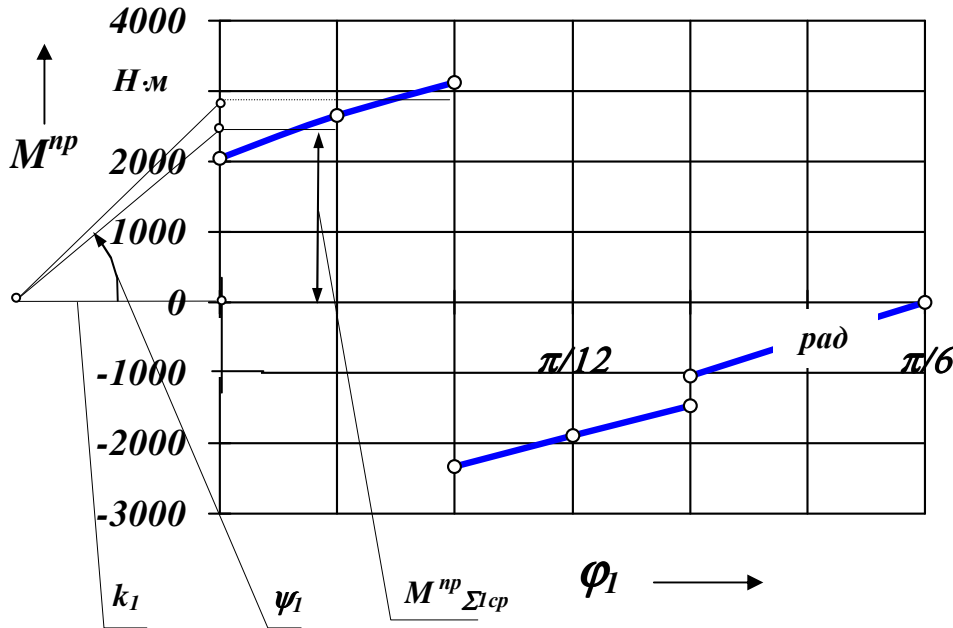


Рис. 7.16

*Диаграмма суммарной работы.*

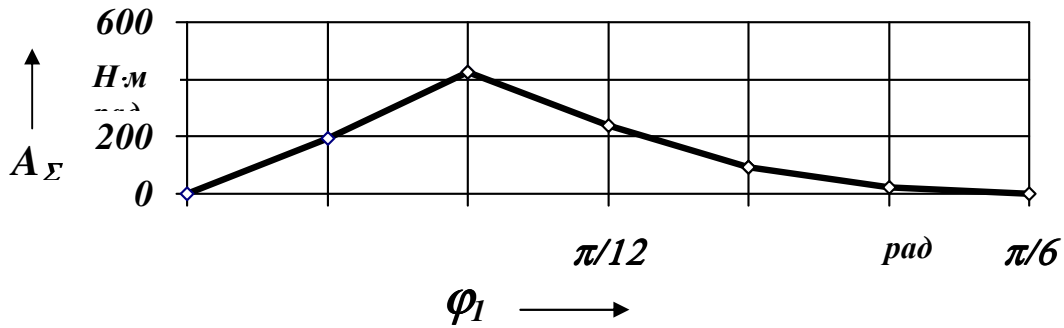


Рис. 7.17

Для машин работающих в режиме пуск-останов

$$\omega_{нач} = 0 \quad \text{и} \quad T_{нач} = 0,$$

формула принимает вид

$$\omega_{i} = \sqrt{2 \cdot A_{Mnp\Sigma} / I_{\Sigma}^{np}}.$$

Диаграмма  $\omega_i = f(\varphi_1)$  приведена на рис. 7.18.

*Диаграмма угловой скорости звена приведения.*

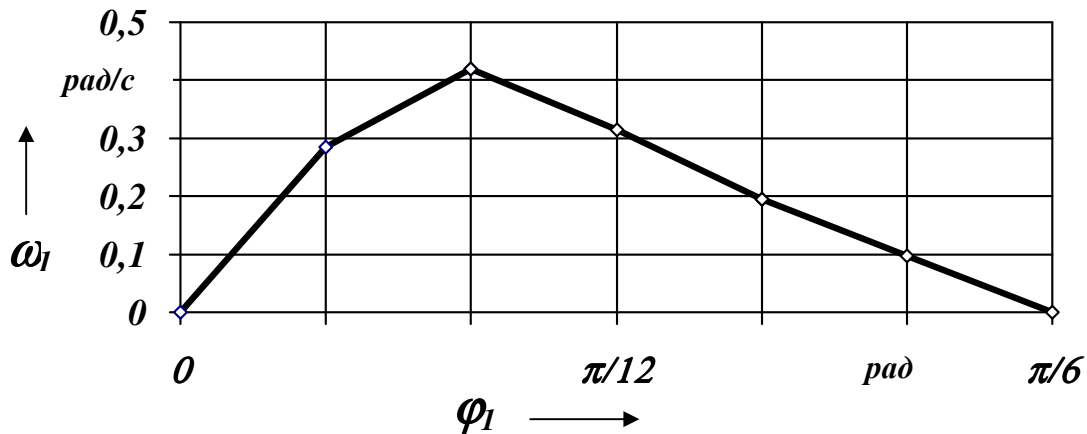


Рис.7.18

4. Определение времени цикла.

Время цикла определяется по диаграмме  $t = f(\varphi_1)$ . Для построения этой диаграммы проведем интегрирование диаграммы угловой скорости

$$d\varphi_1 / dt = \omega_1 \Rightarrow dt = d\varphi_1 / \omega_1, \quad t = \int_0^{\pi/6} d\varphi_1 / \omega_1.$$

Воспользуемся методом графического интегрирования обратной величины. При этом участок изменения обобщенной координаты, на котором проводится интегрирование, разбивается на несколько малых участков. В пределах каждого  $i$ -го участка кривая  $\omega_1 = f(\varphi_1)$  заменяется прямой, соответствующей среднеинтегральному значению  $\omega_{1cp\ i}$  на этом участке. На оси ординат, откладываем отрезок интегрирования  $k_2$  (рис.7.19). Ординаты среднеинтегральных значений  $\omega_{1cp\ i}$  проецируем на ось ординат. Точки пересечения проецирующих линий с осью ординат переносим по дугам окружности на продолжение оси абсцисс. Полученные на оси абсцисс точки, соединяем прямыми линиями с концом отрезка интегрирования. Из начала первого участка (на диаграмме времени) и до его конца под углом  $\psi_1$  к оси абсцисс проводим прямую линию. Для второго участка аналогичная прямая проводится под углом  $\psi_2$ . Ее начало выбирается в точке пересечения предыдущего отрезка прямой с вертикалью проходящей начало второго участка. Проведя построения для всего интервала интегрирования, получим график времени. Масштаб этого графика определим из подобия треугольников

$$\operatorname{tg} \psi_1 = k_2 / y_{\omega_{1cp1}} = y_{\Delta t_1} / x_{\Delta \varphi_1},$$

или  $k_1 / \mu_\omega \cdot \omega_{1cp1} = \mu_t \cdot \Delta t_1 / \mu_\varphi \cdot \Delta \varphi_1,$

так как  $1 / \omega_{1cp1} = \Delta t_1 / \Delta \varphi_1,$  то

$$\mu_\omega = k_2 \cdot \mu_\varphi / \mu_\omega.$$

5. Построение диаграммы угловой скорости в функции времени

Диаграмма угловой скорости  $\omega_1 = f(t)$  в функции времени строится по диаграммам  $\omega_1 = f(\varphi_1)$  и  $t = f(\varphi_1)$ , исключением переменной  $\varphi_1$ .

*Диаграмма угловой скорости звена приведения.*

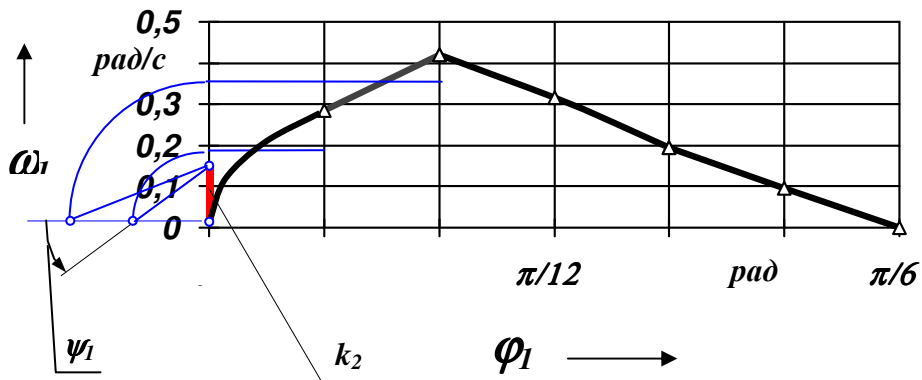


Рис. 7.19

*Диаграмма времени.*

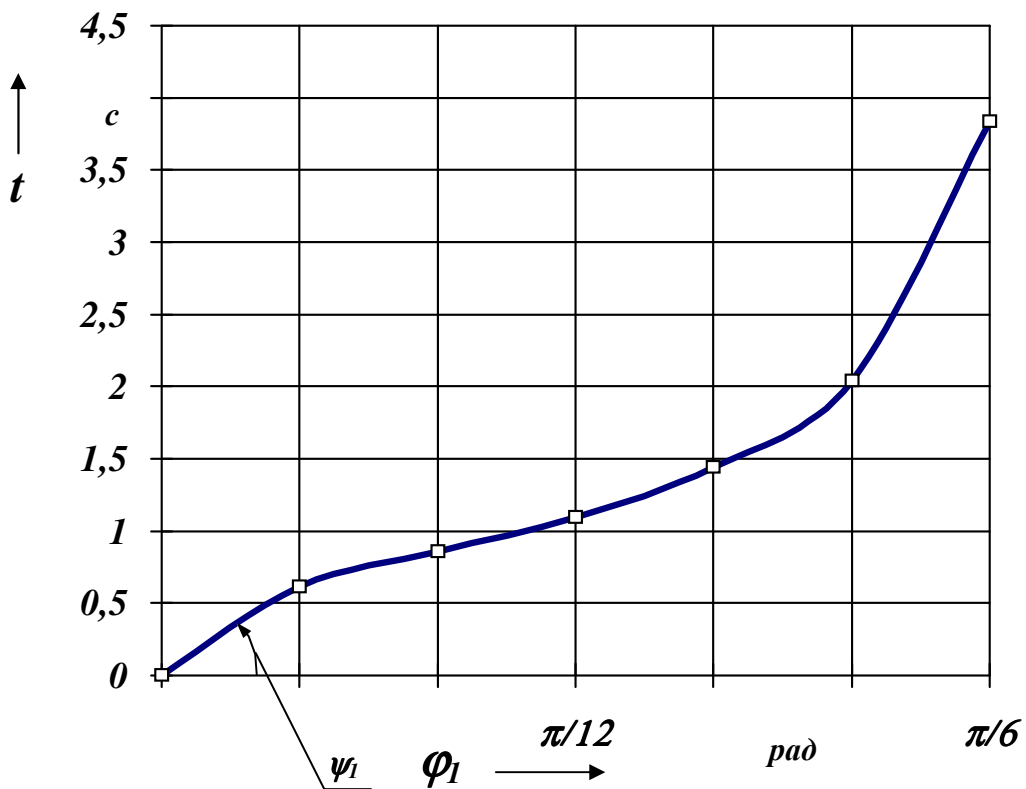


Рис.7.20

6. Определение углового ускорения звена приведения

Для расчета углового ускорения звена приведения  $\varepsilon_1 = f(\varphi_1)$  можно воспользоваться двумя различными зависимостями:

- а).  $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt = d\omega_1/d\varphi_1 \cdot d\varphi_1/dt = \omega_1 \cdot d\omega_1/d\varphi_1$ ,
- б).  $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt = M^{np} \sum I^{np} \Sigma - \omega_1^2 / (2 \cdot I^{np} \Sigma) \cdot (dI^{np} \Sigma / d\varphi_1)$ .

Применение первой формулы приводит к большим погрешностям, так как она основывается на использовании одной из конечных зависимостей расчета  $\omega_1 = f(\varphi_1)$ . Кроме

того, в точках с нулевыми значениями  $\omega_1$  расчет по этой формуле дает неверный результат  $\varepsilon_1 = 0$ . Поэтому проведем расчет зависимости  $\varepsilon_1 = f(\varphi_1)$  по второй формуле. Диаграмма функции  $\varepsilon_1 = f(\varphi_1)$  приведена на рис. 7.22.

*Диаграмма угловой скорости от времени.*

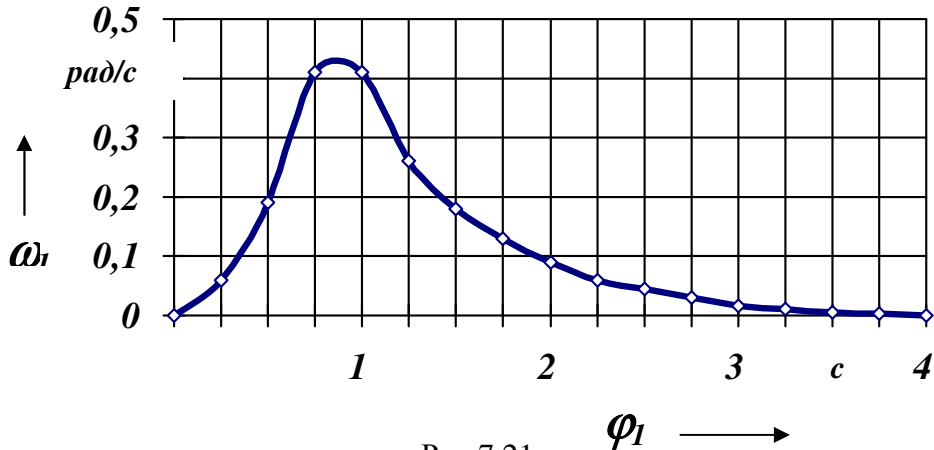


Рис.7.21

*Диаграмма углового ускорения звена приведения.*

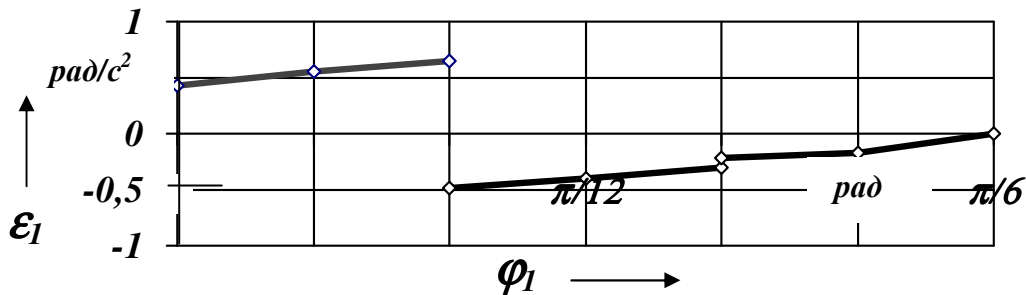


Рис. 7.22

*Метод поднормали (графическое определение производной).*

При определении в формуле углового ускорения производной  $d I^{np}_{\Sigma} / d \varphi_1$  часто используется метод поднормали. На графике дифференцируемой функции (рис. 23) в рассматриваемой точке проводят касательную  $t - t$ , нормаль  $n - n$  и ординату  $y_{I^{np}_{\Sigma}}$ . Измеряют отрезок  $x_i$  между точками пересечения с осью  $x$  ординаты и нормали. Рассчитывают производную с учетом масштабов по осям по формуле

$$d I^{np}_{\Sigma} / d \varphi_1 = ( dy_{I^{np}_{\Sigma}} / dx_{\varphi_1} ) \cdot ( \mu_{\varphi} / \mu_i ) = \text{tg } \psi_i \cdot ( \mu_{\varphi} / \mu_i ) = ( y_{I^{np}_{\Sigma}} / x_i ) \cdot ( \mu_{\varphi} / \mu_i )$$



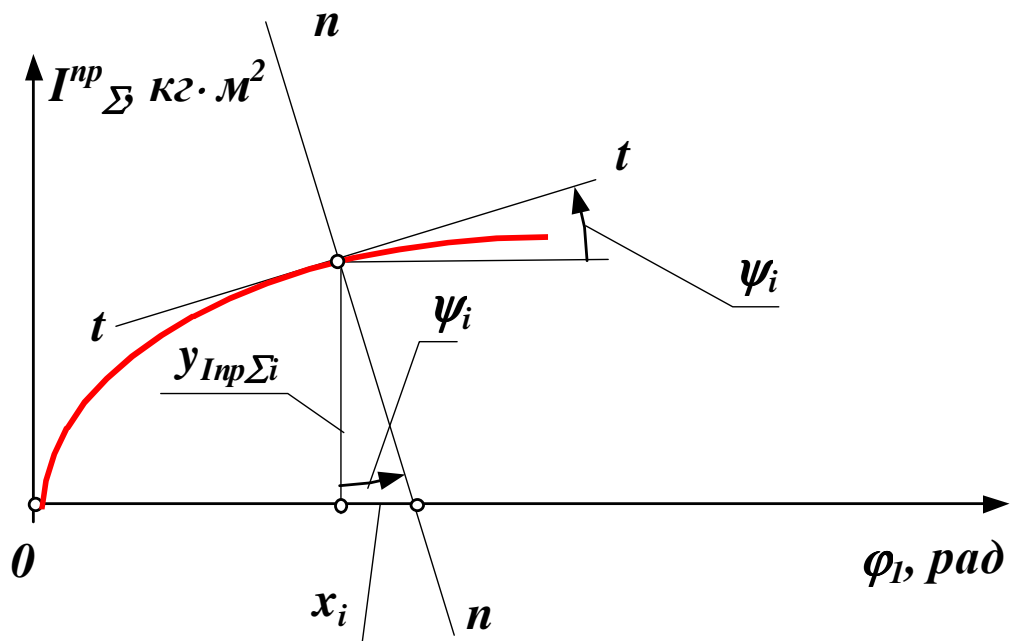


Рис. 7.23

### Лекция 8.

Краткое содержание: Установившийся режим движения машины. Неравномерность движения и методы ее регулирования. Коэффициент неравномерности. Маховик и его роль в регулировании неравномерности движения. Решение задачи регулирования хода машины по методу Н.И.Мерцалова. Алгоритм решения прямой задачи динамики при установившемся режиме движения машины. Статическая характеристика асинхронного электродвигателя и ее влияние на неравномерность движения. Устойчивость движения машины с асинхронным электродвигателем.

#### Установившийся режим движения машины.

Установившийся режим движения машины наступает тогда когда работа внешних сил за цикл не изменяет ее энергии, то есть суммарная работа внешних сил за цикл движения равна нулю.

$$\text{Установившееся движение} \Rightarrow A_{\delta}^u = A_c^u, \quad A_{\Sigma}^u = \Delta T = 0,$$

где

$$A_{\delta}^u = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_{10} + \Delta\varphi_1} M_{\delta}^{np} \cdot d\varphi_1 \quad \text{и} \quad A_c^u = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_{10} + \Delta\varphi_1} M_c^{np} \cdot d\varphi_1 \quad - \text{соответственно работа}$$

за цикл движущих сил и сил сопротивления,

$\varphi_{10}$  - начальное значение обобщенной координаты,  $\Delta\varphi_1$  - приращение обобщенной координаты за цикл.

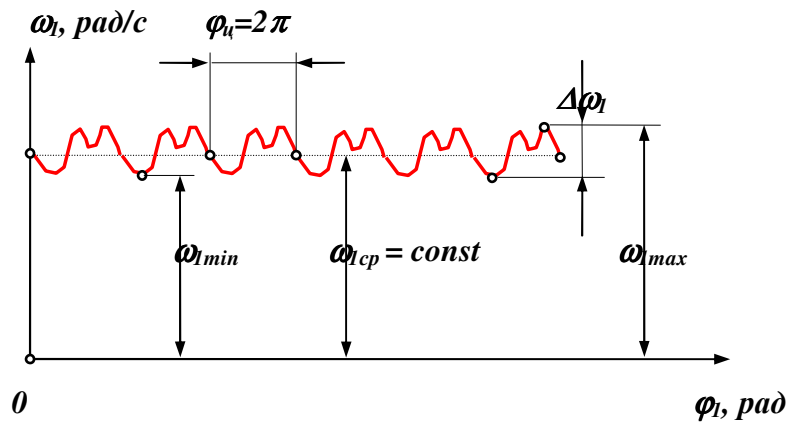


Рис. 8.1

В пределах цикла текущее значение суммарной работы не равно нулю. Работа может быть то положительной, то отрицательной. При положительной величине работы машина увеличивает свою кинетическую энергию за счет увеличения скорости, то есть разгоняется. На участках, где суммарная работа отрицательна, кинетическая энергия и скорость машины уменьшается, машина притормаживается. В установившемся режиме величины увеличения скорости на участках разгона и снижения на участках торможения за цикл равны, поэтому средняя скорость движения  $\omega_{1cp} = const$  постоянна. В машинах приведенный момент инерции которых зависит от обобщенной координаты, на неравномерность движения оказывает влияние величина изменения приведенного момента инерции. Колебания скорости изменения обобщенной координаты машины не оказывают прямого влияния на фундамент машины. Поэтому эти колебания и вы-

зывающие их причины определяют, так называемую, внутреннюю виброактивность машины.

Величина амплитуды колебаний скорости  $\Delta\omega$  определяется разностью между максимальной  $\omega_{max}$  и минимальной  $\omega_{min}$  скоростями. За меру измерения колебаний скорости в установившемся режиме принята относительная величина, которая называется коэффициентом изменения средней скорости

$$\delta = \Delta\omega / \omega_{cp} = (\omega_{max} - \omega_{min}) / \omega_{cp},$$

где  $\omega_{cp} = (\omega_{max} + \omega_{min}) / 2$  - средняя угловая скорость машины.

Для различных машин в зависимости от требований нормального функционирования (обрыв нитей в прядильных машинах, снижение чистоты поверхности в металлорежущих станках, нагрев обмоток и снижение КПД в электрогенераторах и т.д.) допускаются различные максимальные значения коэффициента изменения средней скорости. Существующая нормативная документация устанавливает следующие допустимые значения коэффициента неравномерности  $[\delta]$ :

- дробилки  $[\delta] = 0.2 \dots 0.1;$
- прессы, ковочные машины  $[\delta] = 0.15 \dots 0.1;$
- насосы  $[\delta] = 0.05 \dots 0.03;$
- металлорежущие станки нормальной точности  $[\delta] = 0.05 \dots 0.01;$
- металлорежущие станки прецизионные  $[\delta] = 0.005 \dots 0.001;$
- двигатели внутреннего сгорания  $[\delta] = 0.015 \dots 0.005;$
- электрогенераторы  $[\delta] = 0.01 \dots 0.005;$
- прядильные машины  $[\delta] = 0.02 \dots 0.01 .$

Чтобы снизить внутреннюю виброактивность и неравномерность движения применяются различные методы:

- ⇒ уменьшение влияния неравномерности внешних сил ( например, применение многоцилиндровых ДВС, насосов и компрессоров с рациональным сдвигом рабочих процессов в цилиндрах );
- ⇒ уменьшение влияния переменности приведенного момента инерции ( тоже обеспечивается увеличением числа цилиндров в поршневых машинах, а также уменьшением масс и моментов инерции деталей, приведенный момент инерции которых зависит от обобщенной координаты );
- ⇒ установка на валах машины центробежных регуляторов или аккумуляторов кинетической энергии - маховиков;
- ⇒ активное регулирование скорости с использованием систем автоматического управления, включая и компьютерное управление.

Рассмотрим подробно наиболее простой способ регулирования неравномерности вращения - установку дополнительной маховой массы или маховика. Маховик в машине выполняет роль аккумулятора кинетической энергии. При разгоне часть положительной работы внешних сил расходуется на увеличение кинетической энергии маховика и скорость до которой разгоняется система становится меньше, при торможении маховик отдает запасенную энергию обратно в систему и величина снижения скорости машины уменьшается. Сказанное иллюстрируется графиками, изображенными на рис. 8.2. На этом рисунке:  $\Delta\omega$  - изменение угловой скорости до установки маховика,  $\Delta\omega^*$  - после установки маховика. Отсюда можно сделать вывод: чем больше дополнительная маховая масса, тем меньше изменение  $\Delta\omega^*$  и коэффициент неравномерности  $\delta$ .

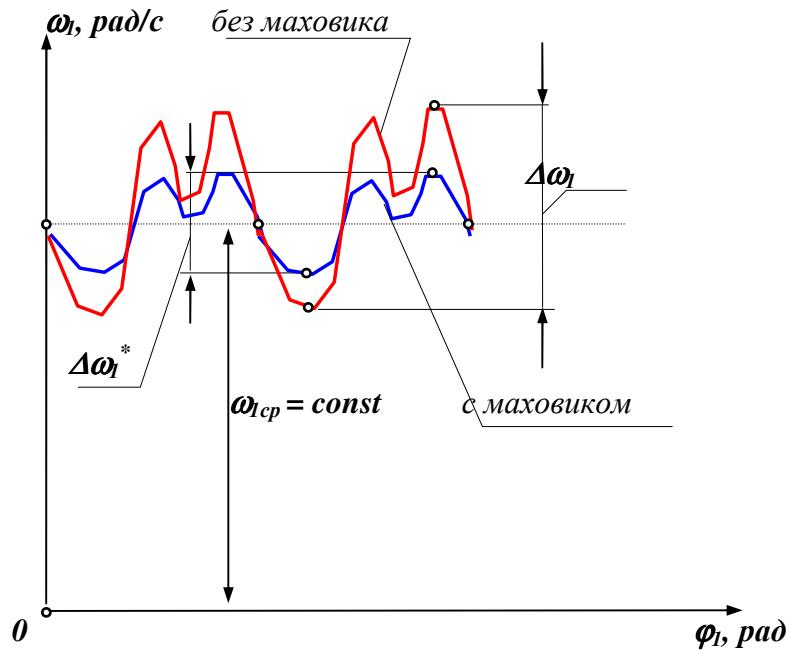


Рис. 8.2

**Определение закона движения  $\Delta\omega_1 = f(\varphi_1)$  и приведенного момента инерции  $I^{np}_I$ .**

Из теоремы об изменении кинетической энергии можно записать

$$\Delta T = T - T_{нач} = A_{\Sigma}, \text{ где } \Delta T = \Delta T_I + \Delta T_{II} = A_{\Sigma} \text{ и } T_I = I^{np}_I \cdot \omega_1^2 / 2.$$

Если допустить, что  $\Delta T_I \approx dT_I$ , то  $dT_I = I^{np}_I \cdot \omega_1 \cdot d\omega_1$ . Так как при установившемся движении  $\Delta\omega_1 \ll \omega_1$ , то можно считать что  $\omega_1 \approx \omega_{1ср}$ . Тогда, переходя к конечным приращениям, получим:

$$\Delta T_I \approx I^{np}_I \cdot \omega_{1ср} \cdot \Delta\omega_1, \quad \text{откуда} \quad \Delta\omega_1 \approx \Delta T_I / I^{np}_I \cdot \omega_{1ср}.$$

Так как  $I^{np}_I \cdot \omega_{1ср} = const$ , то можно записать что  $\Delta T_{Imax} \approx I^{np}_I \cdot \omega_{1ср} \cdot \Delta\omega_{1max}$ , где  $\Delta T_{Imax}$  - изменение кинетической энергии первой группы звеньев за цикл,  $\Delta\omega_{1max}$  - изменение угловой скорости за цикл. Подставим в эту формулу выражение для коэффициента неравномерности  $\delta = \Delta\omega_{1max} / \omega_{1ср}$  и получим формулу для расчета приведенного момента инерции первой группы, который обеспечивает заданный коэффициент неравномерности

$$I^{np}_I = \Delta T_{Imax} / (\delta \cdot \omega_{1ср}^2).$$

**Определение момента инерции дополнительной маховой массы (маховика).**

Рассмотрим определение маховика для примера рассмотренного в лекции 6 - одноцилиндрового поршневого насоса. В первую группу звеньев в этом примере входят: ротор электродвигателя  $I_{рот}$ , детали редуктора  $I^{np}_{ред}$ , кривошипный вал  $I_{01}$  и маховик  $I_M$

$$I^{np}_I = I^{np}_{рот} + I^{np}_{ред} + I_{01} + I_M,$$

откуда момент инерции маховика

$$I_M = I^{np}_I - (I^{np}_{ред} + I_{01} + I_M).$$

### **Решение задачи регулирования хода машины по методу Н.И.Мерцалова.**

При расчете маховика (или решении задачи регулирования хода машины) по методу Н.И.Мерцалова задача решается в следующей последовательности:

- Определяются параметры динамической модели, например для ДВС  $M^{np}_\delta$  - приведенный суммарный момент движущих сил и  $I^{np}_{II}$  - приведенный момент инерции второй группы звеньев.
- Определяется работа движущих сил  $A_\delta$  интегрированием функции  $M^{np}_\delta = f(\varphi_I)$  за цикл движения машины (допустим  $2\pi$ );
- Определяется работа движущих сил за цикл и приравнивается к работе сил сопротивления  $A_\delta = A_c$ . Из этого равенства определяется среднеинтегральное значение момента сил сопротивления

$$M^{np}_{ср} = A_c / (2\pi);$$

и для него строится диаграмма работы  $A_c = f(\varphi_I)$ . Суммированием этой диаграммы и диаграммы  $A_\delta = f(\varphi_I)$  получаем диаграмму  $A_\Sigma = f(\varphi_I)$ .

- Делается допущение  $\omega_I \approx \omega_{ср}$ , при котором  $T_{II} \approx I^{np}_{II} \cdot \omega_{ср}^2 / 2$  (первое допущение метода Мерцалова), и определяется  $T_{II} = f(\varphi_I)$ .
- Определяется кинетическая энергия первой группы звеньев

$$T_I = A_\Sigma - T_{II} + T_{нач} = A_\Sigma - T_{II} + T_{Iнач} + T_{IIнач}.$$

Так как начальные значения кинетической энергии неизвестны, то если учесть, что  $T_{нач} = T_{Iнач} + T_{IIнач}$ ,  $\Delta T_I = T_I - T_{Iнач}$ ,  $\Delta T_{II} = T_{II} - T_{IIнач}$ , получим

$$\Delta T_I = A_\Sigma - \Delta T_{II},$$

то есть, вычитая из суммарной работы приращение кинетической энергии второй группы, получим приращение кинетической энергии первой группы.

- По функции  $\Delta T_I = f(\varphi_I)$  определяется максимальное изменение кинетической энергии за цикл  $\Delta T_{Imax}$ . Второй раз делаем допущение  $\omega_I \approx \omega_{ср}$  на основании которого, как показано выше, можно записать

$$I^{np}_I = \Delta T_{Imax} / (\delta \cdot \omega_{ср}^2).$$

Из этого выражения, определив предварительно  $\Delta T_{Imax}$ , можно решить две задачи:

- задачу синтеза - при заданном  $[\delta]$  определить необходимый для его обеспечения приведенный момент инерции  $I^{np}_{Iнб}$ ,

- задачу анализа - при заданном  $I^{np}_I$  определить обеспечиваемый им коэффициент неравномерности  $\delta$ .

**Алгоритм решения прямой задачи динамики при установившемся режиме движения машины.**

Решение этой задачи рассмотрим на конкретном примере машинного агрегата привода буровой установки.

Дано: Кинематическая схема машины -  $l_{AB} = 0.12\text{м}$ ,  $l_{BC} = 0.528\text{м}$ ,  $l_{BS2} = 0.169\text{м}$ , средняя частота вращения кривошипа -  $\omega_{ср} = 47.124 \text{ рад/с}^2$ , массы звеньев -  $m_2 = 24.2 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 36.2 \text{ кг}$ , момент инерции -  $I_{2S} = 1.21 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_{10} = 2.72 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , максимальное давление в цилиндре -  $p_{max} = 4.4 \text{ МПа}$ , коэффициент неравномерности вращения  $[\delta] = 1/80$ , индикаторная диаграмма (приведена на рис. 8.3).

---

Определить: закон движения машины  $\omega_I = f(\varphi_I)$  и  $\varepsilon_I = f(\varphi_I)$ , момент инерции маховика  $I_{дон}$ , обеспечивающий заданную неравномерность вращения  $[\delta]$ .

1. Определение параметров динамической модели:  $M^{np}_\delta$  - приведенного суммарного момента движущих сил и  $I^{np}_{II}$  - приведенного момента инерции второй группы звеньев.

1.1. Определение первых кинематических передаточных функций. Определение кинематических передаточных функций для звеньев механизма  $u_{21} = u_{31}$ , центров масс  $V_{qS1}$ ,  $V_{qS2}$  и  $V_{qS3}$  и точки приложения движущей силы  $V_{qD}$ . Для определения этих функций воспользуемся методом проекций векторного контура механизма. Рассмотрим следующие векторные контуры, изображенные на рис. 8.4 рядом со схемой механизма:

$$l_{AB} + l_{CB} = l_{AC}; \quad l_{AS2} = l_{AB} + l_{BS2}.$$

Для первого векторного контура  $l_{AB} + l_{CB} = l_{AC}$  проекции на оси координат

$$\begin{aligned} l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{CB} \cdot \cos \varphi_2 &= x_C = 0, \\ l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 + l_{CB} \cdot \sin \varphi_2 &= y_C = S_C, \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \arccos (- l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 / l_{BC}).$$

Индикаторная диаграмма.

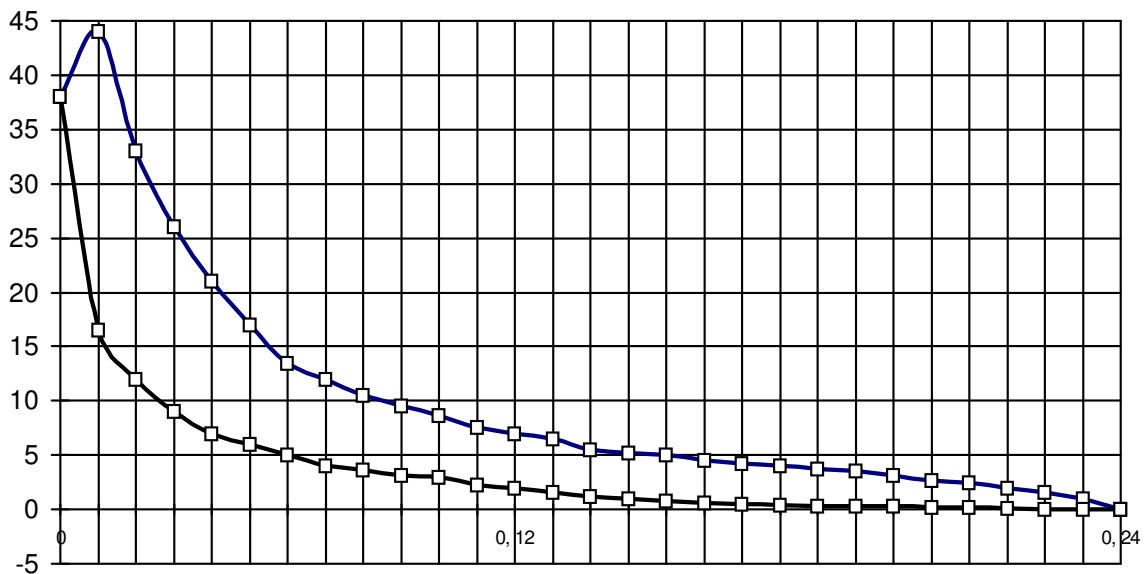


Рис.8.3

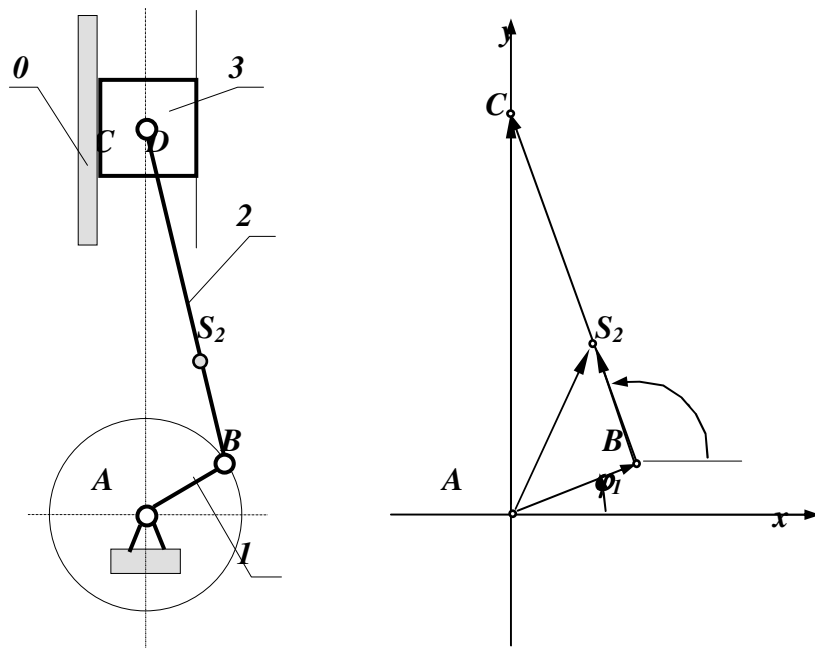


Рис. 8.4

Производные от этих выражений

$$- l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 - l_{CB} \cdot u_{21} \cdot \sin \varphi_2 = 0 ,$$

$$l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{CB} \cdot u_{21} \cdot \cos \varphi_2 = V_{qC} ,$$

позволяют определить первые передаточные функции

$$u_{21} = - l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 / ( l_{CB} \cdot \sin \varphi_2 ) ,$$

$$V_{qC} = l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{CB} \cdot u_{21} \cdot \cos \varphi_2.$$

Для третьего векторного контура  $l_{AS2} = l_{AB} + l_{BS2}$  проекции на оси координат

$$x_{S2} = l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{BS2} \cdot \cos \varphi_2,$$

$$y_{S2} = l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 + l_{BS2} \cdot \sin \varphi_2.$$

Производные от этих выражений

$$V_{qS2x} = -l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 - l_{BS2} \cdot u_{21} \cdot \sin \varphi_2,$$

$$V_{qS2y} = l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{BS2} \cdot u_{21} \cdot \cos \varphi_2,$$

позволяют определить первую передаточную функцию

$$V_{qS2} = \sqrt{V_{qS2x}^2 + V_{qS2y}^2}.$$

### Диаграммы передаточных функций

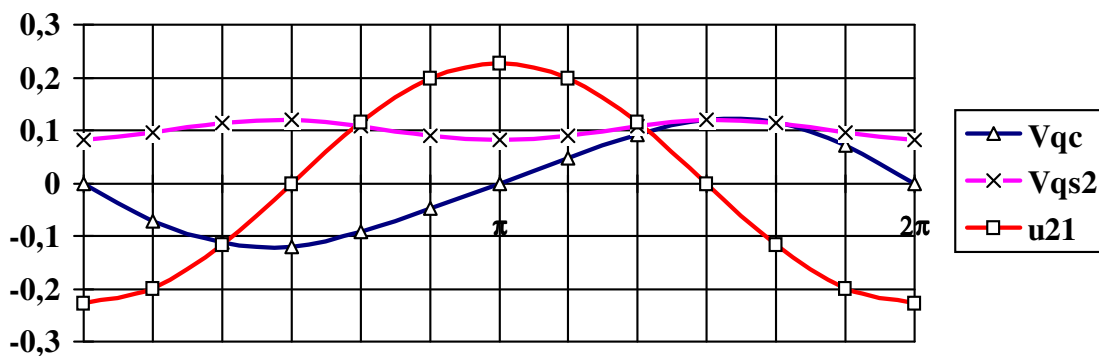


Рис. 8.5

### 1.2. Определение приведенного момента движущих сил $M^{np}_\delta$ .

Индикаторную диаграмму (рис.8.3) строим по заданным значениям давления в цилиндре двигателя. Отрезок хода поршня  $H_C \cdot \mu_i$  делим на 10 интервалов. В каждой точке деления строим ординату диаграммы, задавшись (при  $p_i/p_{max} = 1$ ) максимальной ординатой  $y_{rmax}$ . Тогда текущее значение ординаты

$$y_{pi} = y_{rmax} \cdot (p_i/p_{max}),$$

где  $p_{max} = 4.4 \text{ МПа}$ .

Масштаб индикаторной диаграммы

$$\mu_p = y_{rmax} / p_{max}.$$

Площадь поршня

$$S_n = \pi d_n^2 / 4.$$

При построении графика силы, действующей на поршень, ординаты этого графика принимаем равными ординатам индикаторной диаграммы. Тогда масштаб силы

$$\mu_F = \mu_p / S_n.$$

Для исследуемого механизма приведенный суммарный момент состоит из двух составляющих: движущей силы и момента сил сопротивления

$$M^{np}_\Sigma = M^{np}_\delta + M^{np}_c.$$



Приведенный момент движущей силы определяется в текущем положении механизма по формуле

$$M_{\delta}^{np} = F_{\delta i} \cdot V_{qCi} \cdot \cos(\angle F_{\delta i}, V_{qCi}),$$

где  $F_{\delta i}$  - значение движущей силы,

$$F_{\delta i} = y_{F\delta i} / \mu_F,$$

где  $y_{F\delta i}$  - ордината силы сопротивления,

$\mu_F$  - масштаб диаграммы сил.

$V_{qCi}$  - значение передаточной функции в рассматриваемом положении механизма,

$(\angle F_{\delta i}, V_{qCi})$  - угол между вектором силы и вектором скорости точки ее приложения.

Диаграмма приведенного движущего момента .

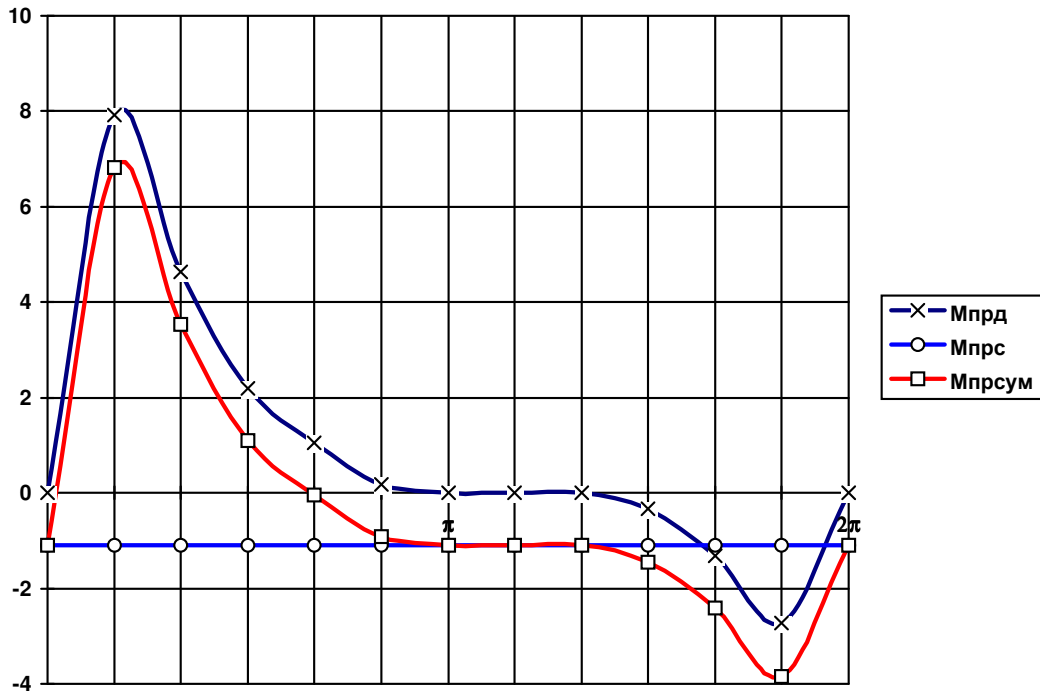


Рис.8.6

Масштаб диаграммы по оси абсцисс определяется по формуле

$$\mu_{\varphi} = b / 2 \cdot \pi ,$$

где  $b$  - база диаграммы ( отрезок оси абсцисс, который изображает цикл изменения обобщенной координаты).

1.3. Построение диаграммы приведенных моментов инерции  $I_v^{np} = I_{II}^{np}$ .

Инерционные характеристики звеньев механизма в его динамической модели представлены суммарным приведенным моментом инерции. При расчете эту характеристику динамической модели представляется в виде суммы двух составляющих переменной  $I_v^{np} = I_{II}^{np}$  и постоянной  $I_c^{np} = I_I^{np}$ . Первая определяется массами и моментами инерции звеньев, передаточные функции которых постоянны, вторые - массами и моментами инерции звеньев передаточные функции которых переменны.

Проведем расчет переменной части приведенного момента инерции  $I_v^{np} = I_{II}^{np}$ . Для рассматриваемого механизма во вторую группу звеньев входят звенья 2 и 3. Звено 3 совершает поступательное движение, звено 2 - плоское. Расчет переменной части приведенного момента проводится по следующим зависимостям:

$$I_v^{np} = I_{II}^{np} = I_{2B}^{np} + I_{2II}^{np} + I_3^{np},$$

где

$$I_{2II}^{np} = m_2 \cdot V_{qs2}^2, \quad I_{2B}^{np} = I_{S2} \cdot u_{2I}^2, \quad I_3^{np} = m_3 \cdot V_{qc}^2,$$

**Диаграммы приведенных моментов инерции**

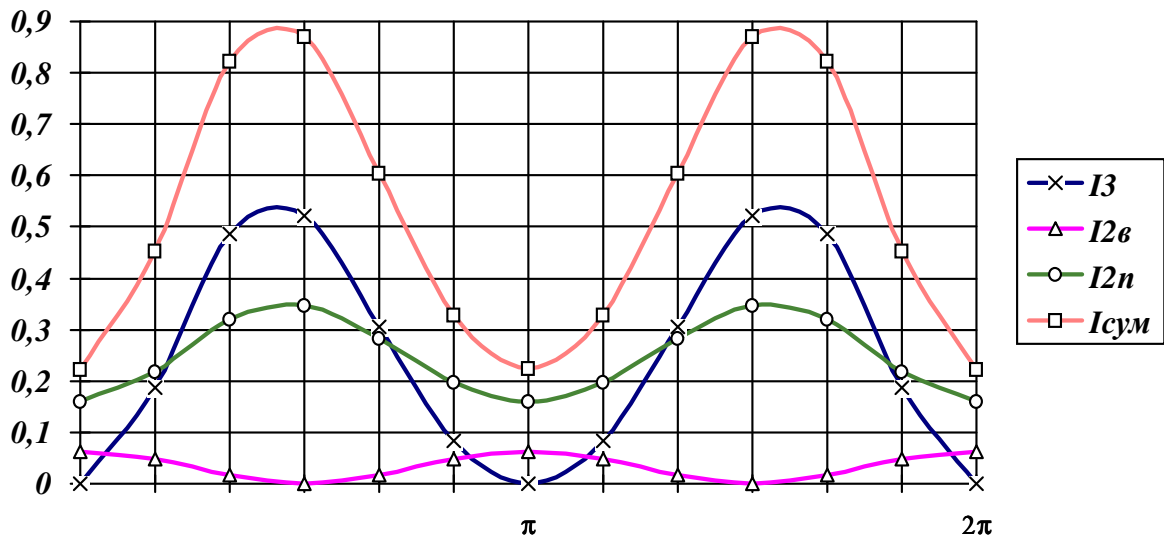


Рис. 8.7

2. Построение диаграмм работы движущей силы, сил сопротивления и суммарной работы.

Диаграмму работы движущей силы получим интегрируя диаграмму ее приведенного момента

$$A_d = \int_0^{2\pi} M^{np}_d \cdot d\phi_1.$$

Интегрирование проведем графическим методом (рис.8.8), приняв при этом отрезок интегрирования равным  $k_1$ . Тогда масштаб полученной диаграммы работы движущей силы будет равен

$$\operatorname{tg} \psi_I = y_{\Delta A_\delta} / x_{\Delta \varphi_I} = y_{M^{np} \delta I} / k_1 \Rightarrow \Delta A_\delta \cdot \mu_A / (\Delta \varphi_I \cdot \mu_\varphi) = M^{np} \delta I \cdot \mu_M / k_1$$

так как  $\Delta A_\delta / \Delta \varphi_I = M^{np} \delta I$ , то  $\mu_A / \mu_\varphi = \mu_M / k_1$ , откуда

$$\mu_A = \mu_M \cdot \mu_\varphi / k_1.$$

Величина среднеинтегрального момента сил сопротивления определяется по формуле

$$M^{np}_{cpr} = A_c^u / (2\pi).$$

### 3. Построение диаграмм кинетических энергий.

Диаграммы кинетических энергий для первой и второй групп звеньев получает на основании теоремы об изменении кинетической энергии системы

$$\Delta T = T - T_{нач} \quad A_\Sigma = \Delta T_I + \Delta T_{II}.$$

График кинетической энергии второй группы звеньев получим из зависимости

$$T_{II} = I_{II}^{np} \cdot \omega_{Icp}^2 / 2,$$

принимая, что  $\omega_I \approx \omega_{Icp}$ . Тогда диаграмма приведенного момента инерции второй группы звеньев в масштабе рассчитанном по формуле

$$y_I = y_T \Rightarrow I^{np}_{II} \cdot \mu_I = (I^{np}_{II} \cdot \omega_{Icp}^2 / 2) \cdot \mu_T, \text{ откуда}$$

$$\mu_T = 2 \cdot \mu_I / \omega_{Icp}^2,$$

соответствует диаграмме кинетической энергии  $T_{II}$ .

График кинетической энергии первой группы звеньев приближенно строим по уравнению

$$T_I = T - T_{II}.$$

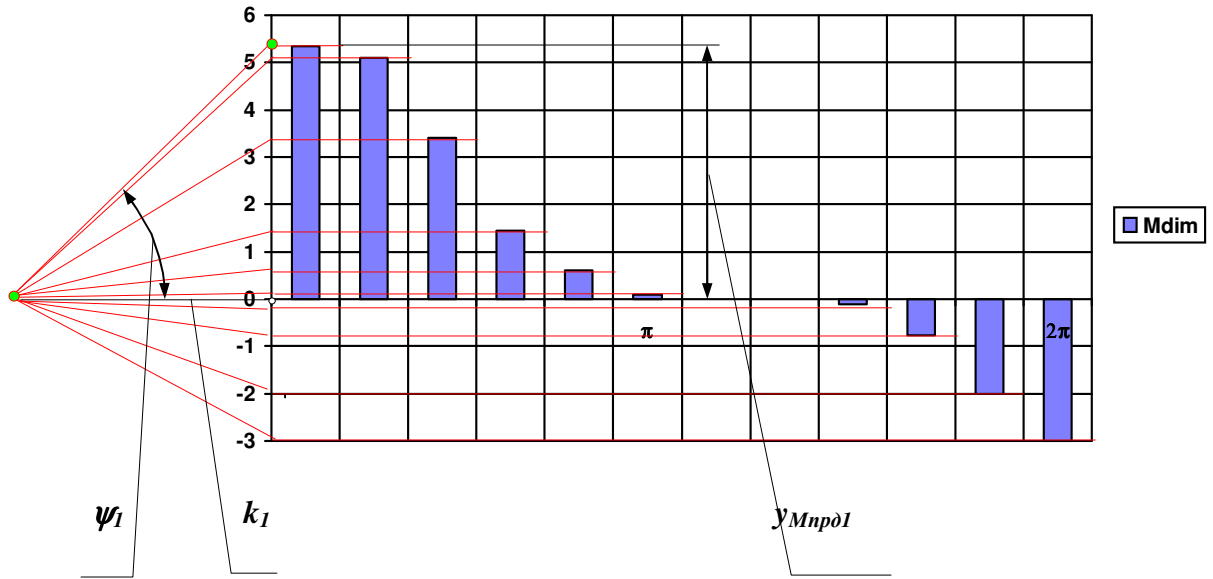
В каждом положении механизма из ординат кривой  $A_\Sigma = f(\varphi_I)$  считаем ординаты  $y_{TII}$  и получаем ординаты искомой диаграммы  $T_I = f(\varphi_I)$ . Для этого необходимо ординаты диаграммы  $T_{II} = f(\varphi_I)$  из масштаба  $\mu_T$  перевести в масштаб  $\mu_A^*$  по формуле

$$y_{TII}^* = y_{TII} \cdot \mu_A^* / \mu_T.$$

Диаграмма кинетической энергии первой группы звеньев представлена на рис.

8.9.

Диаграмма средних значений приведенного движущего момента по интервалам.



Диаграммы работы.

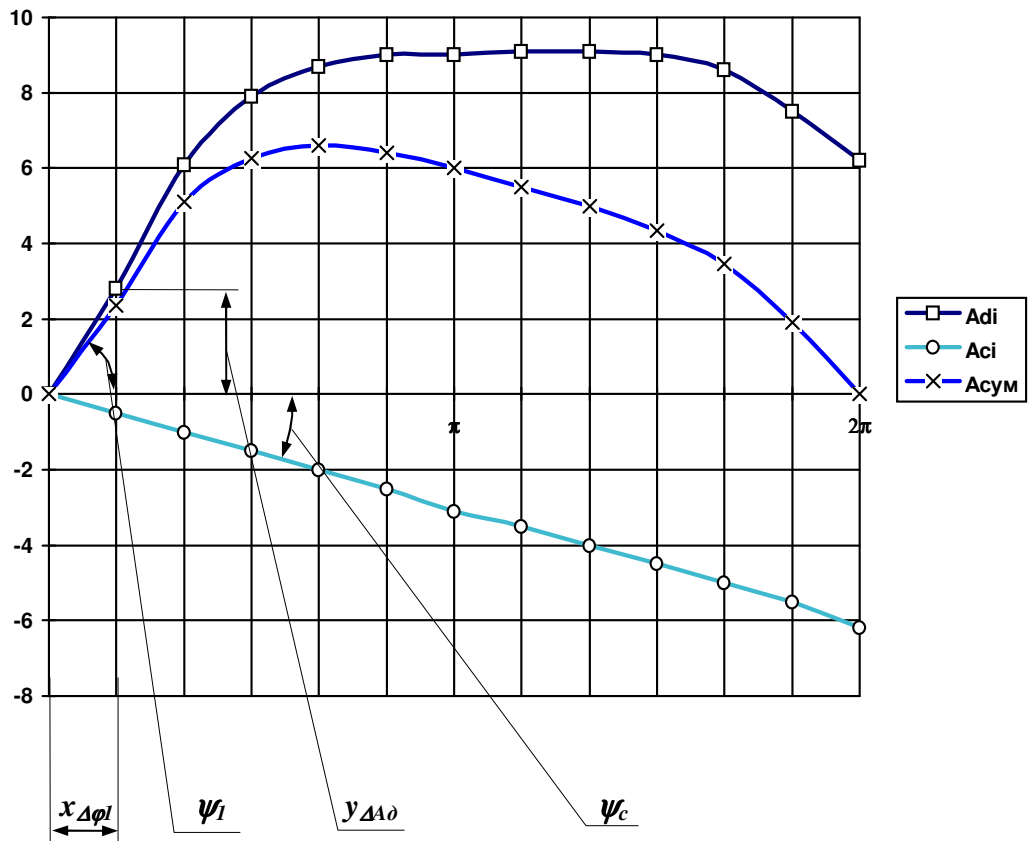


Рис. 8.8

Диаграммы работы, кинетической энергии Т1 и угловой скорости звена приведения.

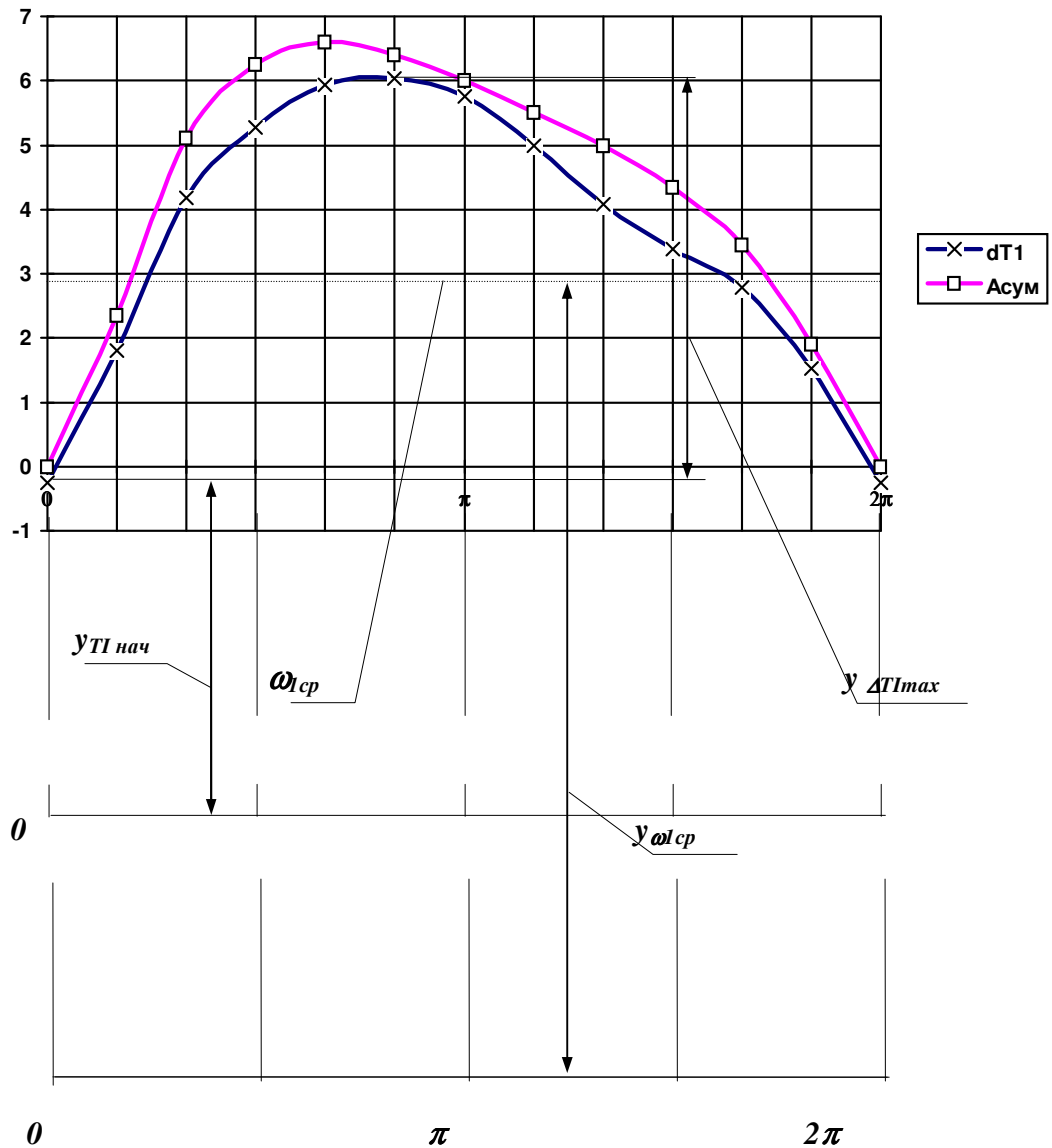


Рис.8.9

4. Определение необходимого момента инерции маховых масс первой группы

Максимальное изменение кинетической энергии звеньев перΔвой группы за цикл определяем по диаграмме

$$\Delta T_{I_{max}} = (y_{\Delta T_{I_{max}}}) / \mu_A .$$

Тогда необходимый момент инерции маховых масс первой группы звеньев, обеспечивающий заданный коэффициент неравномерности, равен

$$I_I^{np} = \Delta T_{I_{max}} / (\omega_{ср}^2 \cdot [\delta] ) .$$

4.1. Определение момента инерции дополнительной маховой массы.

В нашем случае момент инерции дополнительной маховой массы рассчитывается по следующей зависимости

$$I_{\text{дон}} = I_I^{np} - I_{I0} ,$$

где  $I_{I0}$  - момент инерции коленчатого вала .

#### 5. Построение приближенной диаграммы угловой скорости

Если считать, что  $\omega_I \approx \omega_{Icp}$  , то

$$\Delta T_I = I_I^{np} \cdot \omega_{Icp} \cdot \Delta \omega_I ,$$

то есть диаграмма изменения кинетической энергии первой группы звеньев  $\Delta T_I = f(\varphi_I)$  в другом масштабе соответствует диаграмме изменения угловой скорости  $\Delta \omega_I = f(\varphi_I)$ . Если считать что ординаты диаграмм равны, то

$$y_{\Delta \omega_I} = y_{\Delta T_I} \Rightarrow \mu_A \cdot \Delta T_I = \mu_{\omega} \cdot \Delta \omega_I \Rightarrow \mu_A \cdot I_I^{np} \cdot \omega_{Icp} \cdot \Delta \omega_I = \mu_{\omega} \cdot \Delta \omega_I$$

откуда

$$\mu_{\omega} = \mu_A \cdot I_I^{np} \cdot \omega_{Icp} .$$

Ордината средней угловой скорости ( для определения положения начала координат на диаграмме угловой скорости )

$$y_{\omega_{Icp}} = \omega_{Icp} \cdot \mu_{\omega} .$$

После определения положения оси абсцисс на диаграмме угловой скорости можно определить начальное значение угловой скорости

$$\omega_{I0} = y_{\omega_{I0}} / \mu_{\omega} ,$$

а по ней кинетическую энергию механизма в начальном положении

$$T_{I \text{ нач}} = I_I^{np} \cdot \omega_{Icp}^2 / 2 .$$

#### 6. Определение размеров маховика.

Принимаем конструктивное исполнение маховика - диск. Тогда его основные размеры и масса определяются по следующим зависимостям:

наружный диаметр

$$D = 0.366 \cdot \sqrt[5]{I_{\text{дон}}} ,$$

ширина

$$b = \psi_b \cdot D ,$$

масса

$$m = 1230 \cdot D^3 ,$$

где  $\rho = 7.8 \text{ кг/дм}^3$  - плотность материала маховика ,

$\psi_b$  - коэффициент ширины .

#### 7. Определение углового ускорения звена привода.

Как отмечено ранее для расчета углового ускорения звена привода  $\varepsilon_I = f(\varphi_I)$  лучше пользоваться формулой :

$$\varepsilon_I = d\omega_I/dt = M^{np} / I_{\Sigma}^{np} - \omega_I^2 / (2 \cdot I_{\Sigma}^{np}) \cdot (d I_{\Sigma}^{np} / d\varphi_I) .$$

Необходимые для расчета значения величин определяем по ранее построенным диаграммам. Диаграмма функции  $\varepsilon_I = f(\varphi_I)$  приведена на рис. 8.10.

Диаграмма углового ускорения звена приведения.

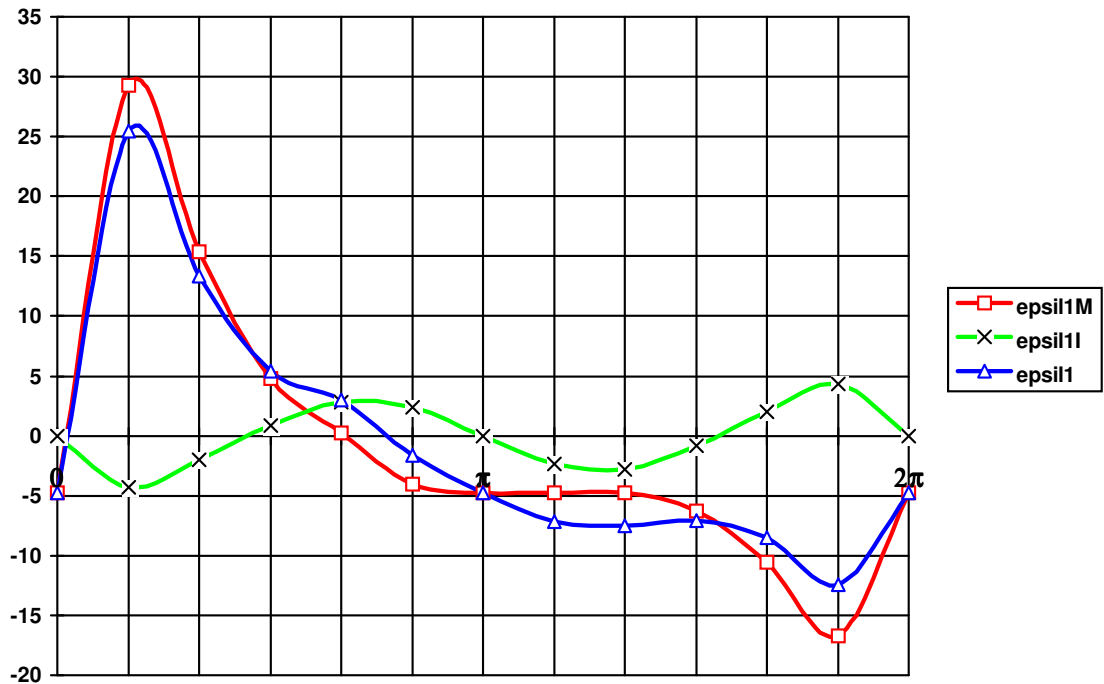


Рис. 8.10

**Приведенная статическая характеристика асинхронного электродвигателя.  
 Понятие о устойчивости работы машины.**

Как отмечалось ранее, силы действующие на механизмы зависят не только от положения или обобщенной координаты, а зависят и от времени или от скорости. Эти зависимости обычно определяются экспериментально и называются механическими характеристиками машины. Механическая характеристика приведенная к обобщенной координате или скорости называется приведенной механической характеристикой. В качестве примера рассмотрим приведенную статическую характеристику асинхронного электродвигателя.

На диаграмме:  $M^{np}_{\partial n}$  - приведенный пусковой момент;  $M^{np}_{\partial n}$  - приведенный номинальный крутящий момент;  $M^{np}_{\partial k}$  или  $M^{np}_{\partial max}$  - приведенный критический или максимальный момент;  $\omega_{1n}$  - номинальная круговая частота вращения звена приведения;  $\omega_{1xx}$  или  $\omega_{1c}$  - частота вращения звена приведения на холостом ходу или синхронная. Уравнение приведенной статической характеристики асинхронного электродвигателя на линеаризованном участке устойчивой части

$$M^{np}_{\partial} = b_1^* + k_1^* \cdot \omega_1,$$

где  $M^{np}_{\partial}$  - приведенный движущий момент на звене приведения,  
 $\omega_1$  - круговая частота звена приведения,  
 $b_1^* = M^{np}_{\partial n} \cdot \omega_1 / (\omega_{1c} - \omega_{1n})$ ,  $k_1^* = - M^{np}_{\partial n} / (\omega_{1c} - \omega_{1n})$ .

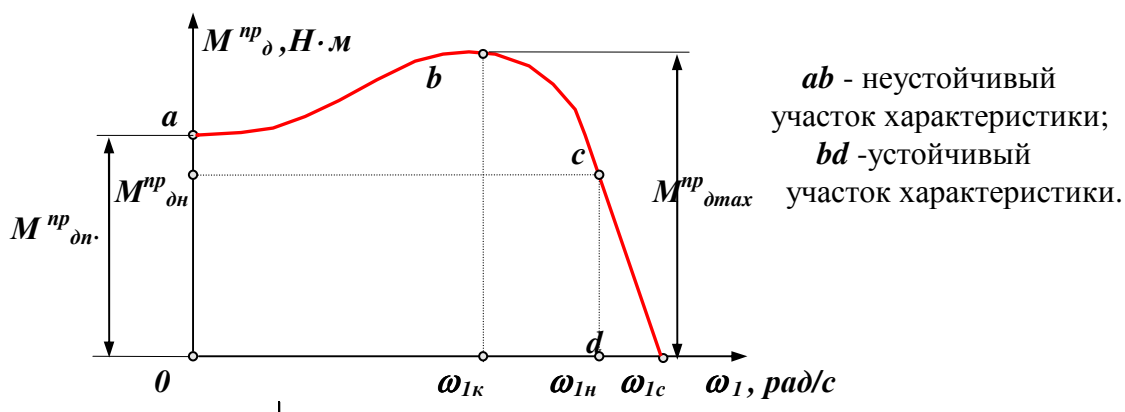


Рис. 8.11

Как на исходной статической характеристике двигателя, так и на приведенной можно выделить два участка: устойчивый - ***bd*** и неустойчивый - ***ab***. На устойчивом участке при увеличении момента сопротивления на валу двигателя частота вращения уменьшается, обеспечивая сохранение мощности примерно на постоянном уровне, на неустойчивом участке работа двигателя невозможна, так как в любой точке этого участка увеличение момента сопротивления на валу двигателя должно сопровождаться увеличением частоты вращения и увеличением мощности двигателя, при этом моменты сопротивления больше пускового момента двигателя. При увеличении момента сопротивления на валу звена приведения до величины большей  $M^{np}_{0max}$  двигатель попадает в зону неустойчивой характеристики и останавливается. Для устойчивой работы машины необходимо, чтобы колебания момента сопротивления на валу звена приведения не выходили за пределы линейной части устойчивого участка приведенной статической характеристики.

***Учет приведенной статической характеристики при анализе динамических процессов в машине.***

Учет влияния статической характеристики двигателя на закон движения машины можно проводить различными методами:

- совместным решением уравнения движения с уравнением статической характеристики;
- последовательным приближением (на первом этапе решается задача для сил зависящих только от положения, на втором и последующих учитывается статическая характеристика двигателя).

Рассмотрим решение задачи методом последовательных приближений для машинного агрегата с приводом от асинхронного электродвигателя (пример с поршневым насосом в лекции 6). При первом приближении решается задача определения закона движения без учета статической характеристики, по алгоритму описанному в предыдущем разделе. Затем определяется приведенная статическая характеристика и по ней определяются значения движущего момента при каждом значении угловой скорости, рассчитанной на первом этапе (при первом приближении). По этим значениям момента строится диаграмма движущего момента второго приближения  $M^{np}_{0(2)}$ , затем определяется суммарная работа, кинетическая энергия первой группы звеньев и угловая скорость звена приведения при втором приближении. Далее эти действия повторяются пока различия между результатами расчета на последующем этапе будут отличаться от



результатов предыдущего на величину меньшую заданной погрешности. На рис. 8.12 показано графическое решения задачи при втором приближении.

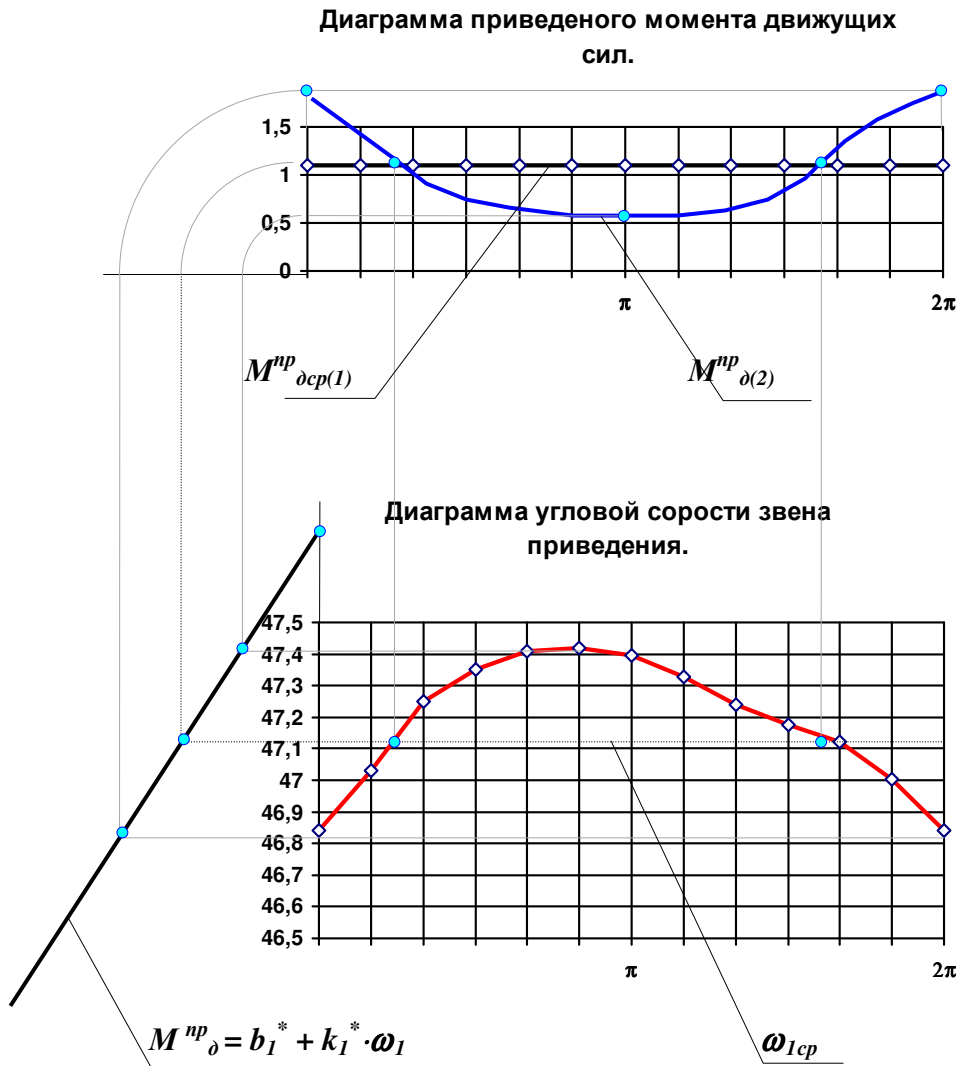


Рис.8.12

## *Лекция 9.*

Краткое содержание: Виброзащита машин и механизмов. Методы виброзащиты. Взаимодействие двух подвижных звеньев. Подрессоривание и виброизоляция. Динамическое гашение колебаний. Трение в механизмах. Виды трения. Силы в кинематических парах с учетом трения. Силовой расчет механизмов с учетом сил трения. Понятие о КПД механической системы. КПД механической системы при последовательном и параллельном соединении механизмов. Приложение: Метод планов положений, скоростей и ускорений при анализе простейшего кулисного механизма.

### *Виброзащита в машин и механизмов.*

Как отмечалось ранее, при движении механической системы под действием внешних сил в ней возникают механические колебания или вибрации. Эти вибрации оказывают влияние на функционирование механизма и часто ухудшают его эксплуатационные характеристики: снижают точность, уменьшают КПД и долговечность машины, увеличивают нагрев деталей, снижают их прочность, оказывают вредное воздействие на человека-оператора. Для снижения влияния вибраций используют различные методы борьбы с вибрацией. С одной стороны при проектировании машины принимают меры для снижения ее виброактивности (уравновешивание и балансировка механизмов), с другой - предусматриваются средства защиты как машины от вибраций, исходящих от других машин (для рассматриваемой машины от среды), так среды и операторов от вибраций данной машины.

### *Методы виброзащиты.*

Существующие виброзащитные устройства по методу снижения уровня вибраций делятся на:

- динамические гасители или антивибраторы, в которых опасные резонансные колебания устраняются изменением соотношения между собственными частотами системы и частотами возмущающих сил;
- виброизоляторы, в которых за счет их упругих и демпфирующих свойств уменьшается амплитуда колебаний как на резонансных и нерезонансных режимах.

### *Взаимодействие двух подвижных звеньев.*

Рассмотрим механическую систему (рис. 9.1), состоящую из двух подвижных звеньев, образующих между собой кинематическую пару. Для упрощения предположим, что движение звеньев возможно только по одной координате  $x$ . Масса первого звена  $m_1$ , второго -  $m_2$ . На звено 2 действует периодическая внешняя сила  $F_2 = F_{20} \cdot \sin \omega t$ , действием сил веса пренебрегаем. Уравнения движения звеньев

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + F_{12} = 0; \quad m_2 \cdot \ddot{x}_2 + F_{21} + F_2 = 0.$$

Если считать, что контакт между звеньями в процессе движения не нарушается и тела абсолютно жесткие, то

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2.$$

С учетом  $F_{21} = -F_{12}$ , определим реакцию в точке контакта между звеньями

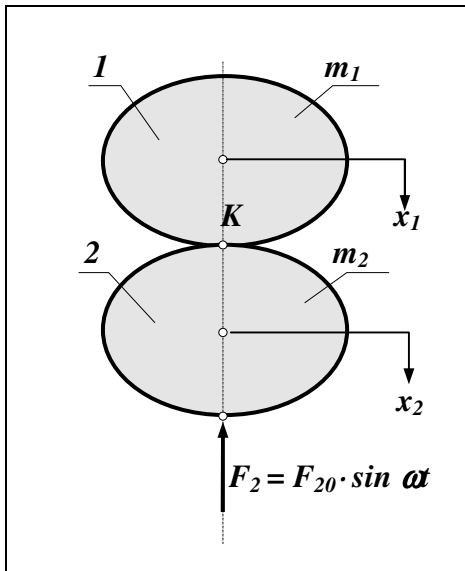


Рис. 9.1

$$F_{21} = -m_2 \cdot \ddot{x} - F_2 = m_1 \cdot \ddot{x}$$

Откуда

$$\ddot{x} = -F_{12}/m_1 = -(F_{21} + F_2)/m_2,$$

и после преобразований

$$F_{21}(m_1 + m_2)/(m_1 \cdot m_2) = -F_2/m_2,$$

$$F_{21} = -F_2 \cdot m_1 / (m_1 + m_2).$$

Проанализируем эту зависимость:

если  $m_1 \Rightarrow 0$ , то  $F_{21} \Rightarrow 0$ ;

если  $m_2 \Rightarrow 0$ , то  $F_{21} \Rightarrow -F_2$ ;

если  $m_2 = m_1 = m$ , то  $F_{21} \Rightarrow -0.5 \cdot F_2$ ;

если  $m_2 \Rightarrow \infty$ , то  $F_{21} \Rightarrow 0$ ;

если  $m_1 \Rightarrow \infty$ , то  $F_{21} \Rightarrow -F_2$ .

Анализ показывает, что реакция взаимодействия между звеньями зависит от соотношения их масс и величины внешней силы. При этом кинетическая энергия системы

$$T = (m_1 + m_2) \cdot \dot{x}^2 / 2,$$

а потенциальная равна нулю.

### Подрессоривание или виброизоляция.

При виброизоляции между рассматриваемыми звеньями устанавливают линейный или нелинейный виброизолятор, который обычно состоит из упругого и демпфирующего элементов (рис. 9.2).

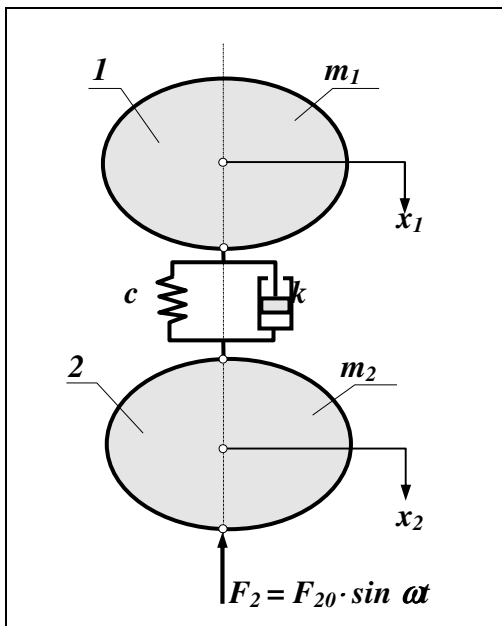


Рис. 9.2

Уравнения движения

В этой механической системе  $x_2 \neq x_1$  (предположим, что  $x_2 > x_1$ ) и  $\Delta x = x_2 - x_1$ , тогда кинетическая энергия системы

$$T = m_1 \cdot \dot{x}_1^2 / 2 + m_2 \cdot \dot{x}_2^2 / 2,$$

а потенциальная

$$U = c \cdot \Delta x^2 / 2.$$

То есть в системе с виброизолятором только часть работы внешней силы расходуется на изменение кинетической энергии. Часть этой работы переходит в потенциальную энергию упругого элемента и часть рассеивается демпфером (переходит в тепло и рассеивается в окружающей среде).

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c \cdot \dot{\Delta x} + k \cdot \Delta x^2 = 0,$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - c \cdot \dot{\Delta x} - k \cdot \Delta x^2 + F_2 = 0.$$

Решение этой системы уравнений подробно рассматривается в курсе теории колебаний, поэтому ограничимся только анализом амплитудно-частотной характеристики. Характеристику построим в относительных координатах  $\Delta x_{отн} = x/x_{ст}$ , где  $x_{ст}$  - статическая деформация упругого элемента.

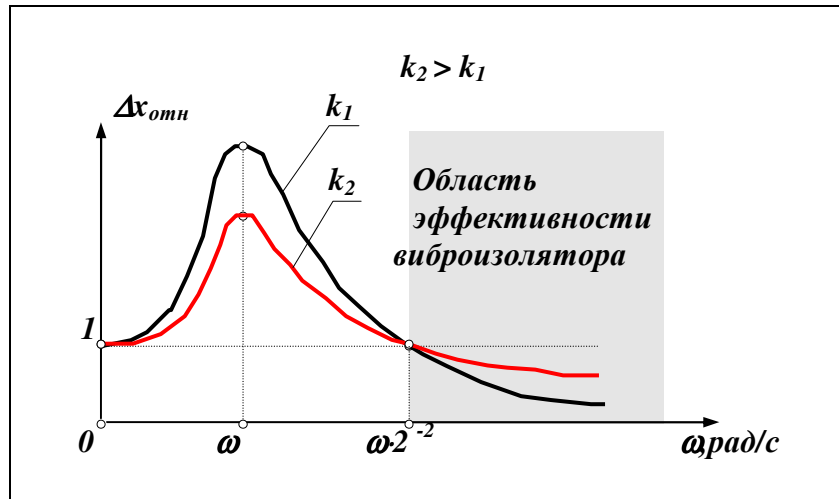


Рис. 9.3

### Динамическое гашение колебаний.

Динамические гасители или антивибраторы широко применяются в машинах работающих в установившихся режимах для отстройки от резонансных частот (например, в судовых двигателях внутреннего сгорания). Динамические гасители могут быть выполнены в виде упругого или физического маятника. Рассмотрим простейший линейный упругий динамический гаситель (рис.9.4). Принцип действия динамического гасителя заключается в создании гасителем силы направленной противоположно возмущающей силе. Настройка динамического гасителя заключается в подборе его собственной частоты: собственная частота гасителя должна быть равна частоте тех колебаний, амплитуду которых необходимо уменьшить («погасить»)

$$\omega_{0_2} = \sqrt{c_2 / m_2},$$

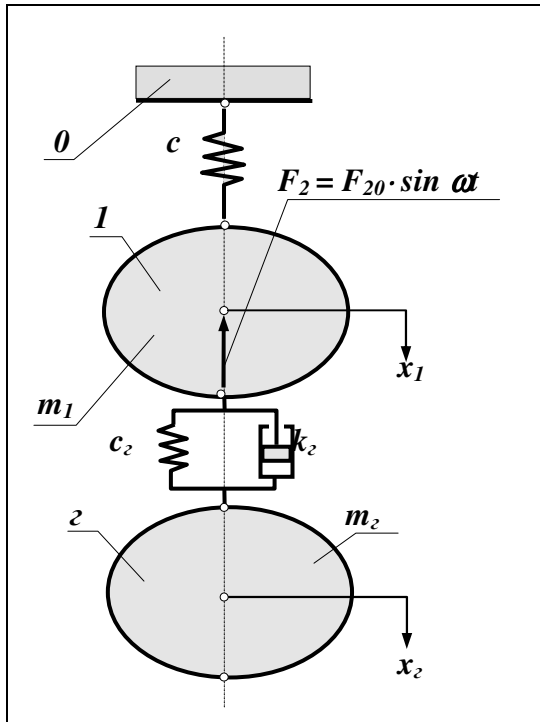
где  $\omega_{0_2}$  - собственная частота гасителя,  $m_2$  - масса гасителя,  $c_2$  - жесткость пружины гасителя.

Уравнения движения системы с динамическим гасителем, схема которого изображена на рис. 9.4

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + c_2 \cdot \dot{\Delta x} + k_2 \cdot \Delta x = F,$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - c_2 \cdot \dot{\Delta x} - k_2 \cdot \Delta x = 0,$$

где  $\Delta x = x - x_2$  - деформация пружины гасителя.



На рис. 9.5 приведены амплитудно-частотные характеристики этой системы без динамического гасителя и с динамическим гасителем. Как видно из этих характеристик, при установке динамического гасителя амплитуда на частоте настройки резко снижается, однако в системе вместо одной собственной частоты возникает две. Поэтому динамические гасители эффективны только в узком диапазоне частот вблизи частоты настройки гасителя. Изображенные на рисунке кривые 1 и 2 относятся к динамическому гасителю без демпфирования. При наличии в системе демпферов форма кривой изменяется (кривая 3): амплитуды в зонах гашения увеличиваются, а зонах резонанса - уменьшаются.

Рис. 9.4

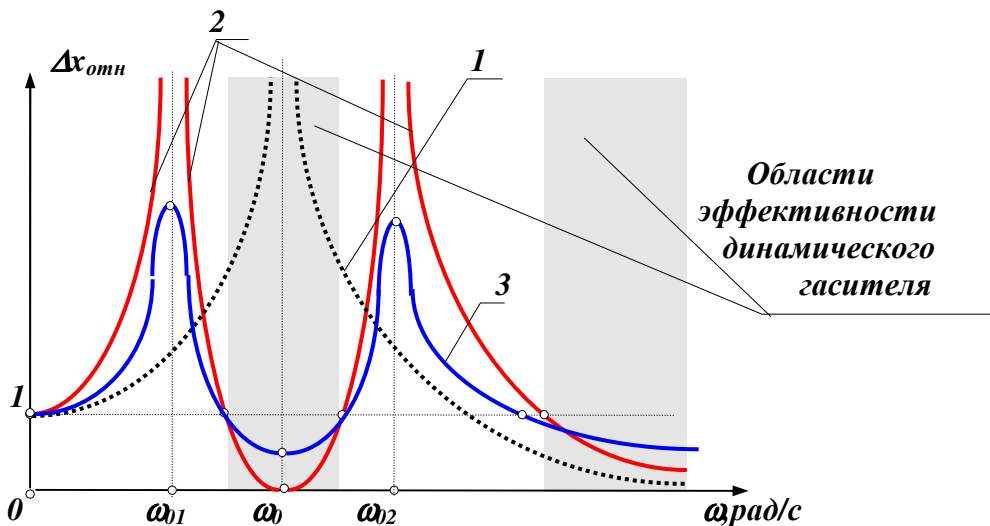


Рис. 9.5

Подробнее с вопросами виброзащиты машин можно познакомиться в учебной [ 9.1, 9.2 ] или специальной литературе [ 9.3 , 9.4 ].

**Трение в механизмах. Виды трения.**

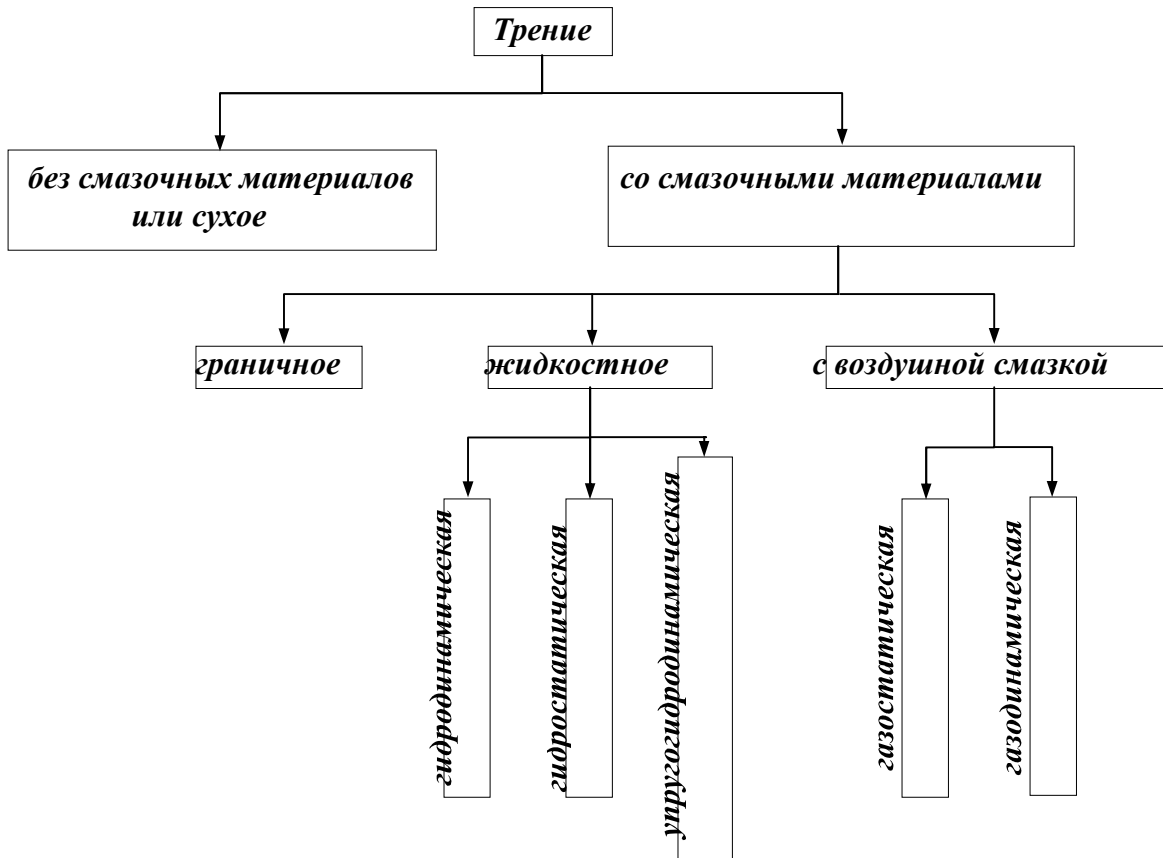
Способность контактирующих поверхностей звеньев сопротивляться их относительному движению называется внешним трением. Трение обусловлено неидеальным состоянием контактирующих поверхностей (микронеровности, загрязнения, окисные пленки и т.п.) и силами межмолекулярного сцепления. Трение в кинематических парах характеризуется силами трения и моментами сил трения. Силой трения называется касательная составляющая реакции в КП (составляющая направленная по касательной к

контактирующим поверхностям), которая всегда направлена против вектора скорости относительного движения звеньев.

Различают следующие виды трения:

- трение покоя проявляется в момент, когда два тела находящиеся в состоянии относительного покоя начинают относительное движение (касательную составляющую возникающую в зоне контакта до возникновения относительного движения, в условиях когда она меньше силы трения покоя, будем называть силой сцепления; максимальная величина силы сцепления равна силе трения покоя);
- трение скольжения появляется в КП при наличии относительного движения звеньев; для большинства материалов трение скольжения меньше трения покоя;
- трение качения появляется в высших КП при наличии относительного вращательного движения звеньев вокруг оси или точки контакта;
- трение верчения возникает при взаимодействии торцевых поверхностей звеньев вращательных КП (подпятники).

Кроме того по наличию и виду применяемых смазочных материалов различают:



Сила трения покоя зависит от состояния контактных поверхностей звеньев, а сила трения скольжения - также и от скорости скольжения. Определение зависимости трения скольжения от скорости возможно только в некоторых наиболее простых случаях. Пример диаграммы такой зависимости дан на рис. 9.6.

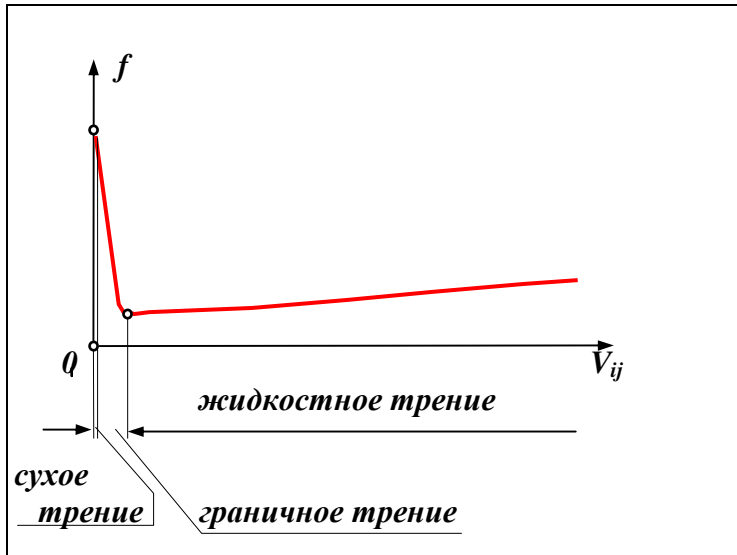


Рис. 9.6

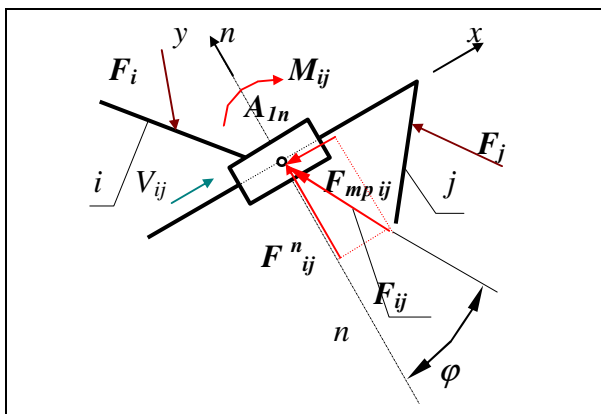
Трение скольжения согласно закону Кулона-Амонтона пропорционально нормальной составляющей реакции в КП

$$F_{mp\ ij} = f \cdot F^{n\ ij},$$

где  $f$  - коэффициент трения скольжения.

**Силы в кинематических парах с учетом трения.**

1. Поступательная КП (рис.9.7).



При силовом расчете с учетом трения в поступательной КП определяются:  
 реактивный момент  $M_{ij}$  ;  
 величина реакции  $F_{ij}$  ;  
 направление вектора  $F_{ij}$  ;  
 известны: точка приложения силы - геометрический центр кинематической пары  $A_{In}$  и коэффициент трения скольжения  $f$  .

Рис. 9.7

Полная величина реакции в КП равна векторной сумме

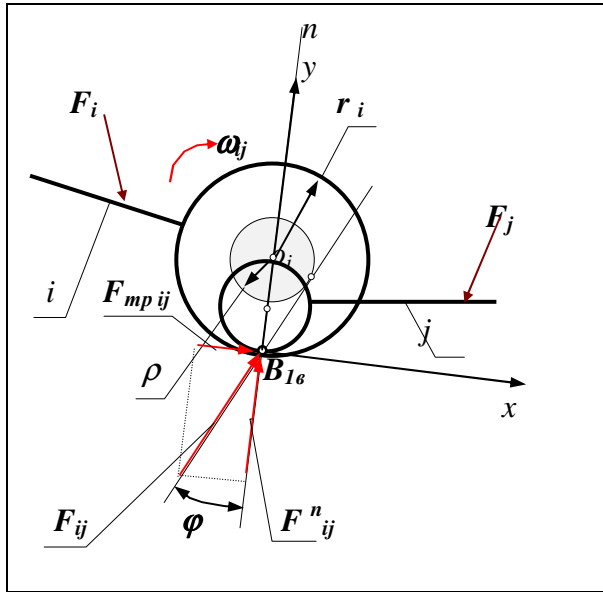
$$F_{ij} = F^{n\ ij} + F_{mp\ ij} \quad \text{или} \quad F_{ij} = F^{n\ ij} \cdot \sqrt{1 + f^2},$$

где  $F_{mp\ ij} = F^{n\ ij} \cdot \text{tg } \varphi = F^{n\ ij} \cdot f$  - сила трения скольжения,  $\varphi$  - угол трения,  $f$  - коэффициент трения скольжения ( $\text{tg } \varphi \approx f$ , так как  $\varphi$  мало).

Если  $\text{tg } \varphi \approx f \Rightarrow 0$ , то  $F_{ij} \Rightarrow F^{n\ ij}$ , т.е. к решению без учета трения.

Число неизвестных в поступательной КП при силовом расчете с учетом трения увеличилось и равно  $n_s = 3$ .

2. Вращательная КП (рис. 9.8). Силовой расчет с учетом трения является моделью КП более высокого уровня, с большей степенью приближения модели к реальной КП. При этом известны геометрические размеры элементов КП (радиусы цапф) и коэффициент трения скольжения. Так как в реальных парах имеются зазоры, то на расчетной схеме (рис.9.8) пару представляют как высшую.



При силовом расчете с учетом трения во вращательной КП определяются:  
 направление реакции  $F_{ij}$  ;  
 величина реакции  $F_{ij}$  ;  
 величина силы трения  $F_{mp\ ij}$  ;  
 известно: линия действия нормальной составляющей проходит через центр КП точку  $B_{16}$  ., коэффициент трения скольжения , радиус цапфы  $r_i \approx r_j$  .

Момент трения в КП

$$M_{mp\ ij} = F_{mp\ ij} \cdot r_i = F_{ij}^n \cdot r_i \cdot f = F_{ij} \cdot \cos \varphi \cdot \text{tg} \varphi \cdot r_i = F_{ij} \cdot r_i \cdot \sin \varphi = F_{ij} \cdot \rho,$$

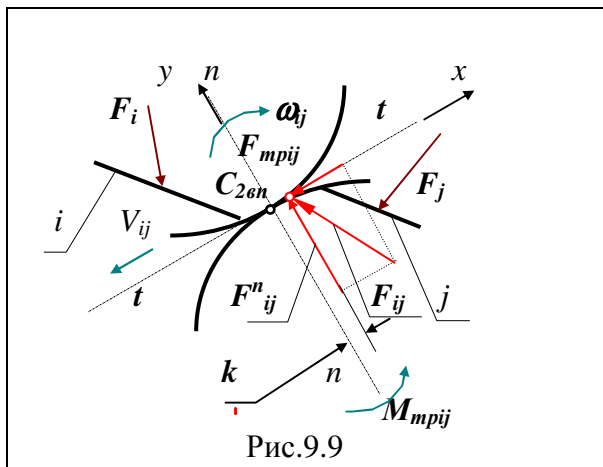
Рис. 9.8

где  $\rho$  - радиус круга трения

$$\rho = r_i \cdot \sin \varphi \approx r_i \cdot \text{tg} \varphi \approx r_i \cdot f.$$

Число неизвестных во вращательной КП при силовом расчете с учетом трения увеличилось и равно  $n_s = 3$ .

3. Высшая КП. В высшей паре два относительных движения - скольжение и перекатывание. Поэтому здесь имеют место два вида трения - трение скольжения и трение качения (рис. 9.9).



При силовом расчете в высшей КП определяются:

- величина реакции  $F_{ij}$  ;
- направление реакции  $F_{ij}$  ;
- момент сил трения  $M_{mp\ ij}$

известны:

точка приложения силы - точка контакта рабочих профилей кинематической пары  $C_{26n}$  ;

направление нормальной составляющей  $F_{ij}^n$  - контактная нормаль к профилям (размеры и форма профилей заданы);

направление тангенциальной составляющей  $F_{mp\ ij}$  - касательная к профилям в точке контакта;

коэффициенты трения качения  $k$  и скольжения  $f$ .

Полная величина реакции в КП равна векторной сумме

$$F_{ij} = F_{ij}^n + F_{mp\ ij} \quad \text{или} \quad F_{ij} = F_{ij}^n \cdot \sqrt{1 + f^2}.$$

Момент трения в КП

$$M_{mp\ ij} = F_{ij}^n \cdot k = F_{ij} \cdot k / \sqrt{1 + f^2}.$$



Число неизвестных в высшей КП при силовом расчете с учетом трения увеличилось с  $n_s = 1$  до  $n_s = 3$  ( так как в паре имеется два вида трения).

**Силовой расчет механизмов с учетом сил трения.**

Постановка задачи силового расчета: для исследуемого механизма при известных кинематических характеристиках и внешних силах, а также размерах элементов КП и величинах коэффициентов трения в них, определить уравнивающую силу или момент (управляющее силовое воздействие) и реакции в кинематических парах механизма.

Методы решения задач силового расчета с учетом трения :

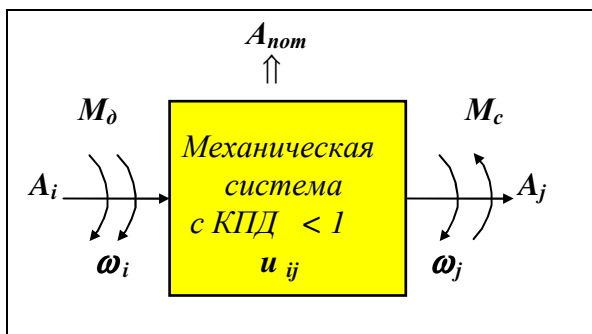
- составление общей системы уравнений кинетостатики с уравнениями для расчета сил и моментов сил трения с числом уравнений соответствующим числу неизвестных;
- метод последовательных приближений: на первом этапе решается задача кинетостатического расчета без учета трения и определяются нормальные составляющие реакций, по ним рассчитываются силы трения и определяются реакции с учетом трения.

Примечание: силовой расчет с учетом сил трения можно проводить на тех этапах проектирования, когда уже определены размеры элементов КП, материалы звеньев, образующих пары, классы чистоты рабочих поверхностей КП, вид смазки и скорости относительных движений, т.е. параметры по которым можно определить коэффициенты трения. Подробнее с силовым расчетом механизмов с учетом трения можно познакомиться в учебнике [ 9.1 ] и в пособии [ 9.5 ].

**Понятие о КПД механической системы.**

Коэффициентом полезного действия или КПД механической системы называют отношение работы сил полезного сопротивления к работе движущих сил за цикл ( или целое число циклов ) установившегося режима работы.

КПД механизма характеризует его эффективность при преобразовании энергии, определяет соотношение полученной на выходе полезной энергии и энергетических потерь в механизме на трение, перемешивание масла, вентиляцию, деформацию звеньев и др. Величину КПД можно рассчитать по следующей зависимости:



$$\eta = |A_j/A_i| = |A_i - A_{ном}| / |A_i|,$$

$$\eta = 1 - |A_{ном}/|A_i|| = 1 - \psi,$$

где  $A_i$  - работа движущих сил,  $A_j$  - работа сил полезного сопротивления,  $\eta$  - коэффициент полезного действия,  $\psi$  - коэффициент потерь.

Рис. 9.10

Работа движущих сил за цикл

$$A_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} M_{д} \cdot d\varphi \approx M_{дср} \cdot (\varphi_n - \varphi_0) \approx M_{дср} \cdot \Delta\varphi,$$

работа сил полезного сопротивления за цикл

$$A_j = \int_{\varphi_0}^{\varphi_n} M_{с} \cdot d\varphi \approx M_{сср} \cdot (\varphi_n - \varphi_0) \approx M_{сср} \cdot \Delta\varphi,$$

$$\varphi_0$$

где  $M_{дср}$  и  $M_{сср}$  - среднеинтегральные значения движущего момента и момента сил сопротивления,

$\varphi_n, \varphi_n$  и  $\varphi_0, \varphi_0$  - значения угловых координат звеньев  $i$  и  $j$ , соответственно в начале и в конце цикла.

Подставим эти выражения в формулу для КПД и получим

$$\eta = |A_j/A_i| = |M_{сср} \cdot \Delta\varphi_j| / |M_{дср} \cdot \Delta\varphi_i| = |M_{сср}| / |M_{дср}|,$$

где  $u_{ji}$  - передаточное отношение механизма.

**КПД механической системы при последовательном и параллельном соединении механизмов.**

- при последовательном соединении (рис. 9.11) весь поток механической энергии проходит последовательно через каждый из механизмов

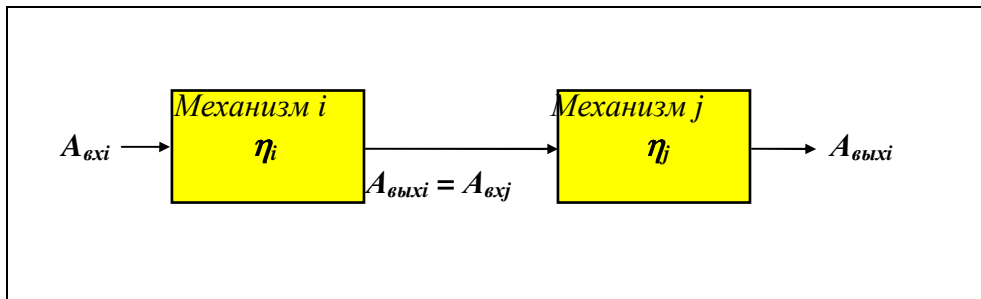


Рис. 9.11

$$\eta = |A_j/A_i| = |A_{выхj}/A_{схi}|$$

$$\left. \begin{aligned} A_{выхj} &= A_{схj} \cdot \eta_j = A_{выхi} \cdot \eta_j, \\ A_{выхi} &= A_{схi} \cdot \eta_i, \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{выхj} = A_{схi} \cdot \eta_i \cdot \eta_j,$$

↓

$$\eta = \eta_i \cdot \eta_j$$

- при параллельном соединении механизмов  $i$  и  $j$  (рис. 9.12) поток механической энергии делится на две части: часть проходящую через механизм  $i$  обозначим  $\alpha$ , а часть проходящую через механизм  $j \Rightarrow \beta$ , причем  $\alpha + \beta = 1$ .

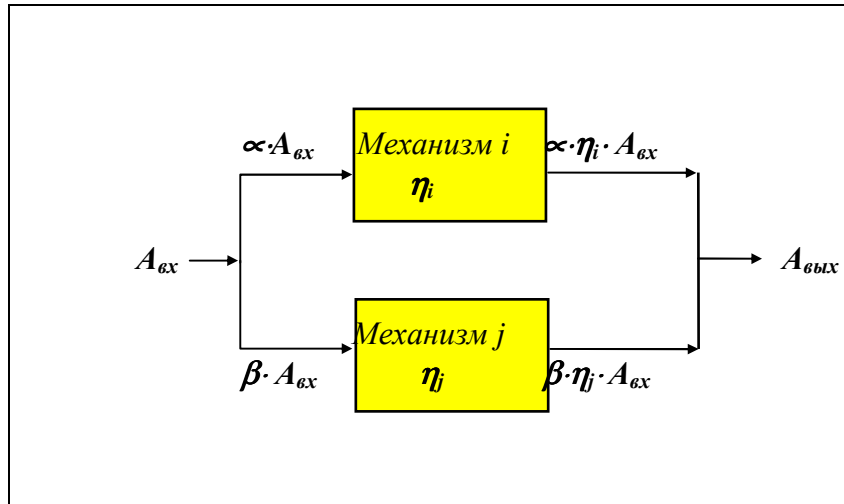


Рис. 9.12

$$\eta = |A_{вых} / A_{вх}|, \text{ где } A_{вых} = \alpha \cdot \eta_i \cdot A_{вх} + \beta \cdot \eta_j \cdot A_{вх} = (\alpha \cdot \eta_i + \beta \cdot \eta_j) \cdot A_{вх}$$

$$\eta = (\alpha \cdot \eta_i + \beta \cdot \eta_j)$$

#### Литература к лекции 9:

1. Теория механизмов и машин. Под ред. К.В.Фролова. М.: Высшая школа, 1987.
2. Левитский Н.И. Колебания в машинах: Учебное пособие для вузов. - М: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988. - 336 с.
3. Штейнвольф Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов. - Москва - Киев: Машгиз., 1961. - 340 с.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./ Ред. совет: В.Н.Челомей и др., - М.: Машиностроение, 1981. - Т.6, Защита от вибрации и ударов/ Под ред. К.В.Фролова, 1981. - 456с.
5. Силовой расчет, уравнивание, проектирование механизмов и механика манипуляторов: Учебное пособие. Под ред. А.К.Мусатова. М.: Изд. МГТУ, 1990.

Приложение к лекции 4: Метод планов положений, скоростей и ускорений подробно рассматривается на упражнениях и осваивается студентами при выполнении домашнего задания и курсовой работы. Здесь кратко рассматривается кинематическое исследование методом планов скоростей и ускорений простейшего кулисного механизма (механизм подъемника с приводом от гидроцилиндра).

Постановка задачи: Дано: Кинематическая схема механизма -  $l_{AB}, l_{AC}, l_{BS2}, l_{AS1}; \varphi_1, \omega_1, \varepsilon_1$ .

---

Определить:  $V_j, a_j, \omega_i, \varepsilon_i \Rightarrow ?$

Построим кинематическую схему механизма в заданном положении в масштабе  $\mu_s, \text{мм/м}$ . По другой терминологии схема называется планом положений звеньев и точек механизма (рис. 9.13).

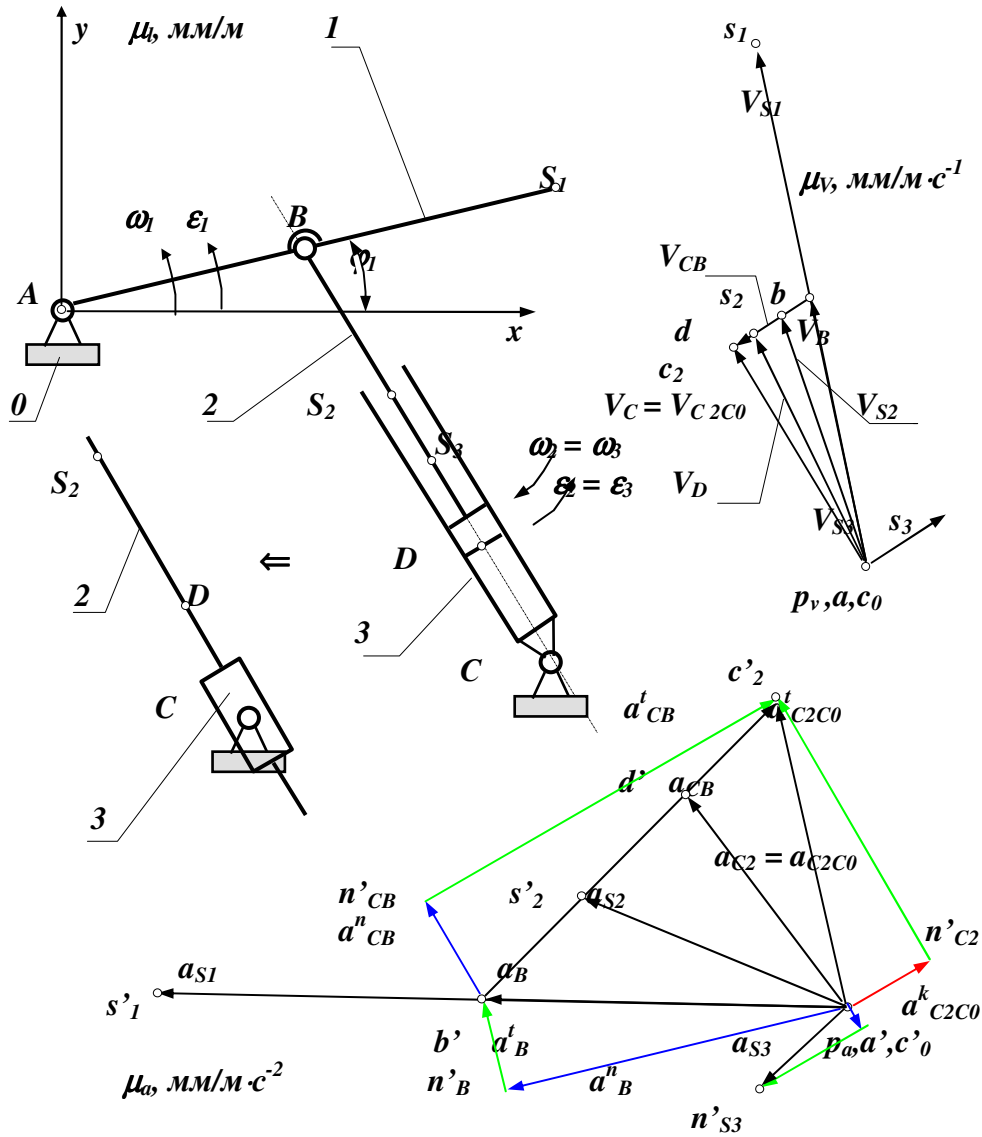


Рис. 9.13

При кинематическом исследовании схему механизма гидроцилиндра удобнее представить в виде штока 2 и втулки 3. Движения звеньев механизма: 1 и 3 вращательное, 2 - плоское. План скоростей строится в масштабе  $\mu_v, \text{мм/м}\cdot\text{с}^{-1}$  на основании следующих уравнений:

вращательное движение 1-го звена

$$V_B = \omega_1 \cdot l_{AB}; \quad V_B \perp l_{AB};$$

плоское движение звена 2

$$V_{C2} = V_B + V_{C2B};$$

$$\perp_{AB} \quad \perp_{BC}$$

сложное движение звена 2 (вращение совместно со звеном 3 и поступательное движение звена 2 относительно звена 3)

$$V_{C2} = \underset{0}{V_{C3}} + \underset{//BC}{V_{C2C3}};$$

скорости точек  $D$  и  $S_2$  определяются пропорциональным делением отрезков плана скоростей

$$BD/BC = bd/bc \Rightarrow bc = (BC/BD) \cdot bd;$$

$$BD/BS_2 = bs_2/bc \Rightarrow bs_2 = (BC/BS_2) \cdot bd;$$

угловая скорость звеньев 2 и 3

$$\omega_3 = \omega_2 = V_{BC}/l_{BC};$$

скорость точки  $S_3$

$$V_{S3} = \omega_3 \cdot l_{CS3}; \quad V_{S3} \perp l_{CS3}.$$

План ускорений строится в масштабе  $\mu_a$ , мм/м·с<sup>2</sup> на основании следующих уравнений:  
 вращательное движение 1-го звена

$$a_B = a_B^n + a_B^t,$$

где  $a_B^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ ,  $a_B^n // l_{AB}$ ,  $a_B^t = \epsilon_1 \cdot l_{AB}$ ,  $a_B^t \perp l_{AB}$ ;  
 плоское движение звена 2

$$a_{C2} = a_B + \underset{//BC}{a_{C2B}^n} + \underset{\perp BC}{a_{C2B}^t},$$

где  $a_{C2B}^n = \omega_2^2 l_{BC}$ ,  $a_{C2B}^n // l_{BC}$ ,  
 сложное движение звена 2

$$a_{C2} = \underset{0}{a_{C3}} + \underset{//BC}{a_{C2C3}^n} + a_{C2C3}^k;$$

где  $a_{C2C3}^k$  - ускорение Кариолиса, возникающее при изменении направления вектора относительной скорости при совместном вращении звеньев 2 и 3, и равное скалярному произведению вектора относительной скорости и вектора угловой скорости  $\omega_2$ , модуль этого вектора равен

$$a_{C2C3}^k = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{C2C3},$$

а направление определяется направлением вектора относительной скорости  $V_{C2C3}$  повернутого на 90 градусов в направлении  $\omega_2$ ;

ускорения точек  $D$  и  $S_2$  определяются пропорциональным делением отрезков плана ускорений

$$BD/BC = b'd'/b'c' \Rightarrow b'c' = (BC/BD) \cdot b'd';$$

$$BD/BS_2 = b's'_2/b'c' \Rightarrow b's'_2 = (BC/BS_2) \cdot b'd';$$

угловое ускорение скорость звеньев 2 и 3

$$\epsilon_3 = \epsilon_2 = a_{BC}^t / l_{BC};$$

ускорение точки  $S_3$ , определяется вращательным движением звена 3

$$a_{S3} = a_{S3}^n + a_{S3}^t,$$

где  $a_{S3}^n = \omega_3^2 \cdot l_{CS3}$ ,  $a_{S3}^n // l_{CS3}$ ,  $a_{S3}^t = \epsilon_3 \cdot l_{CS3}$ ,  $a_{S3}^t \perp l_{CS3}$ .

**Лекция 10.**

**Краткое содержание:** Метрический синтез типовых рычажных механизмов. Структурные схемы простейших типовых механизмов. Цель и задачи метрического синтеза механизмов. Методы метрического синтеза механизмов. Условия проворачиваемости звеньев механизма. Понятие о коэффициенте неравномерности средней скорости и о угле давления в рычажном механизме. Частные задачи синтеза: четырехшарнирный механизм - синтез по  $k_v$  и синтез по двум положениям выходного звена; кривошипно-ползунный механизм - синтез по  $k_v$ , по средней скорости ползуна, по двум положениям выходного звена; кулисный механизм - по рабочему перемещению выходного звена (для четырехзвенного механизма), по коэффициенту  $k_v$  (для шестизвенного механизма). Оптимальный синтез рычажных механизмов. Синтез механизма по заданной функции положения.

**Метрический синтез типовых рычажных механизмов.**

Под метрическим синтезом или проектированием механизмов понимают определение линейных размеров и угловых положений звеньев по условиям рабочих положений и перемещений выходного звена. К решению задач метрического синтеза приступают после определения структуры механизма - выбора его структурной схемы. В нашем курсе рассматриваются только простые типовые четырех- или шестизвенные рычажные механизмы.

**Структурные схемы простейших типовых механизмов.**

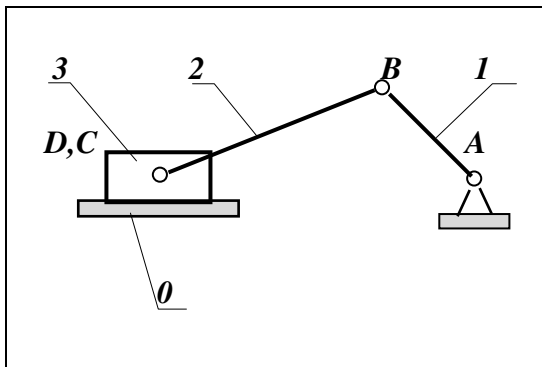


Рис. 10.2. Четырехшарнирный механизм

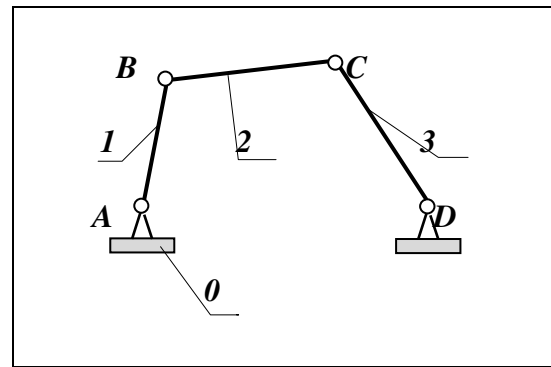


Рис. 10.1. Кривошипно-ползунный механизм

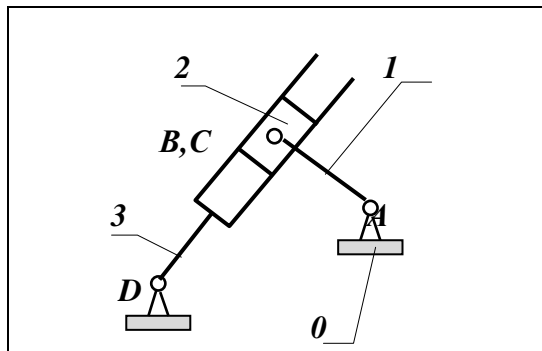


Рис. 10.3. Четырехзвенный кулисный механизм

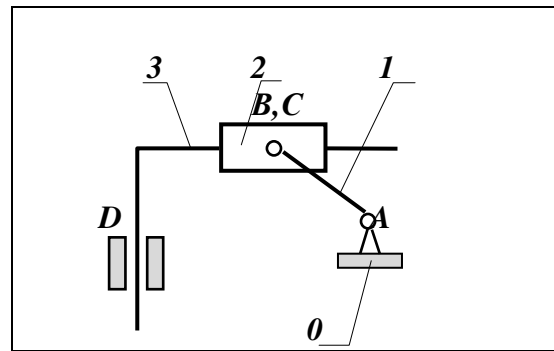


Рис. 10.4. Синусный механизм

механизм

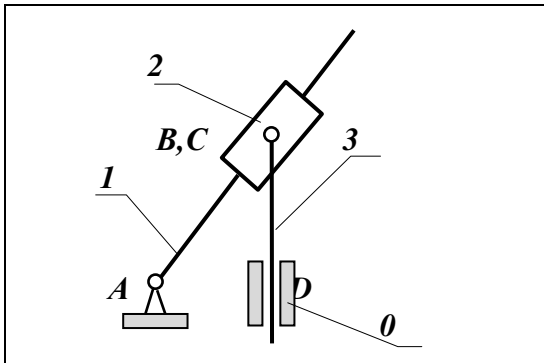


Рис. 10.5 Тангенсный механизм

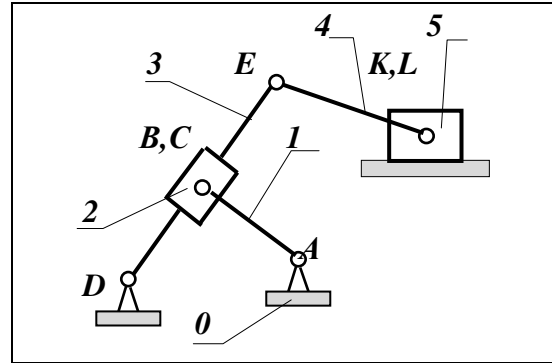


Рис. 10.6. Шестизвенный кулисный механизм

***Цель и задачи метрического синтеза механизмов.***

Цель метрического синтеза механизма - определение размеров механизма и положений его входного звена наилучшим образом удовлетворяющих заданным условиям и обеспечивающих наилучшее (оптимальное) сочетание качественных показателей.

Из множества возможных задач решаемых при метрическом синтезе наиболее распространены:

- синтез по нескольким заданным положениям выходного звена (задача позиционирования), когда не важно по какому закону происходит переход из одного положения в другое;
- синтез по заданному закону движения выходного звена (по функции положения, по первой или второй передаточной функции);
- синтез по конкретным кинематическим параметрам: средней скорости выходного звена, коэффициенту неравномерности средней скорости;
- синтез по условиям передачи сил между звеньями механизма - по допустимому углу давления.

В качестве ограничений или качественных показателей при метрическом синтезе механизмов используются:

- ⇒ условие проворачиваемости звеньев, т.е. обеспечение для входного и (или) выходного звеньев возможности поворота на угол более 360 градусов;
- ⇒ допустимые углы давления, т.е. угол между вектором движущей силы, действующей с ведущего звена на ведомое, и вектором скорости точки ее приложения не должен превышать некоторых допустимых величин, чтобы исключить недопустимо большие величины реакций в КП, низкий КПД механизма, возможность его заклинивания (невозможность движения при любой величине движущей силы на входном звене);
- ⇒ конструктивные ограничения на габариты механизма, т.е. размеры звеньев должны обеспечивать вписывание механизма в заданные габаритные размеры;
- ⇒ точность обеспечения заданного закона движения или заданных положений звеньев механизма;

⇒ другие условия и требования определяемые условиями функционирования и эксплуатации механизма.

### *Методы метрического синтеза механизмов.*

Как и общие методы проектирования, методы метрического синтеза условно делятся:

- ◆ графоаналитические и аналитические методы прямого синтеза (разработаны для типовых и ряда специальных механизмов, частично рассмотрены ниже);
- ◆ синтез методами анализа:
  - \* оптимальное проектирование:
    - градиентные методы,
    - метод случайного поиска,
    - минимизация уступок,
    - комбинированные методы,
    - другие;
  - \* автоматизирование проектирование.

### *Условия проворачиваемости звеньев механизма.*

Часто по условиям работы требуется, чтобы входное и (или) выходное звенья могли в процессе движения поворачиваться на угол более 360 градусов. Для обеспечения этого необходимо выполнить некоторые условия, которые накладываются на соотношение длин звеньев механизма.

Для четырехшарнирного механизма эти соотношения сформулированы в правиле или теореме Грасгофа:

*Если сумма длин наибольшего и наименьшего звеньев меньше суммы двух остальных и стойкой является наименьшее звено, то механизм - **двухкривошипный**. Если неравенство выполняется, но стойкой является звено соединенное с наименьшим, то механизм - **кривошипно-коромысловый**. Во всех остальных случаях механизм - **двухкоромысловый**.*

Математически это можно записать так:

при  $L_1 > L_2 > L_3 > L_4$ , где  $L_i$  присваивается значение длины звена, удовлетворяющей этому неравенству,  
если  $L_1 + L_4 < L_2 + L_3$  и  $L_1 = l_0$ , то механизм **двухкривошипный**;  
если  $L_1 + L_4 < L_2 + L_3$  и  $L_1 = l_1$  или  $L_1 = l_3$ , то механизм **кривошипно-коромысловый**;  
иначе механизм **двухкоромысловый**.

Для кривошипно-ползунного механизма условие существования кривошипа

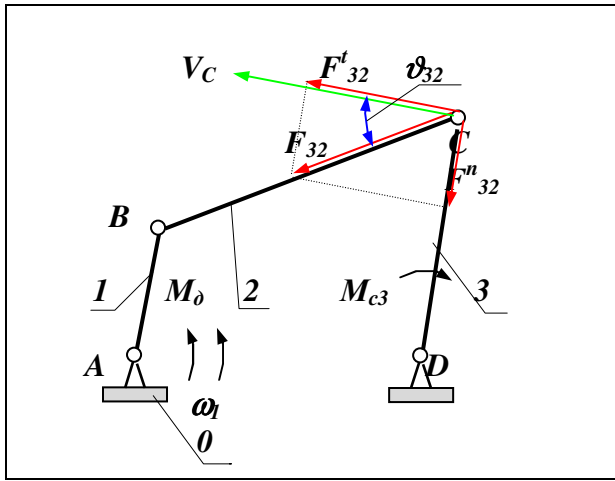
$$l_1 < l_2 - |e|$$

Если условие выполняется - механизм **кривошипно-ползунный**, нет - **коромыслово-ползунный**.

*Понятие о коэффициенте неравномерности средней скорости и о угле давления в рычажном механизме.*



1. Четырехшарнирный механизм.



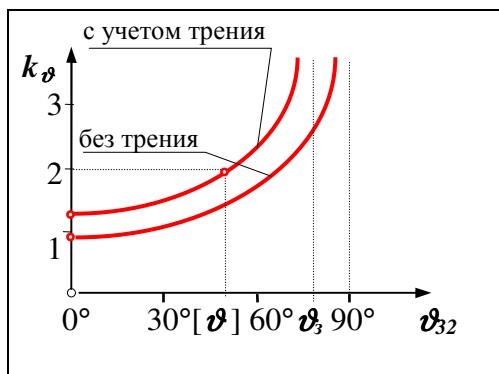
Углом давления  $\vartheta$  называется угол между вектором силы действующей на ведомое звено с ведущего и вектором скорости точки приложения этой силы на ведомом звене.

На рис. 10.7 изображен четырехшарнирный механизм. К входному звену 1 этого механизма приложен движущий момент  $M_d$ , к выходному звену 3 - момент сопротивления  $M_{c3}$ . На этапе проектирования массы и моменты инерции звеньев не

Рис. 10.7 определены

делены, поэтому движущая сила действующая на ведомое звено - реакция  $F_{32}$  направлена по линии  $BC$ , скорость точки ее приложения на звене 3 -  $V_C$  направлена в сторону  $\omega_3$  перпендикулярно звену 3. Угол  $\vartheta_{32}$  между векторами  $F_{32}$  и  $V_C$  - угол давления во вращательной паре  $C$ . С увеличением этого угла тангенциальная составляющая силы  $F^t_{32}$ , способствующая повороту звена 3 в направлении  $\omega_3$ , уменьшается, а нормальная  $F^n_{32}$ , которая не влияет на движение, а только деформирует (сжимает) звено 3, увеличивается. То есть с увеличением угла давления условия передачи сил в КП ухудшаются. Так как в реальных КП всегда имеется трение, то при определенной величине угла давления в КП возможно самоторможение или заклинивание. Самоторможение или заклинивание - это такое состояние механизма, когда в результате возрастания углов давления в одной из КП, движение механизма становится невозможным при сколь угодно большом значении движущей силы. Часто для характеристики условий передачи сил пользуются коэффициентом возрастания усилий (без учета трения)

$$k_{\vartheta} = F_{32} / F^t_{32} = 1 / \cos \vartheta_{32}.$$

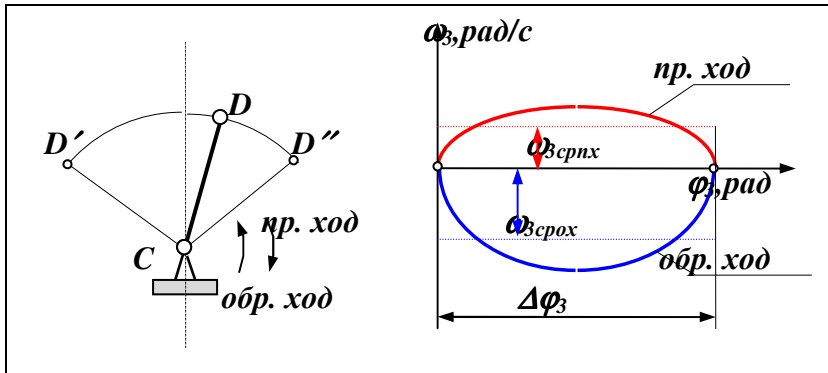


Так как в реальных механизмах всегда имеется трение, то заклинивание происходит при углах давления  $\vartheta < 90^\circ$ . При расчете задаются коэффициентом возрастания усилий (например  $k_{\vartheta} = 2$ ) и определяют допустимый угол давления  $[\vartheta]$ . Для предварительных расчетов принимают для механизмов только с вращательными парами  $[\vartheta] = 45^\circ - 60^\circ$ , при наличии поступательных КП  $[\vartheta] = 30^\circ - 45^\circ$ . Необходимо отметить

Рис. 10.8

что в так называемых «мертвых» положениях механизма углы давления  $\vartheta = 90^\circ$ . В статике в таком положении возможно заклинивание механизма, в динамике механизм проходит эти положения используя кинетическую энергию, которую запасли подвижные звенья.

Коэффициентом неравномерности средней скорости  $k_{\omega}$  называется отношение средней скорости выходного звена на обратном ходе  $\omega_{ср\ об}$  к средней скорости прямого хода  $\omega_{ср\ пр}$ .



$$k_{\omega} = \omega_{3cp\ ox} / \omega_{3cp\ nx}$$

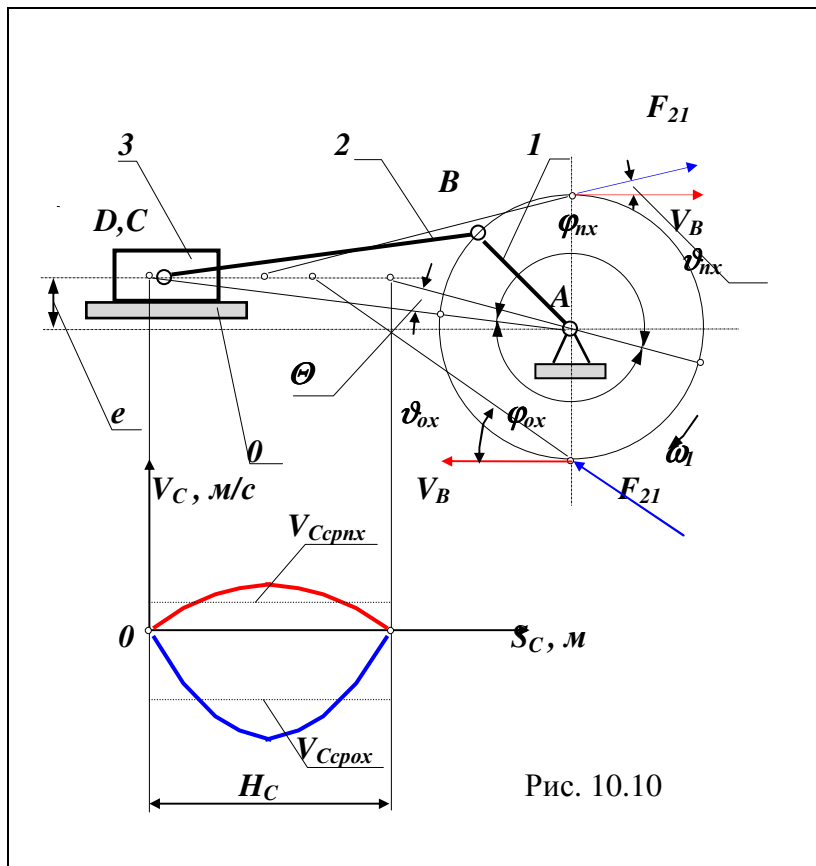
где  $\omega_{3cp\ ox} = \Delta\phi_3 / t_{ox}$ ,  
 $\omega_{3cp\ nx} = \Delta\phi_3 / t_{nx}$ ,  
 $t_{ox}$  и  $t_{nx}$  - соответственно  
 время обратного и время  
 прямого хода.

Рис. 10.9

При проектировании технологических машин, в которых нагрузка на выходном звене механизма на рабочем или прямом ходе намного больше нагрузки на холостом или обратном ходе, желательно, чтобы скорость выходного звена на прямом ходе была меньше, чем на обратном. С целью сокращения времени холостого хода, тоже необходимо увеличивать скорость при обратном ходе. Поэтому при метрическом синтезе механизма часто надо подбирать размеры звеньев обеспечивающие заданный коэффициент неравномерности средней скорости.

2. Кривошипно-ползунный механизм.

В кривошипно-ползунном механизме размеры механизма определяются углом давления в поступательной КП (рис.10.10).



Для этой схемы справедливы следующие соотношения:

$$k_v = V_{сспрох} / V_{сспрnx}$$

где

$$V_{сспрnx} = H_c / t_{nx},$$

$$V_{сспрох} = H_c / t_{ox},$$

$$k_v = t_{nx} / t_{ox},$$

$$k_v = \phi_{nx} / \phi_{ox},$$

$$\phi_{nx} = 180^\circ + \Theta,$$

$$\phi_{ox} = 180^\circ - \Theta,$$

$$\Theta = 180^\circ \cdot \frac{k_v - 1}{k_v + 1}$$

Рис. 10.10

ползунного механизма:  
 при прямом ходе

$$\sin \vartheta_{nx} = (l_1 - e) / l_2 \leq \sin [ \vartheta_{nx} ];$$

Угол давления для  
 внеосного кривошипно-

при обратном ходе

$$\sin \vartheta_{ox} = (l_1 + e) / l_2 \leq \sin [\vartheta_{ox}].$$

Для поступательной КП :  $[\vartheta_{nx}] = 30^\circ$ ;  $[\vartheta_{ox}] = 45^\circ$ , тогда

$$l_1 / l_2 \leq (\sin [\vartheta_{ox}] + \sin [\vartheta_{nx}] ) / 2 ; \quad l_1 / l_2 \leq (\sin [45^\circ] + \sin [30^\circ] ) / 2 ;$$

$$l_1 / l_2 \leq 0.6 .$$

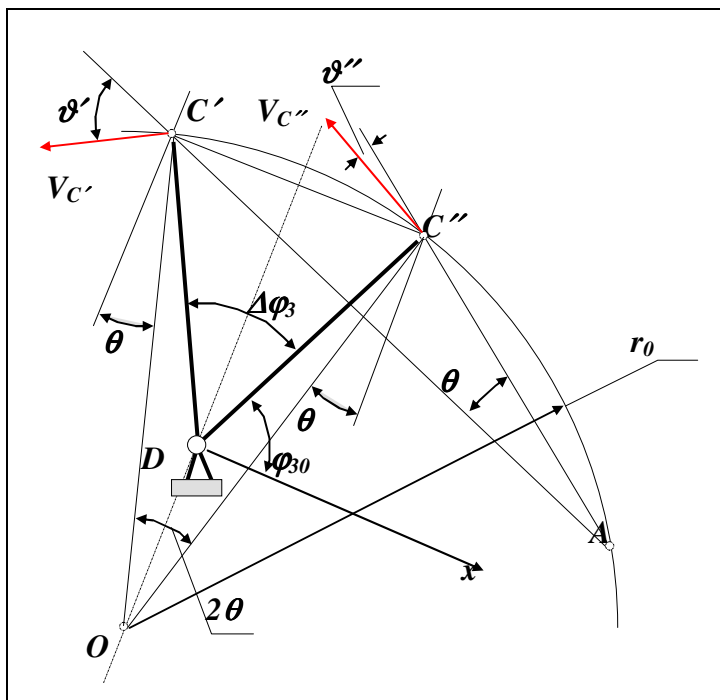
**Решение задач метрического синтеза для типовых четырехзвенных механизмов.**

**1. Проектирование по коэффициенту неравномерности средней скорости .**

- четырехшарнирный механизм

Дано:  $k_\omega, H_C, [\vartheta], \varphi_{30}, \Delta\varphi_3, l_{DC}$

Определить:  $l_i - ?$



По  $k_\omega$  рассчитывается угол  $\theta$

$$\theta = 180^\circ \cdot \frac{k_\omega - 1}{k_\omega + 1}$$

от оси x откладывается начальное положение выходного звена  $\varphi_{30}$  и его рабочее перемещение  $\Delta\varphi_3$ ; точки C в начальном  $C''$  и в конечном  $C'$  положениях соединяют прямой и от перпендикуляров к этой прямой откладываем углы  $\theta$  и проводим лучи  $C'O$  и  $C''O$  и определяем точку  $O$  - центр окружности  $r_0$  про-

Рис. 10.11

дящей через точки  $C', C''$  и искомую точку  $A$ . Положение точки  $A$  на этой окружности определяется в зависимости от исходных данных:

1. в точке  $C'$  от вектора скорости  $V_{C'}$  откладывается угол давления  $\vartheta' = [\vartheta]$ , и проводится луч до пересечения с окружностью  $r_0$  в точке  $A$ ;
2. как точка пересечения оси x с окружностью  $r_0$ ;
3. как точка пересечения окружности  $r_0$  с окружностью радиуса  $l_0$  ( если величина  $l_0$  задана ).

Затем по определенным таким образом размерам  $l_{AC'}$  и  $l_{AC''}$  находим длины звеньев 1 и 2

$$l_{AC'} = l_2 + l_1, \quad l_{AC''} = l_2 - l_1,$$

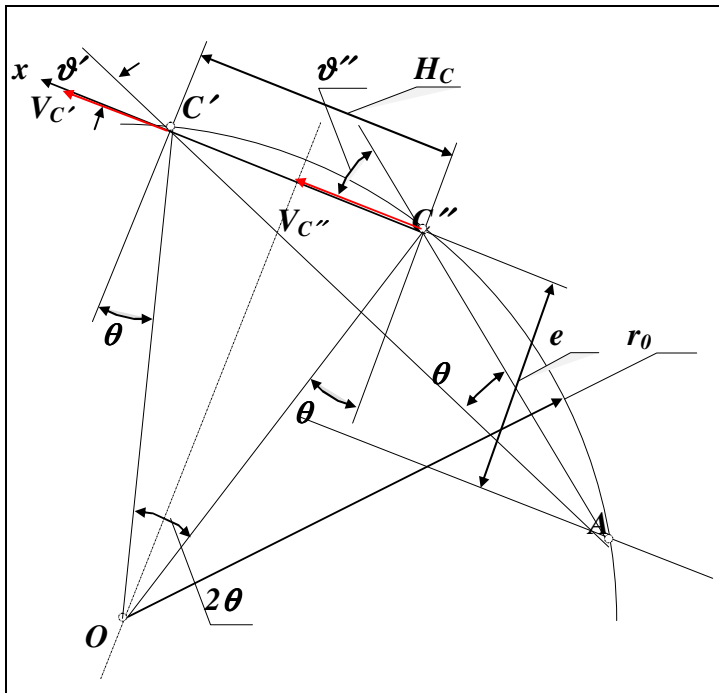
откуда

$$l_1 = (l_{AC'} - l_{AC''})/2, \quad l_2 = (l_{AC'} + l_{AC''})/2.$$

- кривошипно-ползунный механизм;

Дано:  $k_V, H_C, [\vartheta]$

Определить:  $l_i - ?$



По  $k_V$  рассчитывается угол  $\theta$

$$\theta = 180^\circ \cdot \frac{k_V - 1}{k_V + 1}$$

от оси  $x$  откладывается рабочее перемещение выходного звена  $H_C$ , точки  $C$  в начальном  $C'$  и в конечном  $C''$  положениях соединяют прямой и от перпендикуляров к этой прямой откладываются углы  $\theta$  и проводятся лучи  $C'O$  и  $C''O$  и определяем точку  $O$  - центр окружности  $r_0$  про - Рис. 10.12

ходящей через точки  $C', C''$  и искомую точку  $A$ . Положение точки  $A$  на этой окружности определяется:

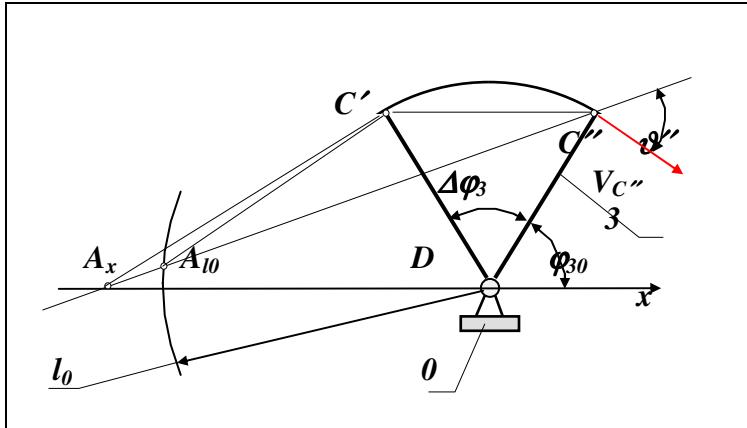
1. как точка пересечения луча  $AC''$  с окружностью  $r_0$  (в точке  $C''$  от вектора скорости  $V_{C''}$  откладывается угол давления  $\vartheta'' = [\vartheta]$  и проводится луч  $AC''$  до пересечения с окружностью  $r_0$  в точке  $A$ );
2. как точка пересечения прямой, проведенной на расстоянии заданного эксцентриситета  $e$  и параллельной оси  $x$ , с окружностью  $r_0$ .

Затем по размерам  $l_{AC'}$  и  $l_{AC''}$  определяются длины звеньев 1 и 2

$$l_1 = (l_{AC'} - l_{AC''})/2, \quad l_2 = (l_{AC'} + l_{AC''})/2.$$

## 2. Проектирование по двум положениям выходного звена.

- четырехшарнирный механизм



Дано:  $[\varphi], \varphi_{30}, \Delta\varphi_3, l_{DC}$

Определить:  $l_i - ?$

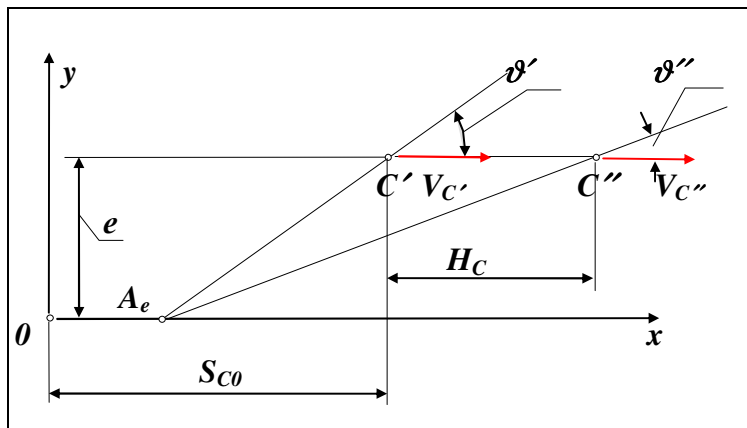
Решение проводится по схеме, которая изображена на рис. 10.13. Положение точки А определяется пересечением луча  $A C''$ , проведенного

Рис. 10.13 в точке  $C''$  под углом  $\vartheta'' = [\varphi]$  к вектору скорости  $V_{C''}$  :

- с окружностью радиуса  $l_0$  (точка  $A_{10}$ );
- с продолжением оси  $x$ .

Затем, как описано выше, по размерам  $l_{AC'}$  и  $l_{AC''}$  определяются длины звеньев 1 и 2.

- кривошипно-ползунный механизм дезаксиальный ( $e \neq 0$ )



Дано:  $[\varphi], S_{C0}, H_C, e$

Определить:  $l_i - ?$

Решение проводится по схеме, которая изображена на рис. 10.14. Положение точки  $A_e$  определяется пересечением луча  $A C'$ , проведенного в точке  $C'$  под

Рис. 10.14

углом  $\vartheta'' = [\varphi]$  к вектору скорости

$V_{C'}$  с продолжением оси  $x$ . Затем, как описано выше, по размерам  $l_{AC'}$  и  $l_{AC''}$  определяются длины звеньев 1 и 2.

- центральный кривошипно-ползунный механизм ( $e = 0$ )

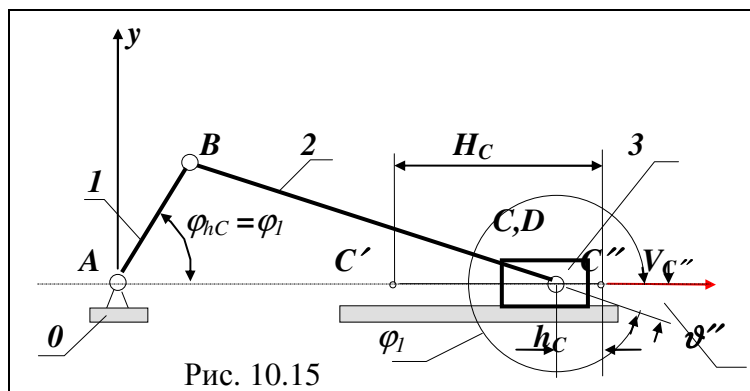


Рис. 10.15

Дано:  $h_C, \varphi_1 = \varphi_{hC}, \lambda_2 = l_2/l_1, e = 0$

Определить:  $l_i - ?$

Спроецируем векторный контур  $l_{AB} + l_{BC} = l_{AC}$  на оси координат:

$$l_1 \cdot \cos \varphi_1 + l_2 \cdot \cos \varphi_2 + h_C = l_1 + l_2,$$

$$l_1 \cdot \sin \varphi_1 + l_2 \cdot \sin \varphi_2 = 0,$$

$$l_1 / l_2 \leq \sin [\vartheta] \text{ или } l_2 / l_1 = \lambda_2;$$

откуда

$$l_1 = h_C / \{ 1 - \cos \varphi_1 + [ 1 - \cos (\arcsin (\lambda_2 \cdot \sin \varphi_1)) / \lambda_2 \},$$

$$l_2 = l_1 / \lambda_2.$$

**3. Проектирование кривошипно-ползунного механизма по средней скорости ползуна .**

Дано:  $H_C, k_V = 1, e = 0, [\vartheta], n_{1cp}$

Определить:  $l_i - ?$

Средняя скорость ползуна

$$V_{Ccp} = 2 \cdot H_C / T,$$

где  $T = 1 / n_{1cp}$  - период или время одного оборота кривошипа в с,  
 $H_C = 2 \cdot l_1$  - ход ползуна.

Размеры звеньев механизма

$$l_1 = V_{Ccp} / ( 4 \cdot n_{1cp} ), l_2 = l_1 / \lambda_2.$$

**4. Проектирование кулисного механизма по углу давления .**

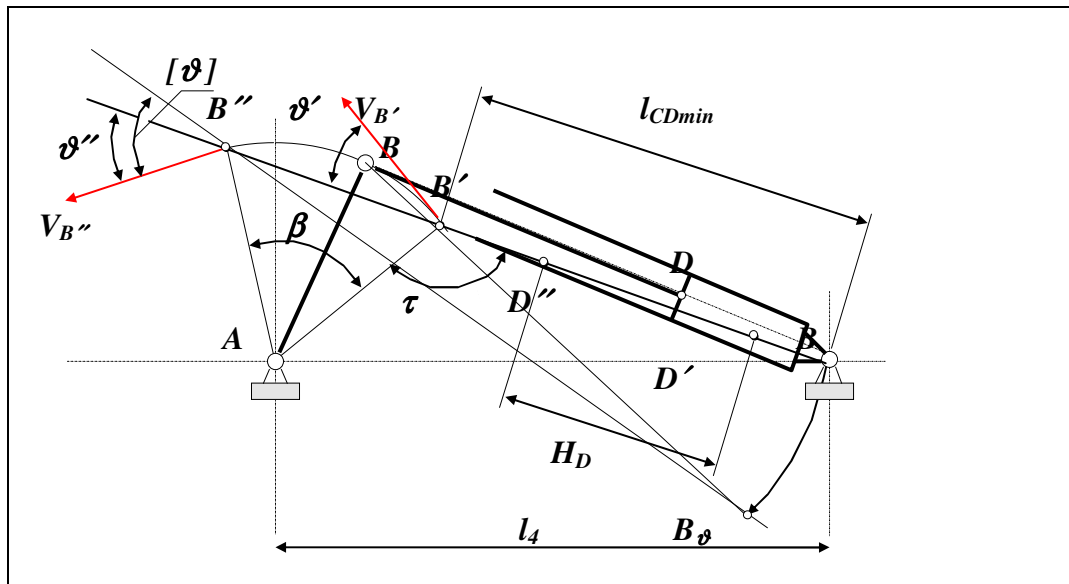


Рис. 10.15

Дано:  $H_D, \beta, [\vartheta]$

Определить:  $l_i - ?$

Если расположить центр пары А на прямой соединяющей точки С' и С'' , то углы давления

$$\vartheta' = \vartheta'' = \beta / 2,$$

тогда

$$l_{C C''} \approx H_D = 2 \cdot l_1 \cdot \sin (\beta / 2)$$

и

$$l_1 = H_D / [2 \cdot \sin (\beta / 2)].$$

Минимальная длина гидроцилиндра

$$l_{CDmin} = k \cdot H_D,$$

где  $k = 1.05 - 1.3$  - коэффициент учитывающий особенности конструкции гидроцилиндра (уплотнение, расположение опоры А и др. ).

Размер  $l_4$  можно определить из  $\Delta B C A$

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + l_{CDmin}^2 - 2 \cdot l_{CDmin} \cdot l_1 \cdot \cos \tau},$$

где  $\cos \tau = -\cos (\pi - \tau) = -\sin \vartheta'$ ,

и

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + l_{CDmin}^2 + 2 \cdot l_{CDmin} \cdot l_1 \cdot \sin \vartheta'}.$$

### 5. Проектирование шестизвенного кулисного механизма .

Дано:  $k_V, H_E, [\vartheta], l_0$

Определить:  $l_i, h - ?$   
 Угловой ход кулисы

$$\beta_3 = \theta = 180^\circ \cdot \frac{k_V - 1}{k_V + 1}.$$

Из  $\Delta ABC$  длина звена 1

$$l_1 = l_0 \cdot \sin(\beta_3/2) = l_0 \cdot \sin(\theta/2).$$

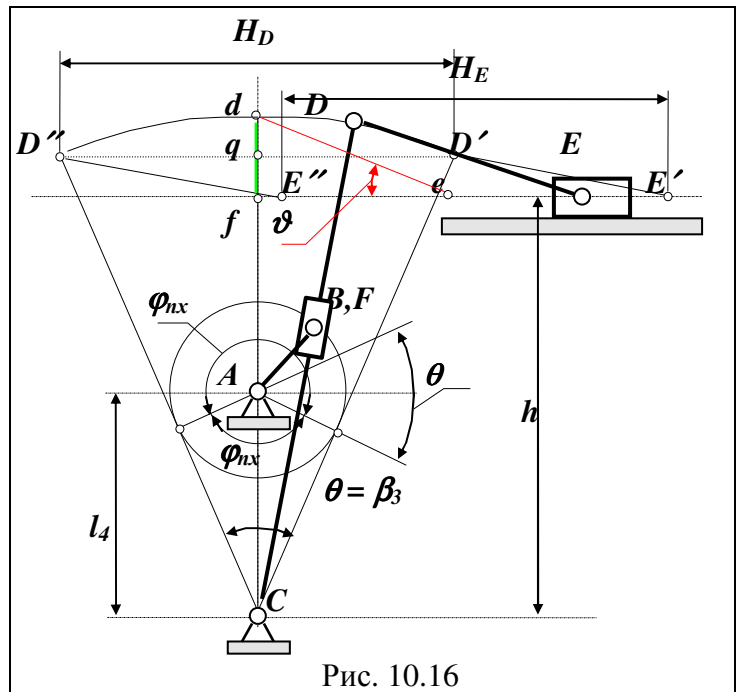
Из  $\Delta CD'q$  длина звена 3

$$l_3 = \frac{H_E}{[2 \sin(\beta_3/2)]} = \frac{H_E}{[2 \cdot \sin(\theta/2)]}.$$

Длина звена 4 определяется по допустимому углу давления

$$\sin \vartheta = (l_3 - h) / l_4 \leq \sin [\vartheta].$$

Принимаем  $dq = qf$ , где  $dq = l_3 \cdot [1 - \cos(\theta/2)]$ , тогда



$$h = l_3 \cdot \{1 - [1 - \cos(\theta/2)]/2\},$$

$$l_4 \geq (l_3 - h) / \sin[\vartheta] \quad \text{или} \quad l_4 \geq (l_3 \cdot [1 - \cos(\theta/2)]) / (2 \cdot \sin[\vartheta]).$$

### *Оптимальный синтез рычажных механизмов.*

Согласно энциклопедическому словарю, задача оптимального проектирования - это экономико-математическая задача, содержащая критерий оптимальности и ограничения и направленная на поиск лучшего в определенных условиях (т.е оптимального) значения показателя. Оптимизация - отыскание такого решения рассматриваемой задачи, которое дает экстремальное (минимальное или максимальное) значение некоторой функции, называемой целевой [ Ю.А.Казик Математический словарь. Таллин. «Валгус» 1985 ].

При оптимальном метрическом синтезе механизма необходимо определить такое сочетание его размеров (внутренние параметры), которое наилучшим образом удовлетворяет требуемым эксплуатационным и качественным показателям (критерии оптимизации и ограничивающие условия). При метрическом синтезе в качестве качественных показателей обычно используются: габариты механизма, точность обеспечения заданных положений или закона движения (функции положения или передаточной функции), условия передачи сил в КП (углы давления в КП) и другие показатели. Механизм при оптимальном проектировании характеризуется двумя n-мерными векторами: параметров и качественных показателей. На значения как параметров, так и качественных показателей могут быть наложены некоторые ограничения в виде равенств или неравенств. Ограничения могут быть:

- параметрическими (например, ограничения на длины звеньев механизмов);
- дискретизирующими (например, выбор размеров из стандартного ряда);
- функциональными (например, условия проворачиваемости звеньев механизма, условия заклинивания КП).

Ограничения формируют область допустимых значений параметров, в пределах которой осуществляется поиск оптимального решения. В пределах этой области могут существовать локальные и глобальный оптимум целевой функции. Целевая функция может быть одномерной или многомерной. При многомерной оптимизации необходимо формирование сложной целевой функции, учитывающей вес каждого из качественных показателей, например, аддитивной

$$\Phi(G, \delta, \vartheta, \dots) = k_1 \cdot G + k_2 \cdot \delta + k_3 \cdot \vartheta + \dots$$

или мультипликативной функции

$$\Phi(G, \delta, \vartheta, \dots) = G^{k_1} \cdot \delta^{k_2} \cdot \vartheta^{k_3} \cdot \dots$$

где  $\Phi(G, \delta, \vartheta, \dots)$  - целевая функция,  $G$  - габариты механизма,  $\delta$  - точность механизма,  $\vartheta$  - углы давления в КП механизма,  $k_i$  - весовые коэффициенты при качественных показателях.

На рис. 10.17 представлена целевая функция при однопараметрической оптимизации ( $p$  - параметр оптимизируемой системы). Ограничения по параметру  $p_{min}$  и  $p_{max}$  определяют область допустимых решений (ОДР), в пределах которой проводится поиск оптимального решения. В нашем примере в этой области целевая функция имеет два минимума: локальный при  $p_{л.онм}$  и глобальный при  $p_{гл.онм}$ .



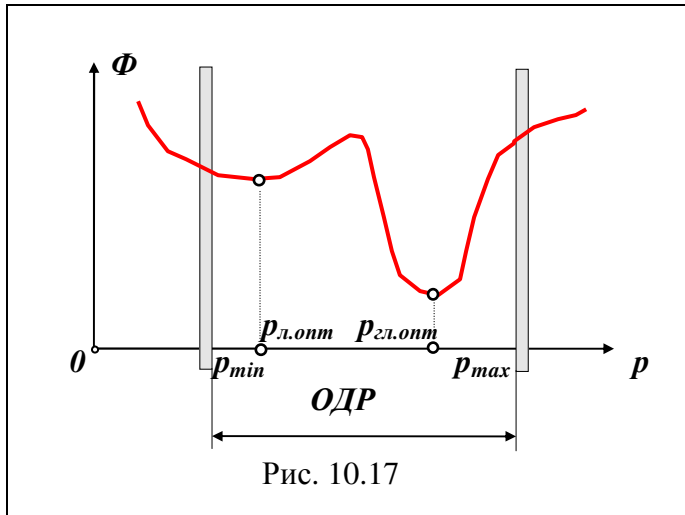


Рис. 10.17

Задача считается решенной после определения глобального экстремума функции.

Методы решения задач оптимизации весьма разнообразны и являются предметом изучения в таких учебных дисциплинах как вычислительная математика, математическое программирование, САПР .

*Синтез меха-*

*низма по заданной функции положения.*

*Дано:* Структурная схема механизма, функция положения выходного звена  $\varphi_3 = \Pi(\varphi_1)$  на рабочем перемещении  $\Delta\varphi_3$  при начальном положении  $\varphi_{30}$ .

*Определить:* Размеры звеньев механизма, обеспечивающие наилучшее приближение к заданной функции.

Предположим, что синтезируется четырехшарнирный механизм. Тогда необходимо определить размеры всех четырех звеньев механизма и начальное значение обобщенной координаты  $\varphi_{10}$ , т.е. пять неизвестных. Так как решается задача метрического синтеза, а абсолютные размеры звеньев определяются прочностными характеристиками, рабочими нагрузками и материалами, то целесообразно перейти к относительным размерам звеньев, приняв длину одного из них (например, стойки) равной единице. Общее число неизвестных, таким образом, сократится до четырех. Изобразим расчетную схему синтезируемого механизма и заданную функцию положения (рис. 10.18). Выберем на функции положения случайным образом (либо по какой-нибудь стратегии) четыре точки с координатами выходного звена  $\varphi_{31}, \varphi_{32}, \varphi_{33}, \varphi_{34}$ . Для каждого из положений можно записать векторное уравнение или два уравнения в проекциях на оси координат (ось абсцисс совпадает с вектором  $l_0$ ):

$$l_1 + l_2 = l_3 + l_0, \Rightarrow \begin{aligned} l_1 \cdot \sin \varphi_1 + l_2 \cdot \sin \varphi_2 &= l_3 \cdot \sin \varphi_3, \\ l_1 \cdot \cos \varphi_1 + l_2 \cdot \cos \varphi_2 &= l_3 \cdot \cos \varphi_3 + l_0. \end{aligned}$$

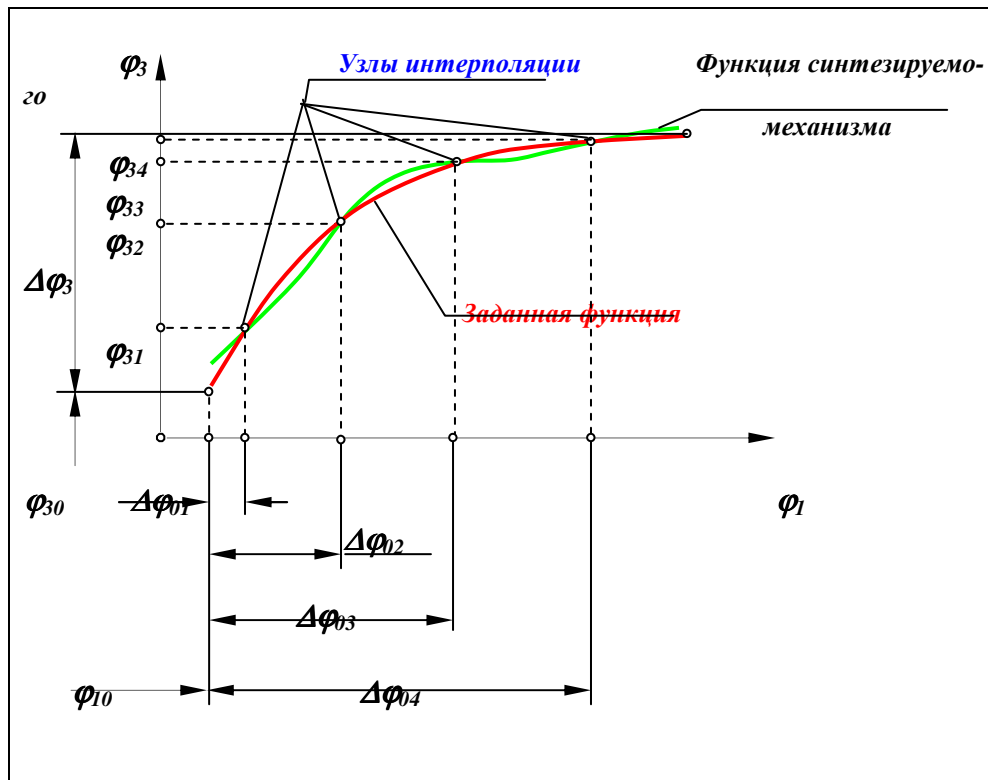


Рис. 10.18

В число неизвестных в рассматриваемой задаче входят  $l_1, l_2, l_3$  и  $\varphi_{10}$ ,  $l_0$  считаем заданным, приращения углов  $\Delta\varphi_{0i}$  определяются по заданной функции положения по выбранным значениям  $\varphi_{3i}$ . Для определения четырех неизвестных необходимо задать как минимум четыре точки на заданном участке функции положения. По этим точкам составим систему четырех векторных уравнений

$$l_1 + l_2 = l_3 + l_0, \Rightarrow \begin{aligned} l_1 \cdot \sin(\varphi_{10} + \Delta\varphi_{0i}) + l_2 \cdot \sin \varphi_{2i} &= l_3 \cdot \sin \varphi_{3i}, \\ l_1 \cdot \cos(\varphi_{10} + \Delta\varphi_{0i}) + l_2 \cdot \cos \varphi_{2i} &= l_3 \cdot \cos \varphi_{3i} + l_0, \end{aligned}$$

где второе уравнение каждой подсистемы в проекциях позволяет определить угол  $\varphi_{2i}$ . Из этой системы определим размеры звеньев механизма и начальное значение координаты  $\varphi_{10}$ . Функция положения синтезированного таким образом механизма будет совпадать с заданной функцией в выбранных точках – узлах интерполяции. Наибольшие отклонения заданной и полученной функций будут находится между узлами интерполяции (рис.10.18). Изменяя положение узлов интерполяции в пределах рабочего перемещения выходного звена можно уменьшать отклонения полученной функции положения от заданной. При использовании метода наименьших квадратов число точек должно быть больше чем число неизвестных (хотя бы на единицу). Полученная функция положения при этом проходит не через узлы интерполяции, а так чтобы отклонения сумма квадратов отклонений в заданных точках была минимальна.

## *Лекция 11.*

Краткое содержание: Введение в теорию высшей пары, основные понятия и определения. Механизмы с высшими кинематическими парами и их классификация. Передачи сцеплением и зацеплением. Основная теорема зацепления. Понятие о полюсе и центроидах. Сопряженные профили в высшей КП. Следствия основной теоремы зацепления. Первое следствие: скорость скольжения профилей в высшей КП. Второе следствие: центр вращения ведущего звена. Угол давления в механизмах с высшими КП. Зубчатые передачи и их классификация. Эвольвентная зубчатая передача. Эвольвента окружности и ее параметрические уравнения. Эвольвентное зацепление и его свойства.

### *Введение в теорию высшей пары, основные понятия и определения.*

Два твердых тела (звена), соприкасающиеся своими поверхностями и имеющие возможность двигаться относительно друг друга, образуют *кинематическую пару*. *Кинематическая пара* допускает не любое движение звеньев относительно друг друга, а только такое движение, которое согласуется с характером соприкосновения и с формой соприкасающихся поверхностей.

Если звенья, образующие КП, в силу характера их соприкосновения, могут совершать только простейшие движения относительно друг друга ( вращательное, прямолинейное поступательное или, в общем случае, винтовое ), то пара является *низшей*. *Низшая пара* - пара, в которой требуемое относительное движение звеньев обеспечивается соприкасанием ее элементов по поверхности ( фактическое соприкасание звеньев в низшей паре возможно как по поверхности, так и по линиям и точкам ). В таких парах движение одного звена относительно другого представляет собой чистое скольжение, причем может иметь место поверхностный контакт - соприкасание звеньев по плоскости, цилиндрической или винтовой поверхности. Такая поверхность контакта может двигаться, «как бы оставаясь в самой себе».

Более сложные относительные движения можно реализовать в парах, характер соприкасания звеньев в которых допускает не только относительное скольжение, но и перекатывание. Такие пары называются *высшими*. *Высшая пара* - пара, в которой требуемое относительное движение звеньев может быть получено только соприкасанием звеньев по линиям или в точках. В высшей паре поверхностный контакт невозможен, так как он исключает возможность перекатывания тел. Если контакт в высшей КП происходит по линии, то она называется мгновенной контактной линией. Эта линия может быть прямой или кривой, при движении соприкасающихся тел она не только меняет свое положение по отношению к звеньям и к неподвижному пространству, но может менять и свою форму. Двигаясь относительно каждого из соприкасающихся звеньев, эта линия как бы «покрывает», описывает или формирует его поверхность. То есть поверхность каждого из звеньев пары можно рассматривать как геометрическое место мгновенных контактных линий в системе координат, связанной со звеном. В неподвижном пространстве эти линии описывают поверхность зацепления - геометрическое место мгновенных контактных линий в неподвижной системе координат. Очевидно, что мгновенная контактная линия - линия пересечения поверхности зацепления с любой из двух соприкасающихся поверхностей. При точечном контакте, контактная точка в системах координат связанных со звеньями описывает некоторую контактную линию на контактирующей поверхности, в неподвижной системе координат - линию зацепления.

Как следует из вышеизложенного, характер относительного движения звеньев КП и геометрия их контактирующих поверхностей находятся в тесной взаимосвязи.

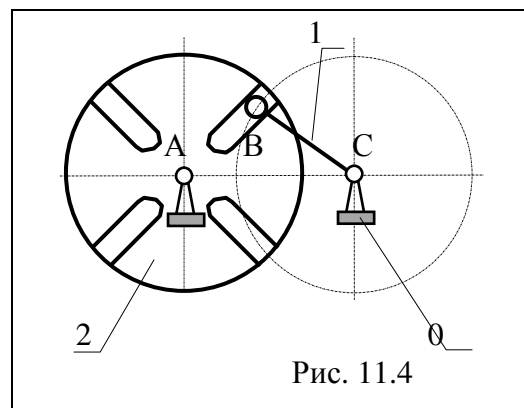
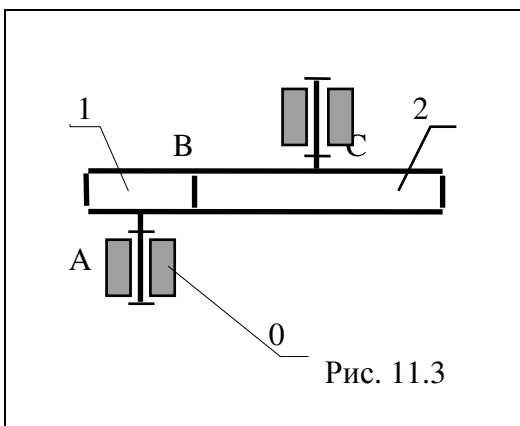
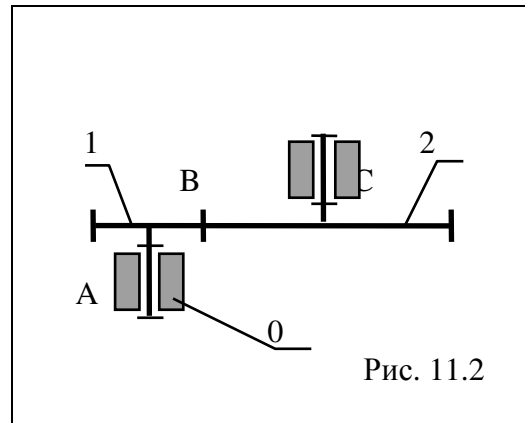
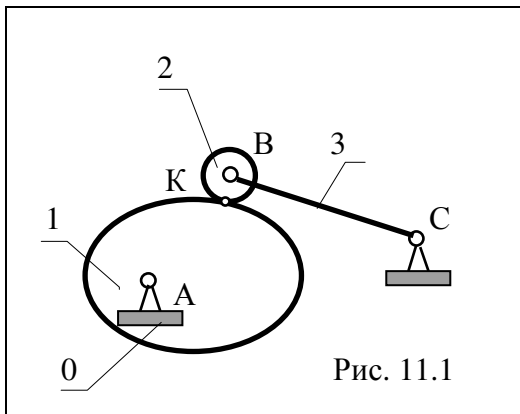
Изучение геометрии контактирующих поверхностей в связи с их относительным движением составляет предмет раздела прикладной механики, который называется *теорией зацепления* [ 1, 2 ].

### ***Механизмы с высшими кинематическими парами и их классификация.***

К механизмам с высшими КП относятся любые механизмы в состав которых входит хотя бы одна высшая пара. Простейший типовой механизм с высшей парой состоит из двух подвижных звеньев, образующих между собой высшую кинематическую пару, а со стойкой низшие ( вращательные или поступательные ) пары. К простейшим механизмам с высшей парой относятся :

- фрикционные передачи (рис. 11.3),
- зубчатые передачи (рис. 11.2),
- кулачковые механизмы (рис. 11.1),
- поводковые механизмы (в том числе и мальтийские - рис. 11.4).

### ***Структурные схемы простейших механизмов с высшими КП.***



Фрикционными механизмами или передачами сцепления называются механизмы с высшей парой в которых передача движения в высшей паре осуществляется за счет сил сцепления или трения в зоне контакта. Кулачковым механизмом называется механизм с высшей парой, ведущее звено которого выполнено в форме замкнутой криволинейной поверхности и называется кулачком (или кулаком). Зубчатыми механизмами называются механизмы звенья которых снабжены зубьями (зубчатый механизм можно определить как многократный кулачковый, рассматривая зацепление каждой пары зубьев, как зацепление двух кулачков) . Рабочие поверхности зубьев должны быть выполнены так,

чтобы обеспечивать передачу и преобразование движения по заданному закону за счет их зацепления. Условия, которым должны удовлетворять рабочие поверхности высших пар, формулируются в разделе теории механизмов - теории зацепления или теории высшей пары.

**Основы теории высшей кинематической пары.  
 Основная теорема зацепления.**

Понятие о полюсе и центроидах. Рассмотрим два твердых тела  $i$  и  $j$ , которые совершают друг по отношению к другу плоское движение. Свяжем с телом  $i$  систему координат  $O_i x_i y_i$ , а с телом  $j$  систему координат  $O_j x_j y_j$ . Плоское движение тела  $i$  относительно тела  $j$  в рассматриваемый момент эквивалентно вращению вокруг мгновенного центра скоростей или полюса  $P$ . Тогда геометрическое место полюсов относительного вращения в системе координат  $O_i x_i y_i$  называется подвижной  $\Pi_i$ , а в системе координат  $O_j x_j y_j$  неподвижной  $\Pi_j$  центроидой. В процессе рассматриваемого движения центроиды контактируют друг с другом в полюсах относительного вращения и поэтому перекатываются друг по другу без скольжения, т.е.

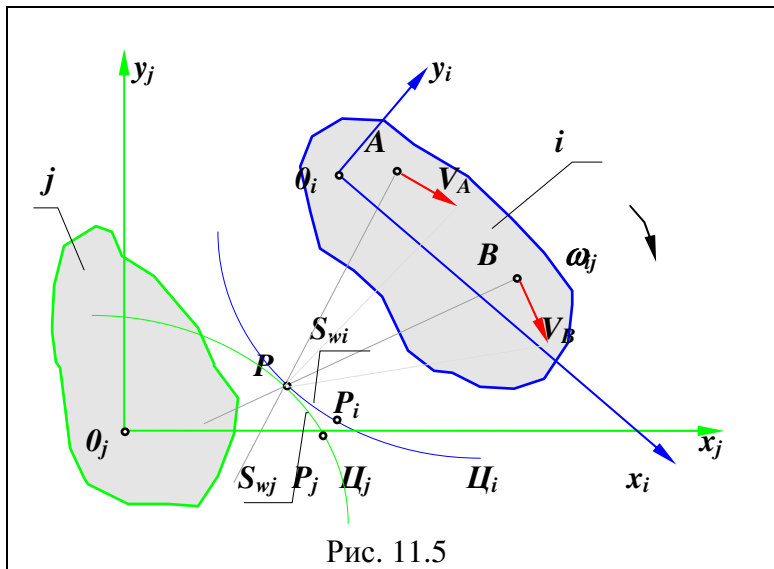


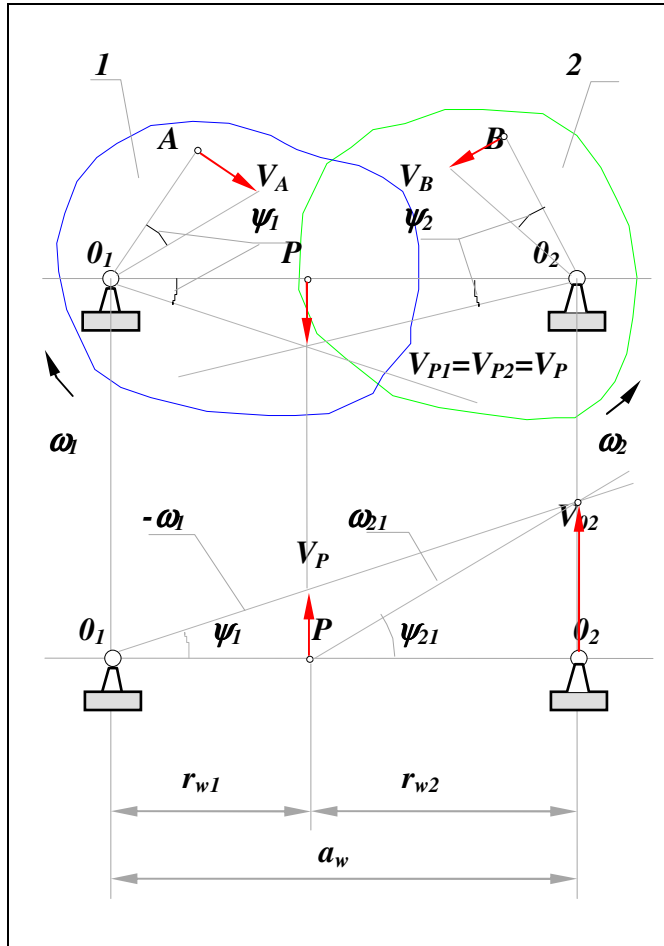
Рис. 11.5

$$V_{Pi} = V_{Pj}; \quad V_{PiPj} = 0;$$

тогда дуга  $S_{wi}$  равна дуге  $S_{wj}$ .  
Полюс зацепления - мгновенный центр относительного вращения звеньев, образующих кинематическую пару.  
Центроида (полоида) - геометрическое место центров (полюсов) относительного вращения в системах координат, связанных со звеньями.

**Передаточное отношение для тел совершающих вращательное движение.**

Рассмотрим два тела  $1$  и  $2$ , совершающих вращательное движение соответственно вокруг центров  $O_1$  и  $O_2$  с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 11.6). Причем нам неизвестно связаны эти тела между собой или нет. Как отмечено выше, полюс относительного вращения этих тел будет лежать в такой общей точке этих тел, где вектора скоростей как первого, так и второго тела будут равны. Для скоростей любой точки первого тела  $V_A = \omega_1 \cdot l_{AO1}$ , для любой точки второго -  $V_B = \omega_2 \cdot l_{BO2}$ . Равенство векторов скоростей по направлению для тел, совершающих вращательное движение, возможно только на линии соединяющей центры вращения тел. Поэтому полюс относительного вращения должен лежать на этой линии. Для определения положения полюса на линии центров составим следующее уравнение



$$V_{P1} = \omega_1 \cdot l_{O1P} = \omega_1 \cdot r_{w1},$$

$$V_{P2} = \omega_2 \cdot l_{O2P} = \omega_2 \cdot r_{w2},$$

$$V_{P1} = V_{P2}, \quad \omega_1 \cdot r_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2}$$

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = \pm(r_{w2}/r_{w1}).$$

Таким образом, полюс относительного вращения звеньев лежит на линии центров и делит ее на отрезки обратно пропорциональные угловым скоростям.

Теорема Виллиса. Передаточное отношение между звеньями совершающими вращательное движение прямопропорционально отношению угловых скоростей и обратно пропорционально отношению расстояний от центров вращения до полюса.

Знак перед отношением показывает внешним (знак +, зацепление внутреннее) или внутренним (знак -, зацепление внешнее) образом делит полюс линию центров на отрезки  $r_{w1} = l_{O1P}$  и  $r_{w2} = l_{O2P}$ . Данная формула получена из рассмотрения вращательного движения двух тел, при этом тела могут быть и не связаны между собой.

Воспользуемся методом обращенного движения и рассмотрим движение нашей системы относительно звена 1. Для этого к скоростям всех звеньев механизма добавим  $-\omega_1$ . Тогда скорости звеньев изменятся следующим образом:

Движение механизма:	Звено 1	Звено 2	Звено 0
исходное	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_0 = 0$
относительно звена 1	$\omega_1 - \omega_1 = 0$	$\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$	$\omega_1 = -\omega_{01}$

Скорость любой точки звена 2 в относительном движении будет равно его угловой скорости в этом движении умноженной на расстояние от этой точки до полюса относительного вращения, т. е.

$$V_{O2} = \omega_{21} \cdot l_{O2P} = (\omega_2 - \omega_1) \cdot r_{w2}.$$

Перейдем к рассмотрению двух тел 1 и 2, совершающих вращательное движение, соответственно вокруг центров  $O_1$  и  $O_2$  с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , и образующих между собой высшую кинематическую пару K (рис. 11.7).

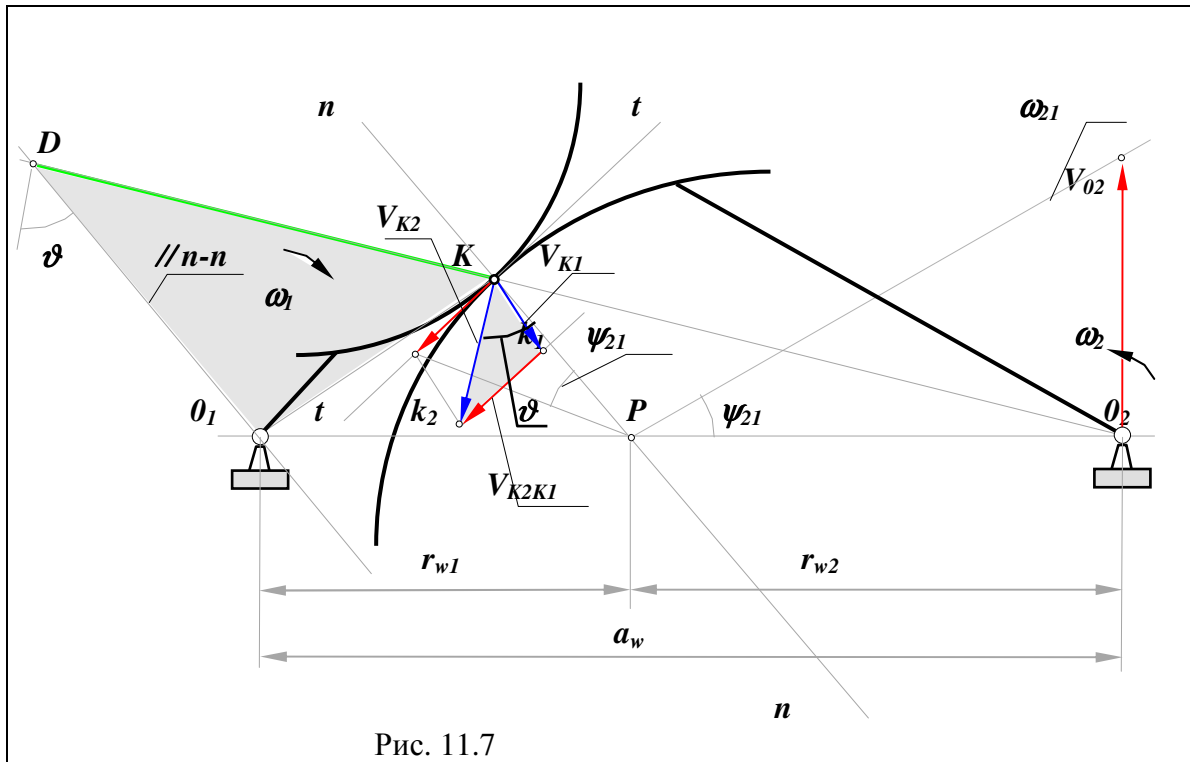


Рис. 11.7

Условием существования высшей кинематической пары является условие неразрывности контакта звеньев, которое заключается в том, что проекции скоростей звеньев в точке контакта на контактную нормаль к профилям должны быть равны

$$V_{K1}^{np.n-n} = V_{K2}^{np.n-n} \text{ или } \overline{V_{K2K1} \cdot n} = 0,$$

т.е. скалярное произведение вектора относительной скорости в точке контакта на орт нормали равно нулю. Это условие обеспечивается, если скорость относительного движения контактных точек лежит на касательной ( в пространстве в касательной плоскости ). При выполнении этого условия профили не отстают друг от друга ( нарушение контакта приведет к исчезновению пары ), и не внедряются друг в друга ( что при принятом допущении о абсолютно жестких звеньях, невозможно ).

Как было показано выше скорость относительного скольжения в точке контакта равна

$$V_{K2K1} = \omega_{21} \cdot l_{KP},$$

где \$l\_{KP}\$ - расстояние от контактной точки до полюса относительного вращения. Так как \$V\_{K2K1}\$ перпендикулярна \$l\_{KP}\$, а \$V\_{K2K1}\$ должна лежать на касательной, то \$l\_{KP}\$ является нормалью к профилям в точке контакта. То есть контактная нормаль к профилям в высшей паре пересекает линию центров в полюсе относительного вращения.

Основная теорема зацепления.

Формулировка анализа. Контактная нормаль к профилям высшей пары пересекает линию центров в полюсе относительного вращения звеньев ( то что полюс делит линию центров на отрезки обратно пропорциональные угловым скоростям было доказано выше ).

**Формулировка синтеза.** Профили в высшей кинематической паре должны быть выполнены так, чтобы контактная нормаль к ним проходила через полюс относительного вращения звеньев.

Так как положение полюса на линии центров определяет передаточное отношение механизма, то профили удовлетворяющие основной теореме зацепления обеспечивают заданный закон изменения передаточного отношения или являются сопряженными.

**Скорость скольжения в высшей КП  
или первое следствие основной теоремы зацепления.**

Скорость скольжения профилей в высшей КП равна произведению скорости относительного вращения на расстояние от контактной точки до полюса зацепления.

$$V_{K2K1} = \omega_{21} \cdot l_{KP} = (\omega_2 \pm \omega_1) \cdot l_{KP},$$

где верхний знак относится к внешнему зацеплению, нижний - к внутреннему. Зацепление считается внешним, если полюс делит линию центров внутренним образом и направления угловых скоростей звеньев противоположны, и внутренним, если полюс делит линию центров внешним образом (Рис. 17.8) и направления угловых скоростей одинаковы.

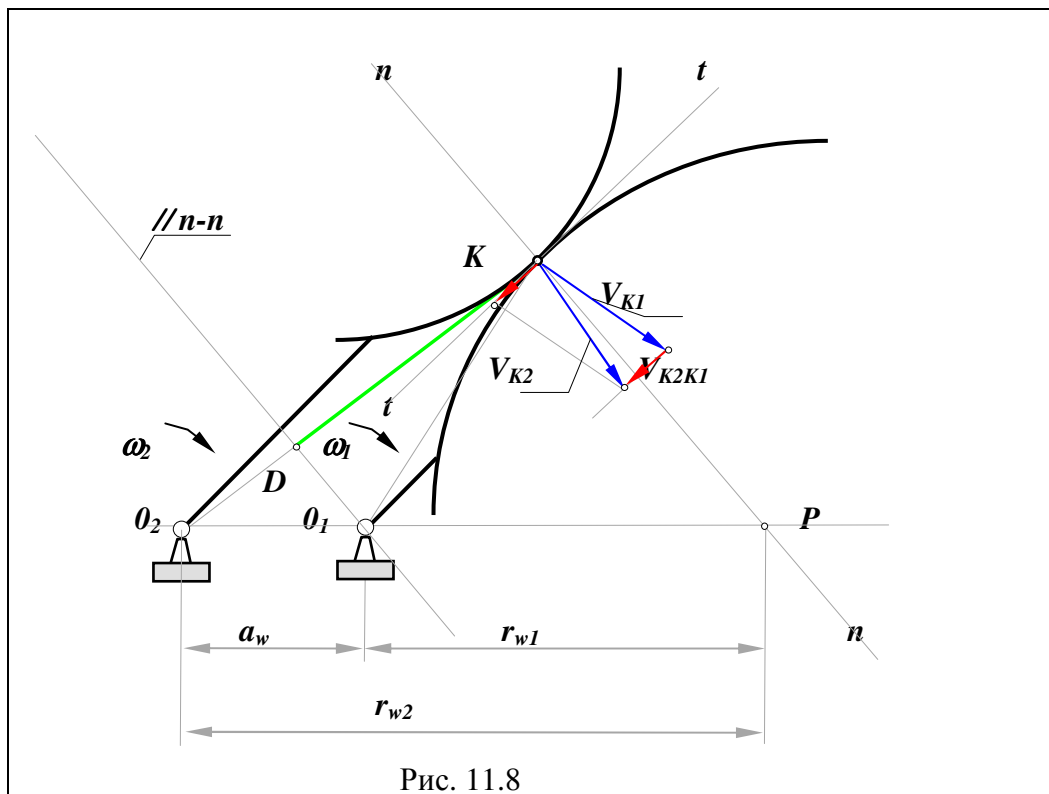


Рис. 11.8

Из формулы видно, что скорость скольжения во внутреннем зацеплении много меньше, чем во внешнем.

**Определение центра вращения ведущего звена  
или второе следствие основной теоремы зацепления.**

Из схемы, изображенной на рис. 11.7, видно, что



$$\Delta Kk_1k_2 \infty \Delta K0_1D \text{ и } V_{K2}/l_{KD} = V_{K1}/l_{01K} = \omega_1$$

или

$$l_{KD} = V_{K2} / \omega_1 = V_{qK2},$$

т.е. отрезок  $l_{KD}$ , отсекаемый от луча, проведенного из точки  $O_2$  через точку  $K$ , прямой параллельной контактной нормали, равен передаточной функции точки  $K_2$ .

Второе следствие основной теоремы зацепления.

Формулировка синтеза. Если на продолжении луча, проведенного из точки  $O_2$  через точку  $K$ , отложить от точки  $K$  отрезок длиной  $l_{KD} = V_{K2} / \omega_1 = V_{qK2}$  и через конец этого отрезка провести прямую параллельную контактной нормали, то эта прямая пройдет через центр вращения ведущего звена точку  $O_1$ .

С использованием этого свойства механизма с высшей парой при проектировании кулачковых механизмов определяют радиус начальной шайбы по допустимому углу давления.

Формулировка анализа. Луч проведенный через центр вращения ведущего звена точку  $O_2$  параллельно контактной нормали, отсекает на луче проведенном из точки  $O_2$  через точку  $K$  отрезок  $l_{KD} = V_{K2} / \omega_1 = V_{qK2}$ , равный передаточной функции точки  $K_2$ .

**Угол давления в высшей паре  
 ( на примере плоского кулачкового механизма ).**

Рассмотрим плоский кулачковый механизм с поступательно движущимся роликовым толкателем ( Рис. 11.9). Из  $\Delta BPF$

$$\operatorname{tg} \vartheta = l_{FP} / l_{KF} ,$$

где  $l_{FP} = l_{DK} - e = V_{K2} / \omega_1 - e$ ,  
 $l_{BF} = S_{Bi} + l_{B0F} = S_{Bi} + \sqrt{r_0^2 - e^2}$ , ( Из  $\Delta B_0O_1F \Rightarrow l_{B0F} = S_{Bi} + \sqrt{r_0^2 - e^2}$  ).

Подставляя эти выражения в формулу для тангенса угла давления, получим

$$\operatorname{tg} \vartheta = (V_{K2} / \omega_1 \pm e) / (S_{Bi} + \sqrt{r_0^2 - e^2}) ,$$

где знак - соответствует смещению оси толкателя (эксцентриситету) вправо от центра вращения кулачка.

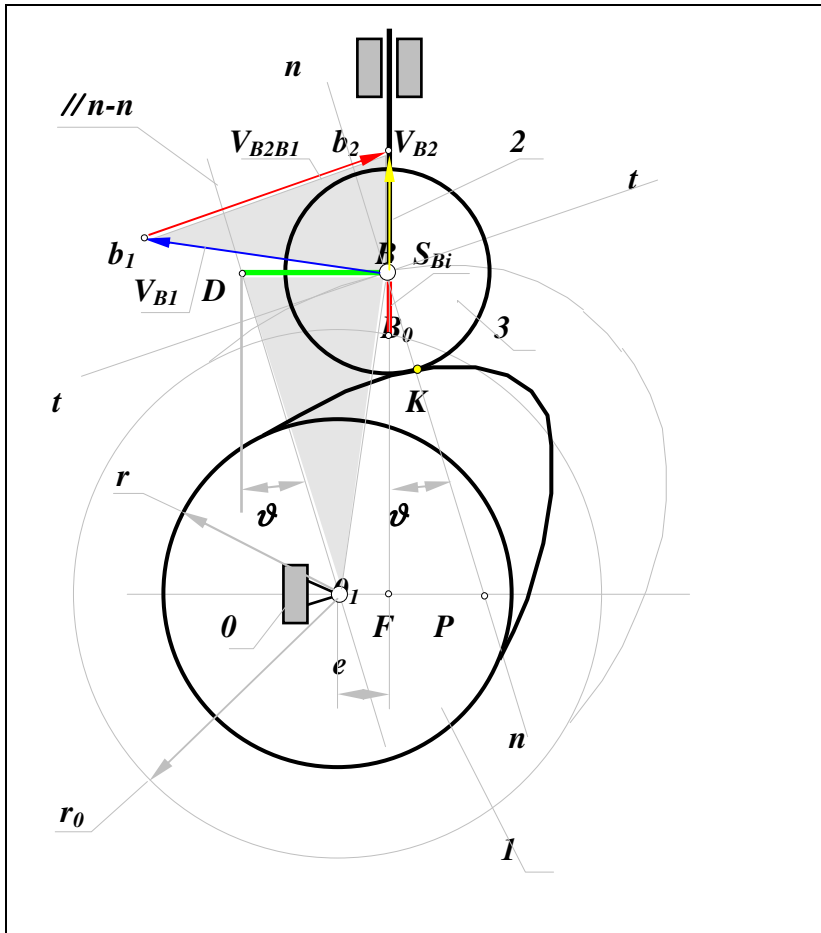


Рис. 11.9

**Формула Эйлера - Савари.**

При синтезе плоских зацеплений широко применяется формула Эйлера-Савари, которая устанавливает связь между радиусами кривизны центроид и радиусами кривизны профилей высшей пары. Эта формула записывается так

$$(1/r_{w1}) + (1/r_{w2}) = \{[1/(\rho_1 - l_{KP})] + [1/(\rho_2 - l_{KP})]\} \cdot \cos \varphi,$$

где  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  - радиусы кривизны центроид первого и второго звена в полюсе зацепления,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  - радиусы кривизны профилей в контактной точке,  $l_{KP}$  - расстояние от полюса зацепления до контактной точки,  $\varphi$  - угол между контактными нормальными к профилям и центроидам.

**Теорема Оливье.**

Теорема Оливье является основополагающей теоремой как для плоских, так и для пространственных зацеплений. Она устанавливает основные признаки определяющие свойства зацепляющихся поверхностей, вид их контакта друг с другом.

Теорема Оливье. Пусть  $F_1, F_2$  и  $B$  некоторые поверхности с определенным абсолютным движением. И пусть  $F_1$  и  $F_2$  огибающие к  $B$  в их относительном движении, где - мгновенные контактные линии. Если  $K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$  имеют общие точки, то поверхности  $F_1$  и  $F_2$  :

- находятся в точечном контакте, если  $K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$  пересекаются в некоторой точке  $K$ ;
- находятся в линейном контакте, если  $K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$  сливаются в одну линию, образуя  $K - K$ .

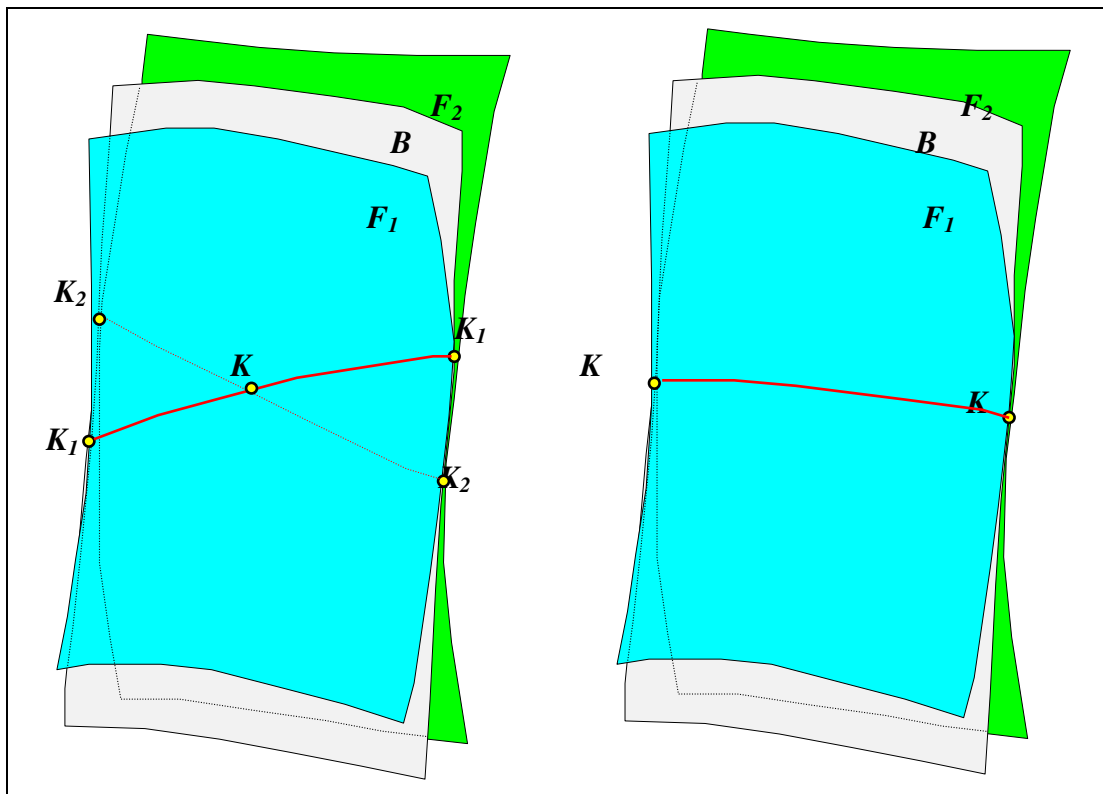


Рис. 11.10

Теорема Оливье имеет три важных следствия:

Следствие 1. Если оба зубчатых колеса обработаны друг другом, т.е. первое колесо обработано инструментом режущие кромки которого копируют второе колесо, а второе - инструментом режущие кромки которого копируют первое, то эти колеса имеют взаимооггибаемые поверхности зубьев с линейным контактом поверхностей.

Следствие 2. Если оба колеса обработаны инструментами, образующими между собой конгруэнтную пару, то эти колеса имеют взаимооггибаемые поверхности зубьев с линейным контактом поверхностей.

Следствие 3. Если поверхность зацепления  $I_1$  инструмента 1 с колесом 1 и поверхность зацепления  $I_2$  инструмента 2 с колесом 2 совпадает с поверхностью зацепления колес 1 и 2, то зубья колес обработанных при таком условии будут иметь линейный контакт.

### ***Зубчатые передачи и их классификация.***

Зубчатыми передачами называются механизмы с высшими кинематическими парами в состав которых входят зубчатые колеса, рейки или секторы - звенья, снабжен-

ные профилированы выступами или зубьями. Зубчатые передачи бывают простые и сложные. Простая зубчатая передача - трехзвенный механизм, состоящий из двух зубчатых колес и стойки, в котором зубчатые колеса образуют между собой высшую пару, со стойкой - низшие ( поступательные или вращательные ).

Простые зубчатые передачи классифицируются:

- \* по виду передаточной функции (отношения)
  - с постоянным передаточным отношением;
  - с переменным передаточным отношением;
- \* по расположению осей в пространстве
  - с параллельными осями;
  - с пересекающимися осями;
  - с перекрещивающимися осями;
- \* по форме профиля зуба
  - с эвольвентным профилем;
  - с циклоидальным профилем;
  - с круговым профилем (передачи Новикова);
- \* по форме линии зуба
  - с прямым зубом;
  - косозубые;
  - шевронные;
  - с круговым зубом;
- \* по форме начальных поверхностей
  - цилиндрические;
  - коническое;
  - гиперболоидные;
- \* по форме и виду зубчатых колес
  - червячные;
  - с некруглыми колесами;
  - винтовые.

### ***Эвольвентная зубчатая передача.***

Эвольвентная зубчатая передача - цилиндрическая зубчатая передача, профили зубьев которой выполнены по эвольвенте окружности.

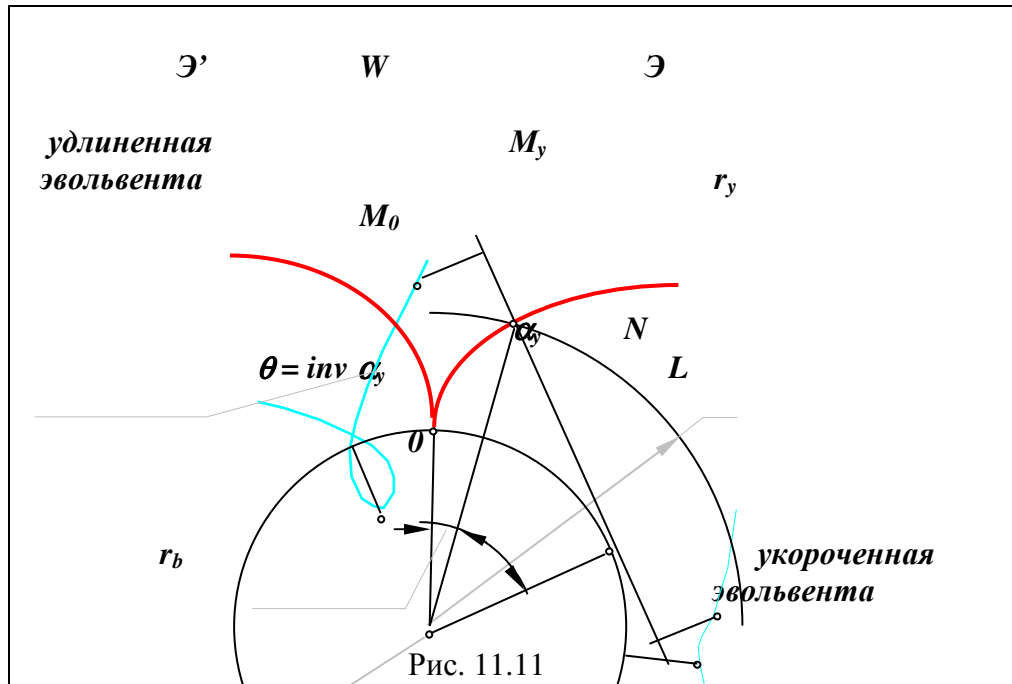
### ***Эвольвента окружности и ее свойства.***

Эволютой называется геометрическое место центров кривизны данной кривой. Данная кривая по отношению к эволюте называется эвольвентой. Согласно определению нормаль к эвольвенте ( на которой лежит центр кривизны ) является касательной к эволюте. Эвольвенты окружности описываются точками производящей прямой при ее перекатывании по окружности, которую называют основной.

Свойства эвольвенты окружности:

1. Форма эвольвенты окружности определяется только радиусом основной окружности  $r_b$ . При  $r_b \Rightarrow \infty$  эвольвента переходит в прямую линию.
2. Производящая прямая является нормалью к эвольвенте в рассматриваемой произвольной точке  $M_y$ . Отрезок нормали в произвольной точке эвольвенты  $l_{M_yN} = \rho$  равен радиусу ее кривизны и является касательной к основной окружности.

3. Эвольвента имеет две ветви и точку возврата  $M_0$ , лежащую на основной окружности. Эвольвента не имеет точек внутри основной окружности.
1. Точки связанные с производящей прямой но не лежащие на ней при перека- тывании описывают: точки расположенные выше производящей прямой  $W$  - укороченные эвольвенты, точки, расположенные ниже производящей прямой  $L$  - удлиненные эвольвенты.



Параметрические уравнения эвольвенты получим из схемы, изображенной на рис. 11.11 . Так как производящая прямая перека- тывается по основной окружности без скольжения то дуга  $M_0N$  равна отрезку  $NM_y$ . Для дуги окружности

$$M_0N = r_b \cdot (inv \alpha_y - \alpha_y),$$

из треугольника  $\triangle OM_yN$

$$NM_y = r_b \cdot tg \alpha_y ,$$

$$r_y = r_b / \cos \alpha_y .$$

Откуда

$$\begin{aligned} inv \alpha_y &= tg \alpha_y - \alpha_y , \\ r_y &= r_b / \cos \alpha_y , \end{aligned}$$

получим параметрические уравнения эвольвенты.

### **Эвольвентное зацепление и его свойства.**

В зубчатой передаче контактирующие элементы двух профилей выполняются по эвольвентам окружности и образуют, так называемое эвольвентное зацепление. Это за- цепление обладает рядом полезных свойств, которые и определяют широкое распро- странение эвольвентных зубчатых передач в современном машиностроении. Рассмот- рим эти свойства.

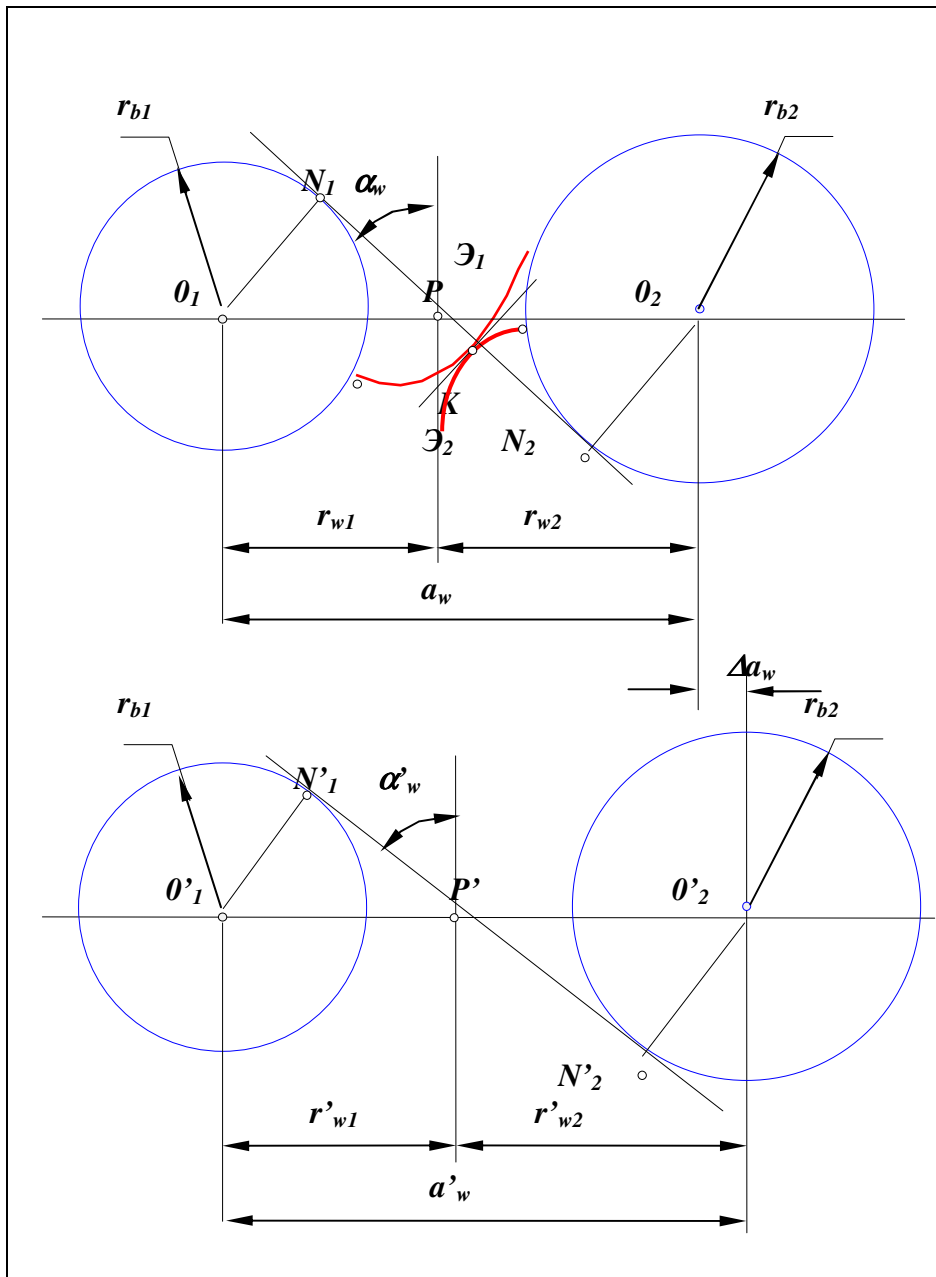


Рис. 11.12

Свойство 1. Передаточное отношение эвольвентного зацепления определяется только отношением радиусов основных окружностей и является величиной постоянной.

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = r_{w2} / r_{w1} = (r_{b2} \cos \alpha_w) / (r_{b1} \cos \alpha_w) = r_{b2} / r_{b1} = const.$$

Свойство 2. При изменении межосевого расстояния в эвольвентном зацеплении его передаточное отношение не изменяется.

$$u'_{12} = \omega_1 / \omega_2 = r'_{w2} / r'_{w1} = (r_{b2} \cos \alpha'_w) / (r_{b1} \cos \alpha'_w) = r_{b2} / r_{b1} = const.$$

$$u'_{12} = u_{12} = r_{b2} / r_{b1} = const$$

Свойство 3. При изменении межосевого расстояния в эвольвентном зацеплении величина произведения межосевого расстояния на косинус угла зацепления не изменяется.

$$r_{b1} + r_{b2} = r_{w1} \cdot \cos \alpha_w + r_{w2} \cdot \cos \alpha_w = a_w \cdot \cos \alpha_w,$$

$$r_{b1} + r_{b2} = r'_{w1} \cdot \cos \alpha'_w + r'_{w2} \cdot \cos \alpha'_w = a'_w \cdot \cos \alpha'_w,$$

$$a_w \cdot \cos \alpha_w = a'_w \cdot \cos \alpha'_w = \text{const.}$$

Свойство 4. За пределами отрезка линии зацепления  $N_1N_2$  рассматриваемые ветви эвольвент не имеют общей нормали, т. е. профили выполненные по этим кривым будут не касаться, а пересекаться. Это явление называется интерференцией эвольвент или заклиниванием.

#### *Литература.*

1. В.А.Гавриленко . Зубчатые передачи в машиностроении (Теория эвольвентных зубчатых передач). М.: Машгиз - 1962, 530 стр., илл.
2. Ф.Л.Литвин Теория зубчатых зацеплений. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: - Наука - 1968, 584 стр., илл.

### Лекция 12.

**Краткое содержание:** Эвольвентное зубчатое колесо и его параметры. Толщина зуба колеса по окружности произвольного радиуса. Методы изготовления эвольвентных зубчатых колес. Понятие о исходном, исходном производящем и производящем контурах. Станочное зацепление. Основные размеры зубчатого колеса. Виды зубчатых колес. Подрезание и заострение колеса. Понятие о области существования зубчатого колеса. Эвольвентная цилиндрическая зубчатая передача и ее параметры. Основные уравнения эвольвентного зацепления.

#### Эвольвентное зубчатое колесо и его параметры.

Эвольвентным зубчатым колесом называют звено зубчатого механизма, снабженное замкнутой системой зубьев. При проектировании зубчатого колеса вначале нужно определить его число зубьев  $z$ , а затем определить параметры зубьев. Для этого нужно произвольную окружность колеса  $r_y$  разделить на  $z$  частей, каждая из которых называется окружным шагом  $p_y$ .

$$2 \cdot \pi \cdot r_y = p_y \cdot z \Rightarrow 2 \cdot r_y = (p_y / \pi) \cdot z = m_y \cdot z = d_y,$$

где  $m_y = p_y / \pi = d_y / z$  - модуль зацепления по окружности произвольного радиуса.

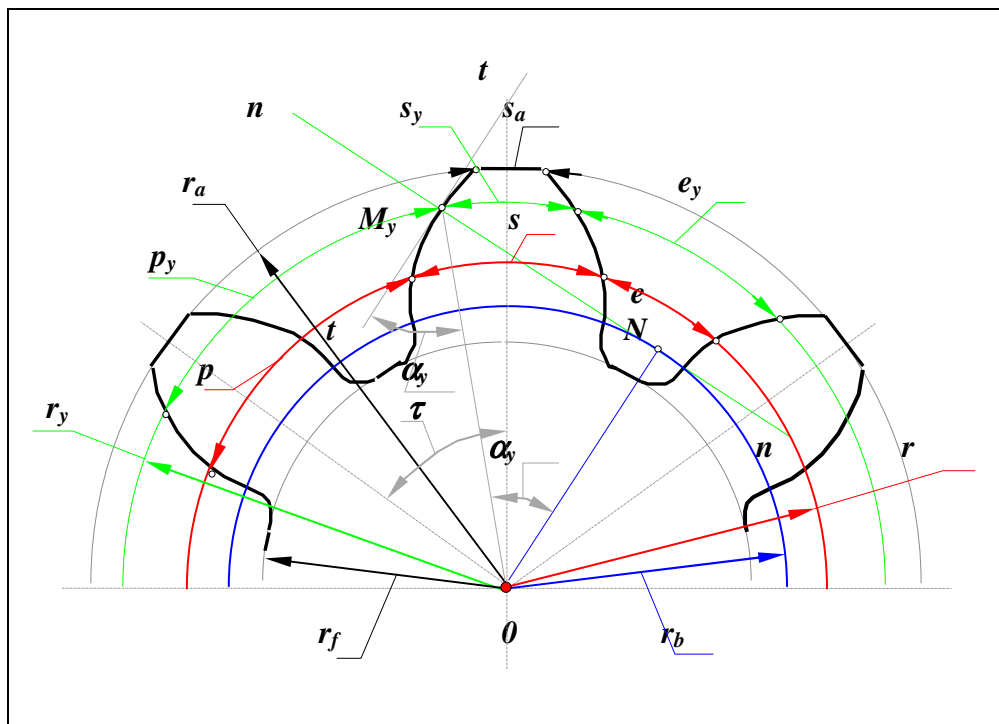


Рис. 12.1

Модулем зацепления называется линейная величина в  $\pi$  раз меньшая окружного шага или отношение шага по любой концентрической окружности зубчатого колеса к  $\pi$ . В зависимости от окружности по которой определен модуль различают делительный, основной, начальный. Для косозубых колес еще и нормальный, торцевой и осевой модули. В ряде стран используется величина обратная модулю, которая называется *питч*. *Питч (диаметральный)* - число зубьев колеса, приходящееся на дюйм диаметра.



Исходя из этого модуль можно определить как *число миллиметров диаметра, приходящееся на один зуб*. На колесе можно провести бесчисленное число окружностей на каждой из которых будет свой модуль. Для ограничения этого числа ГОСТом введен стандартный ряд модулей. Стандартной модуль определяется по окружности называемой *делительной*. Точнее *делительной называется такая окружность зубчатого колеса, на которой модуль и шаг принимают стандартное значение*. *Окружным шагом или шагом называется расстояние по дуге окружности между одноименными точками профилей соседних зубьев (под одноименными понимаются правые или левые профили зуба)*. *Угловой шаг  $\tau$  - центральный угол соответствующий дуге  $p$  - окружному шагу по делительной окружности*.

Примечание: Согласно ГОСТ основные элементы зубчатого колеса обозначаются по следующим правилам: линейные величины - строчными буквами латинского алфавита, угловые - греческими буквами; установлены индексы для величин:

- по окружностям: делительной - без индекса, вершин -  $a$ , впадин -  $f$ , основная -  $b$ , начальная -  $w$ , нижних точек активных профилей колес -  $p$ , граничных точек -  $t$ ;
- по сечениям: нормальное сечение -  $n$ , торцевое сечение -  $t$ , осевое сечение -  $x$ ;
- относящихся к зуборезному инструменту -  $\theta$ .

Для параметров зубчатого колеса справедливы следующие соотношения

$$d_y = m_y \cdot z \quad - \text{диаметр окружности произвольного радиуса,}$$

$$d = m \cdot z \quad - \text{диаметр делительной окружности,}$$

$$p_y = m_y \cdot \pi \quad - \text{шаг по окружности произвольного радиуса,}$$

$$p = m \cdot \pi \quad - \text{шаг по делительной окружности,}$$

$$r_y = r_b / \cos \alpha_y \Rightarrow r = r_b / \cos \alpha \Rightarrow r / r_y = \cos \alpha_y / \cos \alpha$$

$$r_y = m_y \cdot z / 2 \Rightarrow r = m \cdot z / 2 \Rightarrow m / m_y = \cos \alpha_y / \cos \alpha$$

$$m_y = m \cdot \cos \alpha / \cos \alpha_y \qquad r_b = r \cdot \cos \alpha$$

где  $\alpha$  - угол профиля на делительной окружности,  
 $\alpha_y$  - угол профиля на окружности произвольного радиуса.

*Углом профиля называется острый угол между касательной к профилю в данной точке и радиусом - вектором, проведенным в данную точку из центра колеса.*

Шаг колеса делится на толщину зуба  $s_y$  и ширину впадины  $e_y$ . *Толщина зуба  $s_y$  - расстояние по дуге окружности  $r_y$  между разноименными точками профилей зуба. Ширина впадины  $e_y$  - расстояние по дуге окружности  $r_y$  между разноименными точками профилей соседних зубьев.*

$$p_y = s_y + e_y \Rightarrow p = s + e = \pi \cdot m ,$$

$$\Downarrow$$

$$p_y = \pi \cdot m_y = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha / \cos \alpha_y .$$

На основной окружности  $\alpha_b \Rightarrow 0$  и  $\cos \alpha_b \Rightarrow 1$ , тогда

$$m_b = m \cdot \cos \alpha \Rightarrow p_b = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha .$$

В зависимости от соотношения между толщиной зуба и шириной впадины на делительной окружности зубчатые колеса делятся на:

- нулевые  $s = e = \pi \cdot m / 2$ ,  $\Rightarrow \Delta = 0$ ;
- положительные  $s > e$ ,  $\Rightarrow \Delta > 0$ ;
- отрицательные  $s < e$ ,  $\Rightarrow \Delta < 0$ ;

где  $\Delta$  - коэффициент изменения толщины зуба (отношение приращения толщины зуба к модулю). Тогда толщину зуба по делительной окружности можно записать

$$s = (\pi \cdot m / 2) + \Delta \cdot m = m \cdot [(\pi / 2) + \Delta].$$

Более подробно познакомиться с основными определениями и расчетными зависимостями можно в литературе [ 11.1 ] и в ГОСТ 16530-83.

**Толщина зуба колеса по окружности произвольного радиуса.**

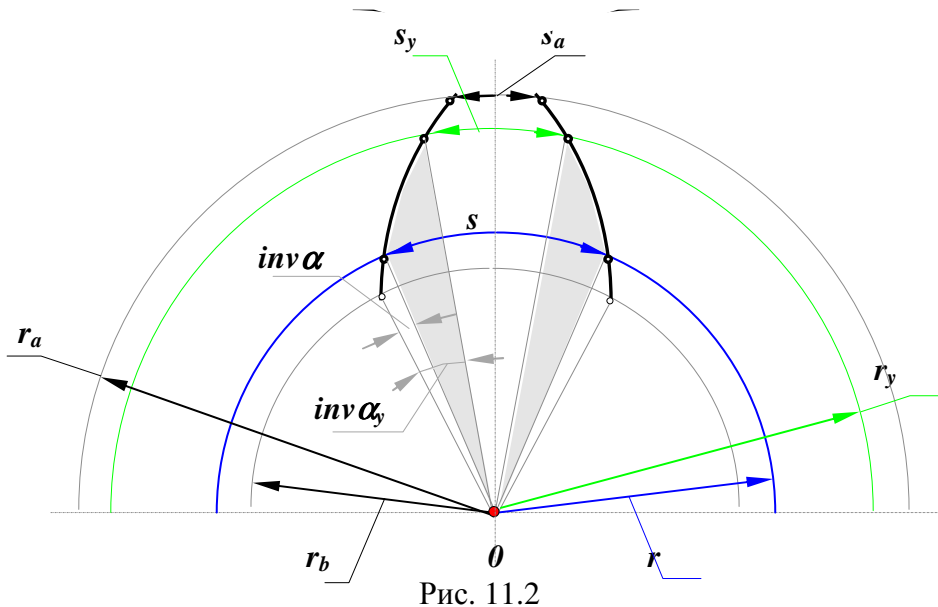


Рис. 11.2

Толщина зуба по дуге делительной окружности

$$s = (\pi \cdot m / 2) + \Delta \cdot m.$$

Угловая толщина зуба по окружности произвольного радиуса из схемы на рис. 11.2

$$s_y / r_y = s / r - (inv \alpha_y - inv \alpha) \cdot 2,$$

где  $r = m z / 2$ ,  $r_y = m z \cdot \cos \alpha / (2 \cdot \cos \alpha_y)$

Подставляя в формулу угловой толщины эти зависимости, получим

$$s_y = s \cdot r_y / r - (inv \alpha_y - inv \alpha) \cdot 2 \cdot r_y,$$

или

$$s_y = m \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_y) \cdot [(\pi / 2) + \Delta - (inv \alpha_y - inv \alpha) \cdot z].$$

### ***Методы изготовления эвольвентных зубчатых колес.***

Существует множество вариантов изготовления зубчатых колес. В их основу положены два принципиально отличных метода:

- метод копирования, при котором рабочие кромки инструмента по форме соответствуют обрабатываемой поверхности (конгруентны ей, т. е. заполняют эту поверхность как отливка заполняет форму);
- метод огибания, при котором инструмент и заготовка за счет кинематической цепи станка выполняют два движения - резания и огибания (под огибанием понимается такое относительное движение заготовки и инструмента, которое соответствует *станочному зацеплению*, т. е. зацеплению инструмента и заготовки с требуемым законом изменения передаточного отношения).

Из вариантов изготовления по способу копирования можно отметить:

- Нарезание зубчатого колеса профилированной дисковой или пальцевой фрезой (проекция режущих кромок которой соответствует конфигурации впадин). При этом методе резание производится в следующем порядке: прорезается впадина первого зуба, затем заготовка с помощью делительного устройства (делительной головки) поворачивается на угловой шаг и прорезается следующая впадина. Операции повторяются пока не будут прорезаны все впадины. Производительность данного способа низкая, точность и качество поверхности невысокие.
- Отливка зубчатого колеса в форму. При этом внутренняя поверхность литейной формы конгруентна наружной поверхности зубчатого колеса. Производительность и точность метода высокая, однако при этом нельзя получить высокой прочности и твердости зубьев.

Из вариантов изготовления по способу огибания наибольшее распространение имеют:

- Обработка на зубофрезерных или зубодолбежных станках червячными фрезами или долбяками. Производительность достаточно высокая, точность изготовления и чистота поверхностей средняя. Можно обрабатывать колеса из материалов с невысокой твердостью поверхности.
- Накатка зубьев с помощью специального профилированного инструмента. Обеспечивает высокую производительность и хорошую чистоту поверхности. Применяется для пластичных материалов, обычно на этапах черновой обработки. Недостаток метода образование наклепанного поверхностного слоя, который после окончания обработки изменяет свои размеры.
- Обработка на зубошлифовальных станках дисковыми кругами. Применяется как окончательная операция после зубонарезания (или накатки зубьев) и термической обработки. Обеспечивает высокую точность и чистоту поверхности. Применяется для материалов с высокой поверхностной прочностью.

### ***Понятие о исходном, исходном производящем и производящем контурах.***

Для сокращения номенклатуры режущего инструмента стандарт устанавливает нормативный ряд модулей и определенные соотношения между размерами элементов зуба. Эти соотношения определяются:

- для зубчатых колес определяются параметрами исходной рейки через параметры ее нормального сечения - исходный контур;
- для зубчатого инструмента определяются параметрами исходной производящей рейки через параметры ее нормального сечения - исходный производящий контур.

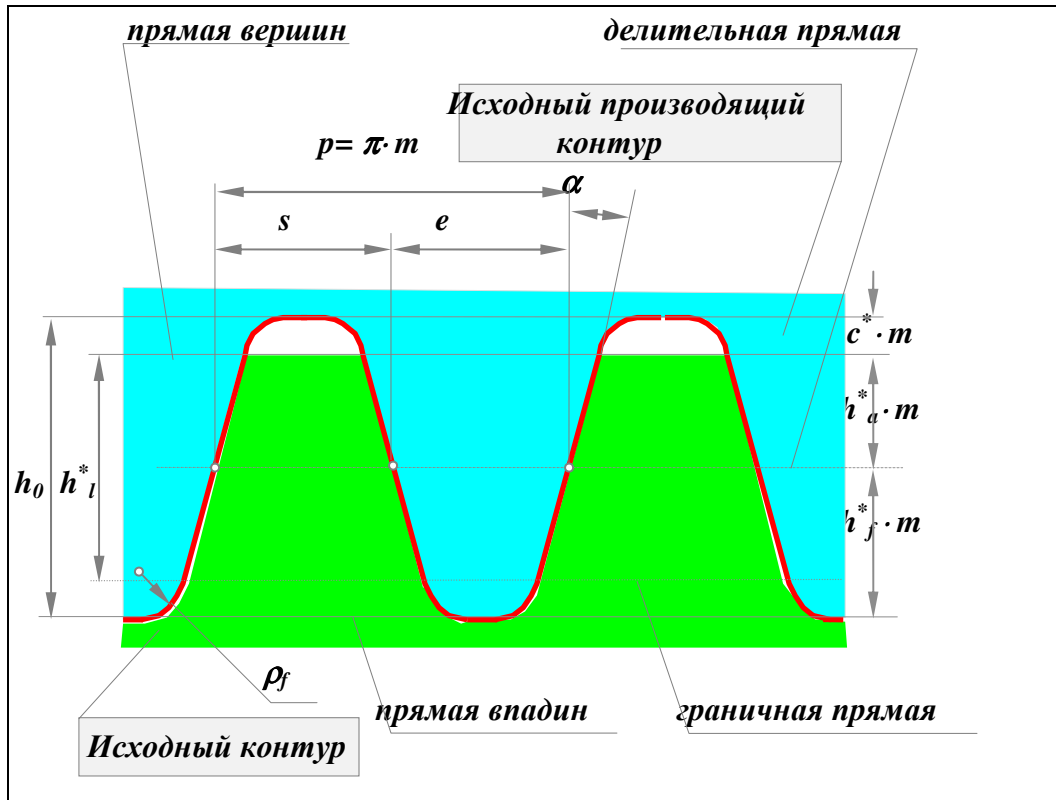


Рис. 12.3

По ГОСТ 13755-81 значения параметров исходного контура должны быть следующими:

- угол главного профиля  $\alpha = 20^\circ$ ;
- коэффициент высоты зуба  $h_a^* = 1$ ;
- коэффициент высоты ножки  $h_f^* = 1.25$ ;
- коэффициент граничной высоты  $h_l^* = 2$ ;
- коэффициент радиуса кривизны переходной кривой  $\rho_f^* = c^* / (1 - \sin \alpha) = 0.38$ ;
- коэффициент радиального зазора в паре исходных контуров  $c^* = 0.25$ .

Исходный производящий контур отличается от исходного высотой зуба  $h_0 = 2.5m$ .

Исходный и исходный производящий контуры образуют между собой конгруэнтную пару (рис. 12.3), т.е. один заполняет другой как отливка заполняет заготовку (с радиальным зазором  $c^* \cdot m$  в зоне прямой вершин зуба исходной рейки). Принципиальное отличие этих контуров в том, что исходный контур положен в основу стандартизации зубчатых колес, а исходный производящий - в основу стандартизации зуборезного инструмента. Оба эти контура необходимо отличать от *производящего контура - проекции режущих кромок инструмента на плоскость перпендикулярную оси заготовки.*

### Станочное зацепление.

Станочным зацеплением называется зацепление, образованное заготовкой колеса и инструментом, при изготовлении зубчатого колеса на зубообрабатывающем оборудовании по способу обката. Схема станочного зацепления колеса и инструмента с про-

изводящим контуром, совпадающим с исходным производящим контуром, изображена на рис. 12.4.

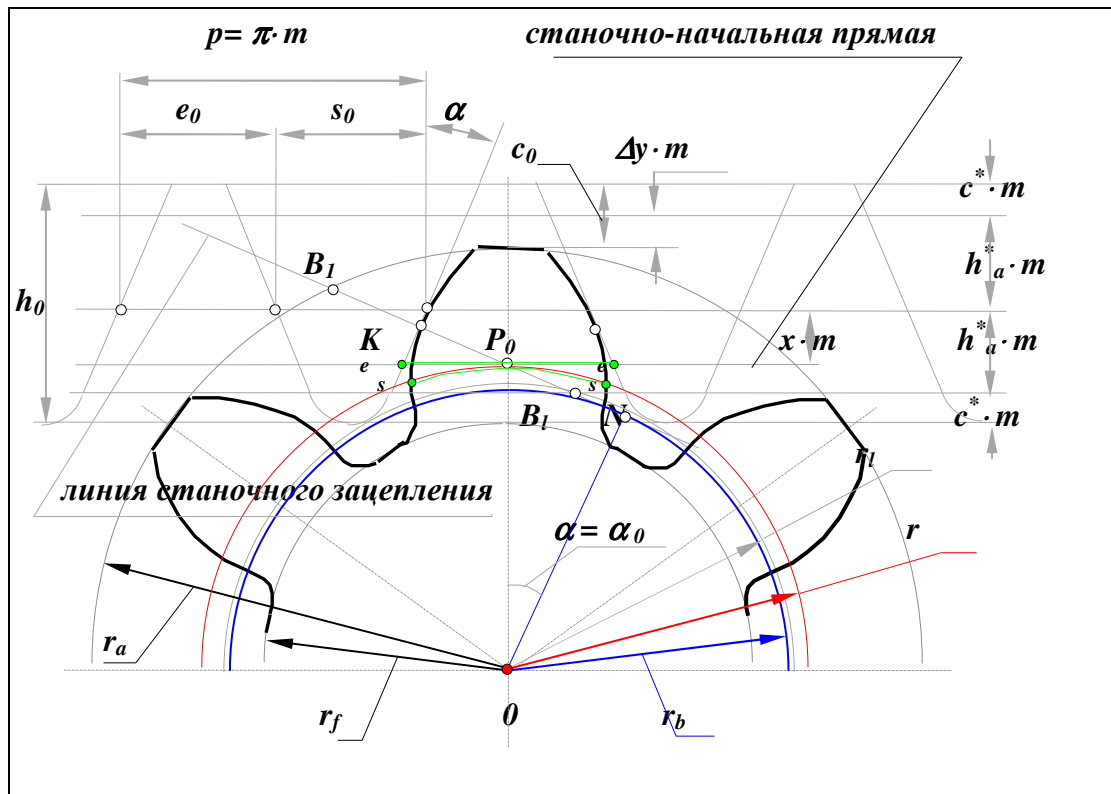


Рис. 12.4.

Линия станочного зацепления - геометрическое место точек контакта эвольвентной части профиля инструмента и эвольвентной части профиля зуба в неподвижной системе координат.

Смещение исходного производящего контура  $x \cdot m$  - кратчайшее расстояние между делительной окружностью заготовки и делительной прямой исходного производящего контура.

Уравнительное смещение  $\Delta y \cdot m$  - условная расчетная величина, введенная в расчет геометрии зацепления с целью обеспечения стандартного радиального зазора в зацеплении (величина, выражающая в долях модуля уменьшение радиуса окружностей вершин колес, необходимое для обеспечения стандартной величины радиального зазора).

Окружность граничных точек  $r_l$  - окружность проходящая через точки сопряжения эвольвентной части профиля зуба с переходной кривой.

### Основные размеры зубчатого колеса.

Определим основные размеры эвольвентного зубчатого колеса, используя схему станочного зацепления (рис. 12.4).

1. Радиус окружности вершин

$$r_a = r + h_a^* \cdot m + x \cdot m - \Delta y \cdot m ; \quad r = m \cdot z / 2 ;$$



$$r_a = m \cdot (z/2 + h_a^* + x - \Delta y) .$$

2. Высота зуба

$$h = c^* \cdot m + 2 \cdot h_a^* \cdot m - \Delta y \cdot m ;$$

$$h = m \cdot (c^* + 2 \cdot h_a^* - \Delta y) .$$

3. Радиус окружности впадин

$$r_f = r_a - h = m \cdot (z/2 - h_a^* - c^* + x) .$$

4. Толщина зуба по делительной окружности.

Так как сточно-начальная прямая перекачивается в процессе огибания по делительной окружности без скольжения, то дуга  $s$ - $s$  по делительной окружности колеса равна ширине впадины  $e$ - $e$  по станочно-начальной прямой инструмента. Тогда, с учетом схемы на рис. 12.5, можно записать

$$s = e_0 + 2 \cdot x \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha ,$$

$$s = m \cdot ( \pi/2 + 2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha ),$$

$$\text{где} \quad \Delta = 2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

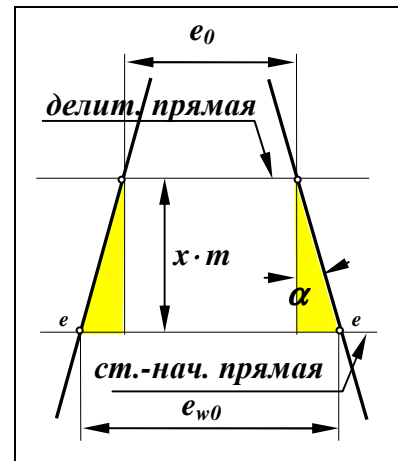


Рис. 12.5

**Виды зубчатых колес (Классификация по величине смещения).**

В зависимости от расположения исходного производящего контура относительно заготовки зубчатого колеса, зубчатые колеса делятся на нулевые или без смещения, положительные или с положительным смещением, отрицательные или с отрицательным смещением.

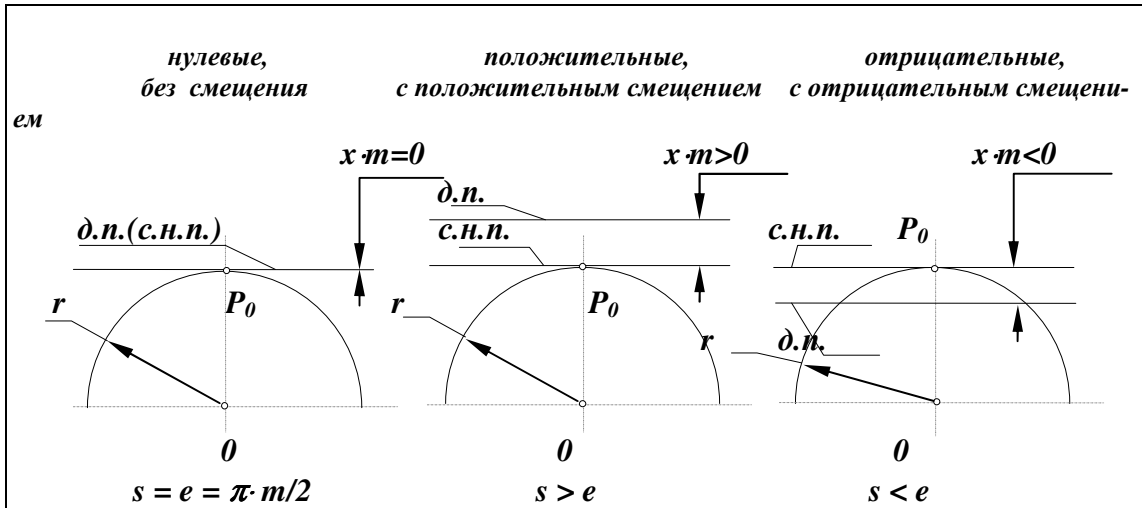
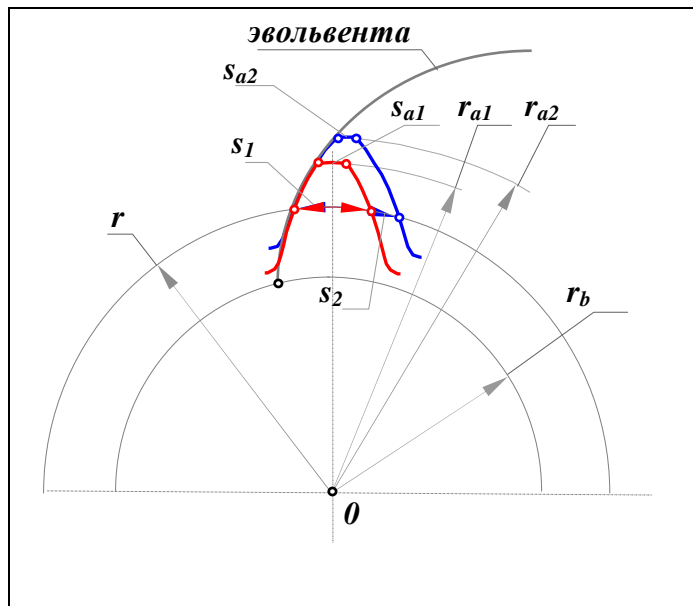


Рис. 12.6

**Подрезание и заострение зубчатого колеса.**

Если при нарезании зубчатого колеса увеличивать смещение, то основная и делительная окружность не изменяют своего размера, а окружности вершин и впадин увеличиваются. При этом участок эвольвенты, который используется для профиля зуба, увеличивает свой радиус кривизны и профильный угол. Толщина зуба по делительной окружности увеличивается, а по окружности вершин уменьшается.



На рис. 12.7 изображены два эвольвентных зуба для которых

$$x_2 > x_1 \Rightarrow r_{a2} > r_{a1} ;$$

$$s_2 > s_1 \Rightarrow s_{a2} < s_{a1} .$$

Для термобработанных зубчатых колес с высокой поверхностной прочностью зуба заострение вершины зуба является нежелательным. Термообработка зубьев (азотирование, цементация, цианирование), обеспечивающая высокую

Рис. 12.7

поверхностную прочность и твердость зубьев при сохранении вязкой сердцевины, осуществляется за счет насыщения поверхностных слоев углеродом. Вершины зубьев, как выступающие элементы колеса, насыщаются углеродом больше. Поэтому после закалки они становятся более твердыми и хрупкими. У заостренных зубьев появляется склонность к скалыванию зубьев на вершинах. Поэтому рекомендуется при изготовлении не допускать толщин зубьев меньших некоторых допустимых значений. То есть **заостренным** считается зуб у которого

$$s_a < [s_a], \quad \text{где} \quad s_a = m \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_a) \cdot [(\pi/2) + \Delta - (\text{inv } \alpha_a - \text{inv } \alpha) \cdot z].$$

При этом удобнее пользоваться относительными величинами  $[s_a/m]$ . Обычно принимают следующие допустимые значения

улучшение, нормализация	$[s_a/m] = 0.2;$
цианирование, азотирование	$[s_a/m] = 0.25...0.3;$
цементация	$[s_a/m] = 0.35...0.4.$

**Подрезание эвольвентных зубьев в станочном зацеплении.**

В процессе формирования эвольвентного зуба по способу огибания, в зависимости от взаимного расположения инструмента и заготовки возможно срезание эвольвентной части профиля зуба той частью профиля инструмента, которая формирует переходную кривую. Условие при котором это возможно определяется из схемы станочного зацепления. Участок линии зацепления, соответствующий эвольвентному зацеплению определяется отрезком  $B_1$ , где точка  $B_1$  определяется пересечением линии станочного зацепления и прямой граничных точек инструмента. Если точка  $B_1$  располагается ниже (см. рис.12.8) точки  $N$ , то возникает подрезание зуба. Условие при котором нет подрезания можно записать так

$$P_0N \geq P_0B_1.$$

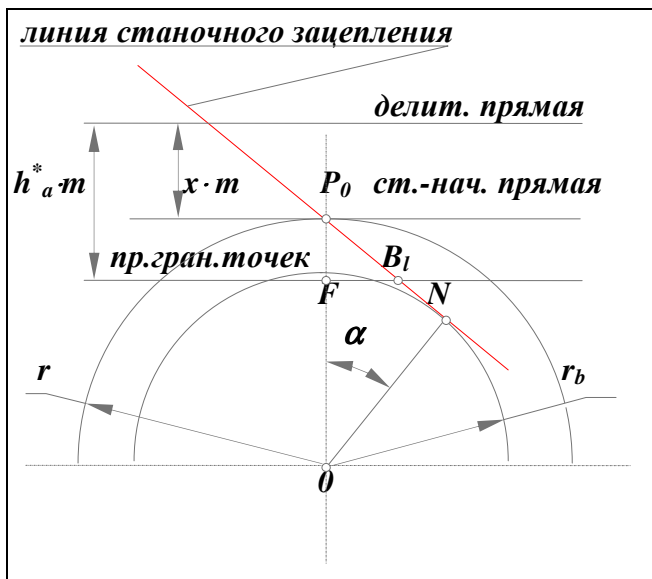


Рис. 12.9

Из  $\Delta P_0N0$

$$P_0N = r \cdot \sin \alpha = m z \sin \alpha / 2,$$

а из  $\Delta P_0B_1F$

$$P_0B_1 = (h_a^* - x) \cdot m / \sin \alpha.$$

Тогда

$$z \sin \alpha / 2 \geq (h_a^* - x) / \sin \alpha,$$

при  $x=0$

$$z \geq 2 \cdot h_a^* / \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$z_{min} = 2 \cdot h_a^* / \sin^2 \alpha,$$

где  $z_{min}$  - минимальное число зубьев нулевого колеса нарезаемое без подрезания.

Избежать подрезания колеса можно если увеличить смещение инструмента так, чтобы точка  $B_1$  оказалась бы выше точки  $N$  или совпала с ней. Тогда смещение инструмента при котором не будет подрезания

$$x \geq h_a^* - z \cdot \sin^2 \alpha / 2, \quad \Rightarrow \quad x \geq h_a^* \cdot [1 - z \cdot \sin^2 \alpha / (2 \cdot h_a^*)],$$

$$x \geq h_a^* \cdot (1 - z / z_{min}).$$

В предельном случае, когда точка  $B_1$  совпадает с точкой  $N$



$$x_{min} = h_a^* \cdot (1 - z / z_{min}),$$

где  $x_{min}$  - минимальное смещение инструмента при котором нет подрезания.

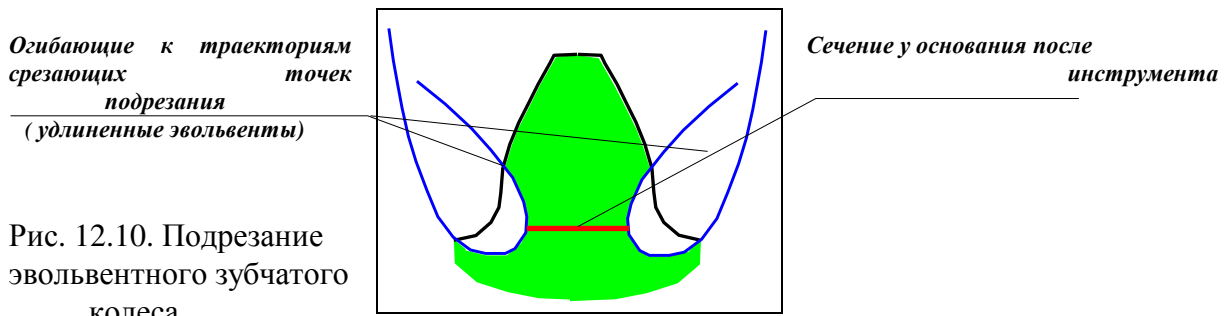


Рис. 12.10. Подрезание эвольвентного зубчатого колеса.

**Понятие о области существования зубчатого колеса.**

Параметры в зубчатых передачах удобно разделять на параметры зубчатого колеса и параметры зубчатой передачи. Параметры зубчатого колеса характеризуют данное зубчатое колесо и, как составная часть, входят в параметры зубчатой передачи, образованной этим колесом с другим парным ему колесом. К параметрам зубчатого колеса относятся: число зубьев, модуль, параметры исходного контура инструмента, которым оно обрабатывалось и коэффициент смещения. Как отмечено выше, на выбор этих параметров накладываются ограничения по заострению и подрезанию зуба. Поэтому можно ввести понятие области существования зубчатого колеса - диапазона коэффициентов смещения при которых не будет подрезания и заострения. На рис. 12.11 показан пример такой области существования.

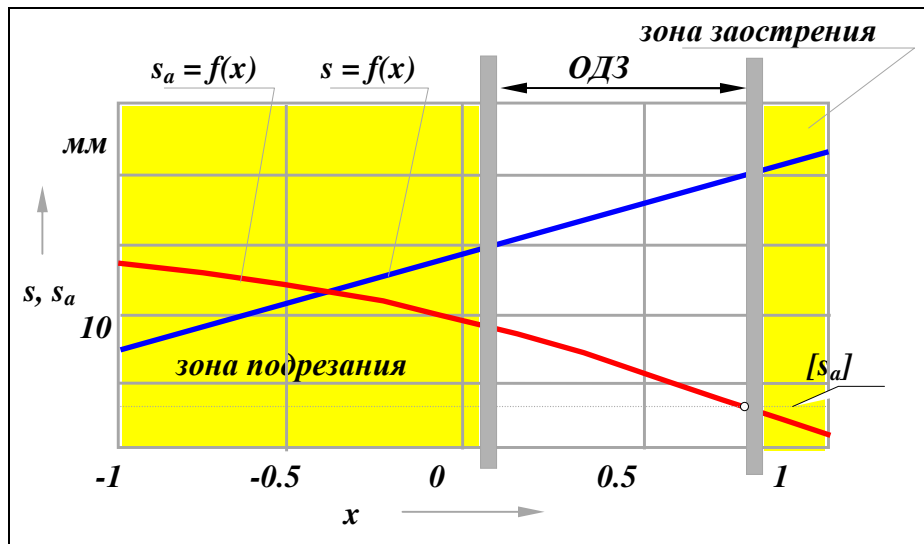


Рис. 12.11

**Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача.**

Два зубчатых колеса с одинаковым модулем и с числами зубьев соответствующими заданному передаточному отношению образуют зубчатую передачу или простейший зубчатый механизм. В этом трехзвенном механизме зубчатые колеса образуют между собой высшую пару, а со стойкой низшие пары. Зубчатая передача, кроме параметров образующих ее колес, имеет и собственные параметры: угол зацепления  $\alpha_w$ , межосевое расстояние  $a_w$ , воспринимаемое смещение  $y \cdot m$  и уравнивающее смещение  $\Delta y \cdot m$ . Передаточное отношение механизма  $u_{12}$ , числа зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$ , начальные окружности  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  (или центры) и межосевое расстояние  $a_w$  связаны между собой следующими соотношениями ( см. основную теорему зацепления и раздел по кинематике зубчатой передачи):

$$a_w = r_{w1} + r_{w2}; \quad u_{12} = r_{w2} / r_{w1}; \quad a_w = r_{w1} \cdot (1 + u_{12});$$

$$r_{w1} = a_w / (1 + u_{12}); \quad r_{w2} = r_{w1} \cdot u_{12}.$$

Изобразим схему зацепления эвольвентной зубчатой передачи (рис.12.12).

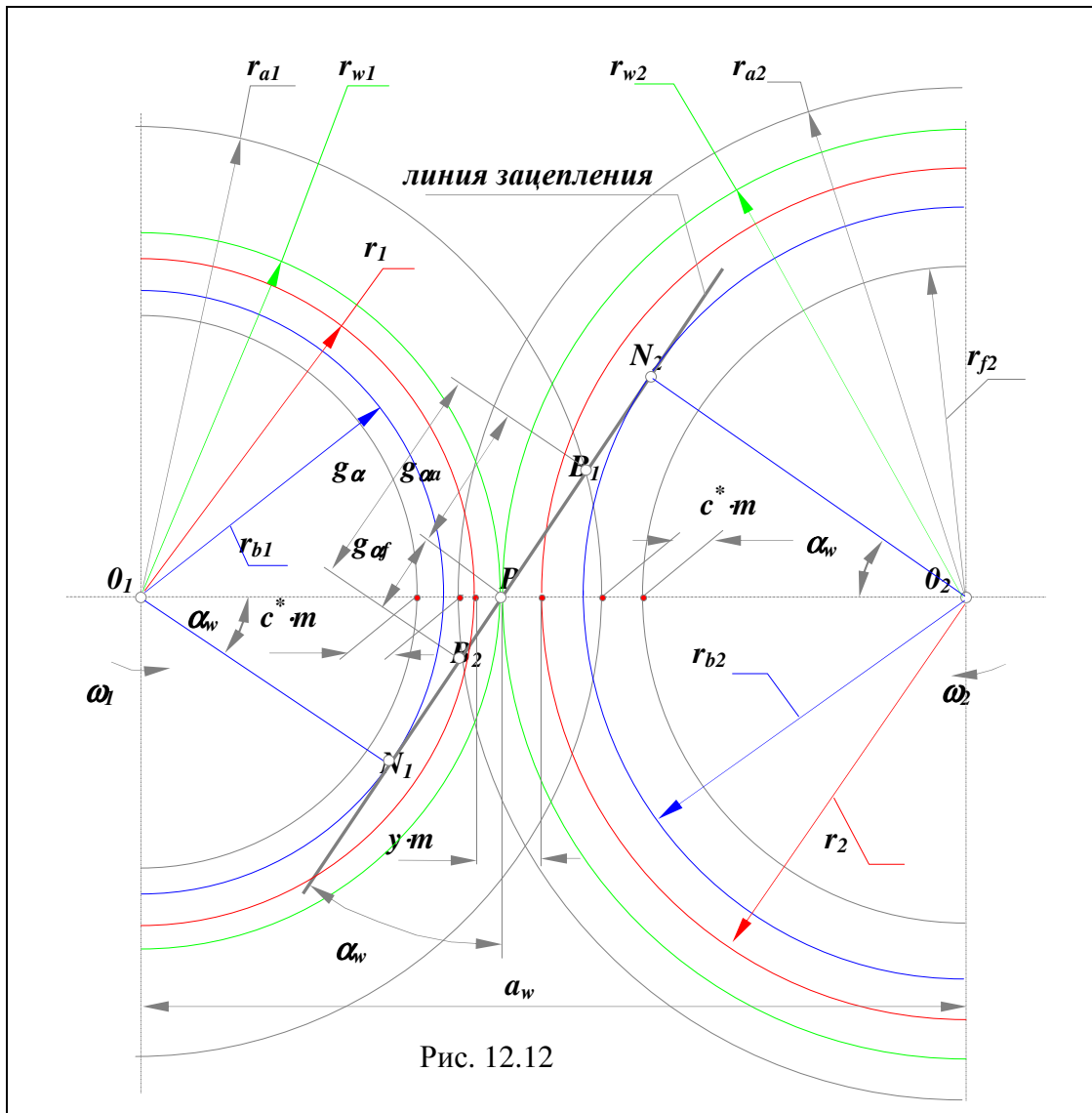


Рис. 12.12

**Основные уравнения эвольвентного зацепления.**

1. Угол зацепления  $\alpha_w$

Так как перекачивание начальных окружностей друг по другу происходит без скольжения, то

$$s_{w1} = e_{w2} \text{ и } s_{w2} = e_{w1}, \text{ но } s_{w1} + e_{w1} = p_{w1} \text{ и } s_{w2} + e_{w2} = p_{w2},$$

$$\text{кроме того } p_{w1} = p_{w2} = p_w, \text{ тогда } s_{w2} + s_{w1} = p_w.$$

Толщину зуба по начальной окружности можно записать, используя формулу для толщины зуба по окружности произвольного радиуса

$$s_{w1} = m \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w) \cdot [(\pi/2) + \Delta_1 - (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha) \cdot z_1],$$

$$s_{w2} = m \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w) \cdot [(\pi/2) + \Delta_2 - (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha) \cdot z_2],$$

а шаг по начальной окружности равен

$$p_w = \pi \cdot m \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w).$$

Поставляя эти выражения в формулу для шага по начальной окружности, получим

$$p_w = s_{w2} + s_{w1} \Rightarrow \pi \cdot m \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w) = m \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w) \cdot [(\pi/2) + \Delta_2 - (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha) \cdot z_2 + (\pi/2) + \Delta_1 - (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha) \cdot z_1] \Rightarrow$$

$$(\Delta_1 + \Delta_2) - (z_1 + z_2) \cdot (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha) = 0,$$

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha + (\Delta_1 + \Delta_2) / (z_1 + z_2).$$

## 2. Межосевое расстояние $a_w$

Из схемы эвольвентного зацепления (рис.12.12) можно записать

$$a_w = r_{w1} + r_{w2},$$

$$\text{но } r_y = r \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_y) \text{ и } r_w = r \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w),$$

после подстановки, получим

$$a_w = r_1 \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w) + r_2 \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w),$$

$$a_w = (m \cdot z_1 / 2 + m \cdot z_2 / 2) \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w),$$

$$a_w = m \cdot (z_1 + z_2) \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w) / 2.$$

## 3. Воспринимаемое смещение $y \cdot m$

Из схемы эвольвентного зацепления (рис.12.12) можно записать

$$a_w = r_1 + r_2 + y \cdot m = m \cdot (z_1 + z_2) / 2 + y \cdot m,$$

$$m \cdot (z_1 + z_2) / 2 + y \cdot m = m \cdot (z_1 + z_2) \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w) / 2,$$

$$y = (z_1 + z_2) \cdot [(\cos \alpha / \cos \alpha_w) - 1] / 2.$$

## 4. Уравнительное смещение $\Delta y \cdot m$

Из рис. 12.12

$$a_w = r_{a1} + c^* \cdot m + r_{f2},$$

$$a_w = r_1 + r_2 + y \cdot m,$$

откуда

$$r_{a1} + c^* \cdot m + r_{f2} = r_1 + r_2 + y \cdot m,$$

$$\text{где } r_{a1} = m \cdot (z_1 / 2 + h_a^* + x_1 - \Delta y), r_{f2} = m \cdot (z_2 / 2 - h_a^* - c^* + x_2).$$

Подставим эти выражения

$$m \cdot (z_1 / 2 + h_a^* + x_1 - \Delta y) + c^* \cdot m + m \cdot (z_2 / 2 - h_a^* - c^* + x_2) = (m \cdot z_1 / 2) + (m \cdot z_2 / 2) + y \cdot m.$$

и, после преобразований, получим

$$x_1 + x_2 - \Delta y = y,$$

$$\Delta y = (x_1 + x_2) - y.$$

### *Литература.*

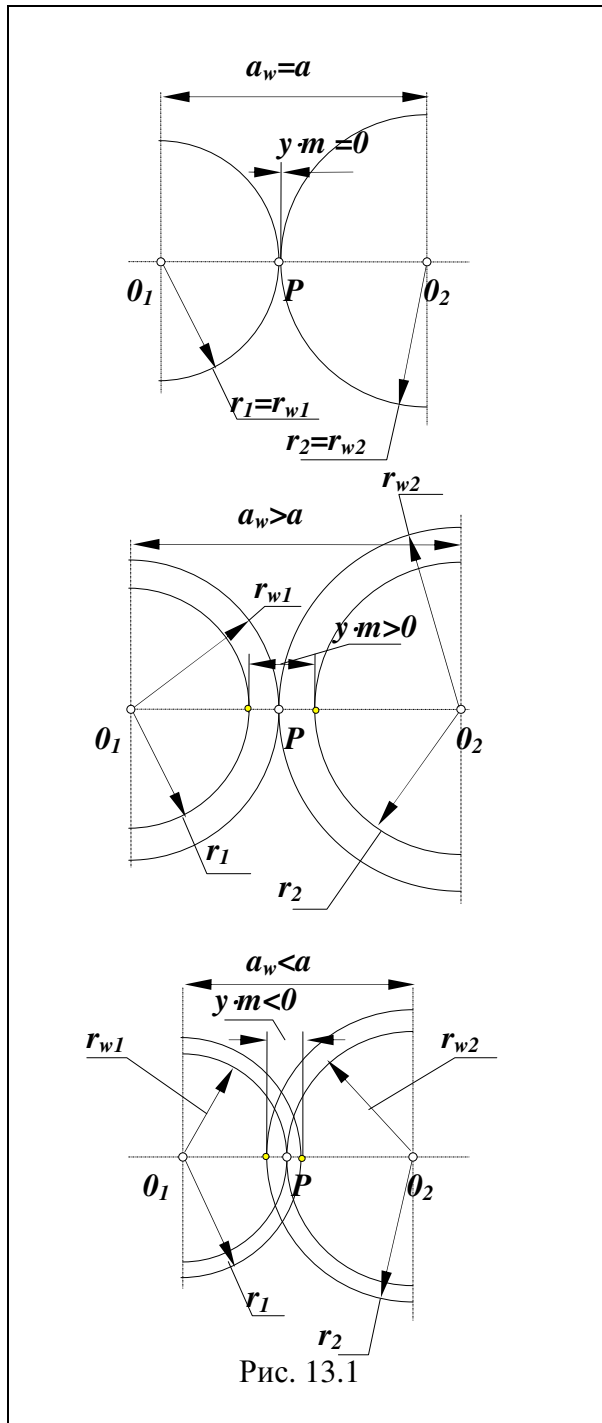
1. В.А.Гавриленко . Зубчатые передачи в машиностроении (Теория эвольвентных зубчатых передач). М.: Машгиз - 1962, 530 стр., илл.
2. Ф.Л.Литвин Теория зубчатых зацеплений. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: - Наука - 1968, 584 стр., илл.

### Лекция 13.

Краткое содержание: Классификация зубчатых передач. Понятие о блокирующем контуре. Качественные показатели для эвольвентной передачи. Коэффициент перекрытия. Коэффициент формы зуба. Коэффициент удельного давления. Коэффициент удельного скольжения. Оптимальный геометрический синтез зубчатой передачи. Программное обеспечение САПР зубчатых передач. Косозубые цилиндрические эвольвентные передачи и особенности их расчета. Коэффициент осевого перекрытия.

#### Классификация зубчатых передач.

Цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи в зависимости от величины воспринимаемого смещения классифицируются следующим образом (рис.13.1):



- нулевые или равносмещенные (составленные из зубчатых колес без смещения или с равными, но противоположными по знаку смещениями)
 
$$x_1 = x_2 = 0 \text{ или } x_1 = -x_2,$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0 \text{ или } \Delta_1 = -\Delta_2,$$

$$y \cdot m = 0, \quad y = 0, \quad a_w = a = r_1 + r_2,$$

$$\alpha_w = \alpha;$$
- положительные (составленные из колес с положительными смещениями или когда положительное смещение одного колеса больше отрицательного смещения другого)
 
$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0 \text{ или } x_1 > |-x_2|,$$

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0 \text{ или } \Delta_1 > |-\Delta_2|,$$

$$y \cdot m > 0, \quad y > 0, \quad a_w > a,$$

$$\alpha_w > \alpha;$$
- отрицательные (составленные из колес с отрицательными смещениями или когда отрицательное смещение одного колеса больше положительного смещения другого)
 
$$x_1 < 0, \quad x_2 < 0 \text{ или } x_1 < |-x_2|,$$

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 < 0 \text{ или } \Delta_1 < |-\Delta_2|,$$

$$y \cdot m < 0, \quad y < 0, \quad a_w < a,$$

$$\alpha_w < \alpha.$$

#### Понятие о блокирующем контуре зубчатой передачи.

При проектировании зубчатой передачи необходимо решить несколько задач:

- выбрать тип зубчатого механизма, его передаточное отношение и числа зубьев колес;
- провести проектный прочностной расчет механизма и определить величину межосевого расстояния или модуль зубчатых колес ( модуль зубчатых колес округляется до ближайшей величины из стандартного ряда модулей );
- провести геометрический расчет зубчатой передачи для выбранных коэффициентов смещения исходного контура, которые обеспечивают исключение подрезания, срезания и заострения зубьев колес и благоприятное или оптимальное сочетание качественных показателей зубчатой передачи.

Для эвольвентных зубчатых передач, по предложению М.Б.Громана, область сочетаний коэффициентов смещений зубчатых колес  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих ограничениям по срезанию в станочном зацеплении, заострению, заклиниванию в зацеплении эвольвент и на переходных кривых, по допустимым минимальным или максимальным значениям качественных показателей, называют блокирующим контуром (рис.13.2). Границы блокирующего контура отсекают те значения коэффициентов смещению которые недопустимы по указанным условиям. Значения, расположенные внутри контура, допустимы, но каждой паре коэффициентов смещения соответствует свое сочетание качественных показателей. Для выбора коэффициентов смещения на блокирующий контур наносятся изолинии качественных показателей, с использованием которых внутри контура выбираются коэффициенты смещения с оптимальным сочетанием качественных показателей. И.И.Болотовским и его сотрудниками созданы справочники, которые содержат блокирующие контуры для большого числа зубчатых передач. Построение блокирующего контура является трудоемкой вычислительной задачей и требует значительных затрат даже при применении ЭВМ. В настоящее время, с ростом производительности компьютеров, появляется возможность геометрического синтеза оптимальных зубчатых передач без предварительного построения блокирующего контура.

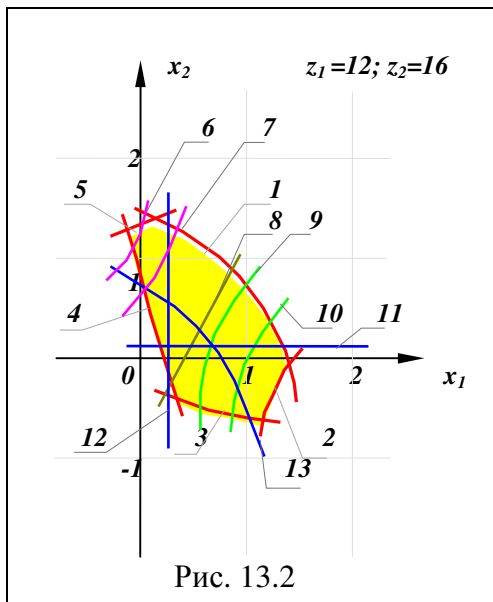


Рис. 13.2

На рис. 13.2 ограничивающие линии блокирующего контура:

- 1 - коэффициент торцевого перекрытия  $\epsilon_\alpha = 1$ ;
- 2 - толщина зуба колеса  $z_1$  по окружности вершин  $s_{a1} = 0$ ;
- 3 - допустимое подрезание колеса  $z_2$ ;
- 4 - допустимое подрезание колеса  $z_1$ ;
- 5 - интерференция или заклинивание с переходной кривой колеса  $z_2$ .

Линии качественных показателей:

6 - линия  $s_{a2} = 0.25m$ ;

7 - линия  $s_{a2} = 0.4m$ ;

8 - линия выравненных удельных скольжений  $\lambda_1 = \lambda_2$ ;

9 - линия  $s_{a1} = 0.4m$ ;

10 - линия  $s_{a1} = 0.25m$ ;

11 - линия  $x_2 = x_{2min}$ ;

12 - линия  $x_1 = x_{1min}$ ;

13 - линия  $\epsilon_\alpha = 1.2$ .

**Качественные показатели цилиндрической эвольвентной передачи.**

К качественным показателям цилиндрической эвольвентной зубчатой передачи относятся:

- коэффициент торцевого перекрытия  $\epsilon_\alpha$ ;
- коэффициент полезного действия  $\eta$ ;
- коэффициент удельного скольжения  $\lambda$ ;
- коэффициент удельного давления  $\vartheta$ ;
- коэффициент формы зуба  $Y$ .

Рассмотрим эти коэффициенты подробнее (исключив из рассмотрения коэффициент полезного действия, как величину характеризующую реальные, а не рассматриваемые нами идеализированные механизмы).

### ***Коэффициент торцевого перекрытия.***

Коэффициентом перекрытия  $\epsilon_\gamma$  называется величина отношения угла перекрытия зубчатого колеса к его угловому шагу, где под углом перекрытия понимают угол на который поворачивается колесо за время зацепления одной пары зубьев. Для цилиндрических колес различают полное  $\epsilon_\gamma$ , торцевое  $\epsilon_\alpha$  и осевое перекрытие:

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta,$$

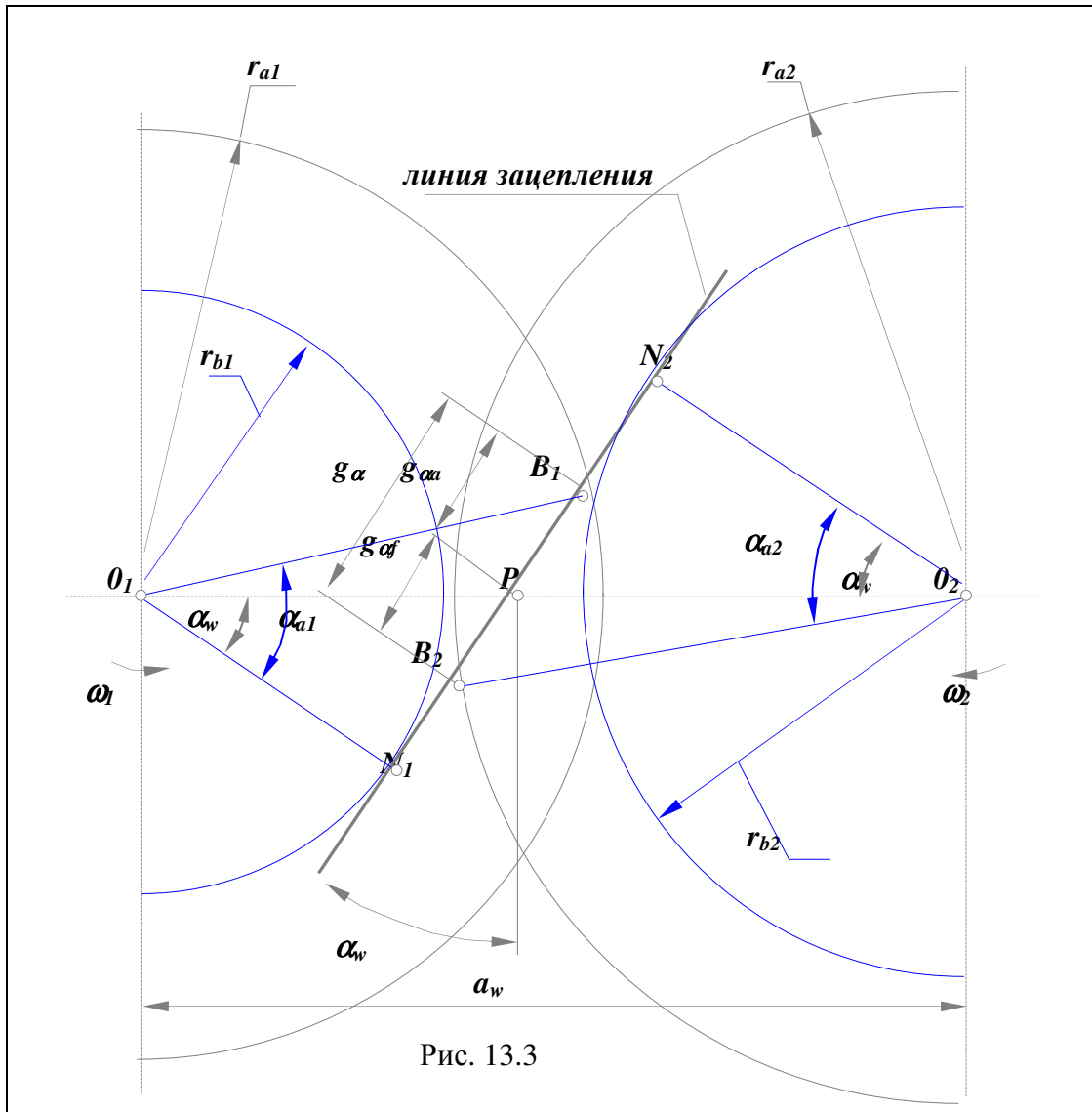
где осевое перекрытие имеется только в косозубых передачах.

$$\epsilon_\alpha = \varphi_1 / \tau_1 = \varphi_2 / \tau_2 = g_\alpha / p_b = (g_{\alpha f} + g_{\alpha i}) / p_b,$$

где  $g_{\alpha f} = l_{B1N2} - l_{PN2} = r_{b2} \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)$ ,  $\alpha_{a2} = \arccos (r_{b2} / r_{a2})$ ,  
 $g_{\alpha i} = l_{B2N1} - l_{PN1} = r_{b1} \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)$ ,  $\alpha_{a1} = \arccos (r_{b1} / r_{a1})$ ,  
 $p_b = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha$ ,  $r_{bi} = m \cdot z \cdot \cos \alpha / 2$ .

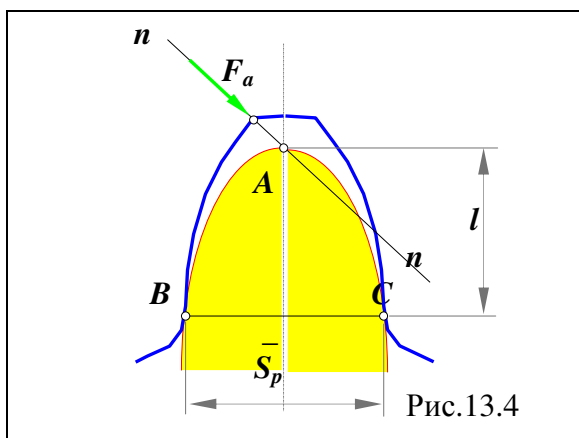
$$\epsilon_\alpha = [z_2 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w) - z_1 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)] / (2 \cdot \pi).$$

Коэффициент перекрытия определяет величину зоны двухпарного контакта, когда одновременно зацепляются два последовательно расположенных зуба. Так как до окончания зацепления одной пары зубьев, следующая пара должна войти в контакт, нельзя допускать в прямозубых передачах  $\epsilon_\alpha \leq 1$ . Допустимое значение коэффициента перекрытия должно несколько превышать единицу и, в зависимости от назначения передачи и точности ее изготовления, выбирается в пределах  $[\epsilon_\alpha] = 1.05 \dots 1.2$ . Максимальное значение коэффициента перекрытия для зубчатых колес, обработанных инструментом со стандартным исходным производящим контуром, составляет  $\epsilon_\alpha = 1.98$ . Наиболее благоприятны величины коэффициента перекрытия равные целым числам, например двум или трем. Обеспечить это можно только используя инструмент с нестандартным исходным производящим контуром. Дробные значения коэффициента перекрытия, например близкие к полутора, приводят к циклическому изменению жесткости передачи и к возникновению параметрических колебаний.



### Коэффициент формы зуба.

Геометрическая форма зуба в значительной мере определяет показатели его как изгибной, так и контактной прочности. Оценка влияния геометрии зуба на изгибную прочность осуществляется коэффициентом формы зуба  $Y$ . Этот коэффициент определяется через параметры балки параболического сечения (балки равного сопротивления изгибу), которая вписывается в контур зуба так, чтобы вершина параболы располагалась в точке пересечения оси зуба и нормали к профилю в вершине, а ветви касались профиля зуба у основания (см. схему на рис. 13.4).



скового сечения (балки равного сопротивления изгибу), которая вписывается в контур зуба так, чтобы вершина параболы располагалась в точке пересечения оси зуба и нормали к профилю в вершине, а ветви касались профиля зуба у основания (см. схему на рис. 13.4).

$$Y = f(\bar{S}_p, l, b) = \bar{S}_p^2 / (6 \cdot \pi \cdot m \cdot l),$$

где  $\bar{S}_p$  - толщина зуба по хорде на окружности, проходящей через точки касания параболы и профиля зуба,  $l$  - высота от

вершины параболы до хорды  $S_p$ .



### Коэффициент удельного давления.

Для характеристики влияния геометрической формы зуба на контактную прочность используется коэффициент удельного давления  $\vartheta$ . Из анализа формулы Герца, которая используется для оценки контактных напряжений в высшей паре, можно заключить, что единственный геометрический элемент в этой формуле - приведенный радиус кривизны  $\rho^{np}$ .

$$\rho^{np} = \rho_1 \cdot \rho_2 / (\rho_2 \pm \rho_1),$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  - радиусы кривизны профилей в контактной точке, знак + относится к внешнему зацеплению, - к внутреннему.

Чтобы коэффициент давления характеризовал контактное напряжение независимо от абсолютных размеров зуба, которые определяются модулем, введено понятие удельного давления как отношения модуля к приведенному радиусу кривизны

$$\vartheta = m / \rho^{np}.$$

Для цилиндрической прямозубой эвольвентной передачи

$$\begin{aligned} \rho_2 \pm \rho_1 &= (r_{b2} \pm r_{b1}) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w ; \\ \rho_1 &= (r_{b2} \pm r_{b1}) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w - r_{b2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{k2} ; \\ \rho_2 &= (r_{b2} \pm r_{b1}) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w - r_{b1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{k1} . \end{aligned}$$

Тогда для внешнего зацепления:

при контакте в точке  $B_2$  (на выходе зубьев из зацепления)

$$\vartheta_2 = 2 \cdot z_{\Sigma} \cdot \operatorname{tg} \alpha_w / (z_{\Sigma} \cdot \operatorname{tg} \alpha_w - z_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2}) \cdot z_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2} \cdot \cos \alpha ;$$

при контакте в точке  $B_1$  (на входе зубьев в зацепление)

$$\vartheta_1 = 2 \cdot z_{\Sigma} \cdot \operatorname{tg} \alpha_w / (z_{\Sigma} \cdot \operatorname{tg} \alpha_w - z_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a1}) \cdot z_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a1} \cdot \cos \alpha ;$$

при контакте в полюсе точке P

$$\vartheta_p = 2 \cdot z_{\Sigma} / (z_1 \cdot z_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_w \cdot \cos \alpha).$$

### Коэффициент удельного скольжения.

Как показано выше, скорость скольжения в точке контакта профилей высшей пары определяется следующим выражением

$$V_{K2K1} = (\omega_1 \pm \omega_2) \cdot l_{KP},$$

где  $l_{KP}$  - расстояние от точки контакта до полюса, знак + для внешнего зацепления, - для внутреннего.

Величина износа активных частей профилей в высшей паре в значительной степени зависит от их относительного скольжения и от скорости этого скольжения. Для оценки скольжения при геометрических расчетах зубчатых передач пользуются коэффициентом удельного скольжения

$$\lambda_i = V_{K2K1} / V_{Ki}^t,$$

где  $V_{Ki}^t$  - проекция скорости контактной точки звена  $i$  на контактную нормаль.

Из схемы эвольвентного зацепления ([ 1 ] стр.105 рис. 86 )

$$V_{Ki}^t = r_{bi} \cdot \omega_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_{ki}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{ki} = (l_{NiP} \pm l_{KP}) / r_{bi},$$

после подстановки и преобразований

для колеса  $z_1$  при контакте в точке  $B_2$  (на выходе зубьев из зацепления)

$$\lambda_1 = z_2 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w) \cdot (1 + z_1/z_2) / ((z_1 + z_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w - z_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2});$$

для колеса  $z_2$  при контакте в точке  $B_1$  (на входе зубьев в зацепление)

$$\lambda_2 = z_1 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w) \cdot (1 + z_1/z_2) / ((z_1 + z_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w - z_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2}).$$

*Графики изменения коэффициентов удельного давления и удельного скольжения по линии зацепления зубчатых колес.*

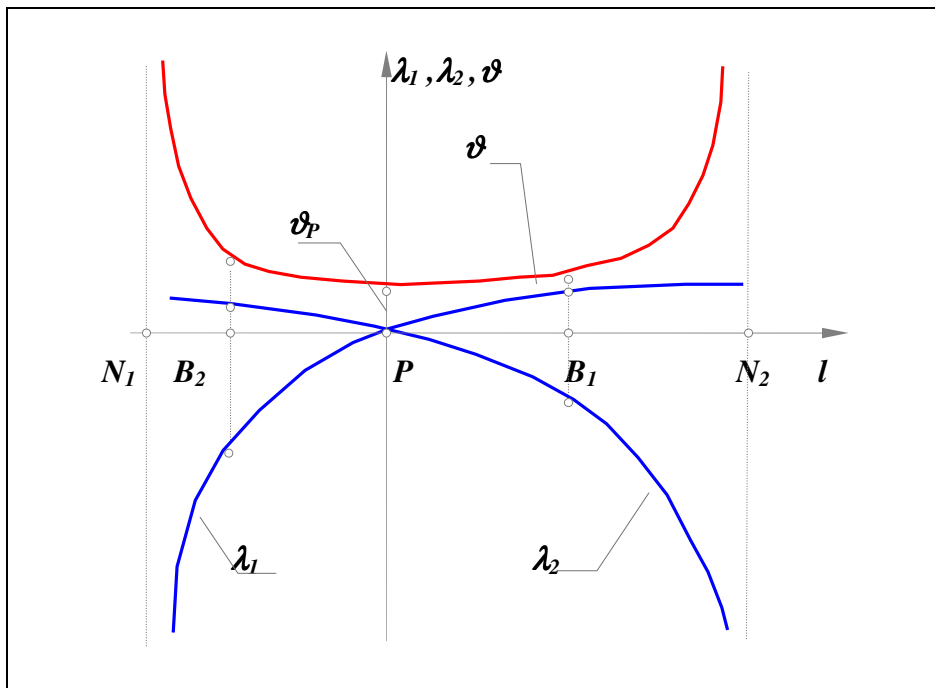


Рис. 13.5

### ***Оптимальный геометрический синтез зубчатой передачи.***

Оптимальный геометрический синтез зубчатой передачи проводится аналогично оптимальному метрическому синтезу рычажных механизмов, но с использованием других ограничений и других качественных показателей. Среди качественных показателей необходимо различать противоречивые и непротиворечивые. Так с увеличением смещений удельное давление и коэффициент формы зуба изменяются в желаемом направлении, а коэффициент торцевого перекрытия и толщины зубьев по окружностям вершин уменьшаются, что, при упрощенном рассмотрении, можно считать нежелательным. Критерии или качественные показатели, которые при принятом изменении параметров изменяются в желаемом направлении считаются непротиворечивыми (так как не противоречат друг другу), те критерии, которые при этом изменяются нежелательным образом, называются противоречивыми. При наличии противоречивых критериев эффективным методом поиска оптимума является метод «минимизации уступок». При этом методе вначале проводится оптимизация по каждому из рассматриваемых критериев, определяются значения критериев в оптимальных точках и ищутся значения параметров при которых отклонения каждого критерия от его оптимального значения бу-

дуг минимальны. Необходимо отметить, что возможности параметрической оптимизации достаточно скромны. Обычно в среднем можно получить улучшение по каждому из показателей не более 10 - 20%. Более существенных результатов можно достичь при переходе к другой схеме или другому типу механизма. Кроме того при геометрическом синтезе зубчатой передаче сложно ориентироваться в сочетании качественных показателей. При анализе скольжения необходимо учитывать, что создание устойчивой масляной пленки в зоне контакта возможно при определенных значениях скорости скольжения. В полюсе зацепления скорость скольжения равна нулю и при прохождении полюса эта скорость изменяет свой знак. Поэтому в зубчатых передачах при дозаполосном зацеплении в зоне близкой к полюсу происходит нарушение масляной пленки, что приводит к повышенному износу в этой зоне за счет контактного выкрашивания - питтинга. С этих позиций предпочтительными оказываются передачи с большими смещениями с до- или заполосным зацеплением, в которых скорость скольжения направлена в одну сторону, не имеет нулевых значений, поэтому условия для формирования масляной пленки более благоприятны.

### ***Программное обеспечение САПР зубчатых передач.***

В 70 - е годы были разработаны и приняты ГОСТ на терминологию, прочностные и геометрические расчеты эвольвентных зубчатых передач. Поэтому программное обеспечение САПР зубчатых передач по всем направлениям проводится по расчетным формулам и алгоритмам рекомендуемым ГОСТ. В ГОСТ предусмотрены два вида расчета геометрии:

- по стандартному радиальному зазору в передаче;
- по стандартной высоте зуба.

При изучении курса ТММ в МВТУ им. Баумана принят метод расчета по стандартной величине радиального зазора. Существующее на кафедре программное обеспечение разработано для этого вида расчета и обеспечивает расчет геометрии внешнего зацепления при фиксированном значении  $x_2 = 0.5$  и изменении  $x_1$  в диапазоне от 0 до 1.4 с шагом 0.1. При выполнении курсового проекта по ТММ на основании этого расчета строятся графики качественных показателей, определяется область допустимых решений для коэффициента  $x_1$  и выбор этого по оптимальному сочетанию качественных показателей. На рис. 13.6 приведен пример графика. При принятых допустимых значениях

$$[\epsilon_\alpha] = 1.1 \quad \text{и} \quad [s_a/m] = 0.3,$$

ограничения на выбор коэффициента смещения  $x_1$

по подрезанию  $\Rightarrow x_{1 \min} = 0.24$  ; по заострению колеса  $z_1 \Rightarrow x_{1 \max \alpha} = 1.24$ ;

по торцевому перекрытию  $\Rightarrow x_{1 \max \epsilon_\alpha} = 0.84$ .

Таким образом, область допустимых значений (ОДЗ), в которой можно выбирать значение  $x_1$

$$0.24 > x_1 > 0.84.$$

этой области выбирается то значение  $x_1$ , которое обеспечивает наилучшее сочетание качественных показателей. Часто выбор коэффициента производят по рекомендациям ГОСТ. Для рассматриваемого случая силовой зубчатой передачи с числами зубьев  $z_1 = 14$  и  $z_2 = 22$

$$x_1 = x_2 = 0.5 .$$

$$[\epsilon_\alpha] = 1.1$$

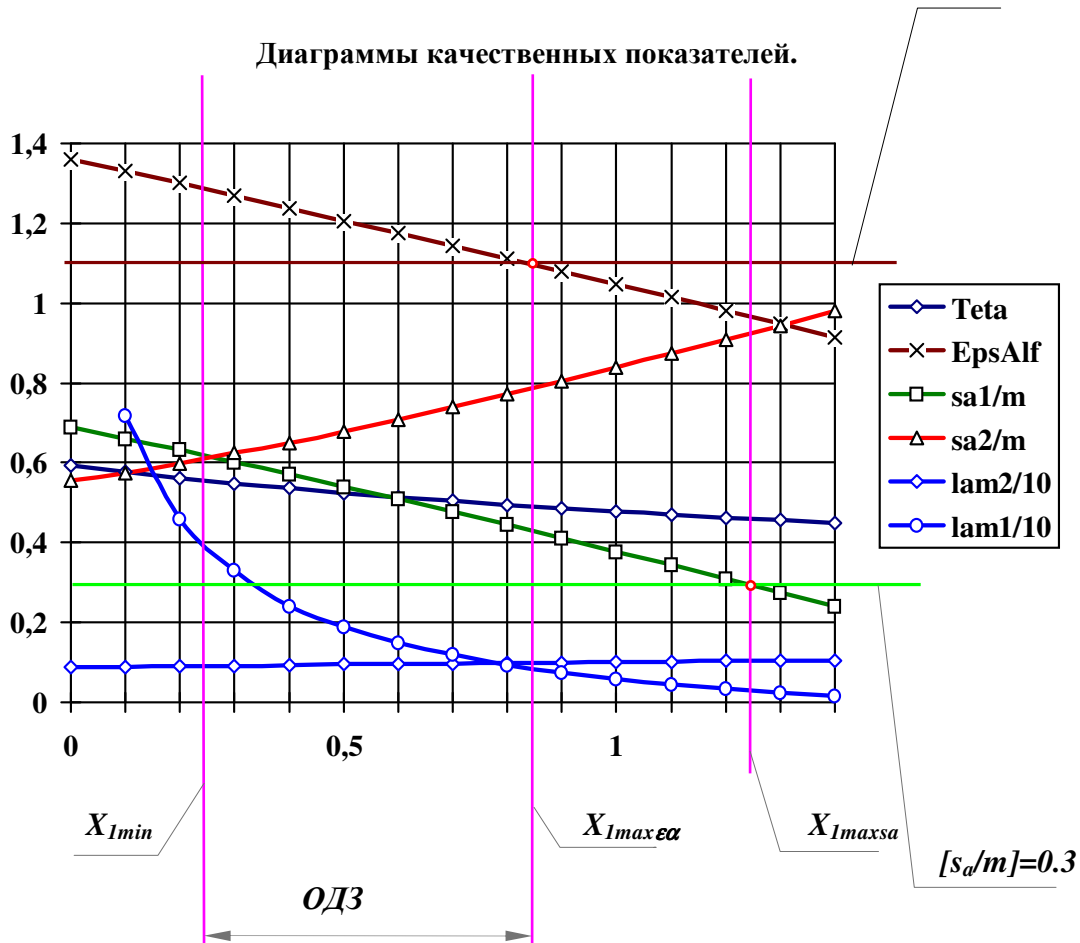


Рис. 13.6

**Косозубые цилиндрические эвольвентные передачи  
и особенности их расчета.**

Косозубыми называются цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи, боковая поверхность зуба которой образована наклонной прямой лежащей в производящей плоскости и образующей с линией касания с основным цилиндром угол  $\beta_b$  ( см. схему на рис. 13.7). При этом эвольвентами основной окружности радиуса  $r_b$  будут кривые лежащие в торцевой плоскости. Поэтому расчет геометрии цилиндрической косозубой передачи проводится по приведенным выше формулам для торцевого сечения. Для передачи с косыми зубьями нужно ввести несколько новых параметров:

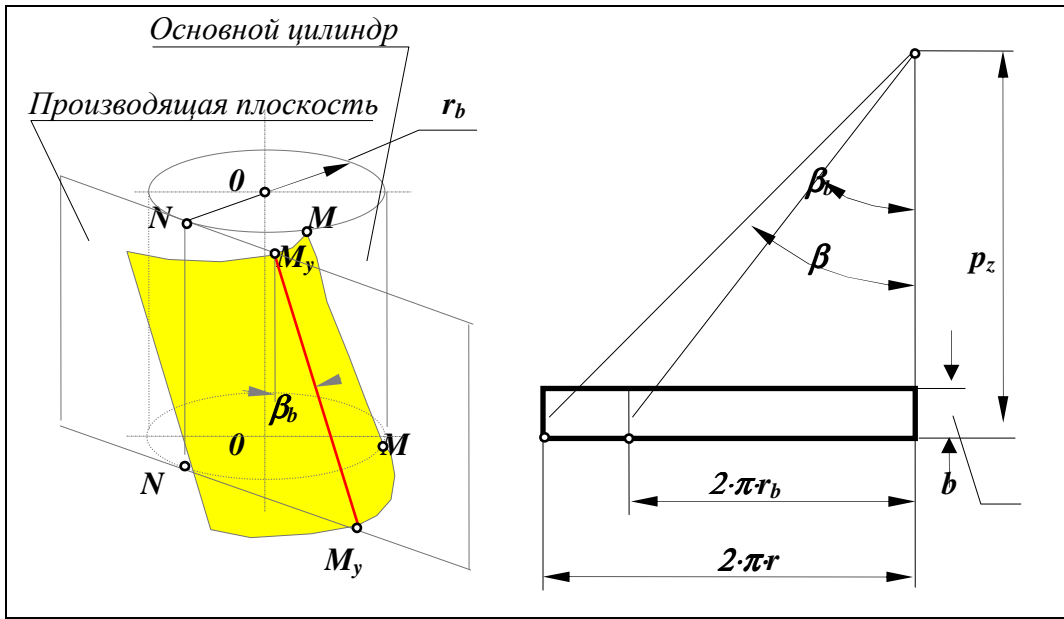


Рис. 13.7

осевой шаг - расстояние между одноименными линиями соседних винтовых зубьев по линии пересечения плоскости осевого сечения зубчатого колеса с делительной, начальной или другой соосной поверхностью. На рис. 13.7 справа изображены развертки делительного и начального цилиндров косозубого колеса. Из этой схемы:

$$p_z = 2 \cdot \pi r_b / \operatorname{tg} \beta_b = 2 \cdot \pi r / \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \beta_b = r_b / (r \cdot \operatorname{tg} \beta) = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \beta_b = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha$$

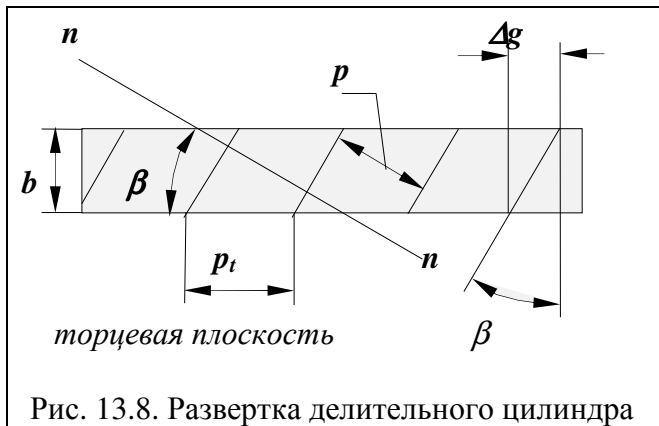


Рис. 13.8. Развертка делительного цилиндра

Из схемы, изображенной на рис. 13.8

$$p_t = p / \cos \beta,$$

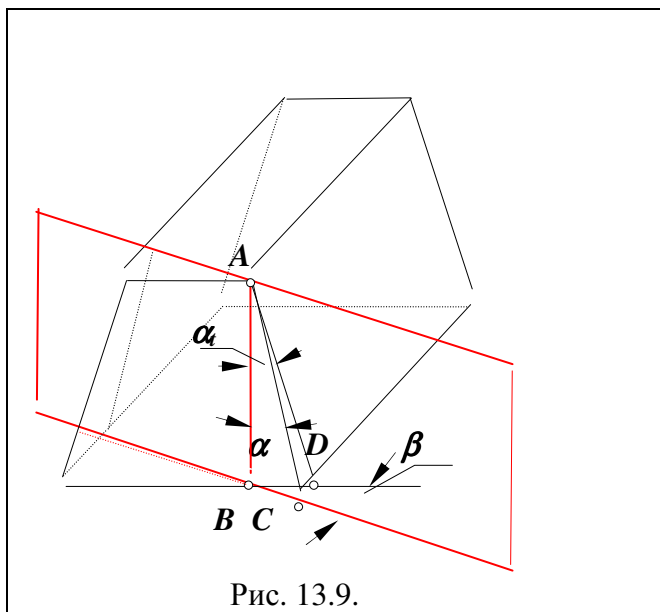
$$p_t = \pi m_t = \pi m / \cos \beta,$$

$$m_t = m / \cos \beta,$$

$$p_{bt} = \pi \cdot m_t \cdot \cos \alpha,$$

$$p_{bt} = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha / \cos \beta.$$

При нарезании косозубого колеса инструментальная рейка поворачивается на угол  $\beta$  при этом стандартный исходный производящий контур располагается в нормальной плоскости, а в расчетной торцевой плоскости образуется другой, торцевой контур, параметры которого определим из схемы, приведенной на рис. 13.9.



Из  $\triangle ABD$

$$\operatorname{tg} \alpha = BD/AB,$$

а из  $\triangle ABC$

$$\operatorname{tg} \alpha = BC/AB;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_t / \operatorname{tg} \alpha = BD/BC.$$

Из  $\triangle BCD$

$$BC/BD = \cos \beta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \operatorname{tg} \alpha / \cos \beta.$$

Для высотных соотношений торцевого производящего контура

$$h = h_t, \text{ то } m \cdot h_a^* = m_t \cdot h_{at}^* \Rightarrow h_{at}^* = h_a^* \cdot \cos \beta;$$

$$m \cdot c^* = m_t \cdot c_t^* \Rightarrow c_t^* = c^* \cdot \cos \beta.$$

### Коэффициент осевого перекрытия.

В косозубых передачах величина коэффициента перекрытия увеличивается на величину торцевого перекрытия, которое (рис. 13.8) равно

$$\epsilon_\beta = \varphi_{\beta 1} / \tau_1 = \Delta g / r_{tb},$$

где  $\Delta g = b \cdot \operatorname{tg} \beta_b = b \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha,$

$\varphi_{\beta 1} = \Delta g / r_{b1}$  - угол осевого перекрытия для колеса  $z_1$ .

$r_{tb} = \pi \cdot m_t \cdot \cos \alpha, \quad m_t = m / \cos \beta.$

$$\epsilon_\beta = (b \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) / (\pi \cdot m \cdot \cos \alpha),$$

$$\epsilon_\beta = b \cdot \sin \beta / (\pi \cdot m).$$

### Лекция 14.

Краткое содержание: Зубчатые передачи с зацеплением М.Л.Новикова. Конические зубчатые передачи. Червячные зубчатые передачи. Зубчатые передачи с циклоидальными профилями.

#### *Зубчатые передачи с зацеплением М.Л.Новикова.*

С целью повышения несущей способности зубчатых передач М.Л.Новиков [1] разработал новый способ образования сопряженных поверхностей для различных видов зубчатых передач с параллельными, пересекающимися и перекрещивающимися осями. До Новикова исходили из того, что в передачах с параллельными осями поверхности зубьев находятся в линейном контакте, а их торцевые профили являются взаимогогибаемыми кривыми. Новиков предложил перейти от линейного контакта поверхностей к точечному. При этом профили зубьев в торцевом сечении могут быть не взаимогогибаемыми кривыми и их можно выполнять как выпуклый и вогнутый профили с малой разностью кривизн. В передаче с параллельными осями линия зацепления является прямой линией параллельной осям колес. Зацепление Новикова имеет только осевое перекрытие

$$\epsilon_{\beta} = \varphi_{\beta 1} / \tau_1 = b / p_z,$$

где  $b$  - ширина зубчатого венца,  $p_z$  - осевой шаг. Поэтому поверхности зубьев выполняются винтовыми (косозубыми) с углом подъема винтовой линии

$$\beta = 10 - 30^\circ.$$

Одним из основных параметров зацепления Новикова является расстояние от полюса зацепления Р до точки контакта К, которое определяет положение линии зацепления ( прямой К-К параллельной осям вращения и проходящей через точку контакта К ) относительно оси мгновенного относительного вращения Р-Р. Согласно рекомендациям работы [ 14.1 ], это расстояние выбирается в зависимости от величины передаваемой мощности в пределах

$$l_{KP} = (0.05 \dots 0.2) \cdot r_{w1}.$$

Радиусы кривизны рабочих участков профилей рекомендуется выбирать для выпуклой поверхности  $\rho_1 = l_{KP}$ , для вогнутой поверхности  $\rho_2 = (1 + k_2) \cdot l_{KP}$ , где  $k_2 = 0.03 \dots 0.1$ .

Радиус окружности вершин колеса с выпуклыми зубьями

$$r_{a1} = r_{w1} + (1 - k_e) \cdot l_{KP}, \quad \text{где} \quad k_e = 0.1 \dots 0.2.$$

Дуги рабочих профилей выпуклых зубьев проводят от начальной окружности до окружности вершин. Радиус окружности вершин колеса с вогнутыми зубьями

$$r_{a2} = r_{w2} + h, \quad \text{где} \quad h = (0.1 \dots 0.2) \cdot l_{KP} - \text{глубина захода зубьев.}$$

Радиус окружности впадин колеса с выпуклыми зубьями

$$r_{f1} = r_{w1} - h - c,$$

где  $c$  - радиальный зазор, приблизительно равный  $c = l_{KP} \cdot k_e$ .

Радиус окружности впадин колеса с вогнутыми зубьями

$$r_{f2} = a_w - r_{a1} - c,$$

где  $a_w$  - межосевое расстояние в передаче.

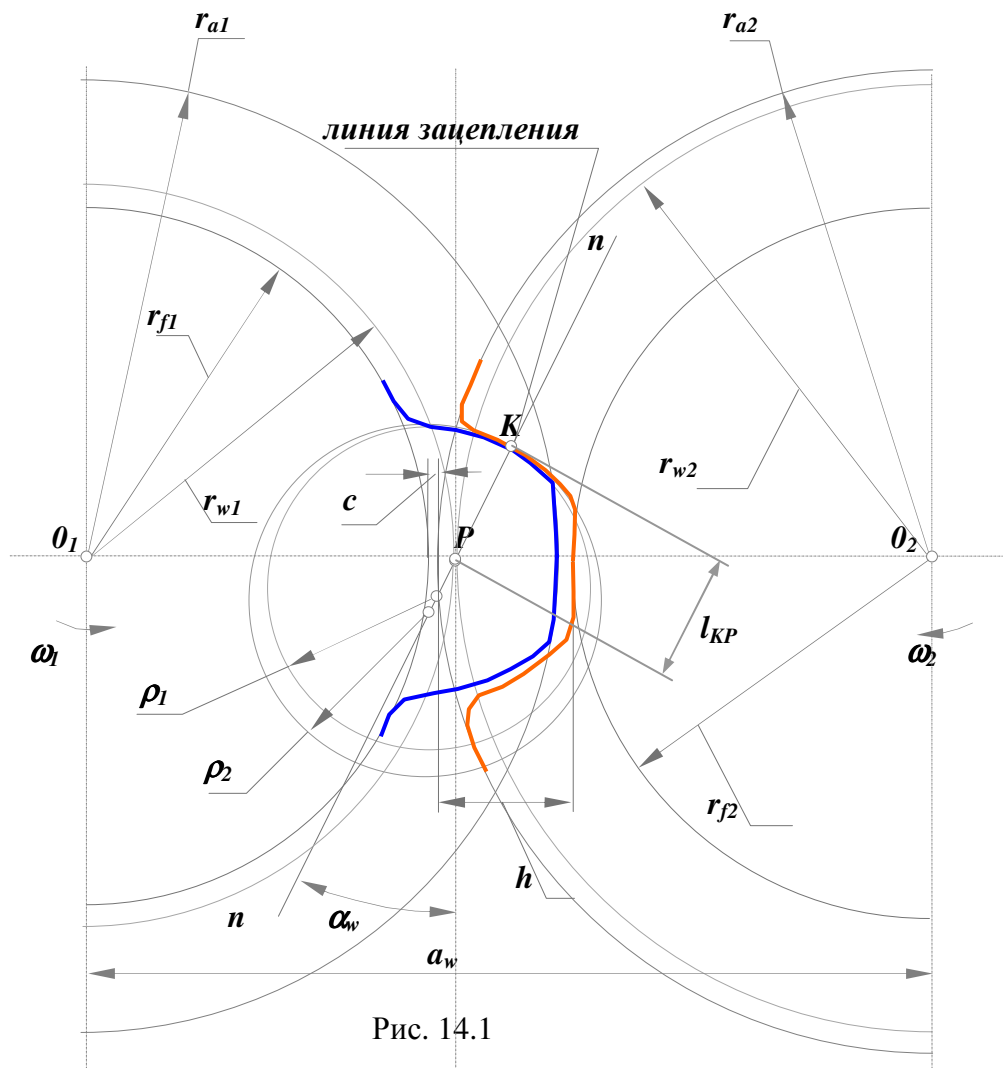


Рис. 14.1

*Преимущества зубчатых передач с зацеплением Новикова:*

- *повышенная контактная прочность зубьев, за счет использования зацепления вогнутого профиля с выпуклым ( приведенный радиус кривизны определяется суммой радиусов кривизны профилей );*
- *перекрытие в передачах Новикова обеспечивается только за счет осевого перекрытия, поэтому высота зубьев может быть достаточно малой, что обеспечивает высокую изгибную прочность зубьев ( в целом, по приблизительным оценкам, нагрузочная способность передач Новикова в 2-3 раза выше, чем косозубых эвольвентных передач с одинаковыми размерами);*
- *точечное зацепление (пятиподвижная кинематическая пара) обеспечивает в передачах с зацеплением Новикова меньшую чувствительность к монтажным погрешностям.*

*К недостаткам передач Новикова можно отнести:*

- *более сложную технологию изготовления, за счет использования инструмента с профилями криволинейной конфигурации;*
- *наличие значительных осевых нагрузок на подшипники из-за использования винтовых зубьев с большими углами подъема винтовой линии;*
- *склонность зубьев винтовых колес к излому у торца при входе в зацепление.*



### Конические зубчатые передачи.

Конической называется зубчатая передача, предназначенная для передачи и преобразования вращательного движения между звеньями, оси вращения которых пересекаются.

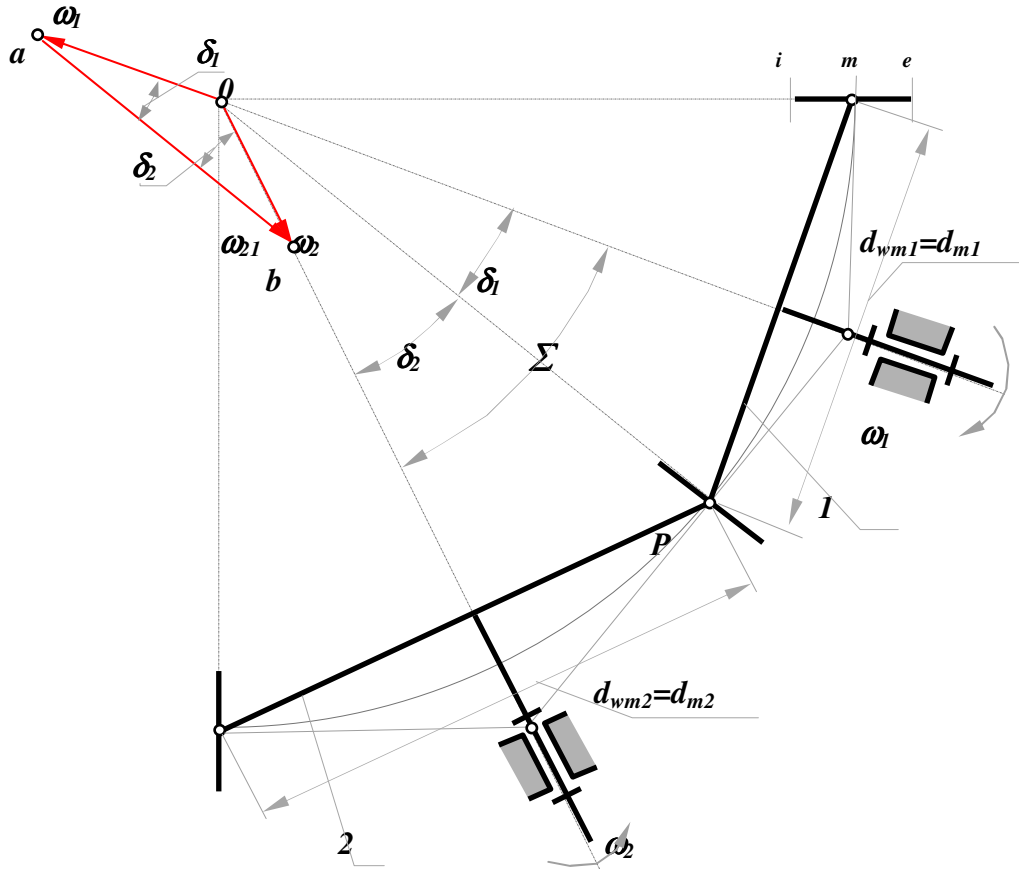


Рис. 14.2

Схема конической передачи представлена на рис. 14.2. Оси колес зубчатой передачи пересекаются в точке  $O$ . Угол  $\Sigma$  между осями колес (или между векторами угловых скоростей звеньев  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) называется межосевым углом. Этот угол может изменяться в пределах  $0^\circ < \Sigma < 180^\circ$ . При  $\Sigma = 0^\circ$  передача превращается в цилиндрическую с внешним зацеплением, а при  $\Sigma = 180^\circ$  - в цилиндрическую с внутренним зацеплением. Таким образом, коническая передача является общим случаем зубчатой передачи, нежели цилиндрические. Начальные или аксоидные поверхности в конической передаче имеют форму конусов. Аксоидными называются поверхности, которые образуются осями мгновенного относительного вращения колес, в системах координат связанных с колесами (звеньями передачи). Если колеса передачи обработаны без смещения исходного контура, то аксоидные поверхности совпадают с делительными. При относительном движении аксоиды перекатываются друг по другу, при этом скольжение возможно только в направлении оси относительного вращения. Поэтому вектора угловых скоростей звеньев связаны между собой векторным уравнением

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{21},$$

$$//00_2 //00_1 //OP$$

если известна величина  $\omega_1$ , то из этого уравнения можно определить  $\omega_2$  и  $\omega_{21}$ .

Из векторного треугольника  $\Delta aOb$

$$\omega_1 / \sin \delta_1 = \omega_2 / \sin \delta_2 \Rightarrow \omega_1 / \omega_2 = \sin \delta_2 / \sin \delta_1.$$

Передаточное отношение конической передачи

$$u_{12} = \pm |\omega_1| / |\omega_2| = \sin \delta_2 / \sin \delta_1.$$

Так как

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2, \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1,$$

то

$$u_{12} = \sin (\Sigma - \delta_1) / \sin \delta_1 = (\sin \Sigma \cdot \cos \delta_1 - \cos \Sigma \cdot \sin \delta_1) / \sin \delta_1$$

$$u_{12} = (\sin \Sigma / \operatorname{tg} \delta_1) - \cos \Sigma.$$

Тогда углы начальных ( делительных при  $x=0$  ) конусов

$$\delta_1 = \arctg [ \sin \Sigma / ( u_{12} + \cos \Sigma ) ], \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1.$$

### ***Геометрия зацепления в конической зубчатой передаче.***

Как и в цилиндрических, так и в конических зубчатых передачах наиболее часто применяют эвольвентное зацепление. Эвольвентная поверхность зуба конического колеса образуется при перекачивании производящей плоскости по основному конусу. Эвольвентные кривые формируются на соосных сферических поверхностях с центром в вершине основного конуса. Поэтому для расчета геометрии эвольвентной конической передачи необходимо применять сферическую геометрию. Так как это сложно, то используют приближенный метод расчета геометрии - метод дополнительных конусов [2], предложенный английским столяром Томасом Тредгольдом. При этом методе расчет геометрии проводится для эквивалентного цилиндрического зацепления двух секторов. Эти сектора образуются развертками конусов, которые построены на внешней сфере радиуса  $R_{we}$ . Радиусы оснований этих конусов  $r_{we1} = r_{e1}$  и  $r_{we2} = r_{e2}$ , а образующие являются касательными к сфере (рис.14.3). Числа зубьев колес эквивалентного цилиндрического зацепления рассчитываются на основании следующих формул

$$r_{vt1} = r_{te1} / \cos \delta_1, \quad r_{vt2} = r_{te2} / \cos \delta_2,$$

где  $r_{te1}$  и  $r_{te2}$  - радиусы торцевых делительных окружностей на внешней сфере,  $r_{vt1}$  и  $r_{vt2}$  - радиусы делительных окружностей эквивалентного цилиндрического зацепления.

Так как  $r_{te1} = m_{te} \cdot z_1$ ,  $r_{te2} = m_{te} \cdot z_2$ , и  $r_{vt1} = m_{te} \cdot z_{vt1}$ ,  $r_{vt2} = m_{te} \cdot z_{vt2}$ , то

$$z_{vt1} = z_1 / \cos \delta_1, \quad z_{vt2} = z_2 / \cos \delta_2,$$

где  $z_1$  и  $z_2$  - числа зубьев колес конической передачи,  $z_{vt1}$  и  $z_{vt2}$  - числа зубьев колес эквивалентного цилиндрического расчетного зацепления ( эти величины могут быть дробными).

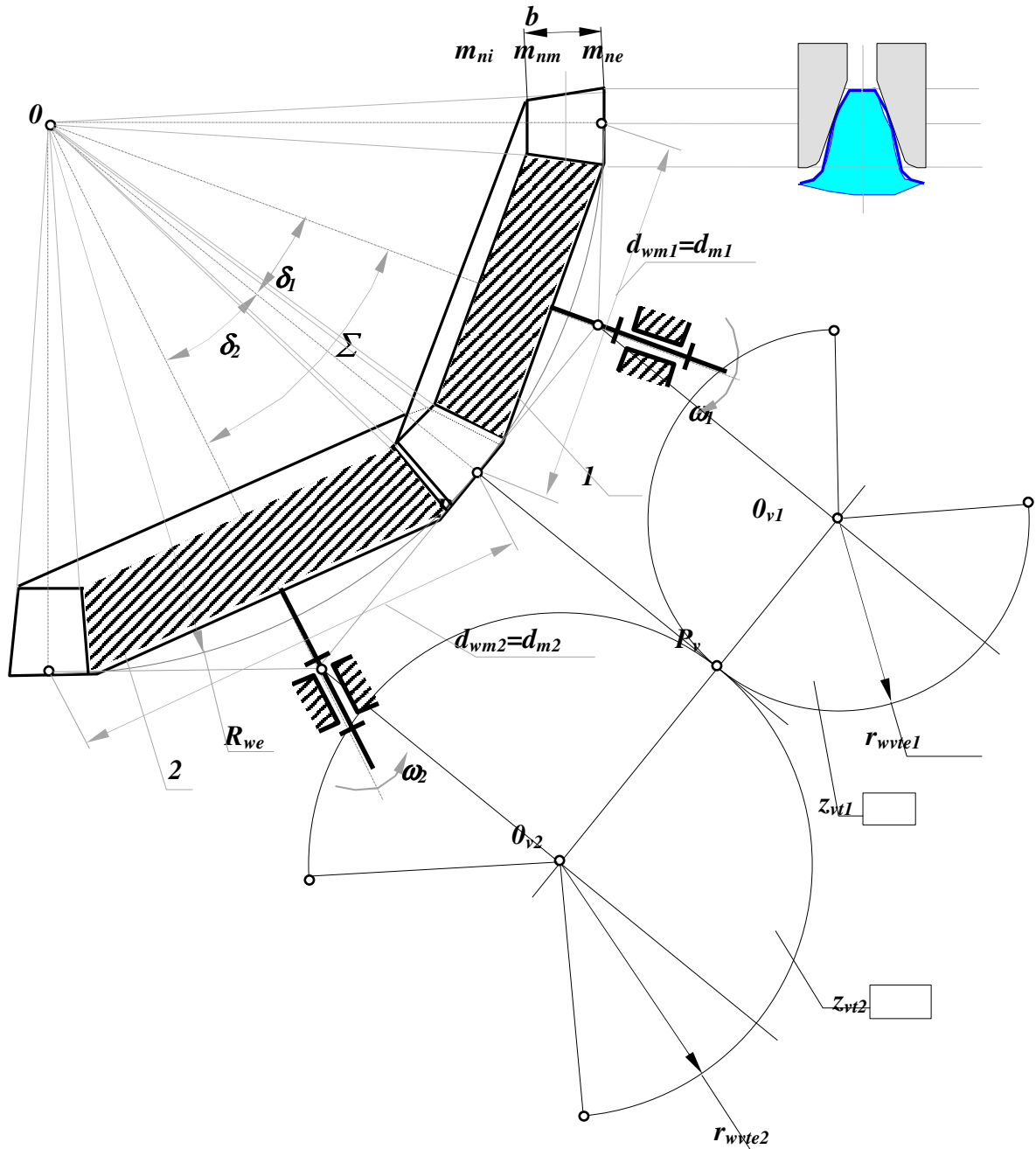


Рис. 14.3

После определения чисел зубьев эквивалентного цилиндрического зацепления, приближенный расчет геометрических параметров для внешнего торца конического зацепления можно проводить по рассмотренным выше формулам цилиндрического эвольвентного зацепления.

Радиус внешней сферы (длина образующей начального или делительного конуса)

$$R_{we} = r_{we1} / \sin \delta_1 = r_{we2} / \sin \delta_2.$$

Ширина зубчатого венца  $b = \psi \cdot R_{we}$ , где  $b = 0.3 \dots 0.4$  - коэффициент ширины зубчатого венца.

По форме линии зуба конические зубчатые передачи различаются на: прямозубые; косозубые; с круговым зубом; с эвольвентной линией зуба; с циклоидальной линией зуба.

### **Преимущества и недостатки конических зубчатых передач.**

#### **Преимущества:**

- обеспечение возможности передачи и преобразования вращательного движения между звеньями с пересекающимися осями вращения;
- возможность передачи движения между звеньями с переменным межосевым углом при широком диапазоне его изменения;
- расширение компоновочных возможностей при разработке сложных зубчатых и комбинированных механизмов.

#### **Недостатки:**

- более сложная технология изготовления и сборки конических зубчатых колес;
- большие осевые и изгибные нагрузки на валы, особенно в связи с консольным расположением зубчатых колес.

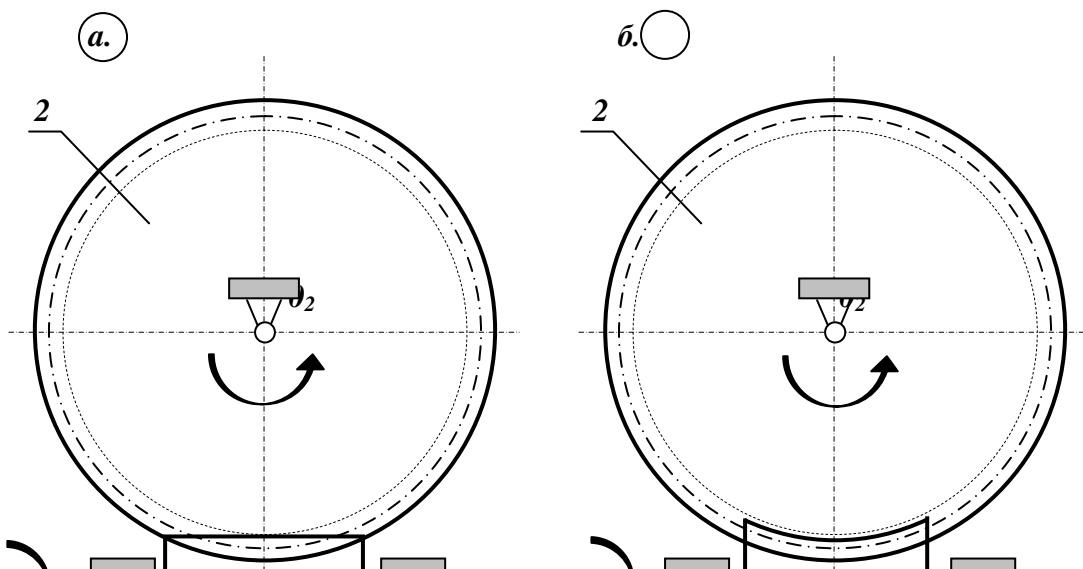
### **Червячные зубчатые передачи.**

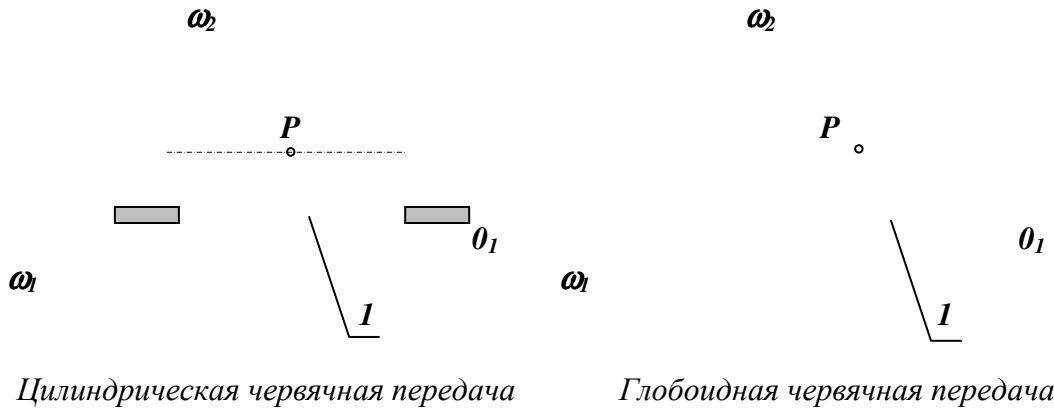
Червячной называется зубчатая передача, состоящая из двух подвижных звеньев – червяка и зубчатого колеса и предназначенная для передачи и преобразования вращательного движения между ортогональными перекрещивающимися осями. Червяком называют звено, наружная поверхность которого имеет форму винта. Червячным колесом называется зубчатое колесо с косыми зубьями, которое зацепляется с червяком.

### **Виды червячных передач и червяков ( по ГОСТ 18498-73 ).**

Червячные передачи подразделяются:

1. по виду делительной поверхности червяка
  - цилиндрические червячные передачи – червяк и колесо в передаче имеют цилиндрические делительные и начальные поверхности;
  - глобоидные червячные передачи – делительная и начальная поверхности червяка образованы вращением отрезка дуги делительной или начальной поверхности парного червячного колеса вокруг оси червяка;
2. по виду теоретического торцового профиля витка червяка
  - архимедов червяк (ZA) – профиль выполнен по архимедовой спирали;
  - эвольвентный червяк (ZI) – профиль выполнен по эвольвенте окружности;
  - конвольвентный червяк (ZN) – профиль выполнен по удлиненной эвольвенте.





Цилиндрическая червячная передача

Глобоидная червячная передача

Рис. 14.4

**Геометрия зацепления цилиндрической червячной передачи.**

Расчет геометрии зацепления цилиндрической червячной передачи регламентируется ГОСТ 19650 – 74 [3]. Связь между основными параметрами червяка – диаметром начального цилиндра  $d_{w1}$ , ходом винтовой линии  $p_{z1}$  и углом ее наклона  $\beta_w$  – устанавливается следующим соотношением

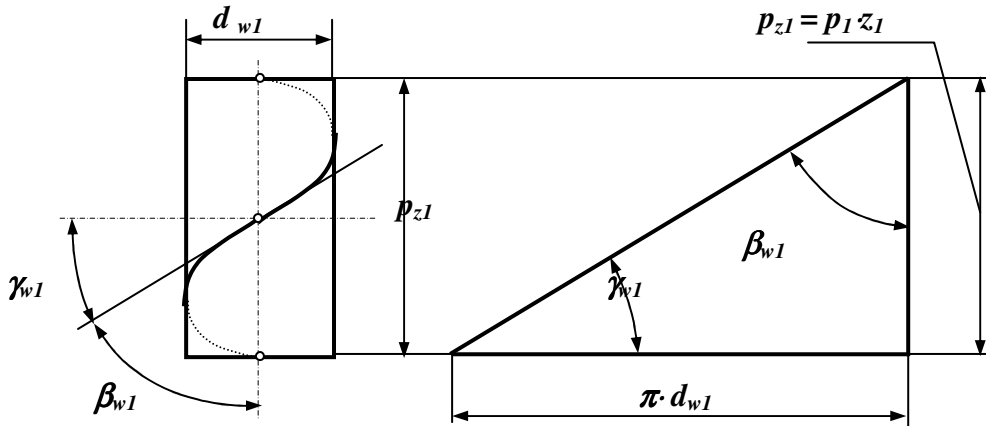


Рис. 14.5

$$p_{z1} = \pi \cdot d_{w1} \cdot \operatorname{tg} \beta_{w1}.$$

Связь между ходом винтовой линии  $p_{z1}$  и шагом многозаходного винта  $p_1$

$$p_{z1} = p_1 \cdot z_1.$$

**Расчет геометрии зацепления.**

- Исходные данные:**  $m$  - модуль осевой;  
 $q$  - коэффициент диаметра червяка;  
 $z_1$  - число витков червяка;  
 $a_w$  - межосевое расстояние;  
 $x$  - коэффициент смещения червяка;  
 $u$  - передаточное число.

- Параметры инструмента:**  $ZN \Rightarrow \alpha_0$ ;  
 $ZA \Rightarrow \alpha_x$ ; - угол профиля;  
 $ZI \Rightarrow \alpha_n$ ;

$h^* = (h_w^* + c_1^*)$  - коэффициент высоты витка;

$h_a^*$  - коэффициент высоты головки;  
 $s^*$  - коэффициент расчетной толщины;  
 $\rho_f^*$  - коэффициент радиуса кривизны переходной кривой;

$$c_{1,2}^* = 0.25 \dots 0.5; \quad s^* = 0.5 \cdot \pi; \quad \rho_f^* = 0.3 \dots 0.45.$$

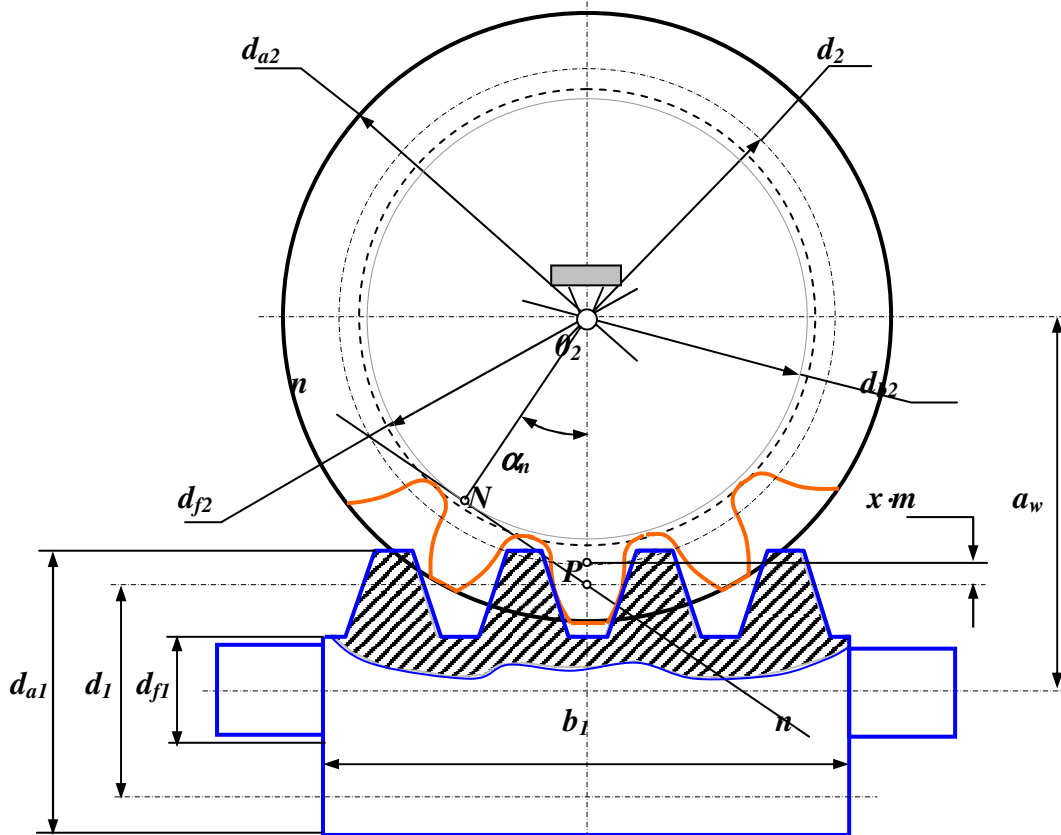


Рис. 14.6

**Расчет геометрических параметров.**

1. Число зубьев колеса

$$z_2 = z_1 \cdot u.$$

2. Коэффициент смещения ( если задано межосевое расстояние )

$$x = a_w/m - 0.5 \cdot (z_2 + q).$$

- 2\*. Межосевое расстояние ( если задан коэффициент смещения )

$$a_w = 0.5 \cdot m \cdot (z_2 + q + 2x).$$

3. Делительные диаметры

$$\text{червяка } d_1 = m \cdot q,$$

$$\text{колеса } d_2 = m \cdot z_2.$$

4. Начальные диаметры

$$\text{червяка } d_{w1} = (q + 2x) \cdot m,$$

$$\text{колеса } d_{w2} = a_w - d_{w1}.$$

5. Делительный угол подъема витка червяка

$$\gamma = \arctg(z_1/q).$$

6. Начальный угол подъема витка червяка

$$\gamma_w = \arctg(z_1 \cdot m / d_{w1}).$$

7. Основной угол подъема витка червяка ( только для червяков ZI )

$$\gamma_b = \arccos(\cos \alpha_n \cdot \cos \gamma)$$

и основной диаметр червяка

$$d_{b1} = z_1 \cdot m / (\operatorname{tg} \gamma_b) .$$

8. Высота витка червяка

$$h_1 = h^* \cdot m .$$

9. Высота головки витка червяка

$$h_{a1} = h_{a1}^* \cdot m .$$

10. Диаметры вершин

витков червяка  $d_{a1} = m \cdot (q + 2 \cdot h_{a1}^*) ,$

зубьев червячного колеса в средней торцовой плоскости

$$d_{a2} = m \cdot (z_2 + 2 \cdot h_a^* + 2 \cdot x) .$$

11. Диаметры впадин

червяка  $d_{f1} = m \cdot (q - 2 \cdot h_{f1}^*) ,$

червячного колеса  $d_{f2} = d_{a2} - 2 \cdot (h_a^* + x) \cdot m .$

12. Наибольший диаметр червячного колеса

$$d_{aM2} \leq d_{a2} + 6 \cdot m / (z_1 + 2) .$$

13. Ширина венца червячного колеса

при  $z_1 \leq 3 \Rightarrow b_2 \leq 0.75 \cdot d_{a1} ,$

при  $z_1 = 4 \Rightarrow b_2 \leq 0.67 \cdot d_{a1} .$

14. Длина нарезанной части червяка ( при  $x = 0$  )

при  $z_1 \leq 3 \Rightarrow b_1 \geq (11 + 0.06 \cdot z_2) \cdot m ,$

при  $z_1 = 4 \Rightarrow b_1 \geq (12.5 + 0.09 \cdot z_2) \cdot m .$

### **Геометрические показатели качества зацепления.**

1. Подрезание зубьев червячного колеса отсутствует если

$$x \geq h_{a10}^* - (z_2 \cdot \sin^2 \alpha) / 2 .$$

2. Заострение зубьев в средней торцовой плоскости отсутствует, если

$$\alpha_w \leq m (0.55 z_2 - 0.64 - 0.024 \cdot \alpha) + 0.5 \cdot d_{a1} .$$

3. Коэффициент перекрытия должен удовлетворять условию

$$\varepsilon = z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha) / (2 \cdot \pi) + 2 \cdot (h_a^* - x - 0.1) / (\pi \sin 2 \cdot \alpha) \geq 1.2$$

### **Преимущества и недостатки червячных зубчатых передач.**

#### **Преимущества:**

- благодаря малому числу заходов червяка ( $z_1 = 1 \dots 4$ ) червячная передача позволяет реализовывать в одной ступени большие передаточные отношения;
- обладает высокой плавностью, низким уровнем вибраций и шума;
- позволяет обеспечить самоторможение червячного колеса ( при малых углах подъема витка передача движения от вала червячного колеса к червяку становится невозможной).

#### **Недостатки:**

- высокая скорость скольжения вдоль линии зуба, что ведет к повышенной склонности к заеданию ( необходимы специальные смазки и материалы для зубчатого венца червячного колеса ), снижению КПД и более высокому тепловыделению .

### Зубчатые передачи с циклоидальными профилями.

Циклоидальными кривыми или циклоидами (рулеттами, трохоидами) называется семейство кривых, которые описываются точками окружности или точками, связанными с этой окружностью, при ее перекачивании без скольжения по другой окружности или прямой [4]. Пусть образующая циклоиду точка лежит на окружности, тогда описываемая ей траектория будет *эпициклоидой* при внешнем контакте окружностей, *гипоциклоидой* – при внутреннем, или просто *циклоидой* - при перекачивании по прямой. Если образующая точка лежит вне окружности или внутри нее, то описываемые ей циклоидальные траектории называются *эпитрахоидами* (удлиненными или укороченными эпициклоидами) при внешнем контакте окружностей, *гипотрахоидами* (удлиненными или укороченными гипоциклоидами) – при внутреннем.

#### Теорема Камуса.

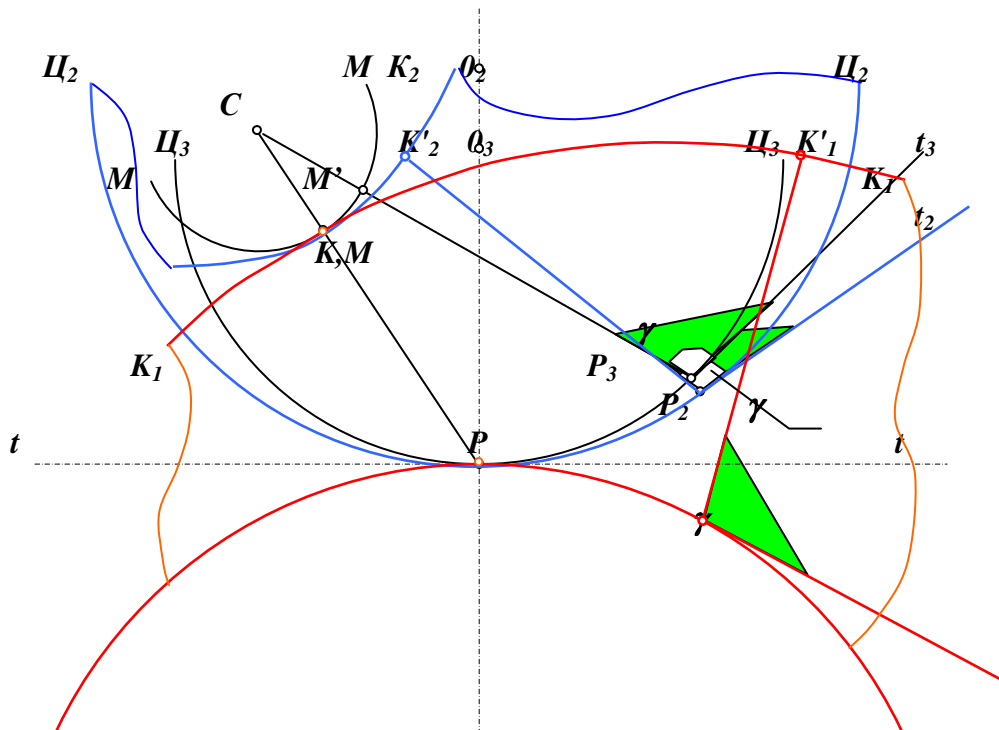
Теорема Камуса доказывает что профили выполненные по циклоидальным кривым будут при определенных условиях сопряженными и взаимооггибаемыми.

*Теорема Камуса. Кривые, описываемые какой-либо точкой жестко связанной с некоторой вспомогательной центроидой при перекачивании ее по центроидам, определяющим относительное движение рассматриваемых звеньев, будут взаимооггибаемыми в относительном движении этих звеньев.*

Рассмотрим схему изображенную на рис. 14.7. На этой схеме:  
 Ц<sub>1</sub>-Ц<sub>1</sub> и Ц<sub>2</sub>-Ц<sub>2</sub> – центроиды, определяющие движение звеньев 1 и 2;  
 Ц<sub>3</sub>-Ц<sub>3</sub> – вспомогательная центроида, с которой жестко связана кривая М-М;  
 К<sub>1</sub>-К<sub>1</sub> – огибающая к положениям М-М при перекачивании Ц<sub>3</sub>-Ц<sub>3</sub> и Ц<sub>1</sub>-Ц<sub>1</sub>;  
 К<sub>2</sub>-К<sub>2</sub> – огибающая к положениям М-М при перекачивании Ц<sub>3</sub>-Ц<sub>3</sub> и Ц<sub>2</sub>-Ц<sub>2</sub>;  
 К<sub>1</sub>-К<sub>1</sub> и К<sub>2</sub>-К<sub>2</sub> – взаимооггибаемые кривые в относительном движении звеньев 1 и 2;  
 дуга РР<sub>1</sub> = дуге РР<sub>2</sub> = дуге РР<sub>3</sub>;  
 М'Р<sub>3</sub> – нормаль к М-М из точки Р<sub>3</sub>;

$$\angle M'P_3t_3 = \angle K'_2P_2t_2 = \angle K'_1P_1t_1 = \gamma;$$

$$K'_2 \in K_2 - K_2, \quad K'_1 \in K_1 - K_1.$$





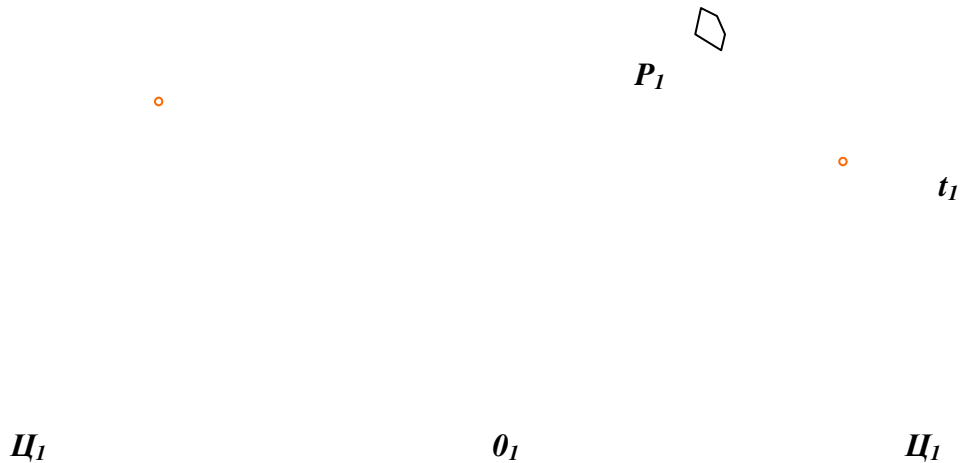


Рис. 14.7

Через промежуток времени  $\Delta t$  точки  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  совпадут  $P$ , касательные и прямые  $M'P_3$ ,  $K'_2P_2$  и  $K'_1P_1$  сольются в одну, то есть точки  $K'_2$  и  $K'_1$  образуют контактную точку  $K$ , а прямые проходящие через нее и полюс  $P$  ( $K'_2P_2$  и  $K'_1P_1$ ), согласно с требованиями теоремы Виллиса, образуют контактную нормаль.

Рассмотрим схему зубчатой передачи с циклоидальным зацеплением, которая изображена на рис. 14.8. На этой схеме:  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  - радиусы начальных окружностей (центроид в относительном движении зубчатых колес),  $r_{v1}$  и  $r_{v2}$  - радиусы вспомогательных окружностей, точки которых образуют эпициклоиды  $P\alpha$  и гипоциклоиды  $P\beta$  используемые в качестве профилей при формировании зубьев.

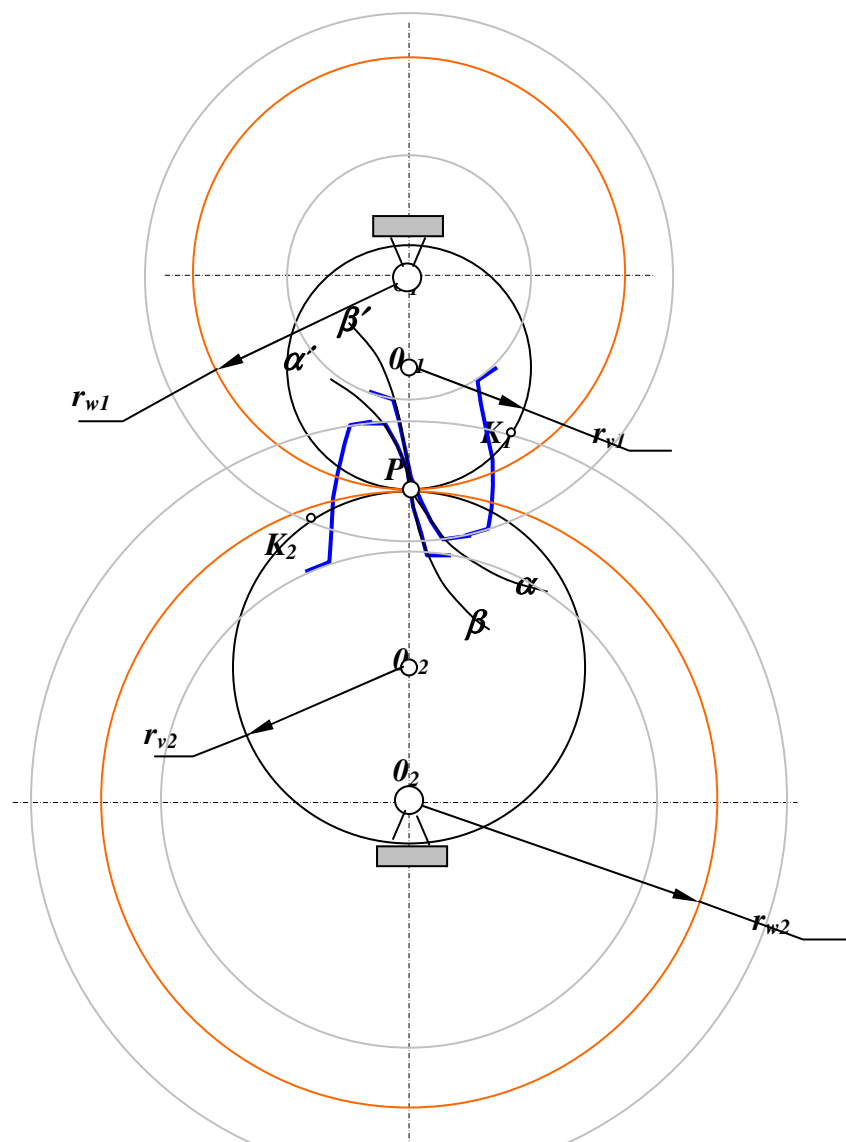


Рис. 14.8

Профиль головки зуба колеса 1 очерчен по эпициклоиде  $P\alpha$ , а профиль ножки по гипоциклоиде  $P\beta'$ . На колесе 2 аналогично для профиля головки зуба используется эпициклоида  $P\alpha'$ , а для ножки – гипоциклоида  $P\beta$ . Эпициклоиды  $P\alpha$  и  $P\alpha'$  получены при перекачивании вспомогательной окружности  $r_{w1}$  соответственно по начальным окружностям  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$ . Гипоциклоиды  $P\beta$  и  $P\beta'$  получены при перекачивании вспомогательной окружности  $r_{v2}$  соответственно по начальным окружностям  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$ . Геометрическое место точек контакта профилей в неподвижной системе координат – линия зацепления  $K_1K_2$ , образуется отрезками дуг вспомогательных окружностей  $PK_1$  и  $PK_2$ .

Коэффициент перекрытия  $\epsilon_\alpha = (PK_1 + PK_2)/p_w$ , где  $p_w$  - шаг по начальной окружности  $r_{w1}$  ( или  $r_{w2}$  ).

Исходный производящий контур реечного инструмента, используемый для обработки циклоидальных зубчатых колес образован двумя дугами циклоидальных кривых. Для нарезания двух колес необходимо иметь два инструмента с одним исходным производящим контуром, которые конгруэнтны друг другу (как шаблон и контршаблон).

### ***Преимущества и недостатки циклоидального зацепления.***

*Преимущества:*

- *меньший износ профилей за счет использования зацепления выпуклого профиля с вогнутым;*
- *большой, чем в аналогичной эвольвентной передаче, коэффициент перекрытия;*
- *возможность получения на шестерне (трибе) без подрезания меньшего числа зубьев, нежели в эвольвентных зубчатых передачах;*
- *меньшая скорость скольжения профилей.*

*Недостатки:*

- *более сложный профиль режущего инструмента, а следовательно, и большая стоимость изготовления;*
- *чувствительность к монтажным погрешностям межосевого расстояния (изменение межосевого расстояния изменяет передаточное отношение).*

Примечание: К разновидностям циклоидальных зацеплений относятся часовое и цевочное. В часовом зацеплении радиус вспомогательной окружности выбирается равным половине радиуса соответствующей начальной окружности. Тогда гипоциклоиды, образующие ножки зубьев, вырождаются в прямые линии.

В цевочном зацеплении радиус вспомогательной окружности цевочного колеса принимают равным радиусу начальной окружности этого колеса. Профиль зуба цевочного колеса – окружность, а профиль зуба второго колеса – эквидистанта к эпициклоиде.

*Литература.*

1. Новиков М.Л. Зубчатые передачи с новым зацеплением. Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е.Жуковского. М.: - 1958. 186 с., ил.
2. Прямозубые конические передачи: Справочник / И.А.Болотовский, Б.И.Гурьев и др. – М.: Машиностроение, 1981. – 104 с., ил.
3. Справочник по геометрическому расчету эвольвентных зубчатых и червячных передач / Под ред. И.А.Болотовского. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1986. 448с., ил.
4. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 576 с., ил.

## Лекция 15

Краткое содержание: Сложные зубчатые механизмы. Многопоточные и планетарные механизмы. Кинематика рядного зубчатого механизма. Формула Виллиса для планетарных механизмов. Кинематическое исследование типовых планетарных механизмов графическим и аналитическим методами.

### **Сложные зубчатые механизмы. Многопоточные и планетарные механизмы.**

Сложными зубчатыми механизмами называются механизмы с зубчатыми передачами с числом зубчатых колес больше двух. Это могут быть механизмы с оригинальными структурными схемами или механизмы, образованные последовательным и (или) параллельным соединением простейших типовых зубчатых механизмов.

Механизмы, в которых кинематические цепи образуют один или несколько замкнутых контуров и в которых входной поток механической мощности в процессе передачи и преобразования делится на несколько потоков, а затем суммируется на выходном звене, называются многопоточными механизмами. Распределение передаваемых усилий по нескольким кинематическим парам уменьшает нагрузку на элементы пар и позволяет существенно уменьшать габаритные размеры и массу механизмов. Многозонный контакт звеньев механизма существенно увеличивает жесткость механизма, а за счет осреднения ошибок и зазоров, уменьшает мертвый ход и кинематическую погрешность механизма. Однако, за счет образования в структуре механизма внутренних контуров, число избыточных или пассивных связей в механизме увеличивается. Поэтому при изготовлении и сборке механизма необходимо либо повышать точность деталей, либо увеличивать зазоры в кинематических парах.

Сложные зубчатые механизмы, в которых ось хотя бы одного колеса подвижна, называются планетарными механизмами. К типовым планетарным механизмам относятся:

- однорядный планетарный механизм;
- двухрядный планетарный механизм с одним внешним и одним внутренним зацеплением;
- двухрядный планетарный механизм с двумя внешними зацеплениями;
- двухрядный планетарный механизм с двумя внутренними зацеплениями.

Элементы планетарного механизма имеют специальные названия:

- зубчатое колесо с внешними зубьями, расположенное в центре механизма называется «солнечным»;
- колесо с внутренними зубьями называют «короной» или «эпициклом»;
- колеса, оси которых подвижны, называют «сателлитами»;
- подвижное звено, на котором установлены сателлиты, называют «водилом».

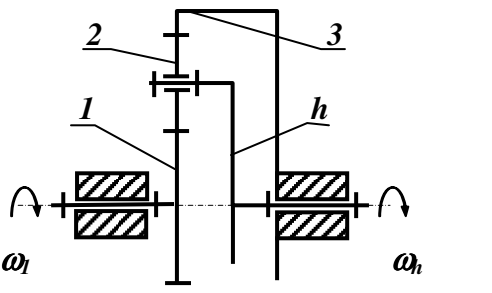
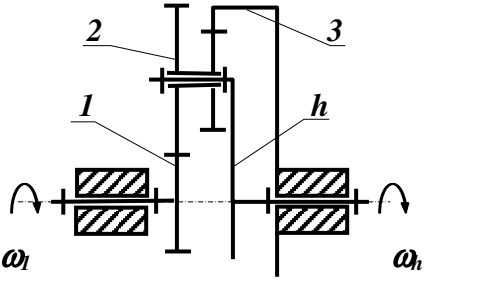
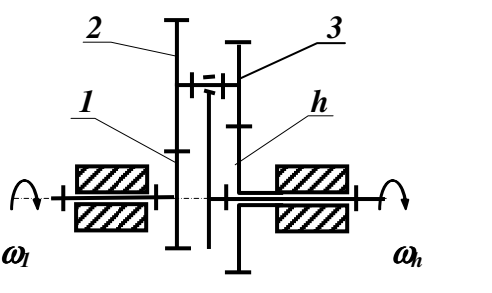
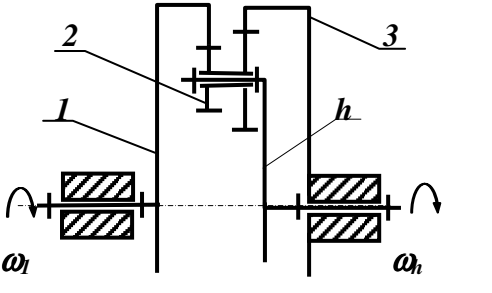
Звено водила принято обозначать не цифрой, а латинской буквой ***h***.

В таблице 15.1 приведены структурные схемы типовых планетарных механизмов, а также диапазоны рекомендуемых передаточных отношений и ориентировочные значения КПД при этих передаточных отношениях.

### **Типовые планетарные механизмы.**

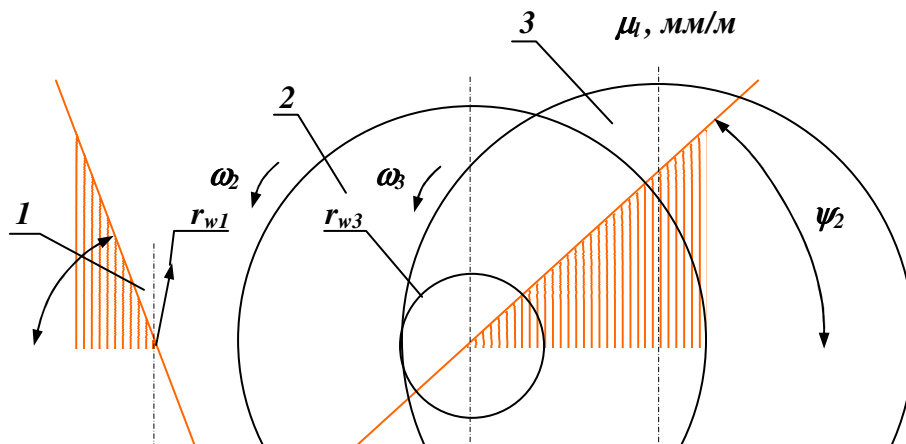
Таблица 15.1

<b>№</b>	<b>Структурная схема механизма</b>	<b><math>U_{ред}</math></b>	<b><math>\eta</math></b>
----------	------------------------------------	-----------------------------	--------------------------

1.		$3 \dots 10$  $u_{1h}^3 = 1 + z_3/z_1$	$0.97 \dots 0.99$
2.		$7 \dots 16$  $u_{1h}^3 =$ $= 1 + z_2 z_4 / (z_1 z_3)$	$0.96 \dots 0.98$
3.		$25 \dots 300$  $u_{1h}^3 =$ $= 1 - z_2 z_4 / (z_1 z_3)$	$0.9 \dots 0.3$
4.		$30 \dots 300$  $u_{1h}^3 =$ $= 1 - z_2 z_4 / (z_1 z_3)$	$0.9 \dots 0.3$

### Кинематика рядного зубчатого механизма.

Рядным зубчатым механизмом называется сложный зубчатый механизм с неподвижными осями колес, образованный последовательным соединением нескольких простых зубчатых механизмов. Рассмотрим кинематику рядного механизма составленного из двух зубчатых передач: одной внешнего зацепления и одной внутреннего зацепления. Схема механизма изображена на рис. 15.1.



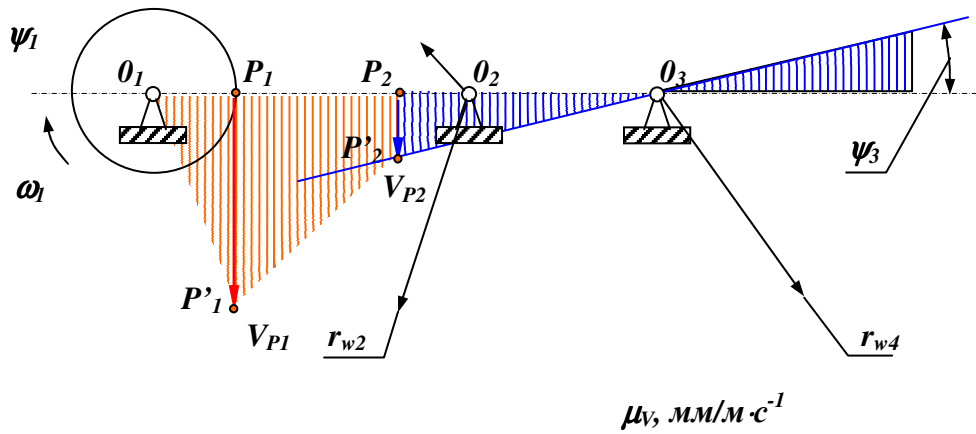


Рис.15.1

Напоминание: Для вращательного движения твердого тела относительно оси проходящей через точку А. Примем для размеров масштаб  $\mu_l$ , мм/м, а для линейных скоростей – масштаб  $\mu_v$ , мм/м·с<sup>-1</sup>. Угловая скорость звена  $i$  равна

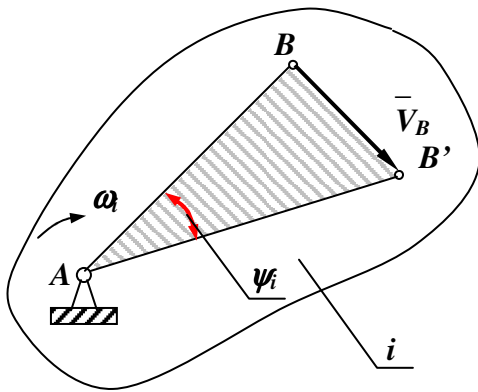


Рис. 15.2

$$\omega = V_B/l_{AB} = (\mu_l/\mu_v) \cdot (BB'/AB) = (\mu_l/\mu_v) \cdot \operatorname{tg} \psi_i = c \cdot \operatorname{tg} \psi_i.$$

Таким образом при графическом кинематическом анализе угловая скорость звена равна произведению тангенса угла наклона прямой распределения линейных скоростей на отношение масштабов длин и скоростей.

*Аналитическое исследование кинематики рядного механизма.*

Из основной теоремы зацепления, для первой пары зубчатых колес с внешним зацеплением, можно записать

$$\omega_1/\omega_2 = -r_{w2}/r_{w1} = -z_2/z_1;$$

для второй пары зубчатых колес с внутренним зацеплением

$$\omega_2/\omega_3 = r_{w4}/r_{w3} = z_4/z_3.$$

Передаточное отношение механизма в целом будет равно

$$u_{13} = \omega_1/\omega_3 = (\omega_1/\omega_2) \cdot (\omega_2/\omega_3) = u_{12} \cdot u_{23} = - (z_2 z_4)/(z_1 z_3).$$

Передаточное отношение сложного рядного зубчатого, образованного из нескольких соединенных последовательно простых зубчатых механизмов равно произведению передаточных отношений этих механизмов.

*Графическое исследование кинематики рядного механизма.*

Изобразим в масштабе  $\mu_\nu$ , мм/м, кинематическую схему рядного зубчатого механизма. Нанесем на эту схему линейную скорость точки  $P_1$ , изобразив ее в произвольном масштабе  $\mu_\nu$ , мм/м·с<sup>-1</sup> отрезком  $P_1P'_1$ . Соединим конец этого отрезка точку  $P'_1$  с центрами вращения колес 1 и 2 точками  $O_1$  и  $O_2$  и получим прямые, определяющие распределение линейных скоростей этих звеньев, для точек лежащих на линии центров. Эти прямые образуют с линией центров соответственно углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Точка  $P_2$  является точкой касания начальных окружностей колес 3 и 4. Так как в точке касания начальных окружностей линейные скорости звеньев 2 и 3 равны, а распределение линейных скоростей по линии центров для звена 2 известно, то можно определить отрезок  $P_2P'_2$ , который изображает скорость точки  $P_2$  в масштабе  $\mu_\nu$ , мм/м·с<sup>-1</sup>. Соединив прямой точку  $P'_2$  с центром вращения звена 3 получим прямую распределения линейных скоростей для точек звена 3, лежащих на линии центров. Угол, который образует эта прямой с линией центров, обозначим  $\psi_3$ . Угловые скорости звеньев определяются из этой схемы по формулам

$$\omega_1 = (\mu/\mu_\nu) \cdot \text{tg } \psi_1 = c \cdot \text{tg } \psi_1 ,$$

$$\omega_3 = (\mu/\mu_\nu) \cdot \text{tg } \psi_3 = c \cdot \text{tg } \psi_3 .$$

Передаточное отношение, рассматриваемого рядного зубчатого механизма, будет равно

$$u_{13} = \omega_1/\omega_3 = \text{tg } \psi_1 / \text{tg } \psi_3 .$$

### Формула Виллиса.

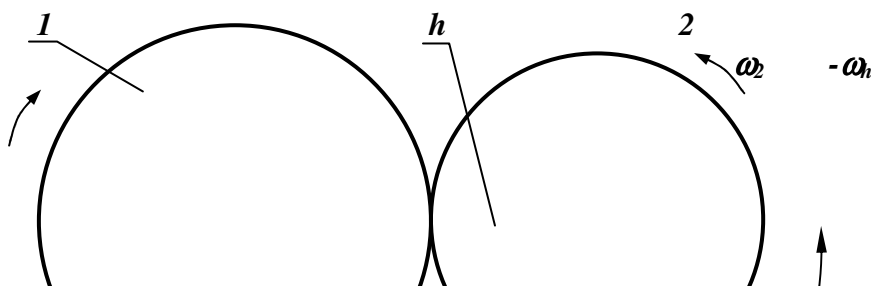
Формула Виллиса выводится на основании основной теоремы зацепления и устанавливает соотношение между угловыми скоростями зубчатых колес в планетарном механизме. Рассмотрим простейший планетарный механизм с одним внешним зацеплением (см. рис. 15.3). Число подвижностей в этом механизме равно  $W^{nn} = 3 \cdot n - 2 \cdot p_1 - 1 \cdot p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2$ , то есть для получения определенности движения звеньев механизма необходимо сообщить независимые движения двум его звеньям. Рассмотрим движение звеньев механизма относительно стойки и относительно водила. Угловые скорости звеньев в каждом из рассматриваемых движений приведены в таблице 15.2.

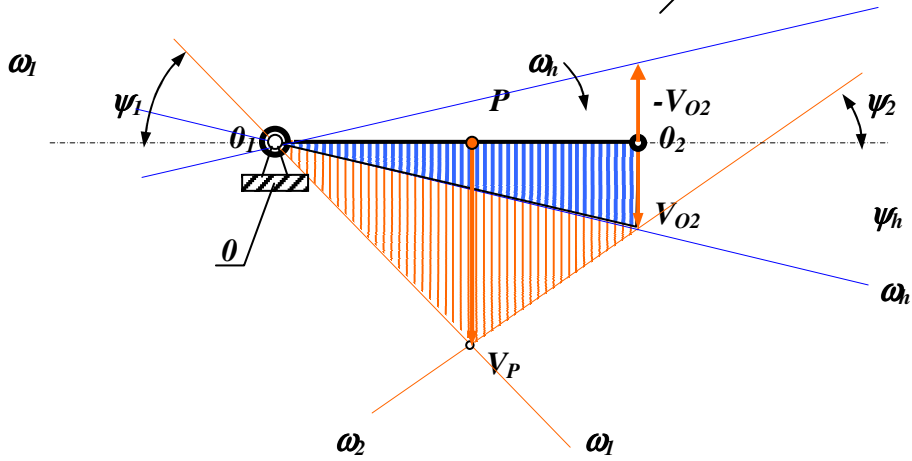
Таблица 15.2

Движение механизма	Звено 1	Звено 2	Звено h	Звено 0
относительно стойки	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_h$	$\omega_0=0$
относительно водила	$\omega_1^* = \omega_1 - \omega_h$	$\omega_2^* = \omega_2 - \omega_h$	$\omega_h - \omega_h = 0$	$-\omega_h$

В движении звеньев относительно водила угловые скорости звеньев равны угловым скоростям в движении относительно стойки минус угловая скорость водила. Если в движении относительно стойки ось зубчатого колеса 2 подвижна, то в движении относительно водила оси обоих зубчатых колес неподвижны. Поэтому к движению относительно водила можно применить основную теорему зацепления.

### Движение механизма относительно стойки





*Движение механизма относительно водила*

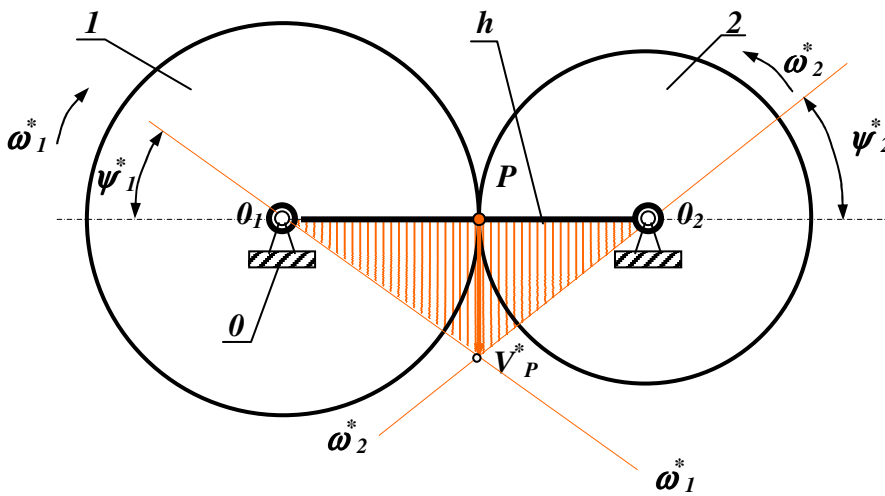


Рис. 15.3

То есть можно записать выражение, которое называется формулой Виллиса для планетарных механизмов

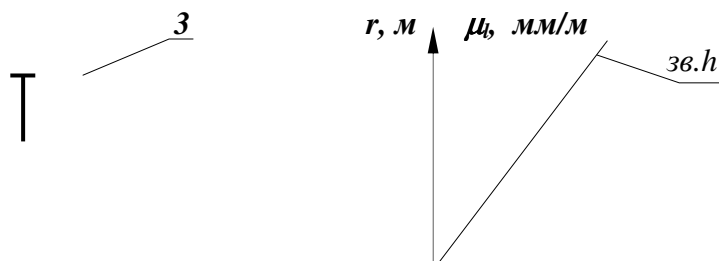
$$\omega_2^* / \omega_1^* = (\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h) = -z_1 / z_2.$$

**Кинематическое исследование типовых планетарных механизмов графическим и аналитическим методами.**

**1. Двухрядный механизм с одним внутренним и одним внешним зацеплением.**

Дано: Кинематическая схема механизма –  $r_i$ ,  
 числа зубьев колес -  $z_i$ ;

Определить: Передаточное отношение механизма - ?





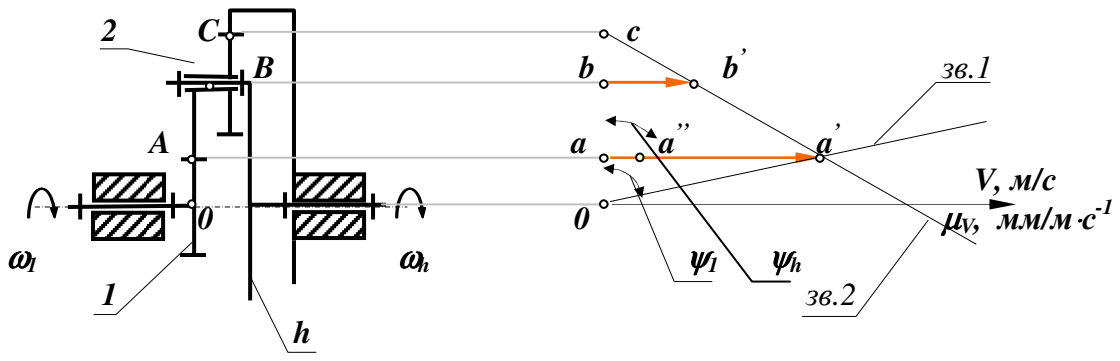


Рис. 15.4

*Аналитическое определение передаточного отношения.*

В планетарном редукторе, изображенном на рис.15.4 на звене 2 нарезаны два зубчатых венца:

$z_2$ , который зацепляется с зубчатым венцом  $z_1$  звена 1;

$z_3$ , который зацепляется с внутренним зубчатыми венцом  $z_4$  звена 3.

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внешнего зацепления колес  $z_2$  и  $z_1$

$$(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h) = -z_2 / z_1;$$

для внутреннего зацепления колес  $z_4$  и  $z_3$

$$(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h) = z_4 / z_3.$$

Перемножим, правые и левые части этих уравнений, и получим

$$[(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h)] \cdot [(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h)] = -z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3),$$

$$[(\omega_1 - \omega_h) / (-\omega_h)] = -z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3),$$

$$u_{1h}^{(3)} = \omega_1 / \omega_h = 1 + z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3).$$

*Графическое определение передаточного отношения.*

В системе координат  $r_i O V$  построим треугольники распределения линейных скоростей звеньев. Для этого из точки A с ординатой  $r_1$  в выбранном произвольном масштабе  $\mu_v$ ,  $mm/m \cdot c^{-1}$  отложим отрезок  $a a'$ . Через конец этого отрезка и начало координат проведем прямую, которая определит распределение скоростей для точек звена 1, лежащих на оси  $r_i$ . Эта прямая образует с осью  $r_i$  угол  $\psi_1$ . Так как в точке c скорости звеньев 2 и 3 равны между собой и равны нулю, то соединяя точку c с прямой с точкой  $a'$ , получим линию распределения скоростей для звена 2. Так как точка принадлежит звеньям 2 и h, то ее скорость определяется по лучу  $c a'$  для радиуса равного  $r_B = (r_1 + r_2)$ , что в масштабе  $\mu_v$ ,  $mm/m \cdot c^{-1}$  соответствует отрезку  $b b'$ . Соединяя точку  $b'$  с началом координат прямой, найдем линию распределения скоростей для водила. Эта линия образует с осью  $r_i$  угол  $\psi_h$ . Передаточное отношение планетарного механизма определенное по данным графическим построениям можно записать так

$$u_{1h}^{(3)} = \omega_1 / \omega_h = \operatorname{tg} \psi_1 / \operatorname{tg} \psi_h = aa' / aa''$$

2. Однорядный механизм с одним внутренним и одним внешним зацеплением.

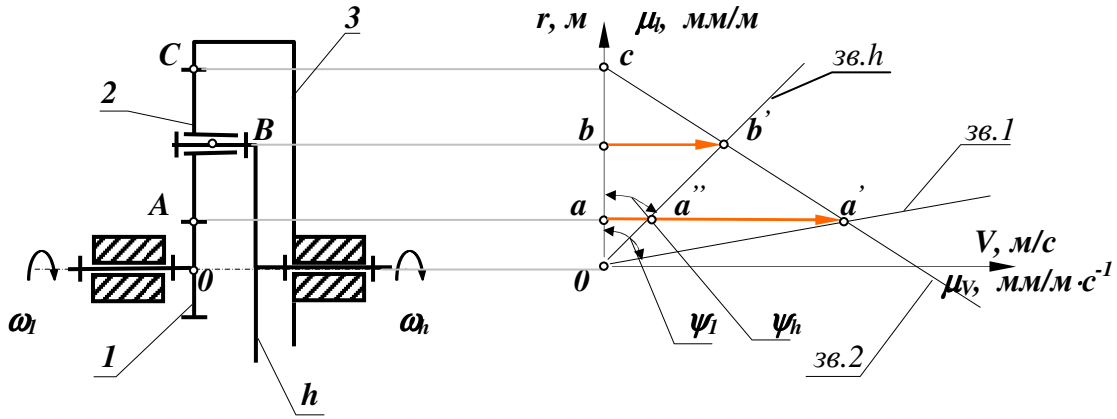


Рис. 15.5

Аналитическое определение передаточного отношения.

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внешнего зацепления колес  $z_2$  и  $z_1$

$$(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h) = -z_2 / z_1;$$

для внутреннего зацепления колес  $z_2$  и  $z_3$

$$(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h) = z_3 / z_2.$$

Перемножим, правые и левые части этих уравнений, и получим

$$[(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h)] \cdot [(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h)] = -z_3 / z_1,$$

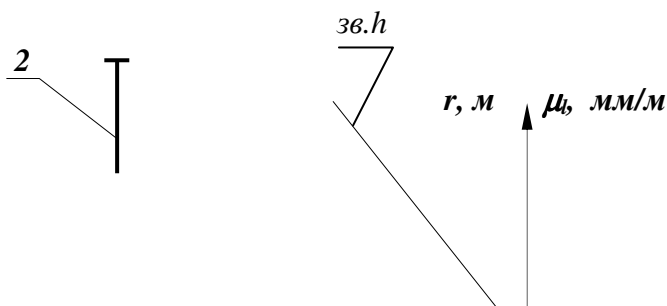
$$[(\omega_1 - \omega_h) / (-\omega_h)] = -z_3 / z_1,$$

$$u_{1h}^{(3)} = \omega_1 / \omega_h = 1 + z_3 / z_1.$$

Графическое определение передаточного отношения.

$$u_{1h}^{(3)} = \omega_1 / \omega_h = \operatorname{tg} \psi_1 / \operatorname{tg} \psi_h = aa' / aa''$$

4. Двухрядный механизм с двумя внешними зацеплениями.



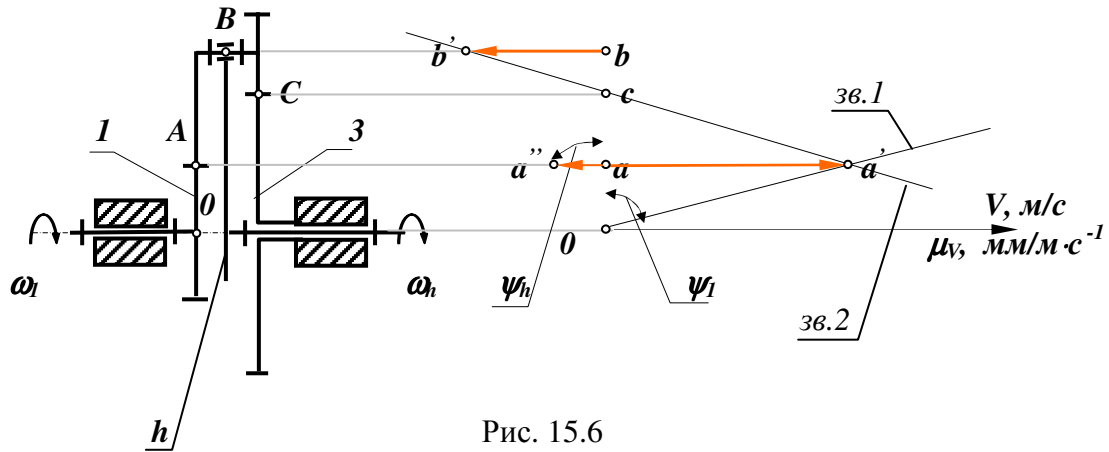


Рис. 15.6

*Аналитическое определение передаточного отношения.*

В планетарном редукторе, изображенном на рис.15.6 на звене 2 нарезаны два зубчатых венца:

$z_2$ , который зацепляется с зубчатым венцом  $z_1$  звена 1;

$z_3$ , который зацепляется с внутренним зубчатым венцом  $z_4$  звена 3.

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внешнего зацепления колес  $z_2$  и  $z_1$

$$(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h) = -z_2/z_1;$$

для внешнего зацепления колес  $z_4$  и  $z_3$

$$(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h) = -z_4/z_3.$$

Перемножим, правые и левые части этих уравнений, и получим

$$[(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h)] \cdot [(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h)] = z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3),$$

$$[(\omega_1 - \omega_h) / (-\omega_h)] = z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3),$$

$$u_{1h}^{(3)} = \omega_1 / \omega_h = 1 - z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3).$$

*Графическое определение передаточного отношения.*

$$u_{1h}^{(3)} = \omega_1 / \omega_h = \operatorname{tg} \psi_1 / \operatorname{tg} \psi_h = aa' / aa''.$$

#### 4. Двухрядный механизм с двумя внутренними зацеплениями.

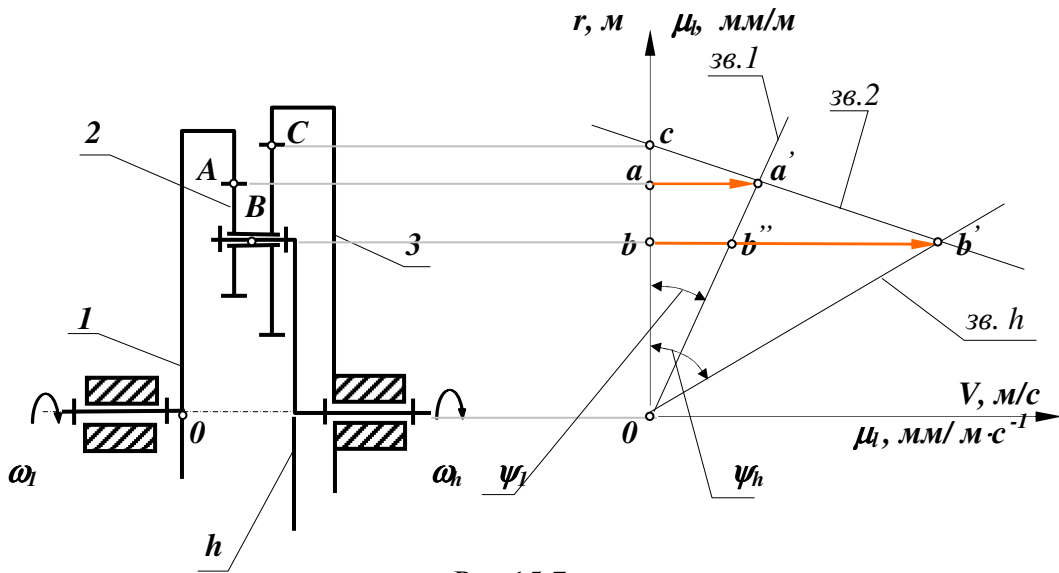


Рис.15.7

*Аналитическое определение передаточного отношения.*

В планетарном редукторе, изображенном на рис.15.6 на звене 2 нарезаны два зубчатых венца:

$z_2$ , который зацепляется с зубчатым венцом  $z_1$  звена 1;

$z_3$ , который зацепляется с внутренним зубчатыми венцом  $z_4$  звена 3.

По формуле Виллиса отношение угловых скоростей звеньев для внутреннего зацепления колес  $z_2$  и  $z_1$

$$(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h) = z_2 / z_1;$$

для внутреннего зацепления колес  $z_4$  и  $z_3$

$$(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h) = z_4 / z_3.$$

Перемножим, правые и левые части этих уравнений, и получим

$$[(\omega_1 - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h)] \cdot [(\omega_2 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h)] = z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3),$$

$$[(\omega_1 - \omega_h) / (-\omega_h)] = z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3),$$

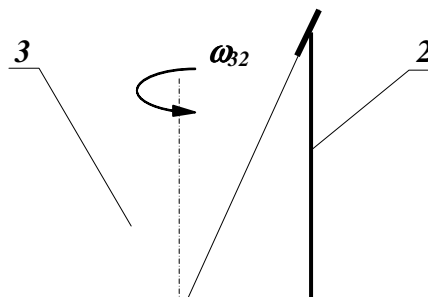
$$u_{1h}^{(3)} = \omega_1 / \omega_h = 1 - z_2 \cdot z_4 / (z_1 \cdot z_3).$$

*Графическое определение передаточного отношения.*

$$u_{1h}^{(3)} = \omega_1 / \omega_h = \operatorname{tg} \psi_1 / \operatorname{tg} \psi_h = bb' / bb''.$$

**Кинематическое исследование пространственных планетарных механизмов методом планов угловых скоростей.**

Рассмотрим этот метод исследования на примере планетарного механизма конического дифференциала заднего моста автомобиля. На рис. 15.8 изображена схема механизма и планы угловых скоростей.



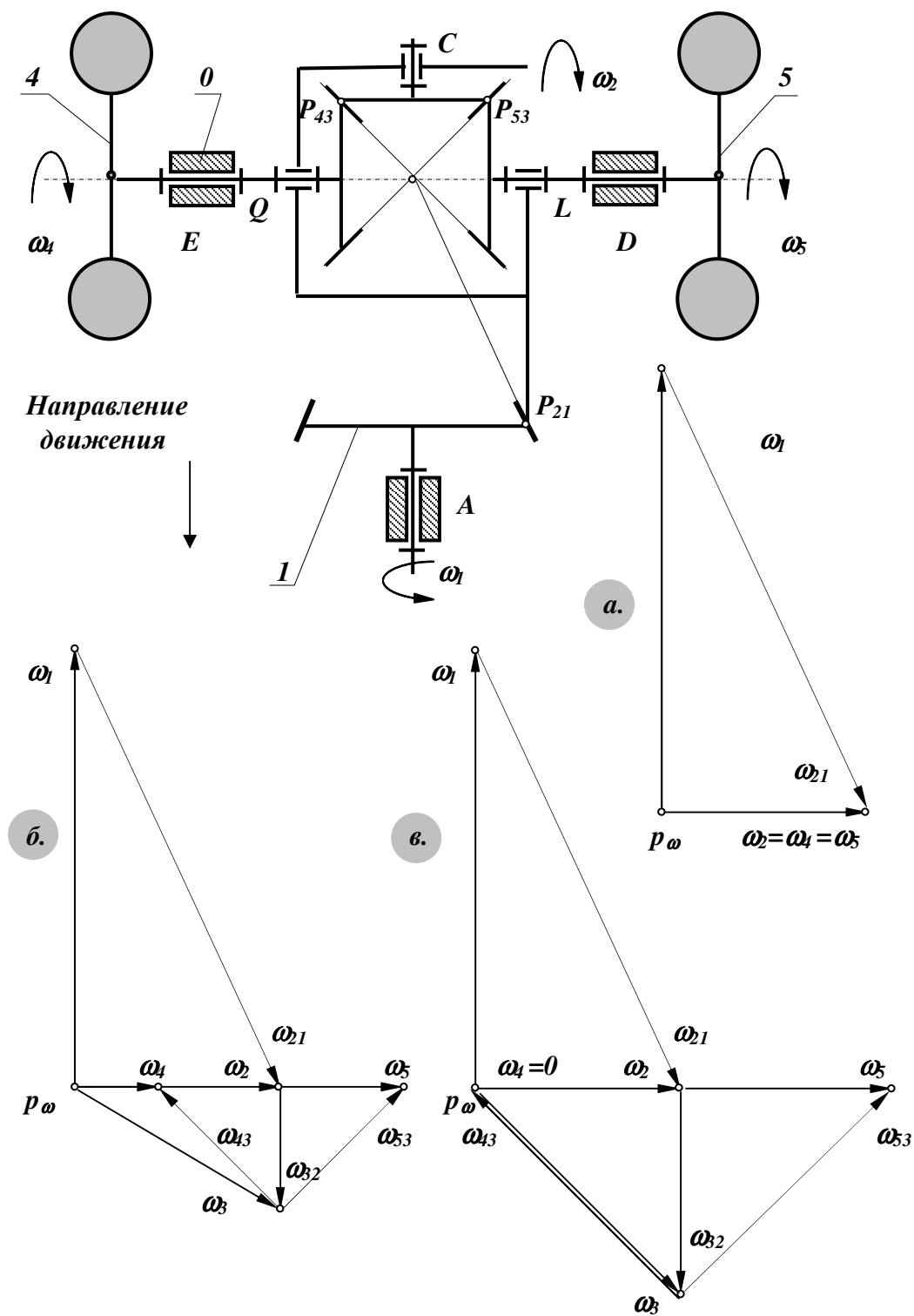


Рис. 15.8

Планы угловых скоростей строятся в соответствии с векторными уравнениями:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 + \omega_{21}; & \omega_3 &= \omega_2 + \omega_{32}; \\ \omega_4 &= \omega_3 + \omega_{43}; & \omega_5 &= \omega_3 + \omega_{53}. \end{aligned}$$

Вектора относительных угловых скоростей направлены по осям мгновенного относительного вращения:

$\omega_{21}$  - по линии контакта начальных конусов звеньев 2 и 1;

$\omega_{32}$  - по оси шарнира С;

$\omega_{43}$  - по линии контакта начальных конусов звеньев 4 и 3;

$\omega_{53}$  - по линии контакта начальных конусов звеньев 5 и 3.

Вектора абсолютных угловых скоростей направлены по осям кинематических пар, которые образуют звенья со стойкой:

$\omega_2$  – по оси пары В ;  $\omega_1$  – по оси пары А ;

$\omega_4$  – по оси пары Е ;  $\omega_5$  – по оси пары D .

Направление угловой скорости сателлита 3 определяется соотношением величин угловых скоростей  $\omega_2$  и  $\omega_{32}$ .

Рассмотрим три режима движения автомобиля:

- прямолинейное движение  $\omega_4 = \omega_5$  (векторная диаграмма на рис.15.8а).

В этом режиме движения корпус дифференциала 2 и полуоси 4 и 5 вращаются с одинаковыми угловыми скоростями  $\omega_4 = \omega_5 = \omega_2$ , а относительная угловая скорость сателлита  $\omega_{32} = 0$ .

- поворот автомобиля направо  $\omega_4 < \omega_5$  (векторная диаграмма на рис.15.8б).

При повороте направо угловые скорости полуосей не равны и связаны неравенством  $\omega_4 < \omega_5$ , поэтому сателлит будет вращаться с такой угловой скоростью  $\omega_{32}$ , которая обеспечивает постоянство угловой скорости корпуса дифференциала  $\omega_2$ .

- буксование левого колеса  $\omega_4 = 0$  (векторная диаграмма на рис.15.8в).

При буксовании левого колеса, правое колесо останавливается  $\omega_4 = 0$ , а левое будет вращаться с угловой скоростью  $\omega_5 = 2 \cdot \omega_2$ .

Для того, чтобы в условиях низкого сцепления колес с грунтом, уменьшить опасность их пробуксовывания в дифференциалы автомобилей высокой проходимости включают элементы трения или блокировки.

## Лекция 18

Краткое содержание: Волновые передачи. Назначение и области применения. Преимущества и недостатки волновых передач. Классификация типовых структурных схем ВЗП. Структура волновой зубчатой передачи. Кинематика волнового механизма. Расчет геометрии волнового зубчатого зацепления.

### *Волновые передачи.*

#### *Назначение и области применения.*

Волновой передачей называется зубчатый или фрикционный механизм, предназначенный для передачи и преобразования движения (обычно вращательного), в котором движение преобразуется за счет волновой деформации венца гибкого колеса специальным звеном (узлом) – генератором волн. Основными элементами дифференциального волнового механизма являются: входной или быстроходный вал с генератором волн, гибкое колесо с муфтой, соединяющей его с первым тихоходным валом, жесткое колесо, соединенное со вторым тихоходным валом, корпус.

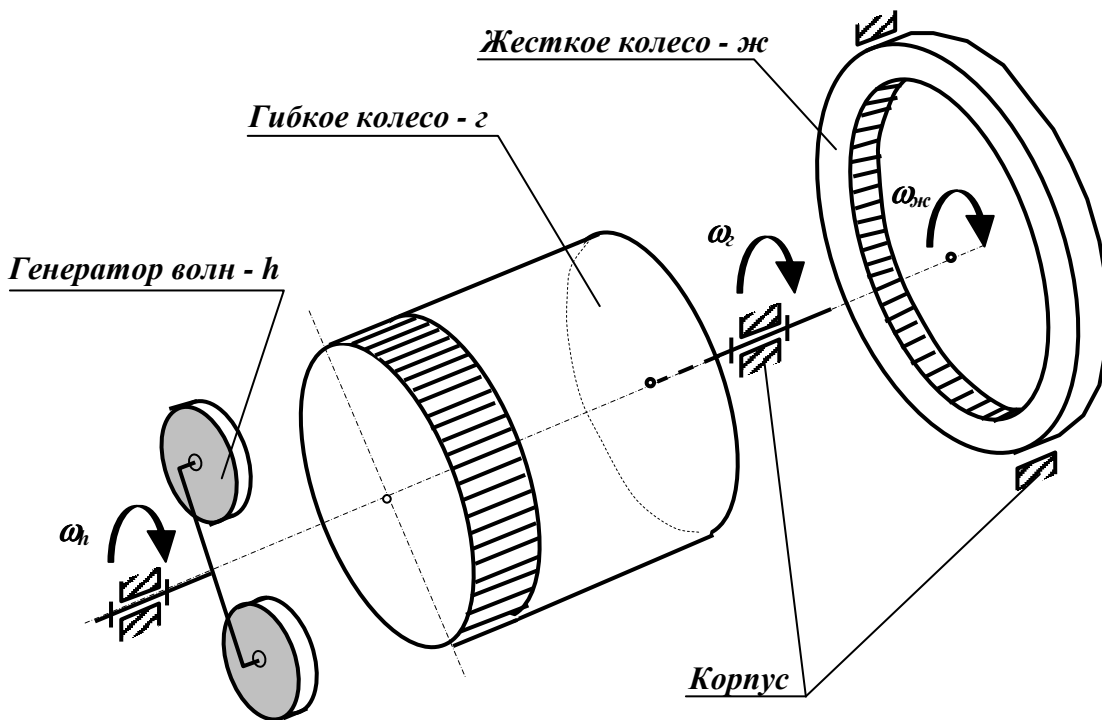


Рис.18.1

Существует большое количество конструкций волновых механизмов. Обычно эти механизмы преобразуют входное вращательное движение в выходное вращательное или поступательное. Волновые механизмы можно рассматривать как одну из разновидностей многопоточных планетарных механизмов, так как они обладают многозонным, а в случае зубчатого механизма, и многопарным контактом выходного звена с гибким колесом. Многозонный контакт обеспечивается за счет формы генератора волн (кулачок чаще с двумя, редко с тремя выступами), многопарный – за счет податливости зубчатого венца гибкого колеса. Такое сочетание позволяет волновым механизмам передавать значительные нагрузки при малых габаритах. Податливость зубчатого венца обеспечивает достаточно равномерное распределение нагрузки по зубьям, находящимся в зоне зацепления. При номинальных нагрузках процент зубьев находящихся в зацеплении составляет 15-25% от общего их числа. Поэтому в волновых передачах применяется мелкозубчатое зацепление, а числа зубьев колес лежат в пределах от 100 до

600. Зона зацепления в волновой зубчатой передаче совпадает с вершиной волны деформации. По числу зон или волн передачи делятся на одноволновые, двухволновые и так далее. Передачи с числом волн более трех применяются редко. Распределение передаваемых усилий по нескольким зонам уменьшает нагрузку на элементы пар и позволяет существенно уменьшать габаритные размеры и массу механизмов. Многозонный и многопарный контакт звеньев существенно увеличивает жесткость механизма, а за счет осреднения ошибок и зазоров, уменьшает мертвый ход и кинематическую погрешность механизма. Поэтому волновые механизмы обладают высокой кинематической точностью и, несмотря на наличие гибкого элемента, достаточно высокой жесткостью. Образующиеся в структуре волнового механизма внутренние контуры, увеличивают теоретическое число избыточных или пассивных связей в механизме. Однако гибкое колесо за счет податливости компенсирует ряд возникающих перекосов. Поэтому при изготовлении и сборке волновых механизмов число необходимых компенсационных развязок меньше чем в аналогичных механизмах с жесткими звеньями.

Гибкое колесо обеспечивает волновым передачам возможность передачи движения через герметичную стенку, которая разделяет две среды (например, космический аппарат и открытый космос). При этом гибкое колесо выполняется как элемент герметичной стенки, входной вал и генератор волн располагаются по одну сторону стенки (внутри космического аппарата), а выходное звено – по другую (в космическом пространстве). Схема герметичной волновой передачи приведена на рис. 18.1.

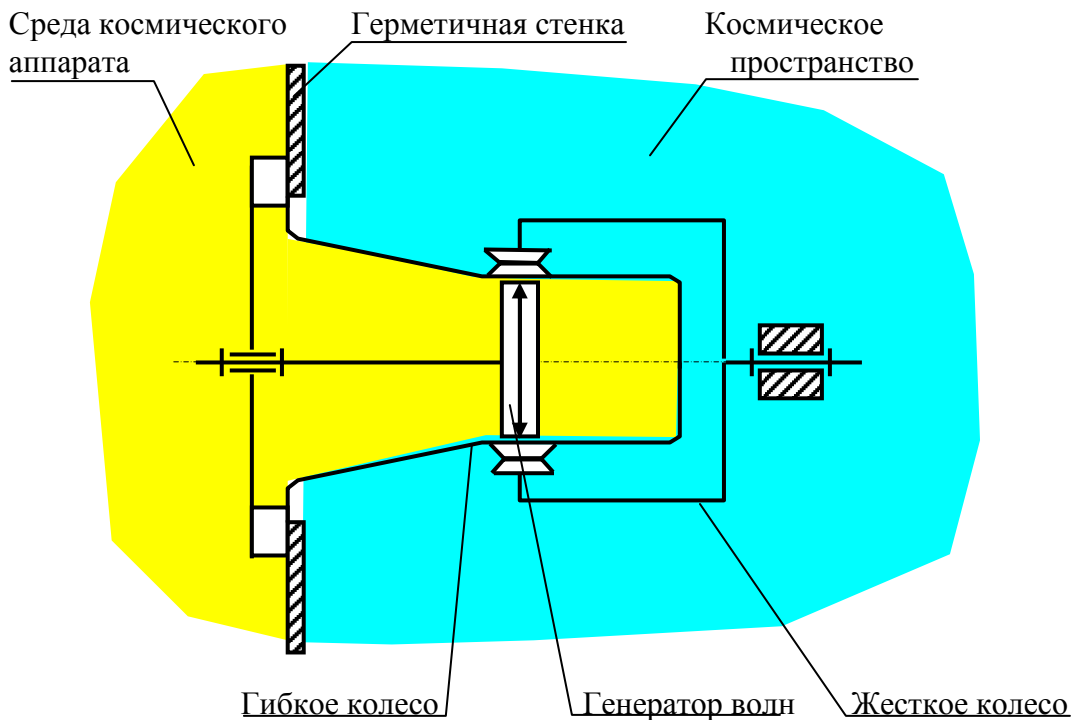


Рис. 18.1

### ***Преимущества и недостатки волновых передач.***

Преимущества:

- Возможность реализации в одной ступени при двухволновом генераторе волн больших передаточных отношений в диапазоне от 40 до 300.
- Высокая нагрузочная способность при относительно малых габаритах и массе.



- Малый мертвый ход и высокая кинематическая точность.
- Возможность передачи движения через герметичную перегородку.
- Малый приведенный к входному валу момент инерции (для механизмов с дисковыми генераторами волн).

Недостатки:

- Меньшая приведенная к выходному валу крутильная жесткость.
- Сложная технология изготовления гибких зубчатых колес.

### **Структура волновой зубчатой передачи.**

Рассмотрим одноволновую зубчатую передачу с генератором волн, который образует с гибким колесом пару скольжения. Волновая передача не может рассматриваться в рамках ранее принятых нами допущений, так как в ней содержится гибкое звено. Поэтому необходимо определить место гибкого элемента в структуре механизма. Гибкая связь обычно допускает по действием силовых воздействий определенные относительные перемещения соединяемых звеньев. Поэтому ее отнесем к отношениям между элементами или к упругой кинематической паре. Зубчатое колесо представляет собой замкнутую систему зубьев. В каждый рассматриваемый момент в контакте в высшей паре могут находиться один или несколько зубьев. Так как зубчатые колеса – звенья, то зубья – элементы высшей кинематической пары. Поэтому многопарный контакт между зубчатыми колесами является контактом между элементами одной кинематической пары. Пассивные или избыточные связи, возникающие в этом контакте, относятся к внутренним связям кинематической пары и в структурном анализе на уровне звеньев не учитываются. Поэтому считаем, что в зацеплении находится один зуб. Структурная схема механизма с остановленным жестким колесом при гибком соединении зуба с валом гибкого колеса может быть представлена следующим образом.

*Волновая зубчатая передача с упругой муфтой – стаканом.*

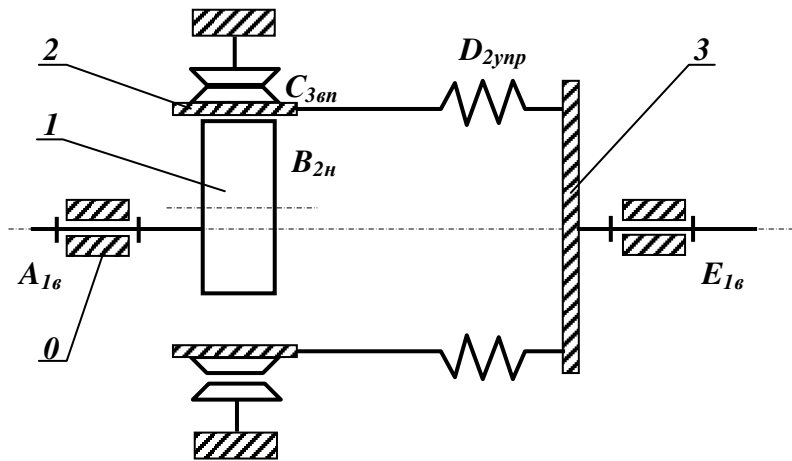


Рис. 18.3

Волновая зубчатая передача с волновой зубчатой муфтой.

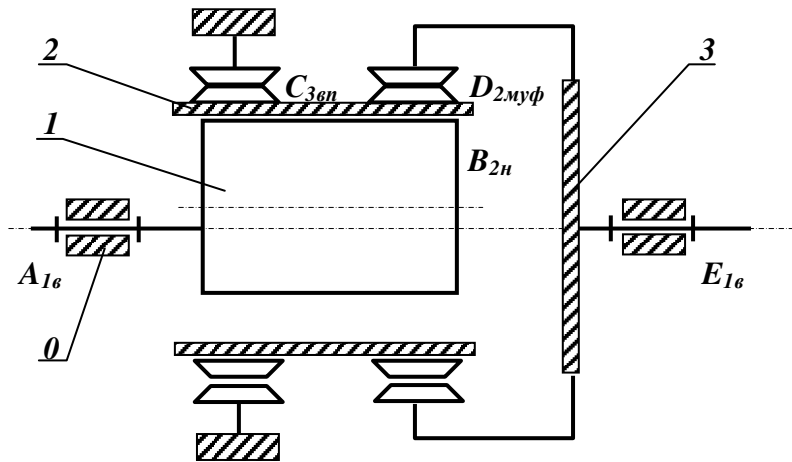


Рис. 18.4

Рассмотрим звенья и кинематические пары механизмов:

- звенья: 0 – корпус с закрепленным на нем жестким колесом;  
 1 – быстроходный вал с генератором волн;  
 2 – зуб гибкого колеса;  
 3 – вал гибкого колеса;

• кинематические пары:

$A_{1в}$  и  $E_{1в}$  – одноподвижные вращательные пары;

$B_{2н}$  – двухподвижная низшая пара (рис.18.5). Эта пара образована зубом гибкого колеса и кулачком генератора волн. Пара допускает два независимых движения зуба относительно кулачка: по касательной к профилю кулачка (по оси  $x$ ) и в осевом направлении (по оси  $y$ ). Вращение зуба вокруг оси  $y$  и перемещения его по оси  $z$  не являются независимыми и определяются формой профиля кулачка.

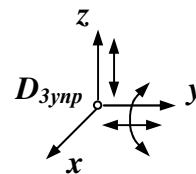
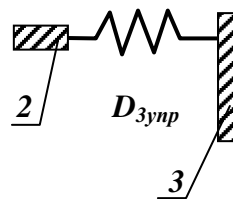
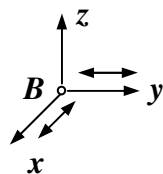
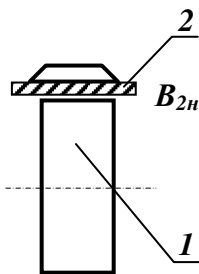


Рис. 18.5

Рис. 18.6

$D_{3унр}$  – двухподвижный упругий шарнир (рис.18.6). Данная кинематическая пара должна обеспечивать зубу гибкого колеса 2 возможность выполнения деформации относительно вала 3, но относительные движения в тангенциальном направлении (по оси  $x$ ) запрещены. Аналогичные движения обеспечивает пара  $D_{3муф}$  в зубчатом соединении в волновой зубчатой муфте и пара  $C_{3вп}$  в волновом зубчатом зацеплении (рис.18.7). Оси координат в зубчатой паре направляются так: ось  $z$  – по касательной к профилям в точке контакта, ось  $x$  – по нормали к профилям и ось  $y$  – по линии контакта зубьев.

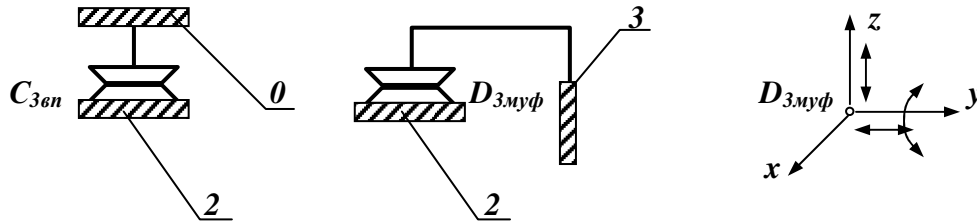


Рис. 18.7

Подвижность механизма подсчитывается следующим образом

$$n = 3; \quad p_1 = 2; \quad p_2 = 1; \quad p_3 = 2;$$

$$W^{np} = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 18 - 20 = -2.$$

В механизме имеется одна местная подвижность  $W_m = 1$  – подвижность зуба гибкого колеса в осевом направлении (по оси  $y$ ). Заданная или основная подвижность механизма  $W_0 = 1$ . Число избыточных связей в механизме равно

$$q^{np} = W_0 + W_m + W^{np} = 1 + 1 - (-2) = 4.$$

Эти избыточные или пассивные связи определяют требование параллельности осей пар  $B, C, D$  и  $E$  оси пары  $A$ .

Движение всех звеньев волнового механизма осуществляется в параллельных плоскостях. Поэтому механизм волновой зубчатой передачи можно рассматривать как плоский. В этом случае

$$n = 3; \quad p_1 = 3; \quad p_2 = 2;$$

$$W^{nl} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1.$$

$$W_m = 0; \quad W_0 = 1; \quad q^{nl} = W_0 + W_m + W^{nl} = 1 - 1 = 0.$$

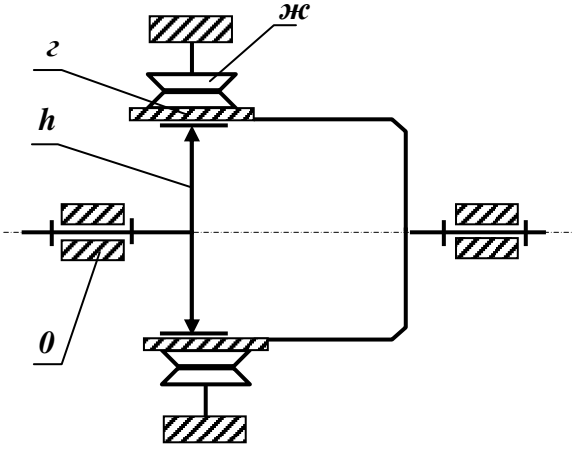
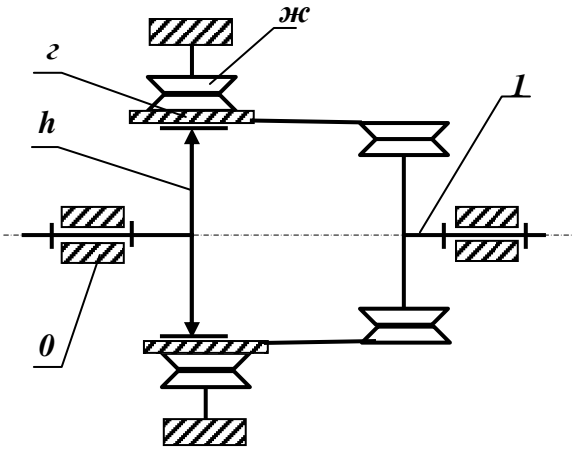
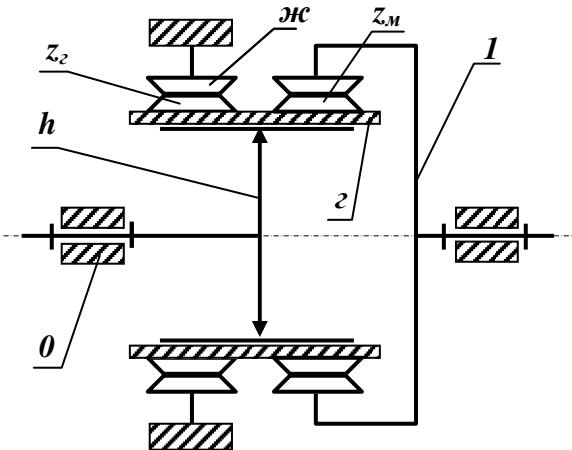
### **Классификация типовых структурных схем ВЗП.**

В таблице 18.1 приведены наиболее распространенные структурные схемы типовых волновых зубчатых передач, а также диапазоны рекомендуемых передаточных отношений и ориентировочные значения КПД при этих передаточных отношениях. Основное отличие одной схемы от другой заключается в конструкции муфты соединяющей гибкий зубчатый венец с корпусом или с выходным тихоходным валом. В таблице показаны только три наиболее распространенных разновидности: гибкая оболочка в форме стакана, гибкая труба с шлицевым соединением и волновая зубчатая муфта. Если в передаче с гибким колесом – кольцом (в третьей из рассматриваемых схем), второе волновое зацепление выполнить как волновую зубчатую передачу, то получим двухступенчатую ВЗП.

### **Типовые волновые зубчатые передачи (ВЗП).**

Таблица 18.1

№	Структурная схема ВЗП	$u_{ред}$	$\eta$
---	-----------------------	-----------	--------

<p>1.</p>		<p>50... 300</p> $u_{h1}^{ЖС} = -z_2 / (z_{ЖС} - z_2)$	<p>0.95..0.8</p>
<p>2.</p>		<p>50... 300</p> $u_{h1}^{ЖС} = -z_2 / (z_{ЖС} - z_2)$	<p>0.9...0.8</p>
<p>3.</p>		$u_{h1}^{ЖС} = z_1 z_2 / (z_1 z_2 - z_M z_{ЖС})$ <p>2000... 10<sup>5</sup></p> <p>Если <math>z_M = z_1</math>, то  <math display="block">u_{h1}^{ЖС} = -z_2 / (z_{ЖС} - z_2)</math></p> <p>40... 300</p>	<p>0.2..0.01</p> <p>0.85..0.7</p>

**Кинематика волнового механизма.**

Рассмотрим идеальную фрикционную волновую передачу. В этой передачи контактирующие поверхности гибкого и жесткого колес будут соответствовать начальным поверхностям зубчатых колес. Толщину гибкого колеса принимаем бесконечно малой. Тогда срединная поверхность гибкого колеса совпадает с его начальной поверхностью.

Считаем, что срединная поверхность гибкого колеса нерастяжима, то есть длина ее до и после деформирования колеса генератором волн остается неизменной.

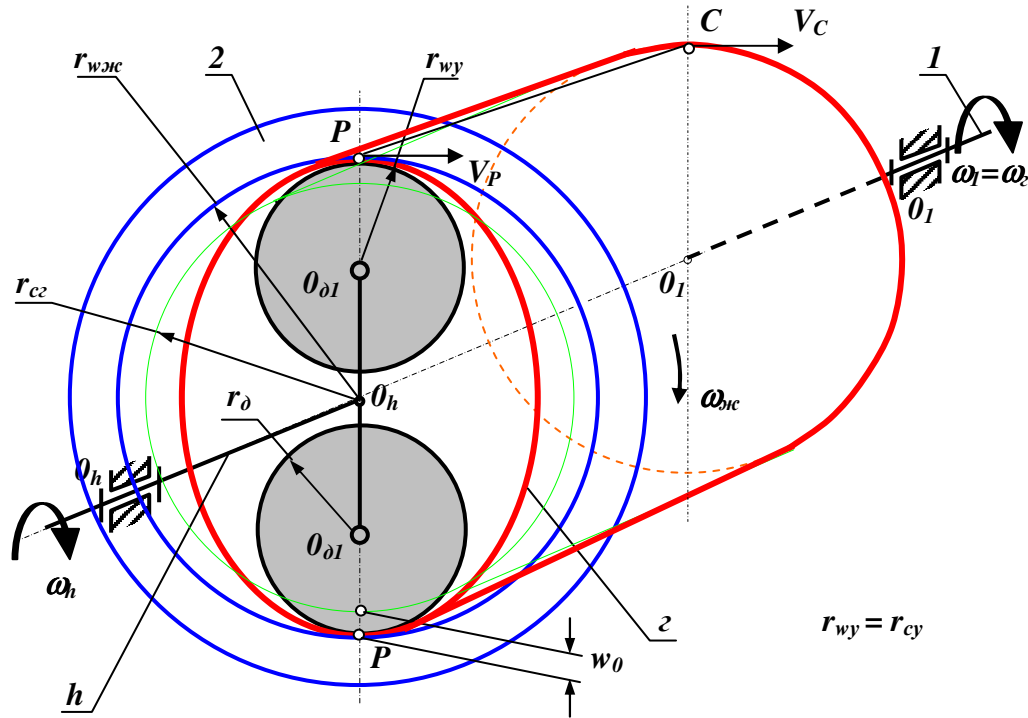


Рис. 18.8

На рис.18.8 приняты следующие обозначения:

- $r_{wy}$  - радиус начальной окружности условного колеса;
- $r_{wжс}$  - радиус начальной окружности жесткого колеса;
- $r_{\partial}$  - радиус деформирующего диска;
- $r_{сз}$  - радиус срединной окружности гибкого колеса;
- $r_{сy}$  - радиус срединной окружности условного колеса;
- $w_0$  - радиальная деформация гибкого колеса.

Рассмотрим движение звеньев дифференциального волнового механизма относительно генератора волн. Тогда угловые скорости звеньев изменятся следующим образом:

Таблица 18.2

Движение механизма	Звено $z$	Звено $ж$	Звено $h$	Звено $\partial$
относительно стойки	$\omega_z$	$\omega_{жс}$	$\omega_h$	$\omega_{\partial}=0$
относительно генератора волн	$\omega_z^* = \omega_z - \omega_h$	$\omega_{жс}^* = \omega_{жс} - \omega_h$	$\omega_h - \omega_h = 0$	$-\omega_h$

В движении звеньев относительно генератора волн скорости звеньев равны угловым скоростям в движении относительно стойки минус угловая скорость генератора. Скорость точки жесткого колеса, совпадающей с полюсом зацепления  $V_{Pжс} = (\omega_{жс} - \omega_h) r_{wжс}$ , а скорость точки, совпадающей с полюсом на гибком колесе

$$V_{Pz} = (\omega_z - \omega_h) r_{wz}.$$

В полюсе зацепления нет скольжения и  $V_{Pжс} = V_{Pz}$ , а так как срединную поверхность оболочки считаем нерастяжимой то  $V_{Pz} = V_C$ . Тогда для движения относительно генератора волн

$$V_{Pжс} = (\omega_{жс} - \omega_h) r_{wжс}, \quad V_C = (\omega_z - \omega_h) r_{wz},$$

$$V_{P_{жс}} = V_C \Rightarrow (\omega_{жс} - \omega_h) r_{w_{жс}} = (\omega_2 - \omega_h) r_{w_2},$$

$$(\omega_{жс} - \omega_h) / (\omega_2 - \omega_h) = r_{w_2} / r_{w_{жс}} = z_2 / z_{жс},$$

$$z_{жс} \cdot \omega_{жс} + (z_2 - z_{жс}) \cdot \omega_h - z_2 \cdot \omega_2 = 0.$$

Для волнового зубчатого редуктора [ 1 ]:

- при заторможенном жестком колесе  $\omega_{жс} = 0$

$$u_{h_2}^{жс} = \omega_h / \omega_2 = -z_2 / (z_{жс} - z_2);$$

- при заторможенном гибком колесе  $\omega_2 = 0$

$$u_{h_{жс}}^2 = \omega_h / \omega_{жс} = z_{жс} / (z_{жс} - z_2).$$

### Расчет геометрии волнового зубчатого зацепления.

В расчете геометрии волнового зацепления существует два основных подхода. В первом методе [ 2 ] исследуется относительное движение зубьев и, на основе этого, разрабатываются рекомендации по выбору геометрических параметров зацепления. Второй метод [ 3 ] основан на использовании расчетного внутреннего зацепления жесткого колеса с условным расчетным колесом. Это колесо вписывается в деформированное гибкое колесо на участке возможного зацепления. Преимуществом первого метода можно считать относительную универсальность, которая позволяет в расчете геометрии учитывать деформации как гибкого, так и жесткого колеса под нагрузкой. Однако разработать рекомендации даже для небольшого количества конструкций ВЗП затруднительно. Второй метод позволяет использовать для расчета геометрии стандартный расчет внутреннего эвольвентного зацепления для пары колес  $z_{жс}$  и  $z_y$ . Число зубьев условного колеса рассчитывается по следующей формуле

$$z_y = z_2 / (1 \pm k_{\beta} \cdot \mu_w),$$

где  $\mu_w = w_0 / r_{c_2}$  - относительная деформация гибкого колеса;  
 $k_{\beta}$  - коэффициент, определяемый углом  $\beta$ ;  
 $\beta$  - угловая координата участка постоянной кривизны деформированной кривой гибкого колеса.

После определения  $z_y$  определяются

- толщина гибкого колеса под зубчатым венцом  $h_c$

$$h_c = (60 + 0.2 \cdot z_2) \cdot m \cdot z_2 \cdot 10^{-4};$$

- коэффициент смещения гибкого колеса

$$x_2 = (h_a^* + c^* + 0.5 \cdot h_c / m) \cdot \delta;$$

- относительная деформация

$$\mu_w = w_0 / r_{c_2} = \pm [(z_{жс} - z_2) / z_2] \cdot \gamma$$

где при внутреннем деформировании: знак +,  $\delta = 1$ ,  $\gamma = 0.95 \dots 1.1$ ;

при внешнем деформировании: знак -,  $\delta = 0.8 \dots 0.9$ ,  $\gamma = 0.85 \dots 1.1$ ;

- радиус срединной окружности условного колеса

$$r_{cy} = (z_2 + x_2 \pm h_a^* \pm c^* \pm 0.5 \cdot h_c / m) \cdot m;$$

- радиус срединной окружности гибкого колеса

$$r_{c2} = (z_2 / z_y) \cdot r_{cy} ;$$

- межосевое расстояние

$$a_w = \pm r_{c2} \cdot (1 + \mu_w) + r_{cy} ;$$

- угол зацепления

$$\alpha_w = \arccos [ \pm (z_{жс} - z_y) \cdot m \cdot \cos \alpha ] / (2 \cdot a_w ).$$

Далее расчет ведется по стандартному алгоритму расчета внутреннего эвольвентного зацепления [ 3 ].

### *Литература.*

1. Гинзбург Е.Г. Волновые зубчатые передачи. – Л.: Машиностроение, 1969. – 159 с., ил.
2. Волновые механические передачи. Методические рекомендации. – М.: НИИИ по Машиностроению, 1976. – 83 с., ил.
3. Волновые зубчатые передачи. Роботы-манипуляторы. Конспект лекций. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1980. – 58 с., ил.

## *Лекция 19*

Краткое содержание: Промышленные роботы и манипуляторы. Назначение и области применения. Классификация промышленных роботов. Принципиальное устройство промышленного робота. Основные понятия и определения. - Структура манипуляторов. Геометро-кинематические характеристики.

### *Промышленные роботы и манипуляторы.*

**Промышленный робот** – автоматическая машина, состоящая из манипулятора и устройства программного управления его движением, предназначенная для замены человека при выполнении основных и вспомогательных операций в производственных процессах. **Манипулятор** – совокупность пространственного рычажного механизма и системы приводов, осуществляющая под управлением программируемого автоматического устройства или человека-оператора действия (манипуляции), аналогичные действиям руки человека.

### *Назначение и область применения.*

Промышленные роботы предназначены для замены человека при выполнении основных и вспомогательных технологических операций в процессе промышленного производства. При этом решается важная социальная задача - освобождения человека от работ, связанных с опасностями для здоровья или с тяжелым физическим трудом, а также от простых монотонных операций, не требующих высокой квалификации. Гибкие автоматизированные производства, создаваемые на базе промышленных роботов, позволяют решать задачи автоматизации на предприятиях с широкой номенклатурой продукции при мелкосерийном и штучном производстве. Копирующие манипуляторы, управляемые человеком-оператором, необходимы при выполнении различных работ с радиоактивными материалами. Кроме того, эти устройства незаменимы при выполнении работ в космосе, под водой, в химически активных средах. Таким образом, промышленные роботы и копирующие манипуляторы являются важными составными частями современного промышленного производства.

### *Классификация промышленных роботов.*

Промышленные роботы классифицируются по следующим признакам:

- по характеру выполняемых технологических операций
  - ◆ основные;
  - ◆ вспомогательные;
  - ◆ универсальные;
- по виду производства
  - ◆ литейные;
  - ◆ сварочные;
  - ◆ кузнечно-прессовые;
  - ◆ для механической обработки;
  - ◆ сборочные;
  - ◆ окрасочные;
  - ◆ транспортно-складские;
- по системе координат руки манипулятора
  - ◆ прямоугольная;



- ◆ цилиндрическая;
- ◆ сферическая;
- ◆ сферическая угловая (ангулярная);
- ◆ другие;
- по числу подвижностей манипулятора;
- по грузоподъемности
  - ◆ сверхлегкие (до 10 Н);
  - ◆ легкие (до 100 Н);
  - ◆ средние (до 2000 Н);
  - ◆ тяжелые (до 10000 Н);
  - ◆ сверхтяжелые (свыше 10000 Н);
- по типу силового привода
  - ◆ электромеханический;
  - ◆ пневматический;
  - ◆ гидравлический;
  - ◆ комбинированный;
- по подвижности основания
  - ◆ мобильные;
  - ◆ стационарные;
- по виду программы
  - ◆ с жесткой программой;
  - ◆ перепрограммируемые;
  - ◆ адаптивные;
  - ◆ с элементами искусственного интеллекта;
- по характеру программирования
  - ◆ позиционное;
  - ◆ контурное;
  - ◆ комбинированное.

### ***Принципиальное устройство промышленного робота.***

Манипулятор промышленного робота по своему функциональному назначению должен обеспечивать движение выходного звена и, закрепленного в нем, объекта манипулирования в пространстве по заданной траектории и с заданной ориентацией. Для полного выполнения этого требования основной рычажный механизм манипулятора должен иметь не менее шести подвижностей, причем движение по каждой из них должно быть управляемым. Промышленный робот с шестью подвижностями является сложной автоматической системой. Эта система сложна как в изготовлении, так и в эксплуатации. Поэтому в реальных конструкциях промышленных роботов часто используются механизмы с числом подвижностей менее шести. Наиболее простые манипуляторы имеют три, реже две, подвижности. Такие манипуляторы значительно дешевле в изготовлении и эксплуатации, но предъявляют специфические требования к организации рабочей среды. Эти требования связаны с заданной ориентацией объектов манипулирования относительно механизма робота. Поэтому оборудование должно располагаться относительно такого робота с требуемой ориентацией.

Рассмотрим для примера структурную и функциональную схемы промышленного робота с трехподвижным манипулятором. Основной механизм руки манипулятора состоит из неподвижного звена 0 и трех подвижных звеньев 1, 2 и 3 (рис.19.1).



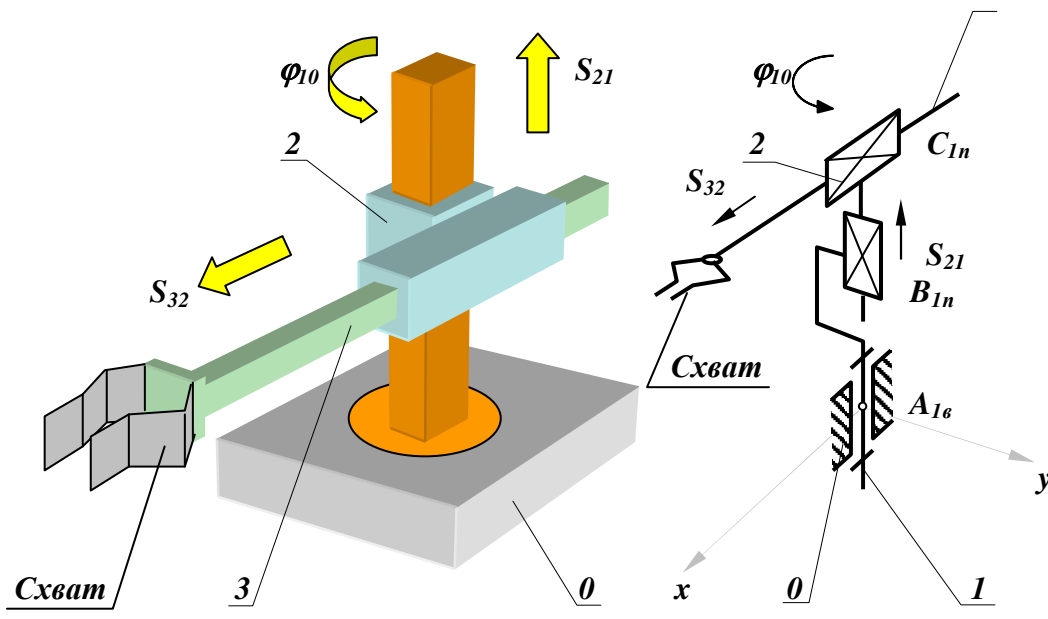
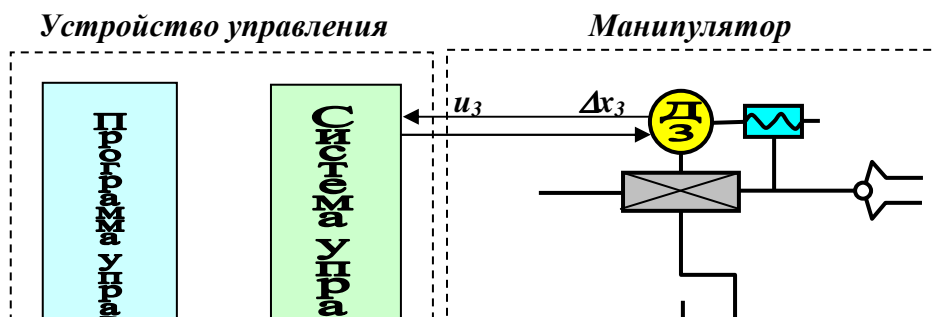


Рис. 19.1

Механизм этого манипулятора соответствует цилиндрической системе координат. В этой системе звено 1 может вращаться относительно звена 0 (относительное угловое перемещение  $\varphi_{10}$ ), звено 2 перемещается по вертикали относительно звена 1 (относительное линейное перемещение  $S_{21}$ ) и звено 3 перемещается в горизонтальной плоскости относительно звена 2 (относительное линейное перемещение  $S_{32}$ ). На конце звена 3 укреплено захватное устройство или схват, предназначенный для захвата и удержания объекта манипулирования при работе манипулятора. Звенья основного рычажного механизма манипулятора образуют между собой три одноподвижные кинематические пары (одну вращательную А и две поступательные В и С) и могут обеспечить перемещение объекта в пространстве без управления его ориентацией. Для выполнения каждого из трех относительных движений манипулятор должен быть оснащен приводами, которые состоят двигателей с редуктором и системы датчиков обратной связи. Так как движение объекта осуществляется по заданному закону движения, то в системе должны быть устройства сохраняющие и задающие программу движения, которые назовем программносителями. При управлении от ЭВМ такими устройствами могут быть дискеты, диски CD, магнитные ленты и др. Преобразование заданной программы движения в сигналы управления двигателями осуществляется системой управления. Эта система включает ЭВМ, с соответствующим программным обеспечением, цифроаналоговые преобразователи и усилители. Система управления, в соответствии с заданной программой, формирует и выдает на исполнительные устройства приводов (двигатели) управляющие воздействия  $u_i$ . При необходимости она корректирует эти воздействия по сигналам  $\Delta x_i$ , которые поступают в нее с датчиков обратной связи. Функциональная схема промышленного робота приведена на рис. 19.2.



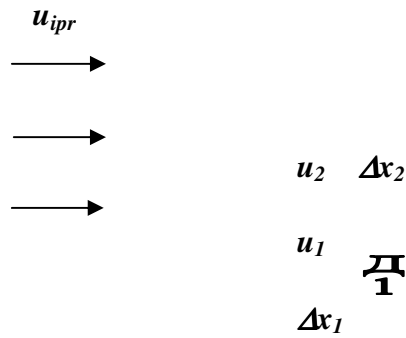


Рис. 19.2

**Основные понятия и определения. Структура манипуляторов.  
 Геометро-кинематические характеристики.**

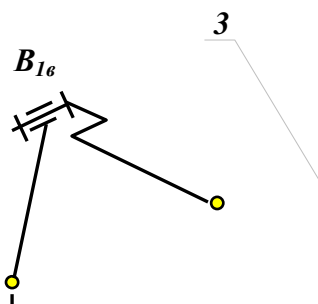
**Формула строения** - математическая запись структурной схемы манипулятора, содержащая информацию о числе его подвижностей, виде кинематических пар и их ориентации относительно осей базовой системы координат (системы, связанной с неподвижным звеном).

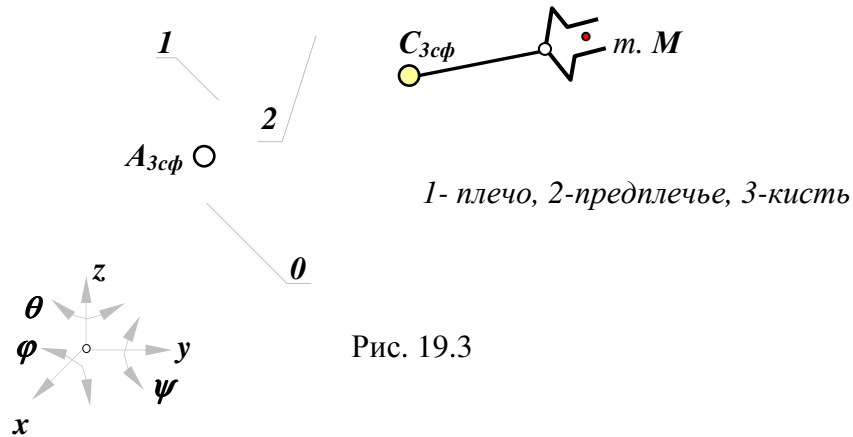
Движения, которые обеспечиваются манипулятором делятся на:

- ◆ *глобальные* (для роботов с подвижным основанием) - движения стойки манипулятора, которые существенно превышают размеры механизма;
- ◆ *региональные* (транспортные) - движения, обеспечиваемые первыми тремя звеньями манипулятора или его «рукой», величина которых сопоставима с размерами механизма;
- ◆ *локальные* (ориентирующие) - движения, обеспечиваемые звеньями манипулятора, которые образуют его «кисть», величина которых значительно меньше размеров механизма.

В соответствии с этой классификацией движений, в манипуляторе можно выделить два участка кинематической цепи с различными функциями: механизм руки и механизм кисти. Под «рукой» понимают ту часть манипулятора, которая обеспечивает перемещение центра схвата – точки М (региональные движения схвата); под «кистью» – те звенья и пары, которые обеспечивают ориентацию схвата (локальные движения схвата).

Рассмотрим структурную схему антропоморфного манипулятора, то есть схему которая в первом приближении соответствует механизму руки человека (рис.19.3).





Этот механизм состоит из трех подвижных звеньев и трех кинематических пар: двух трехподвижных сферических  $A_{3sf}$  и  $C_{3sf}$  и одной неподвижной вращательной  $V_{1b}$ .

Кинематические пары манипулятора характеризуются: именем или обозначением КП - заглавная буква латинского алфавита (А,В,С и т.д.); звеньями, которые образуют пару (0/1,1/2 и т.п.); относительным движением звеньев в паре ( для неподвижных пар - вращательное, поступательное и винтовое); подвижностью КП (для низших пар от 1 до 3, для высших пар от 4 до 5); осью ориентации оси КП относительно осей базовой или локальной системы координат.

**Рабочее пространство манипулятора** - часть пространства, ограниченная поверхностями огибающими к множеству возможных положений его звеньев. **Зона обслуживания манипулятора** - часть пространства соответствующая множеству возможных положений центра схвата манипулятора. Зона обслуживания является важной характеристикой манипулятора. Она определяется структурой и системой координат руки манипулятора, а также конструктивными ограничениями наложенными относительно перемещения звеньев в КП.

**Подвижность манипулятора  $W$**  - число независимых обобщенных координат однозначно определяющее положение схвата в пространстве.

$$W = 6 \cdot n - \sum_{i=1}^5 (6 - i) \cdot p_i$$

или для незамкнутых кинематических цепей.

$$W = \sum_{i=1}^5 i \cdot p_i.$$

**Маневренность манипулятора  $M$**  - подвижность манипулятора при зафиксированном (неподвижном) схвате.

$$M = W - 6.$$

Возможность изменения ориентации схвата при размещении его центра в заданной точке зоны обслуживания характеризуется углом сервиса - телесным углом  $\psi$ , который может описать последнее звено манипулятора (звено на котором закреплен схват) при фиксации центра схвата в заданной точке зоны обслуживания.

$$\psi = f_C / l_{CM}^3,$$

где  $f_C$  - площадь сферической поверхности, описываемая точкой С звена 3,  
 $l_{CM}$  - длина звена 3.

Относительная величина  $k_\psi = \psi / (4 \cdot \pi)$ , называется коэффициентом сервиса.  
 Для манипулятора, изображенного на рис.19.4,

подвижность манипулятора

$$W = 6 \cdot 3 - (3 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = 18 - 11 = 7;$$

маневренность

$$M = 7 - 6 = 1;$$

формула строения

$$W = [ \theta_{10} + \varphi_{10} + \psi_{10} ] + \varphi_{21} + [ \theta_{32} + \varphi_{32} + \psi_{32} ].$$

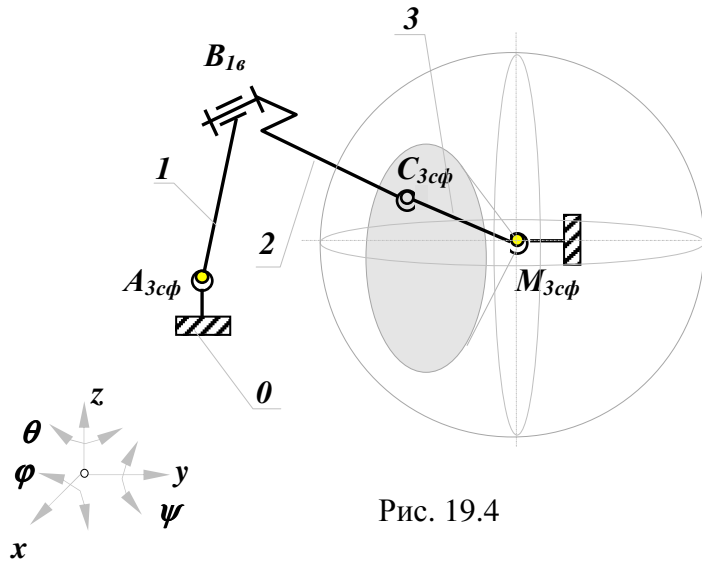
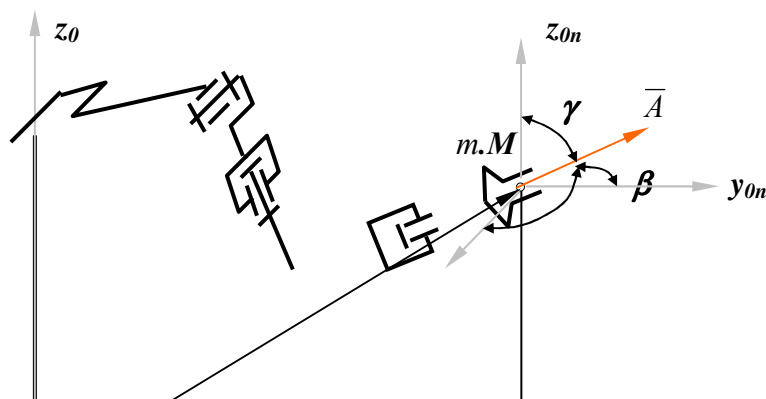


Рис. 19.4

Структура кинематической цепи манипулятора должна обеспечивать требуемое перемещение объекта в пространстве с заданной ориентацией. Для этого необходимо, чтобы схват манипулятора имел возможность выполнять движения минимум по шести координатам: трем линейным и трем угловым. Рассмотрим на объекте манипулирования точку М, которая совпадает с центром схвата. Положение объекта в неподвижной (базовой) системе координат  $0x_0y_0z_0$  определяется радиусом-вектором точки М и ориентацией единичного вектора  $\bar{A}$  с началом в этой точке. В математике положение точки в пространстве задается в одной из трех систем координат:

- ◆ прямоугольной декартовой с координатами  $x_M, y_M, z_M$ ;
- ◆ цилиндрической с координатами  $r_{sM}, \varphi_M, z_M$ ;
- ◆ сферической с координатами  $r_M, \varphi_M, \theta_M$ .

Ориентация объекта в пространстве задается углами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , которые вектор ориентации  $\bar{A}$  образует с осями базовой системы координат. На рис. 19.5 дана схема шести подвижного манипулятора с вращательными кинематическими парами с координатами объекта манипулирования.



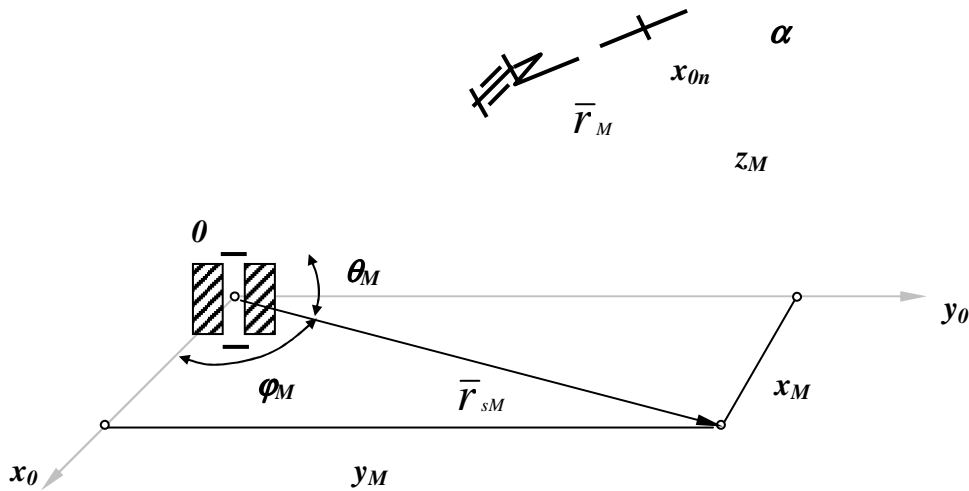


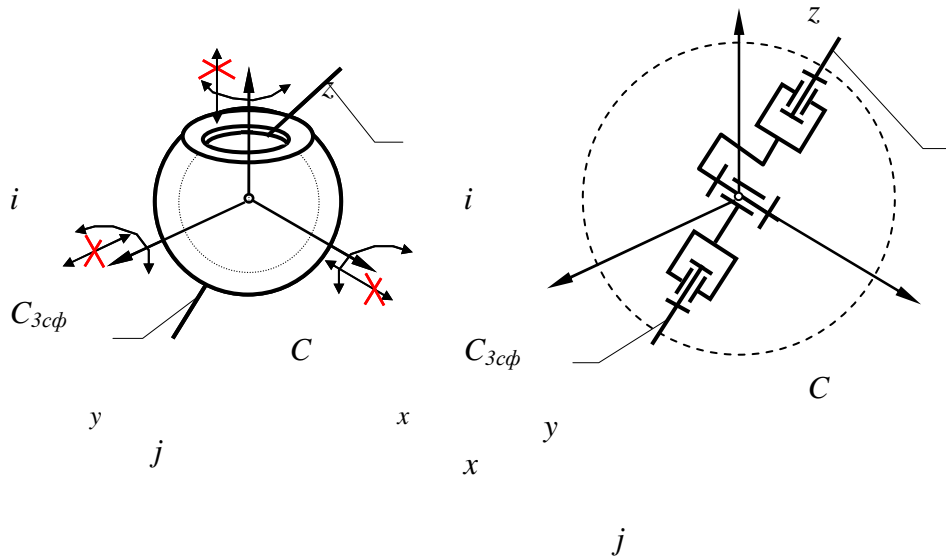
Рис. 19.5

При структурном синтезе механизма манипулятора необходимо учитывать следующее:

- ◆ кинематические пары манипуляторов снабжаются приводами, включающими двигатели и тормозные устройства, поэтому в схемах манипуляторов обычно используются одноподвижные кинематические пары: вращательные или поступательные;
- ◆ необходимо обеспечить не только заданную подвижность свата манипулятора, но и такую ориентацию осей кинематических пар, которая обеспечивала необходимую форму зоны обслуживания, а также простоту и удобство программирования его движений;
- ◆ при выборе ориентации кинематических пар необходимо учитывать расположение приводов (на основании или на подвижных звеньях), а также способ уравновешивания сил веса звеньев.

При выполнении первого условия кинематические пары с несколькими подвижностями заменяют эквивалентными кинематическими соединениями. Пример такого соединения для сферической пары дан на рис. 19.6

Перемещение схвата в пространстве можно обеспечить, если ориентировать оси первых трех кинематических пар по осям одной из осей координат. При этом выбор системы координат определяет тип руки манипулятора и вид его зоны обслуживания. По ГОСТ 25685-83 определены виды систем координат для руки манипулятора, которые приведены в таблице 19.1. Здесь даны примеры структурных схем механизмов соответствующие системам координат. Структурные схемы механизмов кисти, применяемые в манипуляторах, даны в таблице 19.2. Присоединяя к выходному звену руки тот или иной механизм кисти, можно получить большинство известных структурных схем манипуляторов, которые применяются в реальных промышленных роботах.



Сферическая кинематическая пара

Эквивалентное кинематическое соединение

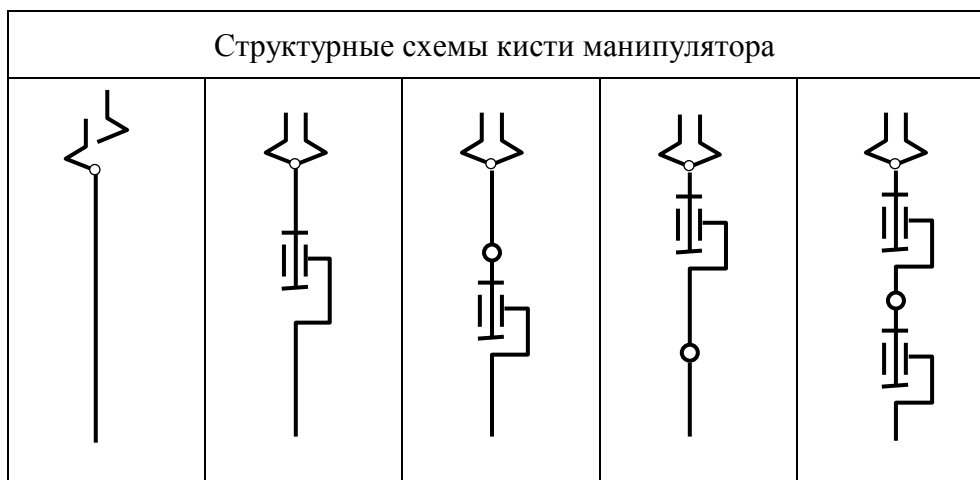
Рис. 19.6.

Системы координат «руки» манипулятора. Таблица 19.1

Прямоугольная (декартова)	Цилиндрическая
Сферическая	Угловая (ангулярная)

Другие

Таблица 19.2



Структура манипулятора определяется и местом размещения приводов. Если приводы размещаются непосредственно в кинематических парах, то к массам подвижных звеньев манипулятора добавляются массы приводов. Суммарная нагрузка на приводы и их мощность увеличиваются, а отношение массы манипулятора к полезной нагрузке (максимальной массе объекта манипулирования) уменьшается. Поэтому при проектировании роботов приводы звеньев руки, как наиболее мощные и обладающие большей массой, стремятся разместить ближе к основанию робота. Для передачи движения от привода к звену используются дополнительные кинематические цепи. Рассмотрим схему руки манипулятора ПР фирмы ASEA (рис.19.7). К трехзвенному механизму с угловой системой координат добавлены:

- ◆ для привода звена 2 - простейший кулисный механизм, образованный звеньями 4,5 и 2;
- ◆ для привода звена 3 - цепь, состоящая из кулисного механизма (звенья 6,7 и 8) и шарнирного четырехзвенника (звенья 8,9,2 и 3).

Таким образом, в рычажном механизме можно выделить кинематическую цепь руки (звенья 1,2 и 3) и кинематические цепи приводов. Манипуляторы использующие принцип размещения приводов на основании имеют более сложные механизмы. Однако увеличение числа звеньев и кинематических пар компенсируется уменьшением масс и моментов инерции, подвижных звеньев манипулятора. Кроме того, замкнутые кинематические цепи повышают точность и жесткость механизма. В целом манипуляторы, использующие принципы комбинированного размещения приводов (часть приводов на основании, часть на подвижных звеньях), обладают лучшими энергетическими и динамическими характеристиками, а также более высокой точностью.

В кинематических схемах рассмотренных манипуляторов веса звеньев вызывают дополнительную нагрузку на приводы. Фирма SKILAM разработала робот SANCIO (рис. 19.8) в котором веса приводов и звеньев воспринимаются кинематическими парами, а на момент двигателей влияют только через силы трения. Такая структурная схема механизма потребовала увеличения размеров кинематических пар, однако в целом был получен существенный выигрыш по энергетическим и динамическим показателям.

Данные примеры не охватывают всех возможных ситуаций рационального выбора структуры манипуляторов. Они только демонстрируют наиболее известные из удачных структурных схем.



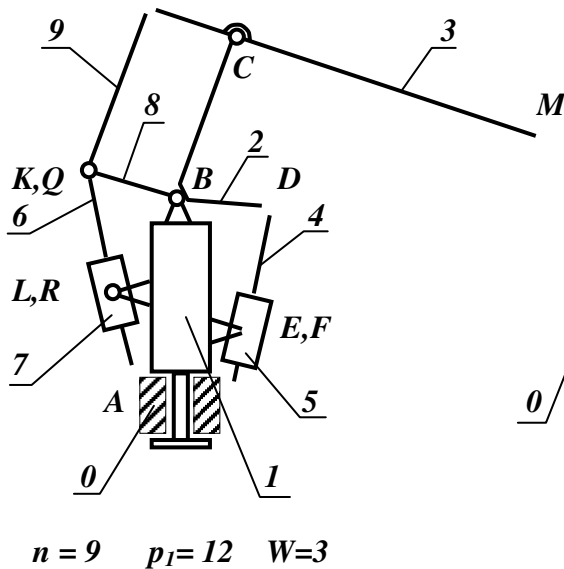


Рис.19.7

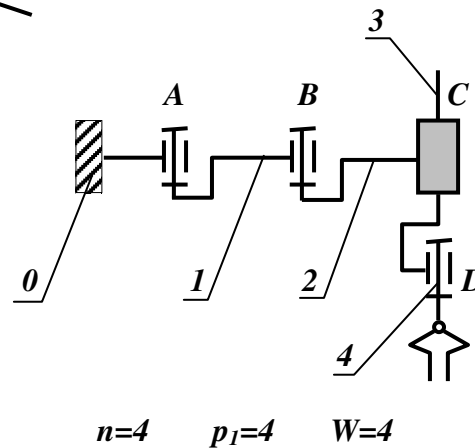


Рис.19.8

Важная особенность манипуляторов – изменение структуры механизма в процессе работы, о чем говорилось на лекции по структуре механизмов. В соответствии с циклограммой или программой работы робота, в некоторых кинематических парах включаются тормозные устройства. При этом два звена механизма жестко соединяются с друг другом, образуя одно звено. Из структурной схемы механизма исключается одна кинематическая пара и одно звено, число подвижностей схвата механизма уменьшается (обычно на единицу). Изменяется структура механизма и в тех случаях, когда в процессе выполнения рабочих операций (на пример, при сборке или сварке) схват с объектом манипулирования соприкасается с окружающими предметами, образуя с ними кинематические пары. Кинематическая цепь механизма замыкается, а число подвижностей уменьшается. В этом случае в цепи могут возникать избыточные связи. Эти структурные особенности манипуляторов необходимо учитывать при программировании работы промышленного робота.

Быстродействие ПР определяют максимальной скоростью линейных перемещений центра схвата манипулятора. Различают ПР с малым ( $V_M < 0.5$  м/с), средним ( $0.5 < V_M < 1.0$  м/с) и высоким ( $V_M > 1.0$  м/с) быстродействием. Современные ПР имеют в основном среднее быстродействие и только около 20% - высокое.

Точность манипулятора ПР характеризуется абсолютной линейной погрешностью позиционирования центра схвата. Промышленные роботы делятся на группы с малой ( $\Delta r_M < 1$  мм), средней ( $0.1 \text{ мм} < \Delta r_M < 1$  мм) и высокой ( $\Delta r_M < 0.1$  мм) точностью позиционирования.

## *Лекция 20*

Краткое содержание: Задачи механики манипуляторов. Кинематический анализ механизма манипулятора. Динамика манипуляторов промышленных роботов. Уравновешивание манипуляторов. Кинетостатический расчет манипуляторов. Расчет быстродействия привода.

### *Задачи механики манипуляторов.*

К основным задачам механики манипуляторов можно отнести:

- ◆ разработку методов синтеза и анализа исполнительных механизмов (включая механизмы приводов);
- ◆ программирование движения манипулятора;
- ◆ расчет управляющих усилий и реакций в КП;
- ◆ уравновешивание механизмов манипуляторов;
- ◆ другие задачи.

Эти задачи решаются на базе общих методов исследования структуры, геометрии, кинематики и динамики систем с пространственными многоподвижными механизмами. Каждая из рассматриваемых задач может быть сформулирована как прямая (задача анализа) или как обратная (задача синтеза). При определении функций положения механизма, в прямой задаче находят закон изменения абсолютных координат выходного звена по заданным законам изменения относительных или абсолютных координат звеньев. В обратной – по заданному закону движения схвата находят законы изменения координат звеньев, обычно, линейных или угловых перемещений в приводах. Решение обратной задачи или задачи синтеза более сложно, так как часто она имеет множество допустимых решений, из которых необходимо выбрать оптимальное. В обратной задаче кинематики по требуемому закону изменения скоростей и ускорений выходного звена определяются соответствующие законы изменения скоростей и ускорений в приводах манипулятора. Обратная задача динамики заключается в определении закона изменения управляющих сил и моментов в приводах, обеспечивающих заданный закон движения выходного звена.

### *Кинематический анализ механизма манипулятора.*

Первая и основная задача кинематики – определение функции положения. Для пространственных механизмов наиболее эффективными методами решения этой задачи являются векторный метод и метод преобразования координат. При решении прямой задачи о положении схвата манипулятора обычно используют метод преобразования координат. Из множества методов преобразования координат [ 1, 2 ], которые отличаются друг от друга правилами выбора осей локальных систем координат, для манипуляторов обычно используется метод Денавита и Хартенберга.

Опишем два вида матриц: матрицы  $M$ , определяющие отношение между системами координат соседних звеньев; матрицы  $T$ , определяющие положение и ориентацию каждого звена механизма в неподвижной или базовой системе координат.

Воспользуемся однородными координатами трехмерного проективного пространства  $PR^3$ , в которых движение евклидова пространства  $R^3$  можно представить линейным преобразованием

$$\bar{r}_i = M_{ij} \cdot \bar{r}_j, \text{ где } M_{ij} - \text{ матрица } 4 \times 4 \text{ вида } \begin{vmatrix} U_{ij} & \vdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 000 & \vdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Это преобразование эквивалентно преобразованию в евклидовом пространстве  $\bar{r}_i = U_{ij} \cdot \bar{r}_j + b$ , где  $[\bar{r}_i, \bar{r}_j] \in R^3$ . То есть преобразованию, которое включает поворот, определяемый матрицей  $U_{ij}$  размерностью  $3 \times 3$ , и параллельный перенос, задаваемый вектором  $\bar{b}$  размерностью  $3$ . В однородном пространстве положение точки будут определять не три  $x, y$  и  $z$ , а четыре величины  $x', y', z'$  и  $t'$ , которые удовлетворяют следующим соотношениям

$$x = x' \wedge t', \quad y = y' \wedge t', \quad z = z' \wedge t'.$$

Обычно принимают  $t' = 1$ . У матрицы поворота  $U_{ij}$  элементами  $u_{ij}$  являются направляющие косинусы углов между новой осью  $i$  и старой осью  $j$ . Вектор  $\bar{b} = (x, y, z)$  - трехмерный вектор, определяющий положение начала новой системы координат  $i$  в старой системе  $j$ . Выбор расположения осей должен соответствовать решаемой задаче. При решении задачи о положениях необходимо: в прямой задаче определить положение выходного звена как функцию перемещений в приводах, в обратной – заданное положение выходного звена представить как функцию перемещений в приводах. Выбор расположения и ориентации локальных систем координат должен обеспечивать выполнение этих задач. При использовании метода Денавита и Хартенберга оси координат располагаются по следующим правилам:

1. Для звена  $i$  ось  $z_i$  направляется по оси кинематической пары, образуемой им со звеном  $(i+1)$ . Начало координат размещают в геометрическом центре этой пары.
2. Ось  $x_i$  направляется по общему перпендикуляру к осям  $z_{i-1}$  и  $z_i$  с направлением от  $z_{i-1}$  к  $z_i$ . Если оси  $z_{i-1}$  и  $z_i$  совпадают, то  $x_i$  перпендикулярна к ним и направлена произвольно. Если они пересекаются в центре кинематической пары, то начало координат располагается в точке пересечения, а ось  $x_i$  направляется по правилу векторного произведения  $\bar{x}_i = \bar{z}_i \times \bar{z}_{i-1}$  (кратчайший поворот оси  $z_i$  до совмещения с  $z_{i-1}$  при наблюдении с конца  $x_i$  должен происходить против часовой стрелки).
3. Ось  $y_i$  направляется так, чтобы система координат была правой.

В прямой задаче необходимо определить положение схвата манипулятора и связанной с ним системы координат  $Mx_n y_n z_n$  по отношению к неподвижной или базовой системе координат  $Kx_0 y_0 z_0$ . Это осуществляется последовательными переходами из системы координат звена  $i$  в систему координат звена  $i-1$ . Согласно принятому методу, каждый переход включает в себя последовательность четырех движений: двух поворотов и двух параллельных переносов, осуществляемых в указанной последовательности (см. рис. 20.1):

- ◆ поворот  $i$ -ой системы вокруг оси  $x_i$  на угол  $-\theta_i$  до параллельности осей  $z_i$  и  $z_{i-1}$  (положительное направление поворота при наблюдении с конца вектора  $x_i$  против часовой стрелки);
- ◆ перенос вдоль оси  $x_i$  на величину  $-a_i$  до совмещения начала системы координат  $O_i$  с точкой пересечения осей  $x_i$  и  $z_{i-1}$  (отсчет по оси  $x_i$  от точки пересечения оси  $x_i$  и оси  $z_{i-1}$ );

$z_i$



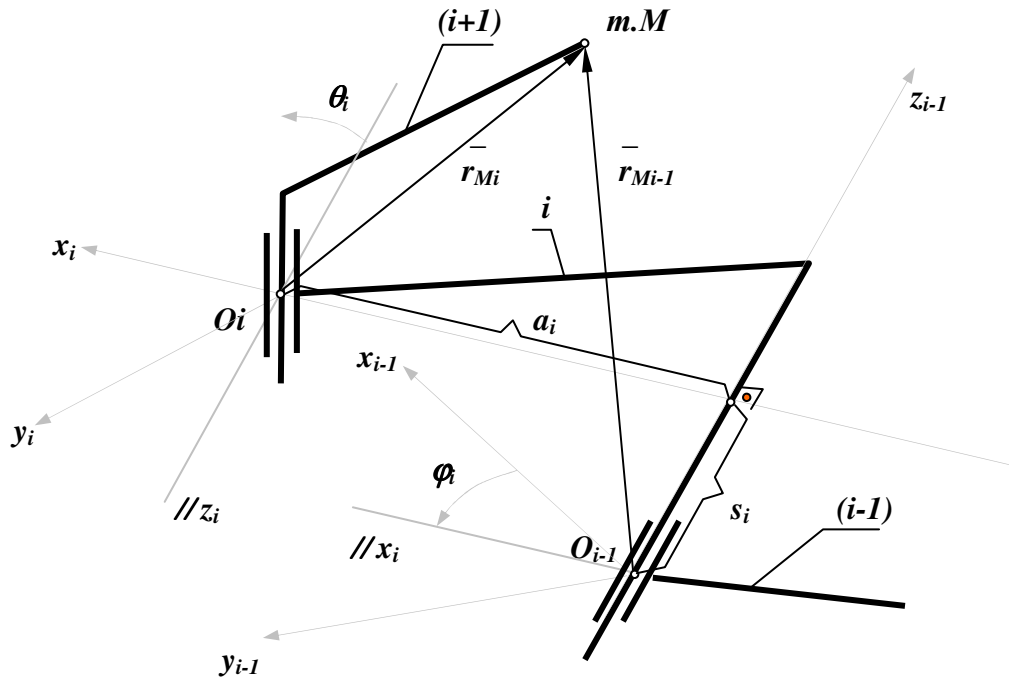


Рис. 20.1.

- ◆ перенос вдоль оси  $z_{i-1}$  на величину  $-s_i$ , после которого начало системы координат  $O_i$  оказывается в начале координат  $O_{i-1}$  системы  $(i-1)$  (отсчитывается по оси  $z_{i-1}$  от ее начала координат  $O_{i-1}$  до точки ее пересечения с осью  $x_i$ );
- ◆ поворот вокруг оси  $z_{i-1}$  на угол  $-\varphi_i$ , до тех пор пока ось  $x_i$  не станет параллельной оси  $x_{i-1}$  (положительное направление поворота при наблюдении с конца вектора  $z_{i-1}$  против часовой стрелки).

Необходимо отметить, что знак угла поворота не имеет значения, так как в матрицах перехода используются направляющие косинусы (четные функции). Целесообразно рассматривать угол, обеспечивающий кратчайший поворот оси старой системы  $i$  до совмещения (параллельности) с соответствующей осью новой  $(i-1)$ . Перемещения начала координат определяются как координаты начала старой системы  $O_i$  в новой  $O_{i-1}$ .

В манипуляторах обычно используются одноподвижные кинематические пары или вращательные, или поступательные. Оба относительных движения как вращательное, так и поступательное, реализуются в цилиндрических парах. Поэтому при общем представлении механизма используются (рис.20.1) цилиндрические пары.

Матрицы перехода из системы  $O_i$  в систему  $O_{i-1}$  можно записать так

$$M_i = M_i^\theta \cdot M_i^a \cdot M_i^s \cdot M_i^\varphi,$$

где  $M_i^\theta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  - матрица поворота вокруг оси  $x_i$  на угол  $-\theta_i$ ,

$M_i^a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  - матрица переноса вдоль оси  $x_i$  на  $-a_i$ ,

$M_i^s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  - матрица переноса вдоль оси  $z_{i-1}$  на  $-s_i$ ,

$M_i^\varphi = \begin{vmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & 0 \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  - матрица поворота вокруг оси  $z_{i-1}$  на угол  $-\varphi_i$ .

В этих матрицах переменные  $s_i$  и  $\varphi_i$  соответствуют относительным перемещениям звеньев в кинематических парах и являются обобщенными координатами манипулятора, определяющими конфигурацию механизма в рассматриваемом положении. Переменные  $a_i$  и  $\theta_i$  определяются конструктивным исполнением звеньев манипулятора, в процессе движения они остаются неизменными.

Положение некоторой произвольной точки  $M$  в системе координат звена  $i$  определяется вектором  $r_{Mi}$ , а в системе координат звена  $(i-1)$  – вектором  $r_{Mi-1}$ . Эти радиусы связаны между собой через матрицу преобразования координат  $M_i$  следующим уравнением

$$\bar{r}_{Mi-1} = M_i \cdot \bar{r}_{Mi}$$

где

$$M_i = \begin{vmatrix} \cos\varphi_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\varphi_i & \sin\varphi_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\theta_i \cdot \cos\varphi_i & -\cos\varphi_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \sin\varphi_i \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
 - матрица перехода из  $i$ -ой системы координат в  $(i-1)$ -ю.

Рассмотрим шестиподвижный манипулятор в исходном или начальном положении (рис.20.2). За начальное положение принимается такое, в котором все относительные обобщенные координаты равны нулю. Переход из системы координат любого  $i$ -го звена к неподвижной или базовой системе записывается в виде

$$\bar{r}_{M0} = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_i \cdot \bar{r}_{Mi} \quad \text{или} \quad \bar{r}_{M0} = T_i \cdot \bar{r}_{Mi}$$

где  $T_i = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_i$  - матрица преобразования координат  $i$ -ой системы в координаты базовой системы координат.

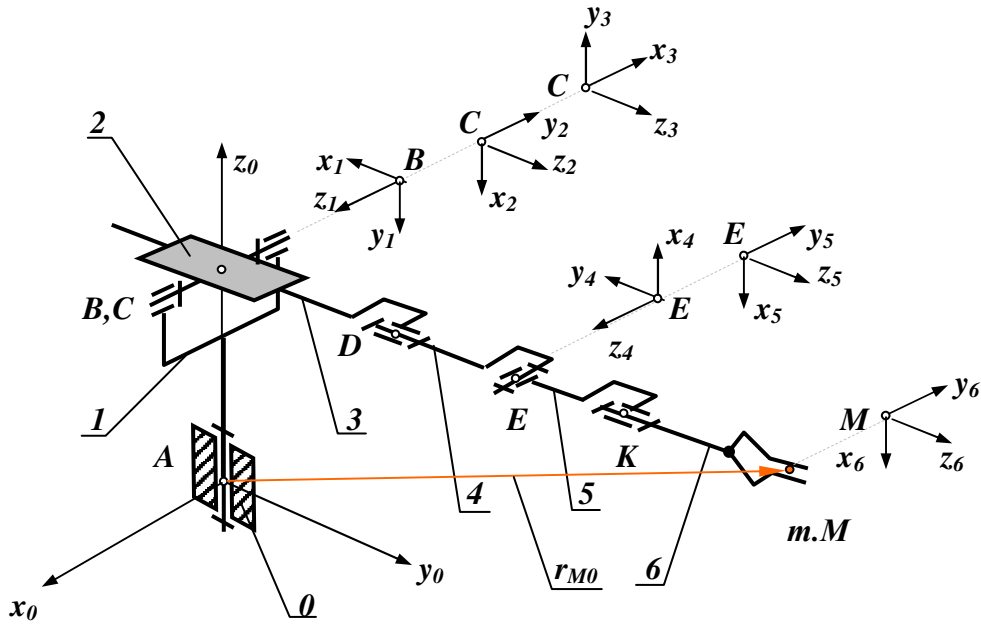


Рис.20.2

Для схемы, изображенной на рис.20.2, радиус  $r_{M6} = 0$ , а радиус  $r_{M0}$  определится по формуле

$$\bar{r}_{M0} = T_n = T_6,$$

то есть положение выходного звена манипулятора определяется матрицей  $T_n$ . Элементы этой матрицы определяют положение центра схвата точки  $M$  и ориентацию его в пространстве. Четвертый столбец определяет, декартовы координаты точки  $M$  (проекции вектора  $r_{M0}$  на оси координат). Третий столбец содержит направляющие косинусы оси  $z_n$  системы координат, связанной со схватом, или вектора подхода  $\bar{A}$ , который характеризует направление губок схвата (рис.20.3). Второй столбец определяет направление оси  $y_n$  или вектора ориентации  $\bar{O}$ , который проходит через центр схвата по оси перпендикулярной рабочим поверхностям его губок. В первом столбце содержатся направляющие косинусы оси  $x_n$  или вектора  $(\bar{O} \times \bar{A})$ . Углом подхода схвата  $\alpha$  называется угол между вектором подхода  $\bar{A}$  и базовым вектором

$$R\alpha = (\bar{O} \times \bar{k}_0),$$

где  $\bar{k}_0$  - орт вектора  $\bar{z}_0$  неподвижной или базовой системы координат. С учетом сказанного, матрица  $T_n$  может быть представлена в следующем виде

$$T_n = \begin{vmatrix} (\bar{O} \times \bar{A})_x & O_x & A_x & r_{nMx} \\ (\bar{O} \times \bar{A})_y & O_y & A_y & r_{nMy} \\ (\bar{O} \times \bar{A})_z & O_z & A_z & r_{nMz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

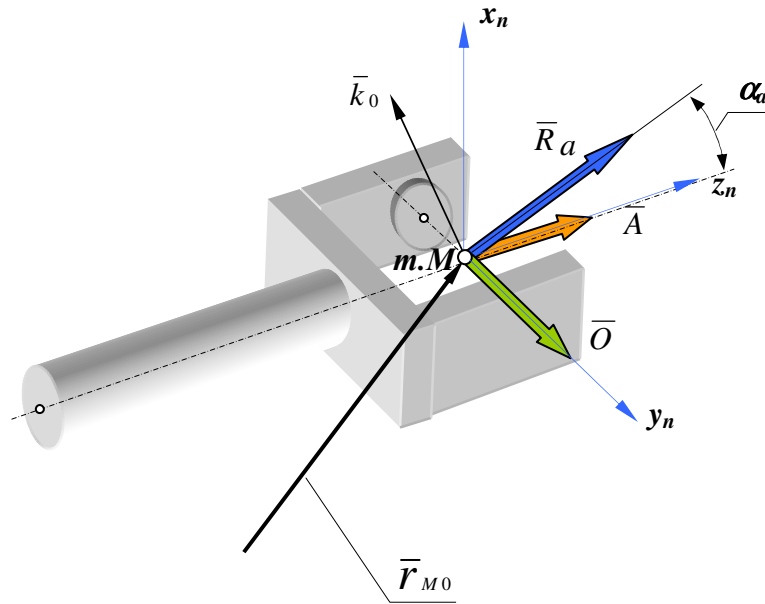


Рис.20.3

В результате матричных преобразований получаем радиус-вектор точки М схвата в функции обобщенных координат. Обычно, за обобщенные координаты принимают линейные и угловые перемещения в кинематических парах или на выходных валах приводов манипулятора. В механизме с  $n$  подвижностями в общем виде функцию положения схвата можно записать так

$$\vec{r}_{OM} = T_n \cdot \vec{A} = \vec{P}(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

где  $q_1, q_2, \dots, q_n$  – обобщенные координаты манипулятора.

При кинематическом анализе манипулятора в прямой задаче необходимо определить линейные и угловые скорости и ускорения схвата при заданных угловых и линейных обобщенных скоростях и ускорениях (обычно относительных скоростях и ускорениях в кинематических парах механизма). В обратной задаче по заданному закону изменения скоростей и ускорений схвата определяются законы изменения скоростей и ускорений в КП или на выходных звеньях приводов. Решение прямой задачи кинематики для точки М схвата можно получить продифференцировав четвертый столбец матрицы  $T_n$  по времени

$$r_{nM} = \begin{vmatrix} r_{nMx} \\ r_{nMy} \\ r_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix}; \quad V_{nM} = \frac{dr_{nM}}{dt} = \begin{vmatrix} V_{nMx} \\ V_{nMy} \\ V_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix}; \quad a_{nM} = \frac{d^2 r_{nM}}{dt^2} = \begin{vmatrix} a_{nMx} \\ a_{nMy} \\ a_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix};$$

Угловую скорость и угловое ускорение схвата можно определить векторным суммированием относительных угловых скоростей во вращательных КП механизма. Так как вектора угловых скоростей, при данном выборе ориентации осей координат, совпадают с осью  $z$ , то угловая скорость схвата

$$\vec{\omega}_n = \sum_{i=1}^m \vec{k}_{i-1} \cdot \omega_{i,i-1},$$

где  $\vec{k}_{i-1}$  – орт оси  $z$  системы координат, расположенной в центре КП, соединяющей звено  $i$  и звено  $i-1$ ,  $m$  – число вращательных КП в механизме.

Дифференцируя это выражение по времени, получим формулу для определения углового ускорения схвата

$$\bar{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^m \bar{k}_{i-1} \cdot \varepsilon_{i,i-1} + \sum_{j=2}^m \left[ \left( \sum_{k=l-1}^{m-1} \bar{k}_{k-1} \cdot \omega_k \right) \times (\bar{k}_{j-1} \cdot \omega_j) \right].$$

**Динамика манипуляторов промышленных роботов.  
 Силовой расчет манипулятора.**

Из большого разнообразия задач динамики манипуляторов рассмотрим две: силовой расчет и расчет быстродействия ПР. При силовом расчете манипуляторов решаются задачи по определению внешних силовых управляющих воздействий, обеспечивающих требуемый закон движения механизма, и по расчету реакций в кинематических парах. Первую часть часто называют задачей синтеза управления. При силовом расчете обычно применяется метод кинестатики, основанный на принципе Д'Аламбера. По этому методу к внешним силам и моментам, приложенным к звеньям механизма, добавляются расчетные силы инерции, которые обеспечивают силовую уравновешенность системы и позволяют рассматривать подвижную систему в квазистатическом равновесии, то есть, как условно неподвижную. Силовой расчет выполняется при заданной полезной нагрузке  $\bar{F}_n$ , известных законах движения звеньев  $\bar{a}_{si}$  и  $\bar{\varepsilon}_i$  (из предварительного кинематического расчета), известных инерционных характеристиках звеньев: массах звеньев  $m_i$  и их моментах инерции  $I_{si}$ . По этим данным определяют главные вектора  $\bar{F}_{ui} = -m \cdot \bar{a}_{si}$  и главные моменты  $\bar{M}_{ui} = -I_{si} \cdot \bar{\varepsilon}_i$  сил инерции для каждого из звеньев механизма. Для открытой кинематической цепи решение начинаем с выходного звена – схвата. Отброшенные связи звена  $n$  со звеном  $n-1$  и выходным валом привода звена  $n$  заменяем реакциями  $\bar{M}_{n,n-1}$  и  $\bar{F}_{n,n-1}$  и составляем кинестатические векторные уравнения равновесия сил и моментов для звена  $n$  (Рис.20.4):

$$\bar{G}_o + \bar{G}_n + \bar{F}_{un} + \bar{F}_{uo} + \bar{F}_{n,n-1} + \bar{F}_n = 0,$$

$$\bar{M}(\bar{G}_n) + \bar{M}(\bar{G}_o) + \bar{M}(\bar{F}_{un}) + \bar{M}(\bar{F}_{uo}) + \bar{M}_{un} + \bar{M}_{n,n-1} + \bar{M}(\bar{F}_n) = 0,$$

где  $\bar{M}_{n,n-1}$  - вектор момента в кинематической паре ( проекция этого вектора на ось  $z$  является движущим моментом привода в КП , то есть  $\bar{M}_{z(n,n-1)} = \bar{M}_{o(n,n-1)}$ ).



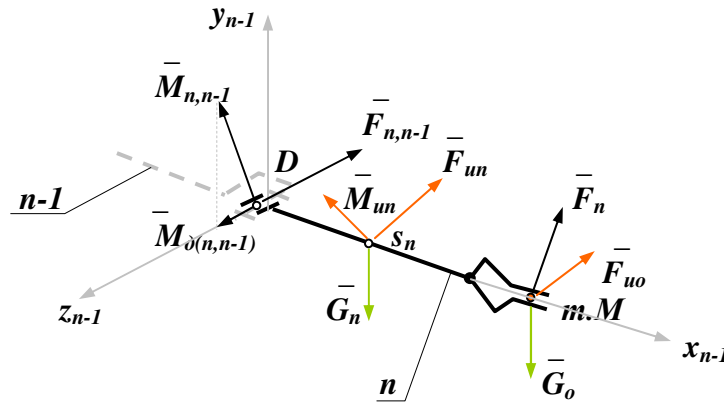


Рис. 20.4

Проецируя векторные уравнения на оси координат, получим систему шести алгебраических уравнений откуда определим шесть неизвестных

$$F_{x(n,n-1)}, F_{y(n,n-1)}, F_{z(n,n-1)}, M_{x(n,n-1)}, M_{y(n,n-1)}, M_{z(n,n-1)} = M_{o(n,n-1)}.$$

Далее рассматривается равновесие звена  $n-1$ . При этом в месте его присоединения к звену  $n$  прикладываются реакции со стороны звена  $n$

$$F_{x(n-1,n)}, F_{y(n-1,n)}, F_{z(n-1,n)}, M_{x(n-1,n)}, M_{y(n-1,n)}, M_{z(n-1,n)} = M_{o(n-1,n)},$$

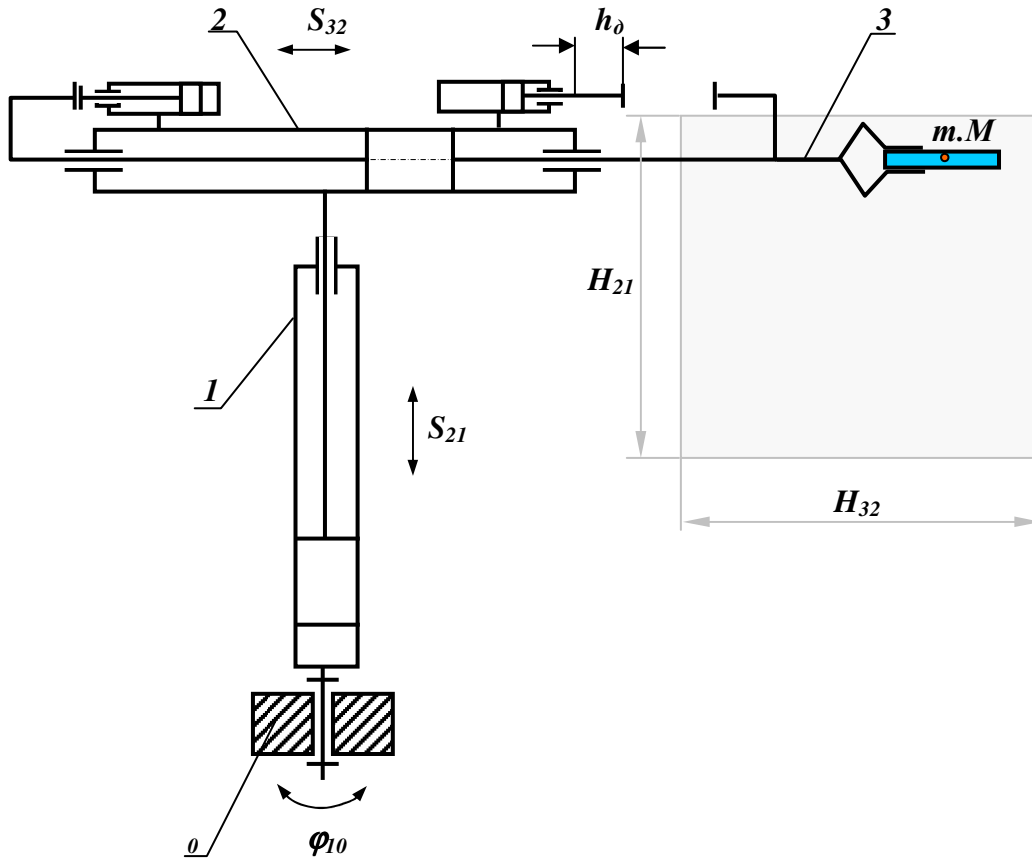
равные по величине и противоположные по направлению реакциям, определенным на предыдущем этапе расчета. Так последовательно составляются уравнения силового равновесия для всех  $n$  звеньев механизма. Из решения полученной системы  $6n$  уравнений определяются реакции в кинематических парах, движущие силы и моменты.

### **Расчет быстродействия промышленного робота.**

Время выполнения роботом цикла перемещений детали во многом определяет производительность всего роботизированного комплекса. Поэтому требования к быстродействию робота обычно достаточно высокие. Время выполнения роботом технологической операции обусловлено законами изменения внешних сил (движущих и сопротивления) и инертностью звеньев механизма. Закон изменения управляющих сил зависит от типа используемого привода и от вида системы управления. Существуют роботы с гидравлическими, пневматическими, электрическими и комбинированными приводами. В них применяются цикловые, позиционные или контурные системы управления. Рассмотрим расчет быстродействия одного из приводов промышленного робота с цикловой системой управления. При цикловой системе управления относительные перемещения звеньев ограничиваются передвигными упорами и концевыми выключателями.

На рис. 20.5 изображена кинематическая схема трехподвижного манипулятора ПР (1,2,3 – подвижные звенья, 0 – неподвижное звено). Здесь же приведена циклограмма настройки командоаппарата (сплошные линии) и циклограмма работы ПР (пунктирные линии). Общее время рабочего цикла  $T_{ц}$  состоит из времени выстоя в заданных положениях ( на циклограмме выстой показан прямыми параллельными горизонтальной оси  $t$  ) и времени относительных перемещений звеньев из одного заданного положения в другое  $t_{пх}$  и обратно  $t_{ох}$  ( наклонные прямые на диаграммах ). Время выстоя обычно задано условиями технологического процесса. Время выполнения роботом

движений определяется динамическими характеристиками приводов и манипулятора – движущими силами и силами сопротивления, массами и моментами инерции звеньев.



*Циклограммы командоаппарата и промышленного робота.*

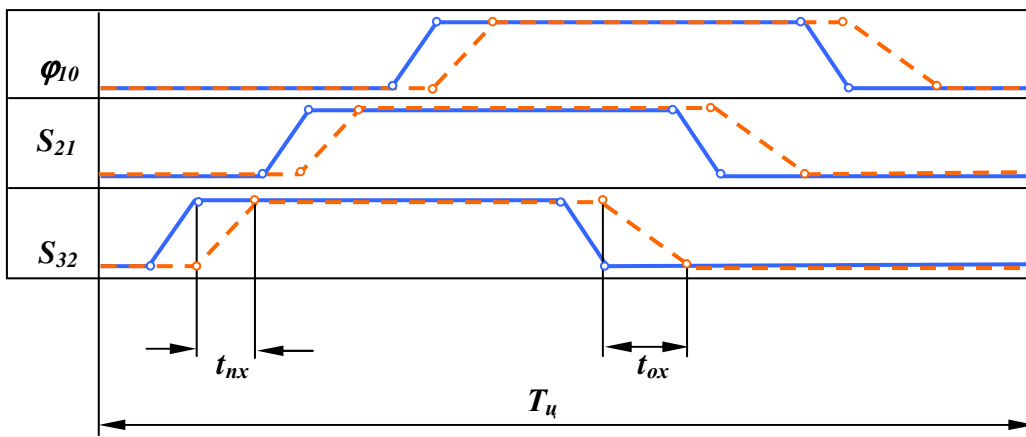


Рис.20.5

Рассмотрим работу пневмопривода перемещения руки манипулятора (рис.20.5). По сигналу от командоаппарата в правую полость цилиндра подается сжатый воздух, который действует на поршень с силой  $F_{д3} = p \cdot S_{п}$ , где  $p$  - давление воздуха,  $S_{п}$  - активная площадь поршня. Под действием этой силы поршень и рука 3 перемещаются влево с постоянным ускорением и с возрастающей скоростью  $V_{32}$  (рис.20.6а). Ограничение хода поршня может осуществляться либо жестким упором без демпфера, либо упором с демпфером.

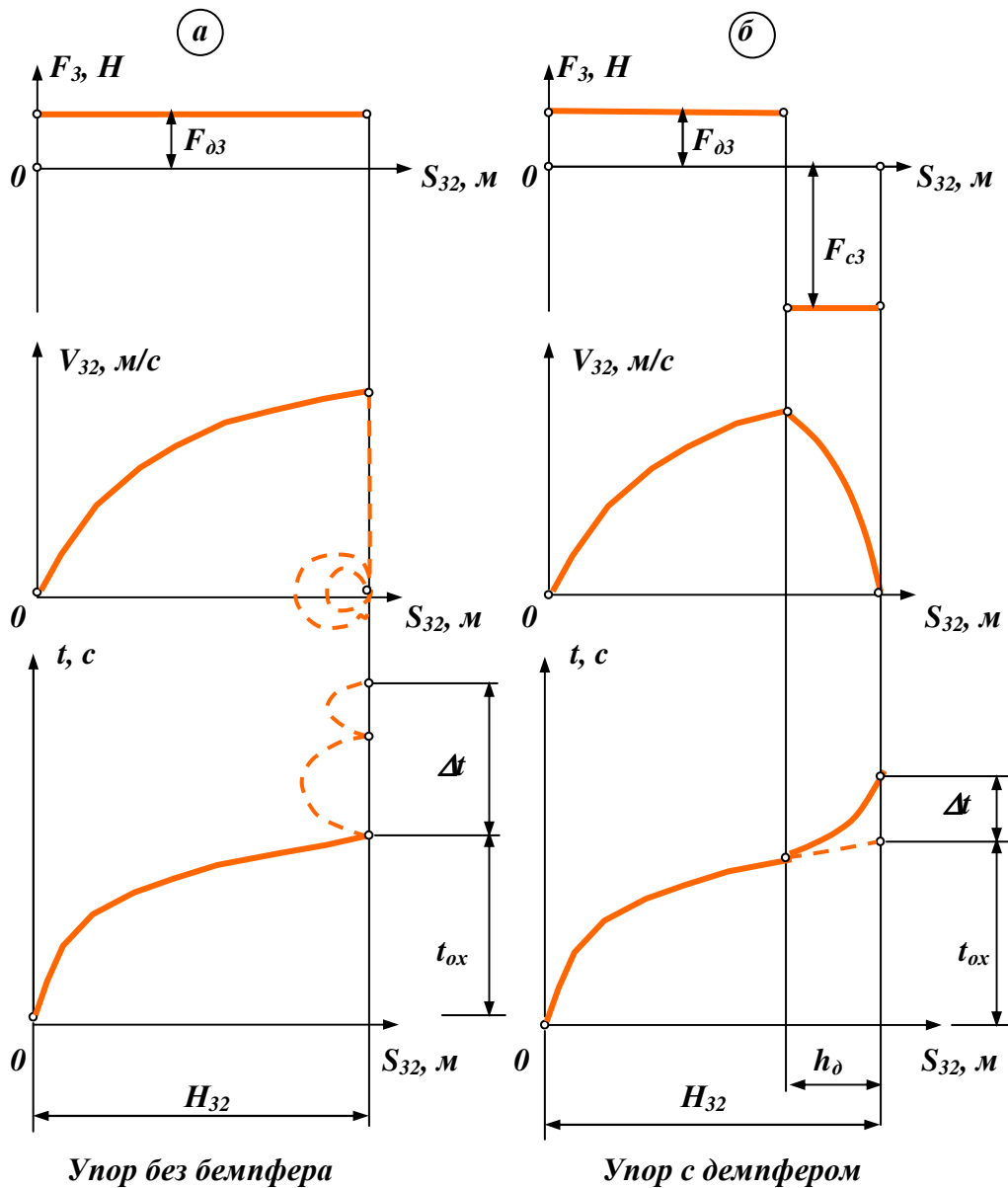


Рис. 20.6.

При остановке на упоре без демпфера, скорость звена 3 должна мгновенно уменьшиться с некоторого конечного значения до нуля. При таком изменении скорости ускорение  $a_{32} \Rightarrow -\infty$ . Такая остановка звена называется жестким ударом. Она сопровождается большими динамическими нагрузками на звенья механизма. Так как реальный манипулятор представляет собой упруго-инерционную систему, то эти нагрузки вызовут отскок звена 3 от упора, а также колебания всего механизма. Схват будет совершать колебания относительно заданного конечного положения. Время затухания этого процесса  $\Delta t$  (рис.20.6а) значительно снижает быстродействие ПР.

Уменьшить эти колебания или вообще исключить их можно, обеспечив безударный останов

$$V_{32n} = 0, \quad a_{32n} = 0;$$

где  $V_{32n}, a_{32n}$  - относительная скорость и относительное ускорение звеньев в момент останова. Однако это осуществимо только в регулируемом приводе при контурном управлении. Кроме того при безударном останове в конце хода относительная скорость близка к нулю, поэтому время перемещения схвата в требуемое положение значительно возрастает. Компромиссным решением является останов с мягким ударом, при кото-

ром относительная скорость в конце хода  $V_{32n} = 0$ , а ускорение ограничено некоторым допустимым значением  $a_{32n} \leq [a]$ . В механизмах с цикловым управлением режим движения с мягким ударом обеспечивается установкой упоров с демпферами, гасящими кинетическую энергию руки. Расчет демпфера ведется из условия  $A_{\mathcal{D}} = 0$ , которое обеспечивается равенством за цикл движения работы движущей силы  $A_{F_{\partial 3}}$  и работы силы сопротивления демпфера  $A_{F_c}$  (рис. 20.6б):

$$A_{F_{\partial 3}} = -A_{F_c} \quad \text{или} \quad F_{\partial 3} \cdot (H_{32} - h_{\partial}) = -F_c \cdot h_{\partial}.$$

В этом выражении неизвестны две величины  $F_c$  и  $h_{\partial}$ , одной из них задаются, вторую – рассчитывают.

### Уравновешивание манипуляторов.

В большинстве кинематических схем манипуляторов приводы воспринимают статические нагрузки от сил веса звеньев. Это требует значительного увеличения мощностей двигателей приводов и моментов тормозных устройств. Для борьбы с этим используют три метода:

◆ Используют кинематические схемы манипуляторов, в которых силы веса звеньев воспринимаются подшипниками кинематических пар. На мощность приводов и тормозных устройств при таком решении силы веса оказывают влияние только через силы трения в парах. В качестве примера можно привести кинематическую схему робота SCARA (рис. 20.7). Недостатком этого метода являются большие осевые нагрузки в подшипниках.

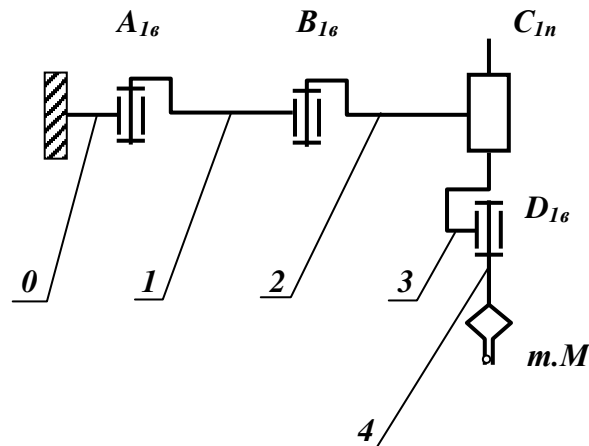


Рис.20.7

◆ Уравновешивание звеньев манипулятора с помощью корректировки их массы. При этом центр масс звена с помощью корректирующих масс смещается в центр кинематической пары (рис. 20.8). Недостатком этого метода является значительное увеличение массы манипулятора и моментов инерции его звеньев.

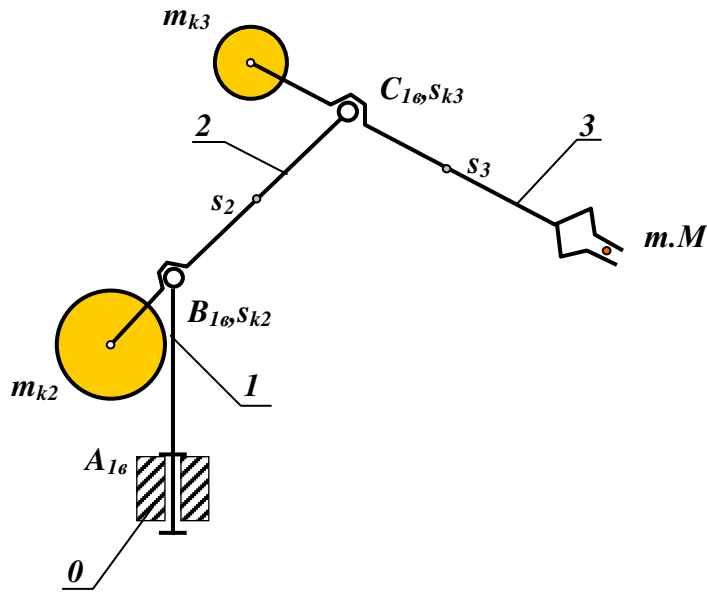


Рис.20.8

♦ Уравновешивание сил веса звеньев манипулятора с помощью упругих разгружающих устройств – пружинных разгрузателей или уравновешивателей. Эти устройства не позволяют обеспечить полную разгрузку приводов от действия сил веса на всем относительном перемещении звеньев. Поэтому конструкция этих устройств включает кулачковые или рычажные механизмы, которые согласуют упругую характеристику пружины с характеристикой уравновешиваемых сил веса звеньев. На рис. 20.9 показана схема промышленного робота в котором привод вертикального перемещения руки снабжен механизмом для силовой разгрузки, состоящим из пружины и кулачкового механизма с профилем выполненным по спирали Архимеда.

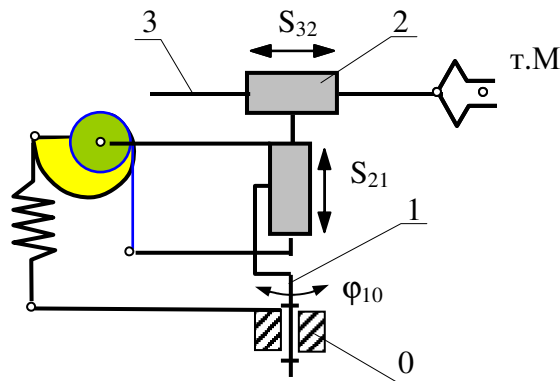


Рис. 20.9

**Точность манипуляторов ПР.**

Точность манипуляторов определяется погрешностями позиционирования характеристической точки схвата (точка М) и погрешностями угловой ориентации схвата. Погрешности позиционирования определяются технологическими отклонениями размеров звеньев манипулятора, зазорами в кинематических парах манипулятора и механизмов приводов, деформациями (упругими и температурными) звеньев, а также погрешностями системы управления и датчиков обратной связи. В паспортных данных манипуляторов указывается максимально допустимое отклонение центра схвата мани-

пулятора точки  $M$  от ее номинального расположения на множестве возможных конфигураций механизма. В результате погрешностей точка  $M$  описывает в пространстве некоторый эллипсоид, который называется эллипсоидом отклонений (рис. 20.10).

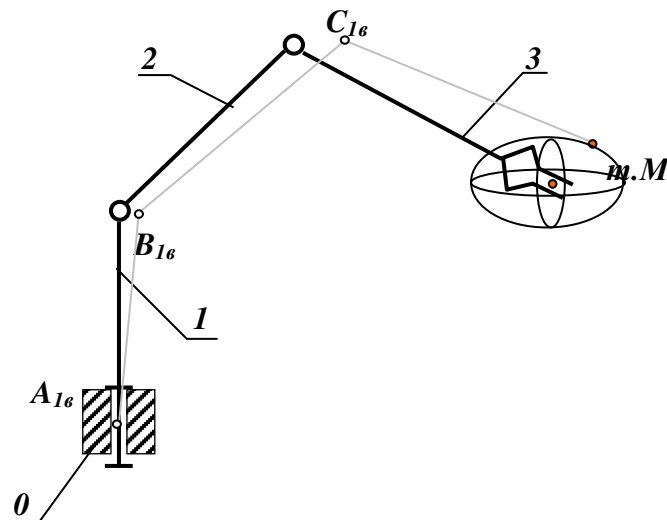


Рис.20.10

### *Литература*

1. Силовой расчет, уравнивание, проектирование механизмов и механика манипуляторов: Учебное пособие для студентов смешанной формы обучения / И.Н.Чернышева, А.К.Мусатов,Н.А.Глухов и др.; Под ред. А.К.Мусатова. – М.: Изд-во МГТУ, 1990. – 80с., ил.
2. Механика промышленных роботов: Учеб. пособие для вузов: В 3-х кн. / под ред. К.В.Фролова, Е.И.Воробьева. – М.: Высш.шк., 1988.
3. Р.Пол «Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота – манипулятора» - М.: Наука, 1976.

## *Лекция 21*

Краткое содержание: Задачи динамики механизмов с учетом податливости звеньев (с упругими связями). Виды механических колебаний. Динамические модели механизмов с упругими связями (условия и допущения). Двухмассовая модель привода с упругими связями. Определение закона движения динамической модели. Упругие вынужденные колебания в системе. Определение собственных частот колебаний системы. Определение форм колебаний. Моделирование динамических процессов в приводе с упругими связями (влияние жесткости звеньев привода на неравномерность движения, момент в приводе и динамическую ошибку).

### *Задачи динамики механизмов с учетом податливости звеньев.*

Звенья реальных механизмов под действием сил и моментов деформируются. При этом точки или сечения этих звеньев имеют относительные перемещения, которые влияют на их закон движения. Динамические модели реальных механизмов, учитывающие податливость звеньев делятся на дискретные модели и модели с распределенными параметрами. Дискретные модели как более простые применяются чаще. В этих моделях инерционные параметры рассматриваются как сосредоточенные в точках или сечениях звена, а податливость звена представляется как упругая связь (упругая кинематическая пара) между этими массами или моментами инерции.

К основным задачам динамики механизмов с упругими звеньями можно отнести:

- ◆ определение резонансных режимов работы механической системы и устранение их изменением ее динамических параметров;
- ◆ снижение виброактивности системы, уровня возбуждаемых ей звуковых (и других) колебаний;
- ◆ повышение динамической точности;
- ◆ применения вибраций или колебаний для выполнения технологических операций;
- ◆ другие задачи.

Эти задачи решаются на базе общих методов исследования динамики линейных и нелинейных механических систем. Каждая из рассматриваемых задач может быть сформулирована как прямая (задача анализа) или как обратная (задача синтеза). В прямых задачах динамики при известных динамических параметрах системы определяют закон ее движения и другие характеристики. В обратных задачах (задачах синтеза системы) – по заданным параметрам закона движения, частотам или формам колебаний определяются динамические или конструктивные параметры системы – массы, жесткости, коэффициенты демпфирования, внешние силы и другое. Решение обратной задачи или задачи синтеза более сложно, так как часто она имеет множество допустимых решений, из которых необходимо выбрать оптимальное.

### *Виды механических колебаний.*

Механическими колебаниями (или просто колебаниями) называется такое движение механической системы при котором обобщенные координаты и их производные изменяются во времени периодически возрастая или убывая.

Различают следующие виды механических колебаний:

- свободные или собственные колебания – происходящие без переменного внешнего воздействия и поступления энергии извне;
- периодические – при которых значения обобщенной координаты и ее производных циклически повторяются (если это условие не выполняется, то колебания апериодические);
- вынужденные – вызываемые и поддерживаемые переменной во времени внешней силой;
- параметрические – вызываемые изменением во времени динамических параметров системы ( жесткости, массы или момента инерции, демпфирования и др.);
- автоколебания – стационарные колебания возбуждаемые и поддерживаемые за счет энергии поступающей от источника неколебательного характера, в которой поступление энергии регулируется движением самой системы;
- другие виды колебаний.

### *Динамическая модель системы с упругими связями.*

Динамическая модель- математическая модель, которая отражает изменение рассматриваемого явления во времени. При формировании модели некоторыми свойствами объекта пренебрегают (эти свойства называются допущениями), другие свойства сохраняют неизменными (эти свойства называются критериями адекватности модели исследуемому объекту). В данном случае критериями адекватности являются:

- кинетические и потенциальные энергии, которыми обладают звенья и упругие элементы объекта, равны кинетической и потенциальной энергии соответствующих элементов модели;
- работы внешних сил и моментов для объекта и модели равны;
- звенья модели (без учета их деформации) должны двигаться с одной частотой или скоростью.

При формировании дискретной динамической модели принимаем следующие допущения:

- деформация упругих связей линейна и подчиняется закону Гука;
- инерционные свойства звеньев отображаются сосредоточенными в точках массами или сосредоточенными в сечении моментами инерции;
- упругие связи между этими массами и моментами инерции считаем безинерционными;
- влиянием нерезонансных частот при резонансе пренебрегаем;
- потери энергии при деформации упругих связей не учитываем.

### *Двухмассовая модель привода с упругими связями.*

Рассмотрим механическую систему (рис.21.1), состоящую из двигателя 1, редуктора и исполнительного устройства 2.

На рис.21.1 приняты следующие обозначения:

$I_1$  и  $I_2^*$  - моменты инерции соответственно ротора двигателя и исполнительного устройства,  $c_1$  и  $c_2^*$  - крутильные жесткости соответственно входного и выходного валов,  $M_d$  и  $M_c$  - моменты движущих сил и сил сопротивления, угловые координаты:  $\varphi_1$  - ротора двигателя,  $\varphi_1'$  - шестерни редуктора,  $\varphi_2'$  - колеса редуктора и  $\varphi_2^*$  - исполнительного устройства.



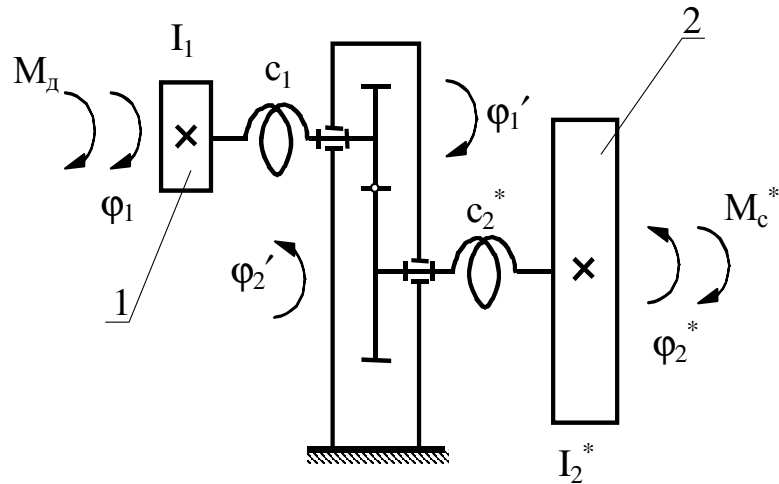


Рис.21.1

Согласно принятым допущениям приведем движения всех подвижных звеньев системы к движению с частотой (или скоростью) вала двигателя. Для этого определим приведенные жесткости, моменты и моменты инерции. При этом жесткости приводятся из условия равенства потенциальных энергий деформации, моменты - из условия равенства работ, моменты инерции - из равенства кинетических энергий. Для нашего примера:

Передаточное отношение редуктора

$$u_{12} = \varphi_1' / \varphi_2' .$$

Теорема о изменении кинетической энергии:

$$A_{\Sigma} = \Delta T + \Delta \Pi ,$$

где

$\Delta T = I_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 / 2 + I_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 / 2 - T_{нач}$  - изменение кинетической энергии системы,

$\Delta \Pi = c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2 / 2 - \Pi_{нач}$  - изменение потенциальной энергии системы,  $A_{\Sigma}$  - работа внешних сил.

Приведенный момент инерции исполнительного устройства

$$I_2 = I_2^* / u_{12}^2 .$$

Приведенная крутильная жесткость выходного вала

$$c_2 = c_2^* / u_{12}^2 .$$

Приведенная угловая координата исполнительного устройства

$$\varphi_2 = \varphi_2^* / u_{12} .$$

Приведенный момент сопротивления на валу исполнительного устройства

$$M_c = M_c^* \cdot u_{12} .$$

После приведения к одной частоте вращения расчетная схема динамической модели примет вид, изображенный на рис.21.2.

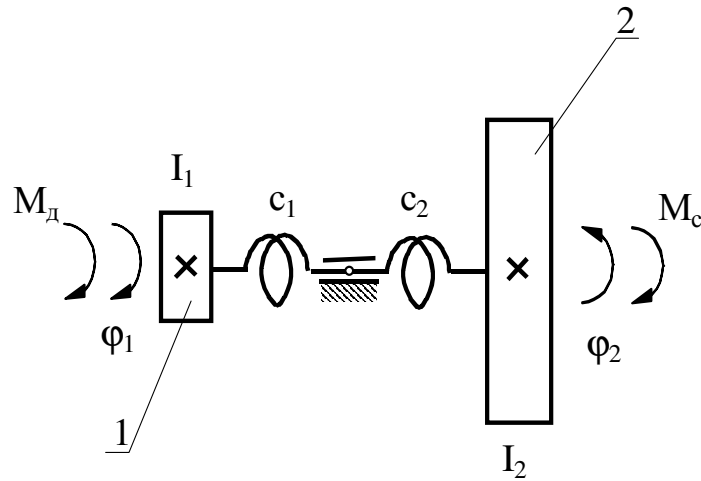


Рис.21.2

Два последовательно соединенных элемента системы можно заменить одним эквивалентным, при этом суммируются податливости этих элементов

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}, \quad c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}.$$

Окончательно расчетная схема принимает вид

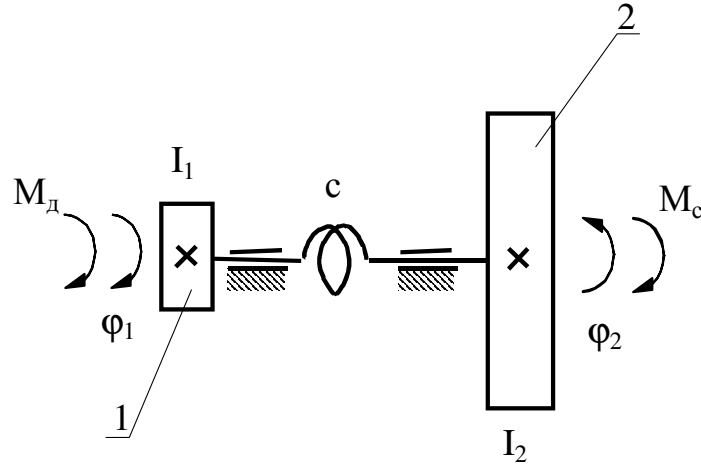


Рис.21.3

**Определение закона движения динамической модели.**

Положение звеньев динамической модели определяется двумя обобщенными координатами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Уравнения движения динамической модели запишем в виде условий кинестатического равновесия звеньев 1 и 2:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= M_\delta, \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= -M_c. \end{aligned} \quad (21.1)$$

Разделим первое уравнение системы на  $I_1$ , а второе - на  $I_2$ , и получим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{c}{I_1} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= \frac{M_\delta}{I_1}, \\ \ddot{\varphi}_2 - \frac{c}{I_2} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= -\frac{M_c}{I_2}. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Преобразуем уравнения системы следующим образом. Вычтем из первого уравнения (21.2) второе, а затем просуммируем уравнения (21.1). Тогда системы уравнений запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + c \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= \frac{M_\delta}{I_1} + \frac{M_c}{I_2}, \\ I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_\delta - M_c. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Обозначим деформацию упругой связи  $\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ . Ее вторая производная по времени  $\ddot{\varphi}_{12} = \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2$ , откуда  $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_{12} + \ddot{\varphi}_2$ . Обозначим также

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \quad \text{или} \quad I = \frac{I_1 \cdot I_2}{I_1 + I_2} \quad \text{и} \quad I_\Sigma^{np} = I_1 + I_2.$$

Подставим эти обозначения в (21.3) и получим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{12} + \frac{c}{I} \cdot \varphi_{12} &= \frac{M_\delta}{I_1} + \frac{M_c}{I_2}, \\ I_\Sigma^{np} \cdot \ddot{\varphi}_1 - I_2 \cdot \ddot{\varphi}_{12} &= M_\delta - M_c. \end{aligned} \quad (21.4)$$

### ***Упругие вынужденные колебания в системе.***

Первое уравнение системы содержит только координату деформации упругой связи  $\varphi_{12}$  и описывает упругие колебания в системе, второе включает и координату связанную с движением системы без деформации  $\varphi_1$ . Рассмотрим решение первого уравнения системы при следующих исходных данных:

$$M_\delta = \text{const}, \quad M_c = M_{c0} + \tilde{M}_c \cdot \sin \nu t.$$

С учетом этого первое уравнение системы (21.4) запишется так

$$\ddot{\varphi}_{12} + \frac{c}{I} \cdot \varphi_{12} = \frac{M_\delta}{I_1} + \frac{M_{c0}}{I_2} + \frac{\tilde{M}_c}{I_2} \cdot \sin \nu t. \quad (21.5)$$

Введем следующие обозначения

$$p^2 = \frac{c}{I}, \quad \varepsilon_0 = \frac{M_\delta}{I_1} + \frac{M_{c0}}{I_2}, \quad \tilde{\varepsilon}_c = \frac{\tilde{M}_c}{I_2},$$

а также  $\varphi_{12} = q + \frac{\varepsilon_0}{p^2}$  и  $\ddot{\varphi}_{12} = \ddot{q}$ , и подставим в (21.5)

$$\ddot{q} + p^2 \cdot q = \tilde{\varepsilon}_c \cdot \sin \nu \cdot t. \quad (21.6)$$

Решение этого уравнения при  $p = \nu$  и начальных условиях  $t = 0, q = q_0, \dot{q} = \dot{q}_0$

$$q = q_0 \cdot \cos p \cdot t + \frac{\dot{q}_0}{p} \cdot \sin p \cdot t - \frac{\tilde{\varepsilon}_c \cdot v}{p \cdot (p^2 - v^2)} \cdot \sin p \cdot t + \frac{\tilde{\varepsilon}_c}{p^2 - v^2} \cdot \sin v \cdot t, \quad (21.7)$$

где  $q_0 \cdot \cos p \cdot t + \frac{\dot{q}_0}{p} \cdot \sin p \cdot t$  - свободные колебания с частотой  $p$ ,

$\frac{\tilde{\varepsilon}_c \cdot v}{p \cdot (p^2 - v^2)} \cdot \sin p \cdot t$  - гармонические колебания с частотой  $p$  и с амплитудой зависящей от  $\tilde{\varepsilon}_c$ ,

$\frac{\tilde{\varepsilon}_c}{p^2 - v^2} \cdot \sin v \cdot t$  - вынужденные колебания с частотой возмущающей силы  $v$ .

### **Определение собственных частот колебаний системы.**

Рассмотрим свободные колебания рассматриваемой системы, то есть положим  $M_\delta = 0$  и  $M_c = 0$ . Тогда система составленная из первого уравнения (21.4) и второго уравнения (21.3) запишется так:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{12} + \frac{c}{I} \cdot \varphi_{12} &= 0, \\ I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (21.8)$$

Ищем решение этой системы в виде

$$\varphi_i = \varphi_{i0} \cdot \sin p \cdot t.$$

Для этого дифференцируем это выражение два раза

$$\ddot{\varphi}_i = -\varphi_{i0} \cdot p^2 \cdot \sin p \cdot t$$

и подставляем в систему (21.8)

$$\begin{aligned} \left(-p^2 + \frac{c}{I}\right) \cdot \varphi_{120} \cdot \sin p \cdot t &= 0, \\ -(I_1 \cdot \varphi_{10} + I_2 \cdot \varphi_{20}) \cdot p^2 \cdot \sin p \cdot t &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения если  $\varphi_{120} \neq 0$ , то  $\left(-p^2 + \frac{c}{I}\right) = 0$  и  $p_{1,2} = \sqrt{\frac{c}{I}}$ .

Из второго уравнения если  $(I_1 \cdot \varphi_{10} + I_2 \cdot \varphi_{20}) \neq 0$ , то  $p^2 = 0$  и  $p_{3,4} = 0$ . Нулевые частоты соответствуют движению системы без деформации.

### **Определение форм колебаний.**

При деформации системы ее собственная частота не равна нулю  $p \neq 0$ . Тогда  $I_1 \cdot \varphi_{10} + I_2 \cdot \varphi_{20} = 0$  и  $\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{20}} = -\frac{I_2}{I_1}$ . Если принять  $\varphi_{10} = 1$ , то  $\varphi_{20} = -\frac{I_2}{I_1}$  и эпюра угловых координат по длине упругой связи будет иметь следующий вид:

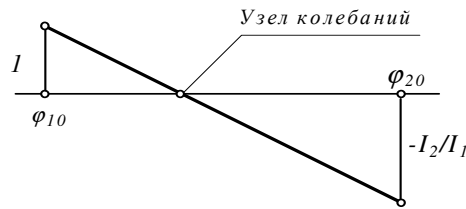


Рис.21.4

При движении системы без деформации собственная частота колебаний равна нулю  $p = 0$ . Тогда  $(-p^2 + \frac{c}{I}) \neq 0$ ,  $\varphi_{120} = 0$  и  $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 1$ . Эюра угловых координат для движения без деформации показана на рис.21.5.

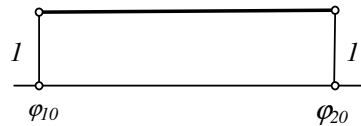
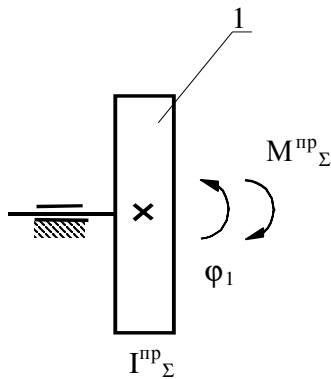


Рис.21.5

**Пример для системы без упругих связей.**

Если в рассмотренной модели принять  $c_1$  и  $c_2 \Rightarrow \infty$ , то  $\varphi_2' \Rightarrow \varphi_2^*$  и  $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1'$ . Расчетная схема этой динамической модели приведена на рис. 21.6, где:



$I^np_\Sigma$  - приведенный суммарный момент инерции

$$I^np_\Sigma = I_1 + I_2^* \cdot \frac{1}{u_{12}^2};$$

$M^np_\Sigma$  - приведенный суммарный момент внешних сил

$$M^np_\Sigma = M_d + M_c \cdot \frac{1}{u_{12}};$$

$\Delta T$  - изменение кинетической энергии

$$\Delta T = A_\Sigma .$$

Уравнение движения для этой модели

Рис.21.6

$$I^np_\Sigma \cdot \ddot{\varphi}_1 = M^np_\Sigma .$$

**Моделирование динамических процессов в приводе с упругими связями.**

Рассмотренные выше уравнения движения механической системы можно использовать при моделировании поведения этой системы при различных значениях ее параметров. Ниже (на рис. 21.7) приведены результаты исследования влияния жесткости  $c$  на неравномерность вращения  $\Delta\omega$ , момент в приводе  $M_n$  и на динамическую ошибку  $\psi$ .

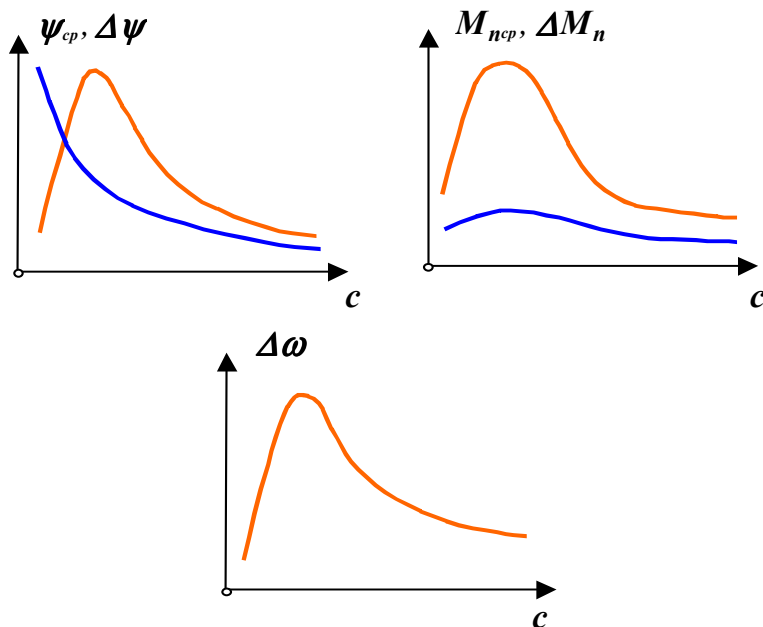


Рис.21.7