

## Лекція 19

### Тема: Рух машини під дією заданих сил

- Зміст: 1. Задачі динамічного аналізу та синтезу машин.  
2. Динамічні моделі машини.  
3. Зведення мас.  
4. Зведення сил за методом Жуковського.  
5. Види рівнянь руху машини і їх застосування.  
6. Контрольні запитання.

#### 1. Задачі динамічного аналізу та синтезу машин

У даному розділі будуть розглядатися тільки *машини циклічної дії*, що складають явну більшість серед енергетичних і робочих машин.

Такі машини в процесі роботи мають явно виражені *три режими руху: розгін, усталений рух і вибіг*.

*Розгін* машини спостерігається тоді, коли робота рушійних сил перевищує роботу сил опору.

*Вибіг* машини відбувається під дією сил опору при відключених рушійних силах.

*Усталений рух машини здійснюється при рівності за цикл робіт рушійних сил і сил опору*.

Розгін і вибіг є специфічними підготовчо-заклучними режимами руху і тому тут не будуть докладно розглянуті.

Усталений рух, як основний робочий режим руху машини, являє особливий інтерес, і тому саме йому буде виділена основна увага.

У інженерній практиці часто треба вирішувати дві основні задачі: розбити розрахунок закону руху машини під дією заданих сил, а також забезпечувати регулювання руху машини.

Перша задача зводиться тут до визначення закону руху головного вала машини в межах циклу на усталеному русі.

Друга задача має дві частини.

Перша частина відноситься до регулювання нерівномірності обертання головного вала машини в межах циклу. Вона зводиться до розрахунку махових мас, які необхідно встановити на головному валі машини для досягнення заданого граничного рівня нерівномірності його обертання, що чисельно характеризується величиною коефіцієнта нерівномірності ходу машини  $\delta$ .

Друга частина відноситься до регулювання величини середньої кутової швидкості  $\omega_{сер}$  обертання головного вала машини в умовах повільної зміни сил корисного опору за допомогою відцентрових регуляторів або модераторів. Вона являє собою специфічну задачу автоматичного регулювання і тому

тут також не розглядається.

При динамічних розрахунках необхідне знання характеристик інертності ланок - мас  $m_i$  і моментів інерції  $J_{Si}$ .

Якщо динамічний розрахунок відноситься до вже працюючої машини, тоді визначення  $m_i$  і  $J_{Si}$  не має складності.

Маси ланок можна визначити простим зважуванням, а моменти інерції ланок - експериментально на біфілярному або трифілярному (двохнитковому або тринитковому) підвісі методом вільних коливань. Період коливань визначається довжиною і розташуванням ниток (відомими) і моментом інерції ланки (невідомим). Вимірявши період коливань, можна розрахувати момент інерції ланки  $J_S$  відносно центральної його осі інерції (осі інерції, що проходить через центр мас).

Якщо ж динамічний розрахунок відноситься до машини, що проектується, тоді, у залежності від стадії проектування, маси  $m_i$  і моменти інерції ланок  $J_{Si}$  можна визначити приблизно аналітично по кресленнях або призначити з відповідною корекцією по аналогу (машині попереднього покоління).

При проектуванні машини з використанням AutoCAD величини мас  $m_i$  і моментів інерції деталей  $J_{Si}$  визначаються з високою точністю за допомогою спеціальної програми розрахунку.

Варто підкреслити також приблизність знання заданих зовнішніх активних сил, що діють на ланки машини. Сили ці часто залежать від багатьох обставин, що носять випадковий характер (стан робочого тіла, його дозування і т. п.).

Тому можна вважати виправданим для вирішення задачі визначення закону руху машини під дією заданих сил застосування графічних методів, яким властива відносна похибка, що не перевищує 5%.

Визначивши закон руху головного вала машини, можна здійснити розрахунок силового навантаження ланок машини в кінематичних парах. Силовий розрахунок машини, як правило, має вид кінетостатичного аналізу, здійснюваного на основі принципу д'Аламбера.

В окремих випадках (для тихохідних машин) виконують статичні силові розрахунки, коли інерційними навантаженнями зневажають. Статичний силовий розрахунок виконується по тій же методиці, що і кінетостатичний, тільки при цьому інерційні навантаження відсутні.

## 2. Динамічні моделі машини

Рішення задач динаміки машини можна істотно спростити, якщо застосувати динамічне моделювання її руху з максимальним зменшенням числа невідомих і відомих параметрів, що впливають на закон руху головного вала машини, який визначає закони руху інших частин машини. Головним валом машини прийнято вважати кривошипний (колінний) вал.

Оскільки закон руху машини визначається сумарною інертністю її ла-

нок і роботою зовнішніх активних сил, що діють на ланки машини, необхідно зберегти ці чинники незмінними й у динамічній моделі машини.

На рис. 2.1 показані дві динамічні моделі машини, що застосовуються частіше всього.

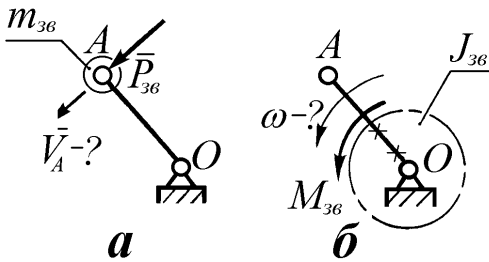


Рис. 2.1. Динамічні моделі машини

ня, тобто від зовнішніх сил, що діють на відкинуті рухомі ланки машини) в напрямку, перпендикулярному до кривошипа  $OA$ .

*Зведеною масою ( $m_{36}$ ) називається уявна точкова маса, кінетична енергія якої дорівнює сумарній кінетичній енергії всіх мас зведення.*

Зауважимо, що раз кінетична енергія машини, як правило, є змінна величина, то й зведена маса також являється змінною величиною.

*Зведеною силою ( $P_{36}$ ) називається уявна сила, робота (потужність) якої дорівнює сумарній роботі (потужності) усіх сил зведення.*

Сила  $P_{36}$  також звичайно є змінною величиною.

Сполучення величини  $m_{36}$  із величиною і напрямком (знаком)  $P_{36}$  визначає шукану величину  $V_A$ , що у динамічній моделі машини буде такою ж, як і в реальній машині. Знаючи ж закономірність зміни лінійної швидкості точки  $A$ , можна розрахувати всі параметри руху головного вала, а потім і всіх ланок машини.

Друга модель (рис. 2.1б) фактично є варіантом першої моделі. Тільки в ній, на відміну від першої, уявна зведена маса розосереджена навколо осі головного вала і кількісно подана зведеним моментом інерції  $J_{36}$ , а уявна узагальнена зведена сила кількісно подана зведеним моментом сил  $M_{36}$ .

Якщо прийняти

$$J_{36} = m_{36} \cdot l_{OA}^2, \quad (2.1)$$

$$M_{36} = P_{36} \cdot l_{OA}, \quad (2.2)$$

то очевидно, що перша і друга моделі мало чим відрізняються: головний вал машини й у тому й в іншому випадку буде мати той самий закон руху.

Проте друга модель, нам здається, має перевагу над першою, тому що вона безпосередньо (без проміжних перерахунків) дає закон руху головного

Перша модель (рис. 2.1а) включає у свій склад кривошип  $OA$  (ланку зведення) з головним валом та зі зведеною до точки  $A$  масою  $m_{36}$  (від мас зведення, тобто від мас інших відкиннутих рухомих ланок машини), що знаходиться під дією зведеної до точки  $A$  сили  $P_{36}$  (від сил зведення).

вала, а не точки  $A$ .

Дано формулювання параметрів другої моделі.

$J_{зв}$  - зведений момент інерції - це уявний момент інерції ланки зведення, кінетична енергія якої дорівнює сумарній кінетичній енергії всіх відкинутих ланок.

$M_{зв}$  - зведений момент сил - це уявний момент сил, робота (потужність) якого дорівнює сумарній роботі (потужності) усіх зовнішніх сил, що діють на відкинуті рухомі ланки машини.

Ланка зведення  $OA$  зі змінним моментом інерції  $J_{зв}$  під дією змінного зведеного моменту сил  $M_{зв}$  буде мати шукану змінну величину кутової швидкості  $\omega$  головного вала. Продиференціювавши функцію  $\omega$  за часом, знайдемо закономірність зміни кутового прискорення  $\mathcal{E}$  головного вала.

Зауважимо, що іноді зведена маса  $m_{зв}$  може враховувати тільки маси частини рухомих ланок машини (маси зведення), а зведена сила  $P_{зв}$  - тільки деякі з зовнішніх сил (сили зведення). Так буває, наприклад, коли не всі маси рухомих частин машини і не всі зовнішні сили, що діють на рухомі ланки машини, задалегідь відомі.

### 3. Зведення мас

Відповідно до визначення  $m_{зв}$  можна записати

$$\frac{m_{зв} \cdot V_A^2}{2} = \sum_{i=1}^k \frac{m_i \cdot V_{Si}^2}{2} + \sum_{j=1}^p \frac{J_{Sj} \cdot \omega_j^2}{2}, \quad (2.3)$$

де  $m_i$  - маса  $i$ -тої ланки;

$i$  - порядковий номер ланки, що поступально рухається, (в число  $i$  входять також ланки, що здійснюють складний плоскопаралельний рух);

$V_{Si}$  - швидкості центрів мас  $i$ -х ланок;

$k$  - число  $i$ -тих мас;

$J_{Sj}$  - центральний момент інерції  $j$ -ї ланки;

$j$  - порядковий номер обертової ланки (у число  $j$  входять також ланки, що здійснюють складний плоскопаралельний рух);

$p$  - число  $j$ -х ланок.

Знайдемо з формули (2.3) величину  $m_{зв}$

$$m_{зв} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot \left( \frac{V_{Si}}{V_A} \right)^2 + \sum_{j=1}^p J_{Sj} \cdot \left( \frac{\omega_j}{V_A} \right)^2. \quad (2.4)$$

З (2.4) випливає, що  $m_{зв}$  є функцією положення головного вала машини, тому що вона залежить від зміни сумарної величини кінетичної енергії

ланок зведення, а ця зміна визначається співвідношенням швидкостей точок ланок. Співвідношення ж швидкостей точок ланок цілком залежить від положення головного вала і зовсім не залежить від закону руху машини, який до того ж може бути поки що невідомий.

Тому для зведення мас ланок достатньо побудувати аналоги планів швидкостей механізмів машини в  $n$  положеннях і в (2.4) співвідношення швидкостей замінити співвідношеннями відповідних відрізків з аналогів планів.

Число  $n$  в інженерних розрахунках звичайно приймають 24 або 36 (інколи навіть 72) у межах одного циклу роботи машини (звичайно, у межах одного обороту головного вала, а інколи - двох). У курсовому проєкті по ТММ приймається  $n=12$ .

Тоді формула (2.4) прийме вид

$$m_{зв} = \sum_{i=1}^k m_i \left( \frac{|p_V s_i|}{|p_V a|} \right)^2 + \sum_{j=1}^p \frac{J_{Sj}}{I_j^2} \cdot \left( \frac{|x_j|}{|p_V a|} \right)^2, \quad (2.4^*)$$

де - у круглих скобках подані відношення відповідних відрізків з аналогів планів швидкостей;

$|p_V a|$  - довжина відрізка вектора аналога швидкості точки  $A$ ;

$|p_V s_i|$  - довжина відрізка вектора аналога швидкості центру  $i$ -ї маси;

$|x_j|$  - довжина відрізка вектора аналога абсолютної або відносної швидкості деякої точки  $j$ -ї ланки, через який виражена кутова швидкість  $\omega_j$ ;

$l_j$  - довжина  $j$ -ї ланки, через яку виражена кутова швидкість  $\omega_j$ .

Наприклад, для шатуна  $AB$  відповідний член другої суми (2.4<sup>\*</sup>) буде мати вигляд

$$\frac{J_{S_{AB}}}{I_{AB}^2} \cdot \left( \frac{|abl|}{|p_V a|} \right)^2,$$

тому що  $\omega_{AB} = \frac{|abl| \mu_V}{l_{AB}}$ ,  $V_A = |p_V a| \mu_V$  (див. задачу 2.2 [8]).

При цьому масштаб швидкостей  $\mu_V$ , як і слід було очікувати, скорочується.

Аналіз формули (2.4<sup>\*</sup>) показує, що в величину  $m_{зв}$  кожна маса ланки "делегує" свою якусь частину, котра залежить від квадрату співвідношення швидкості центра маси і швидкості точки  $A$  (або ж від квадрату співвідношення аналогів цих швидкостей).

В другу суму також входять члени, що мають розмірність маси, але тут "представництво"  $J_{Sj}$  у  $m_{зв}$  більш складне, хоча воно теж залежить від квад-

рата співвідношення відповідних аналогів швидкостей.

Нижче при вирішенні задачі 2.1 буде показано методику зведення мас.

#### 4. Зведення сил за методом Жуковського

Зведення сил можна здійснити за їх потужністю, тому що  $P_{зв}$ , відповідно до її визначення, еквівалентна діючим силам і моментам сил (силам зведення) по їхній сумарній потужності.

Як відомо з теоретичної механіки, потужність сили рівняється добутку величини сили, величини швидкості точки прикладення сили і косинуса кута між векторами сили і швидкості, а потужність моменту сил дорівнює добутку величини моменту сил і кутової швидкості тіла, до якого прикладений цей момент сил.

Якщо зовнішні сили задаються по положенню механізмів машин, тоді також мається можливість здійснити зведення сил за допомогою аналогів планів швидкостей. Невідомі масштаби планів швидкостей тут також скорочують, як і при зведенні мас.

Потужність сили  $P_i$  можна підрахувати по формулі

$$N(P_i) = P_i \cdot V_i \cdot \cos(\bar{P}_i, \bar{V}_i),$$

де  $V_i$  - швидкість точки прикладення сили  $P_i$ ;

$\cos(\bar{P}_i, \bar{V}_i)$  - косинус кута між векторами  $\bar{P}_i$  і  $\bar{V}_i$ .

Відповідно до визначення  $P_{зв}$ , якщо зведення сил здійснювати до точки  $A$ , можна записати вираз для елементарної роботи зведеної сили:

$$dA(P_{зв}) = \sum dA(P_i, M_i),$$

$$P_{зв} \cdot dS_A = \sum P_i \cdot dS_i \cdot \cos \alpha_i + \sum M_i \cdot d\varphi_i.$$

Розділивши на  $dt$  усі члени останнього рівняння, знайдемо:

$$P_{зв} \cdot dS_A/dt = \sum P_i \cdot dS_i/dt \cdot \cos \alpha_i + \sum M_i \cdot d\varphi_i/dt,$$

$$P_{зв} \cdot V_A = \sum P_i \cdot dV_i \cdot \cos \alpha_i + \sum M_i \cdot \omega_i,$$

звідкіля остаточно запишемо

$$P_{зв} = \sum P_i \cdot \frac{V_i}{V_A} \cdot \cos \alpha_i + \sum M_i \cdot \frac{\omega_i}{V_A}.$$

Аналіз останніх двох виразів підтверджує, що потужність  $P_{зв}$  рівняється сумі потужностей сил і моментів сил зведення, як це записано у визначенні  $P_{зв}$  (у дужках). Крім того помічаємо, що для зведення сил обов'язково знати дійсні значення відповідних лінійних і кутових швидкостей, достатньо знати тільки їхні відношення.

М. Є. Жуковський запропонував витончений метод зведення сил, заснований на доведеній їм теоремі про "жорсткий важіль", у якості якого був

узятий аналог плану швидкостей. Суть методу полягає в заміні задачі підсумовування потужностей сил до більш простої задачі підсумовування моментів сил навколо точки. Цією точкою є полюс плану швидкостей  $p_V$ .

Не приводячи тут теореми, котру можна знайти в будь-якому підручнику по ТММ, прокоментуємо метод Жуковського зведення сил.

Аналог плану швидкостей варто повернути в будь-який бік на  $90^\circ$  (можна аналог плану швидкостей не повертати, тоді треба буде повертати всі сили зведення в один загальний бік на  $90^\circ$ , що в окремих випадках навіть зручніше робити).

До поверненого плану аналогів швидкостей у відповідних точках (до кінців векторів швидкостей точок прикладення сил) прикласти всі сили, які підпадають зведенню (сили зведення).

Моменти сил зведення зручно попередньо розкласти на пари сил. Одну із сил кожної пари варто прикладати до нерухомої точки ланки, тоді на повернений аналог плану швидкостей від кожного моменту сил необхідно перенести тільки складову силу, прикладену до рухомої точки ланки.

Момент кожної окремої сили навколо полюса плану  $p_V$  на плечі, що являється проекцією вектора швидкості на напрямок цієї сили, фактично є потужністю цієї сили. Сумарний момент усіх сил зведення з урахуванням напрямків (знаків потужностей) подає їхню сумарну потужність.

Таку ж потужність, відповідно до визначення, повинна мати зведена сила  $P_{зв}$ , плечем якої на плані аналогів швидкостей буде аналог швидкості точки  $A$  кінця кривошипа.

Якщо сумарний момент сил зведення навколо полюса плану  $p_V$  розділити на плече дії зведеної сили, то й буде знайдена величина (і напрямок, тобто знак) зведеної сили.

$P_{зв}$  вважається додатною, якщо вона спрямована по швидкості руху точки  $A$ , та - від'ємною, якщо вона спрямована в протилежний від швидкості точки  $A$  бік.

## 5. Задача на зведення мас і сил

Вирішимо задачу 2.1 по зведенню сил і мас, на котрій докладніше проілюструємо метод Жуковського зведення сил.

Здійснимо в загальному вигляді зведення до точки  $A$  заданих мас і сил шестиланкового механізму машини хитного конвеєра по відомій кінематичній схемі (рис. 2.2) у заданому положенні. Вважатимемо відомими величини:  $\mu_1$  (м/мм),  $m_2$  (кг),  $m_3$  (кг),  $J_{S2}$  (кгм<sup>2</sup>),  $J_{S3}$  (кгм<sup>2</sup>),  $J_{S4}$  (кгм<sup>2</sup>),  $P$  (Н).

### Рішення.

1. Будуємо аналог плану швидкостей механізму, обравши довільний відрізок  $|p_V a|$ , що зображує аналог швидкості точки  $A$  (методику побудови

плану швидкостей див. [8] - у задачах 2.1, ... , 2.11).

2. Здійснимо зведення мас ланок 2, 3, 4, 5 до точки  $A$ .

Для цього запишемо рівняння відповідно до формули (2.3):

$$\frac{m_{np} \cdot V_A^2}{2} = \frac{m_2 \cdot V_{S_2}^2}{2} + \frac{m_4 \cdot V_{S_4}^2}{2} + \frac{m_5 \cdot V_D^2}{2} + \frac{J_{S_2} \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{J_{S_3} \cdot \omega_3^2}{2} + \frac{J_{S_4} \cdot \omega_4^2}{2}.$$

Перетворимо записане рівняння до виду (2.4\*)

$$m_{36} = m_2 \cdot \left( \frac{|p_V s_2|}{|p_V a|} \right)^2 + m_4 \cdot \left( \frac{|p_V s_4|}{|p_V a|} \right)^2 + m_5 \cdot \left( \frac{|p_V d|}{|p_V a|} \right)^2 + \frac{I_{S_2}}{l_{AB}^2} \left( \frac{|abl|}{|p_V a|} \right)^2 + \frac{I_{S_3}}{l_{BC}^2} \left( \frac{|p_V b|}{|p_V a|} \right)^2 + \frac{I_{S_4}}{l_{BD}^2} \left( \frac{|bd|}{|p_V a|} \right)^2 \quad (\kappa_2).$$

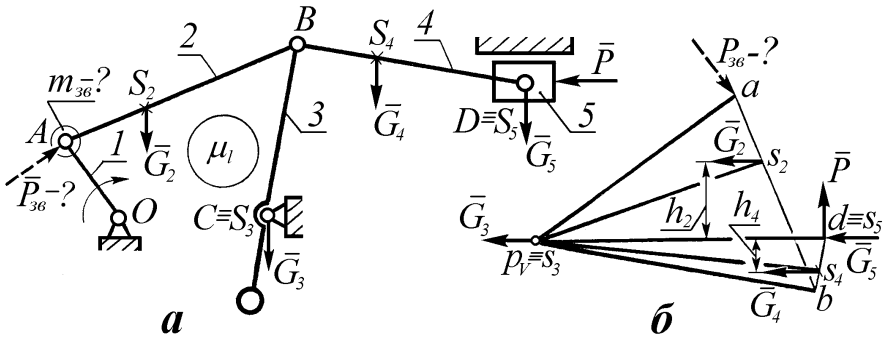


Рис. 2.2. До зведення мас і сил

При розрахунку величини  $m_{36}$  довжини відповідних відрізків аналогів швидкостей візьмемо з аналога плану швидкостей (у мм), а довжини ланок обчислимо із вихідних даних:

$$l_{AB} = \overline{AB} \cdot \mu_l (m), \quad l_{BC} = \overline{BC} \cdot \mu_l (m), \quad l_{BD} = \overline{BD} \cdot \mu_l (m).$$

Зауважимо, що  $m_2$  буде помножитися на безрозмірний коефіцієнт, менший від одиниці, тому що  $|p_V s_2| < |p_V a|$ .

Маси ж ланок  $m_4$  і  $m_5$  будуть помножитися на безрозмірні коефіцієнти, більші від одиниці, тому що  $|p_V s_4| > |p_V a|$  і  $|p_V d| > |p_V a|$ .

Цей приклад показує, що зведена маса не є просто сума мас ланок, як це помилково іноді говорять деякі студенти.

3. Виконаємо зведення сил по методу Жуковського.



План аналогів швидкостей повертати не будемо, а повернемо всі задані сили  $G_2, G_3, G_4, G_5$  і  $P$  в один бік на  $90^\circ$  (наприклад, за годинниковою стрілкою) і перенесемо їх на кінці векторів аналогів швидкостей точок прикладення сил (у точки плану  $s_2, s_3, s_4, d$ ).

Шукану силу  $P_{36}$  умовно будемо вважати додатною. Тоді вона буде прикладена в точці  $a$  аналога плану швидкостей, як показано на рис. 2.2б.

Сили тяжіння ланок визначимо через задані маси ланок:

$$G_2 = m_2 \cdot g(H), \quad G_3 = m_3 \cdot g(H), \quad G_4 = m_4 \cdot g(H), \quad G_5 = m_5 \cdot g(H),$$

де  $g = 9,806 \text{ (м/с}^2\text{)}$  - прискорення вільного падіння під дією сили тяжіння Землі на рівні моря в середніх широтах.

Запишемо відповідно до визначення  $P_{36}$  і поясненням, зробленим вище, рівняння

$$P_{36} \cdot |p_V a| = G_4 \cdot |h_4| - G_2 \cdot |h_2| - P \cdot |p_V d| .$$

Звідси

$$P_{36} = \frac{G_4 \cdot |h_4| - G_2 \cdot |h_2| - P \cdot |p_V d|}{|p_V a|} (H).$$

При підрахунку величини  $P_{36}$  плечі дії сил  $|p_V a|, |h_2|, |h_4|, |p_V d|$  беруться з аналога плану швидкостей в мм.

При чисельних розрахунках величина  $P_{36}$  у деяких положеннях механізму може виявитися від'ємною. Це буде означати, що насправді зведена сила  $P_{36}$  спрямована в цих положеннях не по швидкості точки  $V_A$ , як це передбачалося, а в протилежному напрямку, тобто що її потужність тут від'ємна.

При динамічному аналізі в різних положеннях механізму знаки  $P_{36}$  зустрічаються різні. Це обов'язково треба враховувати при побудованні графіків. Ординати додатних величин варто відкладати вгору по осі  $P_{36}$ , а ординати від'ємних величин - униз.

## 6. Контрольні запитання

1. Які задачі вирішуються при динамічних розрахунках машин?
2. Наведіть приклад динамічної моделі машини.
3. Що таке зведена маса?
4. Що таке зведена сила?
5. Що таке зведений момент інерції?
6. Що таке зведений момент сил?
7. Як визначаються зведена маса і зведений момент інерції механізму?
8. Як визначається за методом Жуковського зведена сила?