Лекція 5
Тема: Кінематичний аналіз важільних механізмів графо-аналітичним методом планів

Зміст: 1. Загальна характеристика методу.
2. Побудова планів для початкового механізму.
3. Теорема подібності планів.
4. Побудова планів для груп Ассура.
5. Контрольні запитання.

1. Загальна характеристика методу

Розглянемо графоаналітичний метод кінематичного аналізу - метод планів швидкостей і прискорень.

Даний метод, сполучаючи графічні побудови з розрахунком деяких проміжних величин, дозволяє істотно підвищити точність кінематичного аналізу.

Похибка методу планів швидкостей і прискорень, як правило, значно менше 5%.

При високій якості графічних побудов можна домогтися похибки, що не перевищує 1%. А при побудовах в AutoCAD можна забезпечити необмежено малу похибку.

План швидкостей є нашаруванням векторних трикутників, сторонами яких є вектори абсолютних або відносних швидкостей точок ланок механізму в однім його положенні.

Практично те ж саме можна сказати про план прискорень (тільки замість слова "швидкостей" у попередньому абзаці треба читати "прискорень", а замість слова «трикутників» - читати «багатокутників»).

Причому всі вектори абсолютних швидкостей починаються в одній точці, яку прийнято називати полюсом плану швидкостей.

Всі вектори відносних швидкостей рухомих точок механізму розташовані в периферійній частині плану швидкостей.

Те ж саме можна сказати про план прискорень.

Недоліком методу є необхідність побудови множини планів для n положень механізму, де звичайно число n = 12, 24, 36...

Беззаперечною перевагою плану швидкостей або прискорень є те, що план містить повну інформацію про швидкості або прискорення усіх без винятку точок механізму в даному його положенні.

Використовуючи вектори відносних швидкостей і відносних дотичних прискорень можна визначити величини і напрямки кутових швидкостей і кутових прискорень ланок механізму в усіх його положеннях.

Покажемо побудову планів швидкостей і прискорень на прикладах рішення задач кінематичного аналізу механізмів.

2. Побудова планів для початкового механізму

Побудуємо план швидкостей і план прискорень кривошипа початкового механізму (рис. 2.4) за заданими його кутовій швидкості і кутовому прискоренню в положенні, показаному на кінематичній схемі, накресленій в масштабі $\mu_l=10^{-3}$ *м/мм*; $\omega=10\ c^{-1}$; $\varepsilon=50\ c^{-2}$.

1. Знайдемо довжину кривошипа

$$l_{OA}=\overline{OA}\cdot\mu_l=30\cdot10^{-3}=0{,}03\ м, \text{ де } \overline{OA}=30\ мм.$$

Вектор швидкості $\overline{V_A}$ направлений по дотичній до траєкторії точки A в заданому положенні убік кутової швидкості ω.

Зобразимо вектор швидкості $\overline{V_A}$ на плані швидкостей, позначивши його початок точкою p_V (полюс плану швидкостей), а кінець - точкою a (рис. 2.5). Направлено вектор перпендикулярно OA вліво вгору.

Масштаб плану швидкостей можна розрахувати по формулі $\mu_V = V_A / |p_V a|$.

Очевидно, що можна заздалегідь задатися або довжиною відрізка $|p_V a|$, або величиною масштабу μ_V.

Виберемо, наприклад, довжину відрізка $|p_V a|=30$ *мм*, тоді масштаб плану швидкостей буде

$$\mu_V = V_A / |p_V a| = 0{,}3/30=0{,}01\ (м/с)/мм.$$

Відзначимо, що бажано мати масштаб у вигляді раціонального числа з одною значущою цифрою. Для цього варто підбирати довжину відрізка $|p_V a|$ кратною відомій швидкості (у даному прикладі - V_A).

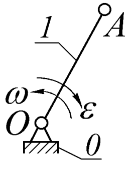

Рис. 2.4. Схема кривошипа

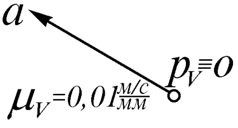

Рис. 2.5. План швидкостей кривошипа

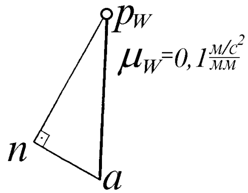

Рис. 2.6. План прискорень кривошипа

Зауважимо, що точка O кривошипа має швидкість $V_O = 0$. Отже і довжина вектора $\overline{V_O}$ нульова. Це значить, що нерухома точка O буде мати на плані швидкостей свій відбиток - точку o, що знаходиться в полюсі плану швидкостей. Це буде стосуватися надалі також і інших нерухомих точок механізмів.

Ще одне зауваження стосується стрілок на плані швидкостей. Стрілки можна вважати "архітектурною" надмірністю, тому що вони не несуть практичної інформації.

Справді, усі вектори абсолютних швидкостей починаються в полюсі і закінчуються малими буквеними відображеннями точок механізму, а відносні швидкості мали б стрілки з двох кінців, що також не давало б додаткової інформації.

Надалі на планах швидкостей і на планах прискорень стрілки ставити не будемо.

На цьому план швидкостей кривошипа можна вважати побудованим.

4. Побудуємо план прискорень.

З теоретичної механіки відомо, що при нерівномірному обертанні точки по криволінійній (тут - окружній) траєкторії, її прискорення розкладається на дві взаємно перпендикулярні складові: нормальне (або доцентрове) прискорення, спрямоване по нормалі до траєкторії убік її центру кривизни (тут - по радіусу до центру окружності) і дотичне (або тангенціальне) прискорення, спрямоване по дотичній до траєкторії убік зміни (збільшення або зменшення) лінійної швидкості руху точки. Дотичне лінійне прискорення зв'язане з напрямком кутового прискорення.

На підставі вищесказаного можна записати векторне рівняння:

$$\overline{W}_A = \overline{W}_A^n + \overline{W}_A^\tau,$$

де $W_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA} -$ нормальне прискорення точка A;

$W_A^\tau = \varepsilon \cdot l_{OA} -$ дотичне прискорення точки A.

Знайдемо:

$$W_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0{,}03 = 3\,м/с^2\ ;$$

$$W_A^\tau = \varepsilon \cdot l_{OA} = 50 \cdot 0{,}03 = 1{,}5\,м/с^2.$$

Розрахуємо масштаб плану прискорень, задавшись, наприклад, довжиною вектора нормального прискорення $|p_W n| = 30\ мм$,

$$\mu_W = W_A^n / |p_W n| = 3/30 = 0{,}1\,(м/с^2)/мм.$$

Тоді вектор дотичного прискорення буде мати в обраному масштабі довжину

$$|na| = W_A^\tau / \mu_W = 1{,}5/0{,}1 = 15\ мм.$$

Направимо вектор нормального прискорення уздовж AO від точки A до точки O. На плані прискорень цей вектор зображений відрізком $|p_W n|$ (рис. 2.5).

З кінця цього вектора встановимо перпендикуляр і відкладемо відрізок $|na|$ у напрямку вправо вниз (тобто у напрямку, зв'язаному з напрямком кутового прискорення).

Остаточно знайдемо $W_A = |p_W a| \cdot \mu_W = 34{,}5 \cdot 0{,}1 = 3{,}45$ *м/с²*.

Звертаємо увагу читача на те, що на планах швидкостей і прискорень прийнято абсолютні вектори проводити основними лініями, а вектори відносних швидкостей і прискорень - тонкими лініями.

3. Теорема подібності планів

Знайдемо швидкість точки C шатуна ABC (рис. 2.9), який знаходиться в плоскопаралельному русі, за допомогою побудови плану швидкостей. Положення шатуна, масштаб μ_l, величини і напрямки швидкостей руху двох точок A і B шатуна відомі з попередніх побудов: $\mu_l = 10^{-2}$ *м/мм*; $V_A = 10$ *м/с*; $V_B = 20$ *м/с*.

1. Знайдемо довжини

$$l_{AB} = \overline{AB} \cdot \mu_l = 50 \cdot 10^{-2} = 0{,}5 \text{ м};$$

$$l_{AC} = \overline{AC} \cdot \mu_l = 40 \cdot 10^{-2} = 0{,}4 \text{ м};$$

$$l_{BC} = \overline{BC} \cdot \mu_l = 30 \cdot 10^{-2} = 0{,}3 \text{ м}.$$

2. Запишемо систему векторних рівнянь швидкості руху точки C:

$$\overline{V}_C = \underline{\underline{\overline{V}_A}} + \underline{\overline{V}_{C/A}},$$

$$(\perp AC)$$

$$\overline{V}_C = \underline{\underline{\overline{V}_B}} + \underline{\overline{V}_{C/B}}.$$

$$(\perp BC)$$

Бачимо, що в системі рівнянь чотири загальні невідомі і вона може бути вирішена.

Виберемо $\mu_V = 0{,}5$ *(м/с)/мм*, тоді

$$|p_V a| = V_A / \mu_V = 10 / 0{,}5 = 20 \text{ мм},$$

$$|p_V b| = V_B / \mu_V = 20 / 0{,}5 = 40 \text{ мм}.$$

3. Будуємо план швидкостей.

Для цього відкладемо із довільно вибраного полюса p_V (рис. 2.10) відрізки $|p_V a|$ і $|p_V b|$, а з їхніх кінців проведемо лінії, перпендикулярні сторонам трикутника ABC, тобто: із точки a - перпендикуляр до AB, а з точки b - перпендикуляр до BC. Перетинання цих перпендикулярів і буде точкою c плану швидкостей:

$$V_C = |p_V c| \cdot \mu_V = 25 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 \text{ м/с}.$$

З'єднаємо також на плані швидкостей точки a і b. Зауважимо, що Δabc подібний ΔABC, тому що всі сторони Δabc перпендикулярні відповідним сторонам ΔABC.

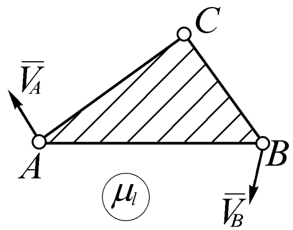

Рис. 2.9. Схема шатуна в плоскопаралельному русі

Звідси слідує, що швидкість точки C шатуна можна було б знайти без рішення вищенаведених векторних рівнянь руху. Можна було б відразу на стороні ab плану швидкостей побудувати Δabc, подібний ΔABC. Для цього можна було б знайти з рівності відношення відповідних сторін подібних трикутників $ab / AB = bc / BC = ac / AC$ невідомі відрізки bc і ac:

$$bc = BC \cdot (ab / AB);$$
$$ac = AC \cdot (ab / AB).$$

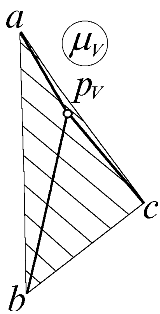

Рис. 2.10. План швидкостей шатуна

Побудови можна виконати в такій послідовності (рис. 2.11).

З вибраного полюса p_V проводимо відрізки $|p_V a|$ і $|p_V b|$.

Потім із точки a розчином циркуля ac робимо дугову засічку.

З точки b розчином циркуля bc також робимо дугову засічку. Утвориться дві точки перетинання засічок: c і c^*. Одна з них дає шукану вершину c Δabc, а інша дає помилкову вершину c^* Δabc^*.

Неправильність точки c^* доводиться тією обставиною, що обхід вершин трикутника ΔABC і Δabc^* йде в протилежних напрямках. Істинна вершина c Δabc відповідає збіжному напрямку

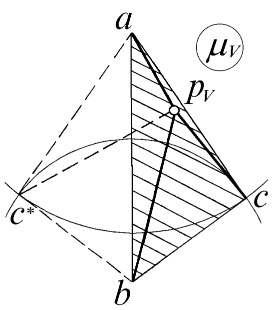

Рис. 2.11. До теореми подібності планів V

обходу вершин ΔABC і Δabc.

Приведемо тут без додаткового доказу теорему подібності планів швидкостей:

«План відносних швидкостей точок будь-якої ланки являє собою фігуру, подібну фігурі, утвореній цими ж точками на ланці, і повернену відносно останньої на 90^0».

Надалі ми будемо користуватися теоремою подібності планів швидкостей. Для будь-якої ланки, що має декілька позначених точок, достатньо спочатку знайти швидкості будь-яких двох точок, а швидкості інших точок легко можна знайти, побудувавши план відносних швидкостей усіх точок цієї ланки по його подібності фігурі самої ланки.

Також має місце теорема подібності планів прискорень:

«План відносних прискорень точок будь-якої ланки являє собою фігуру, подібну фігурі, утвореній цими ж точками на ланці, і повернену відносно останньої на кут 180^0-β», де

$$\beta = arctg(\,\varepsilon / \omega^2\,),$$

ω - кутова швидкість,

ε - кутове прискорення ланки.

Кут повороту β в даному випадку, як правило, не дорівнює 90^0, але це ніяк не ускладнює використання теореми подібності планів прискорень. Тут застосовується та ж послідовність побудов, що описана вище для плану швидкостей.

Теоремою подібності планів прискорень ми також будемо надалі при необхідності користуватися.

4. Побудова планів для груп Ассура

Побудуємо плани швидкостей і прискорень для групи Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду в заданому на схемі положенні (рис. 2.7***а***) при відомих: $\mu_l = 10^{-2}$ *м/мм*; V_A *=1,0 м/с*; V_C *=1,5 м/с*; W_A *=20 м/с*^{2}; W_C *= 15 м/с*^{2}. (Напрямки $\overline{V}_A, \overline{V}_C$, $\overline{W}_A$ і $\overline{W}_C$ показані на схемі).

1. Знайдемо довжини ланок:

$$l_{AB} = \overline{AB} \cdot \mu_l = 40 \cdot 10^{-2} = 0{,}4 \text{ м},$$

$$l_{BC} = \overline{BC} \cdot \mu_l = 50 \cdot 10^{-2} = 0{,}5 \text{ м}.$$

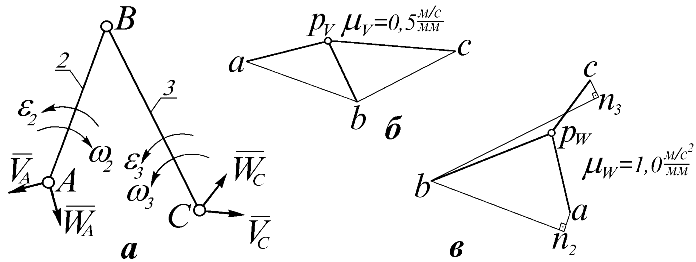

Рис. 2.7. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу
2-го порядку 1-го виду

2. Побудуємо план швидкостей.

Вибираємо місце для полюса плану швидкостей і відкладаємо з полюса p_V (рис. 2.7***б***), наприклад, у масштабі $\mu_V = 0{,}05$ (*м/с*)/*мм* вектори заданих швидкостей $\overline{V_A}$ і $\overline{V_C}$ відрізками

$$|p_V a| = V_A \,/\, \mu_V = 1{,}0 \,/\, 0{,}05 = 20 \text{ мм},$$

$$|p_V c| = V_C \,/\, \mu_V = 1{,}5 \,/\, 0{,}05 = 30 \text{ мм}.$$

Відповідно до системи векторних рівнянь

$$\overline{V}_B = \underline{\underline{\overline{V}}}_A + \underset{(\perp AB)}{\underline{\overline{V}}_{B/A}},$$

$$\overline{V}_B = \underline{\underline{\overline{V}}}_C + \underset{(\perp BC)}{\underline{\overline{V}}_{B/C}};$$

можемо визначити невідомий по величині і напрямку вектор швидкості $\overline{V}_B$.

Справді, кожне з цих двох рівнянь окремо вирішено бути не може, тому що кожне включає по три невідомі. З векторної алгебри відомо, що векторне рівняння вирішується, якщо має не більше двох невідомих.

Умовимося надалі підкреслювати кожний відомий вектор двома тонкими лініями. Якщо у вектора невідома або величина, або напрямок, будемо підкреслювати його одною тонкою лінією.

Якщо вище записані векторні рівняння вирішувати в системі, то вони спільно містять тільки чотири невідомі, і отже, рішення може бути знайдене.

Кожне з двох векторних рівнянь відображається на кресленні векторним трикутником із загальною стороною.

Векторні рівняння вирішуємо в такому порядку. Спочатку відкладаємо з полюса p_V відрізок $|p_V a|$. Потім із точки a плану проводимо пряму лінію (промінь), перпендикулярну ланці AB. Після цього відкладемо з полюса p_V відрізок $|p_V c|$, а з його кінця проведемо пряму, перпендикулярну ланці BC. Перетинання двох останніх променів координує точку b наприкінці шуканого вектора $\overline{V}_B$. Проводимо з полюса відрізок $|p_V b|$ і знаходимо величину швидкості точки B

$$V_B = |p_V b| \cdot \mu_V = 16 \cdot 0{,}05 = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Аналогічно знайдемо:

$$V_{B/A} = |ab| \cdot \mu_V = 28 \cdot 0{,}05 = 1{,}4 \text{ м/с},$$

$$V_{B/C} = |cb| \cdot \mu_V = 27 \cdot 0{,}05 = 1{,}35 \text{ м/с}.$$

Відносні швидкості $V_{B/A}$ і $V_{B/C}$ дозволяють відшукати величини і напрямки кутових швидкостей ланок:

$$\omega_2 = V_{B/A} / l_{AB} = 1{,}4 / 0{,}4 = 3{,}5 \text{ м/с}^{-1};$$

$$\omega_3 = V_{B/C} / l_{BC} = 1{,}35 / 0{,}5 = 2{,}7 c^{-1}.$$

Напрямки ω_2 і ω_3 показані на схемі групи Ассура. Визначені вони уявним переносом векторів $\overline{V}_{B/A}$ і $\overline{V}_{B/C}$ в точку B.

Кожний із цих векторів показує: $\overline{V}_{B/A}$ - напрямок обертання ланки 2 навколо точки A (тобто напрямок ω_2); $\overline{V}_{B/C}$ - напрямок обертання ланки 3 навколо точки C (тобто напрямок ω_3).

Тому, хто утрудняється у визначенні напрямків ω_2 і ω_3, рекомендуємо допоміжний рис. 2.8 (***а*** і ***б***), який дозволяє легше усвідомити це питання. Тут відносне обертання точки B навколо A і C виділене окремо й умовно показане як абсолютне при нерухомих точках A і C.

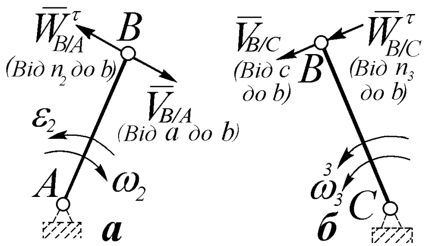

Рис. 2.8. Визначення напрямків ω і ε

3. Будуємо план прискорень.

Для цього спочатку обчислимо нормальні прискорення у відносному русі точки B навколо A і навколо C:

$$W^n_{B/A} = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = 3{,}5^2 \cdot 0{,}4 = 4{,}9 \text{ м/с}^2;$$

$$W^n_{B/C} = \omega_3^2 \cdot l_{BC} = 2{,}7^2 \cdot 0{,}5 = 3{,}65 \text{ м/с}^2.$$

Потім запишемо систему векторних рівнянь для прискорення точки B:

$$\overline{W}_B = \underline{\underline{\overline{W}}}_A + \underline{\underline{\overline{W}}}^n_{B/A} + \underline{\overline{W}}^\tau_{B/A},$$

(Від B до A) ($\perp AB$)

$$\overline{W}_B = \underline{\underline{\overline{W}}}_C + \underline{\underline{\overline{W}}}^n_{B/C} + \underline{\overline{W}}^\tau_{B/C}.$$

(Від B до C) ($\perp BC$)

Аналіз системи векторних рівнянь показує, що вона вирішується. Рішення буде мати вигляд двох чотирикутників із загальною стороною $|p_W b|$.

Спочатку виберемо місце для полюса p_W і масштаб плану прискорень $\mu_W = 1$ $(м/с^2)/мм$.

Потім розрахуємо довжини відрізків, які зображують на плані прискорень відповідні прискорення:

$$|p_W a| = W_A / \mu_W = 20 / 1 = 20 \text{ мм};$$

$$|p_W c| = W_C / \mu_W = 15 / 1 = 15 \text{ мм};$$

$$|an_2| = W^n_{B/A} / \mu_W = 4{,}9 / 1 = 4{,}9 \text{ мм};$$

$$|cn_3| = W^n_{B/C} / \mu_W = 3{,}65 / 1 = 3{,}65 \text{ мм}.$$

Тепер можна здійснити всі побудови. Напрямки перших двох відомих відрізків задані як напрямки векторів $\overline{W}_A$ і $\overline{W}_C$ на схемі групи Ассура. Відрізок $|an_2|$ відкладається з кінця відрізка $|p_W a|$ у напрямку вектора $\overline{W}^n_{B/A}$ (тобто в напрямку від B до A). Відрізок $|cn_3|$ відкладається в напрямку вектора $\overline{W}^n_{B/C}$ (тобто в напрямку від B до C). З точок n_2 і n_3 проводяться перпендикуляри до відрізків $|an_2|$ і $|cn_3|$, які йдуть у напрямках невідомих по величині векторів $\overline{W}^\tau_{B/A}$ і $\overline{W}^\tau_{B/C}$ до їхнього взаємного перетинання.

Точка перетинання і буде точкою b, тобто кінцем шуканого вектора $\overline{W}_B$, який починається в полюсі p_W плану прискорень.

Обчислимо

$$W_B = |p_W b| \cdot \mu_W = 31 \cdot 1 = 31 \text{ м/с}^2.$$

Отримані з побудов відрізки $|n_2 b|$ і $|n_3 b|$ відбивають напрямки і величини векторів відносних дотичних прискорень $\overline{W}^\tau_{B/A}$ і $\overline{W}^\tau_{B/C}$:

$$W^\tau_{B/A} = |n_2 b| \cdot \mu_W = 34 \cdot 1 = 34 \text{ м/с}^2;$$

$$W^\tau_{B/C} = |n_3 b| \cdot \mu_W 45 \cdot 1 = 45 \text{ м/с}^2.$$

Останні два вектори, будучи мислено перенесеними в точку B, покажуть відповідно напрямки кутових прискорень ε_2 і ε_3 (рис. 2.8).

Величини ε_2 і ε_3 можна підрахувати по формулах:

$$\varepsilon_2 = W^{\tau}_{B/A} / l_{AB} = 34 / 0{,}4 = 85c^{-2};$$

$$\varepsilon_3 = W^{\tau}_{B/C} / l_{BC} = 45 / 0{,}5 = 90c^{-2}.$$

Побудуємо в загальному вигляді (тобто без чисельних розрахунків) плани швидкостей і прискорень для групи Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду (рис. 2.12). Вважаємо заданими: положення і розміри ланок групи Ассура на кінематичній схемі; швидкість $\overline{V}_A$ і прискорення $\overline{W}_A$; горизонтальне і нерухоме положення направляючої повзуна xx.

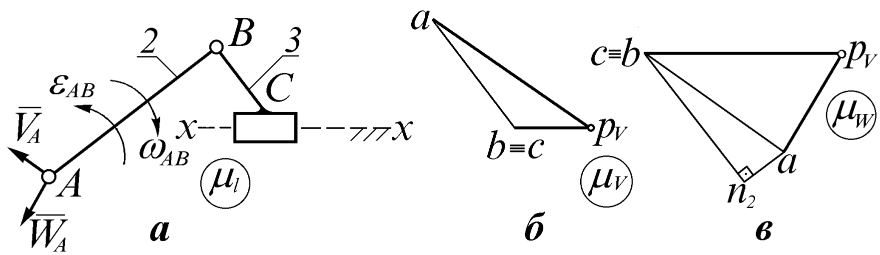

Рис. 2.12. Кінематичний аналіз групи Ассура
II класу 2-го порядку 2-го виду

1. Будуємо план швидкостей.

Для цього виберемо місце полюса плану p_V (рис. 2.12***б***) і з нього проведемо відрізок $|p_V a|$, паралельний вектору $\overline{V}_A$, в обраному масштабі μ_V:

$$|p_V a| = V_A / \mu_V .$$

Запишемо векторне рівняння швидкості руху точки B:

$$\underline{\overline{V}}_B = \underline{\underline{\overline{V}}}_A + \underline{\overline{V}}_{B/A}.$$

$$(//xx) \qquad (\perp AB)$$

Аналіз цього рівняння показує, що воно вирішується, тому що містить тільки дві невідомі: величину вектора $\overline{V}_B$ і величину вектора $\overline{V}_{B/A}$.

Знаходимо відрізок $|p_V b|$, що йде паралельно xx, величина якого координується відрізком $|ab|$, який іде в напрямку, перпендикулярному ланці AB. Маємо:

$$V_B = |p_V b| \cdot \mu_V ;$$

$$V_{B/A} = |ab| \cdot \mu_V;$$
$$\omega_{AB} = V_{B/A} / l_{AB}.$$

Напрямок ω_{AB} знаходимо таким же способом, як і в задачі 2.2.

2. Будуємо план прискорень.

Для цього виберемо місце полюса плану p_W (рис. 2.12**в**) і з нього проведемо відрізок $|p_W a|$, паралельний вектору $\overline{W}_A$, в обраному масштабі μ_W:

$$|p_W a| = W_A / \mu_W.$$

Запишемо векторне рівняння прискорення точки B:

$$\underline{\overline{W}}_B = \underline{\underline{\overline{W}}}_A + \underline{\underline{\overline{W}}}^n_{B/A} + \underline{\overline{W}}^\tau_{B/A}.$$
$$(// xx) \qquad (\text{Від } B \text{ до } A)\ (\perp AB)$$

Аналіз цього рівняння показує, що воно вирішується, тому що містить тільки дві невідомі: величину вектора $\overline{W}_B$ і величину вектора $\overline{W}^\tau_{B/A}$.

Що стосується вектора $\overline{W}^n_{B/A}$, то він може бути знайдений на основі побудови плану швидкостей. Для цього підрахуємо його величину:
$W^n_{B/A} = \omega^2 \cdot l_{AB}$.

Напрямок вектора $\overline{W}^n_{B/A}$ відомий: він направлений паралельно AB від точки B до точки A.

Знаходимо відрізки, що зображують на плані прискорень відомі вектори прискорень:

$$|p_W a| = W_A / \mu_W;$$
$$|an_2| = W^n_{B/A} / \mu_W.$$

Будуємо план прискорень у такій послідовності: відкладаємо з довільно вибраного полюса p_W відрізок $|p_W a|$; із його кінця відкладаємо відрізок $|an_2|$ (у напрямку від B до A, паралельно AB); із кінця останнього відрізка, тобто із точки n_2, проводимо перпендикулярну пряму лінію до перетинання з лінією, що йде з полюса p_W паралельно xx.

Точка перетинання останніх двох прямих і є шукана точка b плану прискорень.

Остаточно обчислюємо:

$$W_B = |p_W b| \cdot \mu_W;$$
$$W^\tau_{B/A} = |n_2 b| \cdot \mu_W;$$

$$\varepsilon_{AB} = W_{B/A}^{\tau} / l_{AB}.$$

Напрямок ε_{AB} визначаємо так само, як це було зроблено в задачі 2.2.

Побудуємов загальному вигляді (тобто без чисельних розрахунків) плани швидкостей і прискорень для групи Ассура *II* класу 2-го порядку 3-го виду (рис. 2.13***а***).

Вважаємо заданими: положення і розміри ланок групи Ассура, вектори швидкостей і вектори прискорень точок приєднання групи (тобто зовнішніх кінематичних пар) - $\overline{V}_{A_2}$; $\overline{W}_{A_2}$; $\overline{V}_{B_3}$; $\overline{W}_{B_3}$.

Раніше ніж приступити до рішення задачі, відзначимо ряд її особливостей:

1. Тому що ланки 2 і 3 утворюють поступальну кінематичну пару, то обов'язково буде дотримуватися умова $\omega_2 = \omega_3$ і $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ (які поки невідомі).

2. Задача буде вирішена, якщо будуть знайдені V і W будь-якої точки будь-якої з ланок, тому що після цього будуть знайдені для цієї ланки ω і ε (загальні для обох ланок).

3. У кожної ланки є своя одна єдина точка, для якої можна знайти V і W. Що це за точки?

Єдина особлива точка ланки 3 - це точка A_3, а в ланки 2 - це точка B_2. Тільки лише для цих точок можна записати розв'язувані системи двох векторних рівнянь, що містять усього по чотири загальні невідомі.

Для будь-яких інших точок ланок векторні рівняння ні окремо, ні в системі вирішені бути не можуть, тому що в них утримується число невідомих, більше від допустимого.

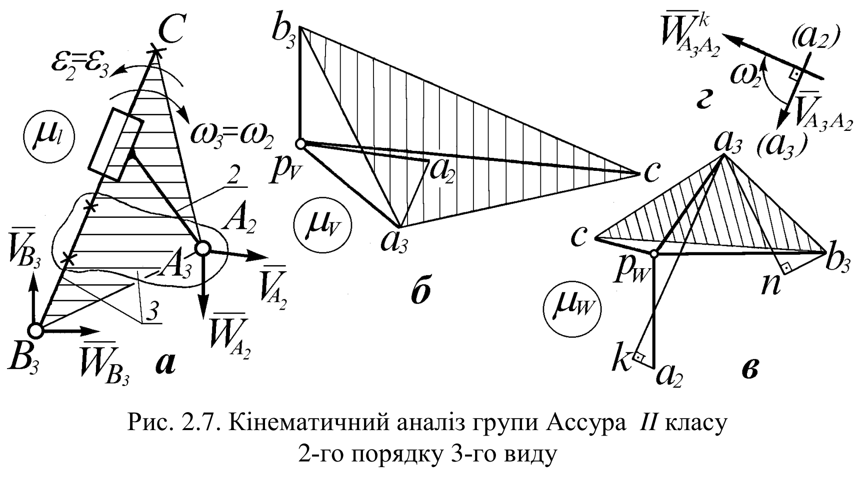

Рис. 2.7. Кінематичний аналіз групи Ассура *II* класу
2-го порядку 3-го виду

Виберемо для побудов будь-яку одну з цих особливих точок, наприклад, точку A_3. Точка A_3 показана на рисунку приналежною уявлюваній пластинці, жорстко зв'язаній з ланкою 3. Тоді точки A_3, B_3 і C ланки 3 утворять заштрихований ΔABC. Тепер приступимо до рішення задачі.

1. Будуємо план швидкостей.

Для цього виберемо місце полюса плану швидкостей p_V (рис. 2.13***б***) і з нього проведемо відповідні відрізки $|p_V a_2|$ й $|p_V b_3|$ у напрямку заданих векторів швидкостей $\overline{V}_{A_2}$ і $\overline{V}_{B_3}$. Якби були задані величини швидкостей V_{A_2} і V_{B_3}, тоді треба було б відрізки $|p_V a_2|$ і $|p_V b_3|$ відкласти з розрахунку:

$$|p_V a_2| = V_{A_2} / \mu_V ; |p_V b_3| = V_{B_3} / \mu_V .$$

Запишемо систему векторних рівнянь для швидкості точки A_3, яка належить ланці 3:

$$\overline{V}_{A_3} = \underline{\underline{\overline{V}}}_{A_2} + \underline{\overline{V}}_{A_3 A_2},$$
$$(//BC)$$
$$\overline{V}_{A_3} = \underline{\underline{\overline{V}}}_{B_3} + \underline{\overline{V}}_{A_3/B_3}.$$
$$(\perp AB)$$

Проаналізуємо векторні рівняння.

Вектор $\overline{V}_{A_3}$ невідомий ні по величині, ні по напрямку.

У першому рівнянні вектор $\overline{V}_{A_2}$ заданий, а значить вважаємо відомими і його величину і напрямок, а вектор $\overline{V}_{A_3 A_2}$ відомий лише по напрямку. Він направлений паралельно лінії BC.

Справді, якщо уявити нерухомою ланку 2, яка чинить переносний рух, то тоді будемо бачити відносний рух в чистому вигляді.

При цьому точка A_3 буде переміщатися по прямій лінії, паралельній направляючій повзуна, тобто паралельно BC.

В другому рівнянні вектор $\overline{V}_{B_3}$ заданий, а останній вектор $\overline{V}_{A_3/B_3}$ відомий по напрямку - він направлений $\perp A_3 B_3$. Уявимо точку B_3 зупиненою, а точці A_3 дозволимо рухатися навколо точки B_3. Тому що обидві ці точки належать ланці 3, відстань між ними незмінна. Відносний рух точки A_3 навколо B_3 буде здійснюватися у вигляді кругового обертання з центром окружності в точці B_3 і з радіусом окружності, рівним $l_{A_3 B_3}$. Отже, вектор

$\overline{V}_{A_3/B_3}$ направлений по дотичній до траєкторії відносного руху, або перпендикулярно радіальному напрямку (тобто перпендикулярно лінії A_3B_3).

Аналіз показує, що система рівнянь вирішується. Рішення виконуємо в наступній послідовності.

Проводимо з кінців відрізків $|p_Va_2|$ і $|p_Vb_3|$ лінії в зазначених напрямках: із точки a_2 - лінію, паралельну BC, а з точки b_3 - лінію, перпендикулярну A_3B_3. Перетинання останніх ліній закоординує точку a_3 - кінець вектора швидкості $\overline{V}_{A_3}$ точки A_3, тоді

$$V_{A_3} = |p_Va_3|\cdot\mu_V.$$

Величину кутової швидкості ланки 3 можна підрахувати по формулі

$$\omega_3 = V_{A_3/B_3} \,/\, l_{A_3B_3},$$

$$\text{де } V_{A_3/B_3} = |b_3a_3|\cdot\mu_V.$$

Вектор $\overline{V}_{A_3/B_3}$, направлений від точки b_3 до точки a_3 на плані швидкостей, будучи перенесеним мислено в точку A_3, покаже обертання ланки 3 по годинниковій стрілці, що і позначено на схемі групи Ассура.

Тому що поводок на ланці 2 не змінює свого положення відносно повзуна (каменю), то, як уже було сказано вище, $\omega_2 = \omega_3$. Справді ланки 2 і 3 завжди повертаються, незважаючи на їхній відносний рух (сковзання), на один і той самий кут, похідними якого за часом і будуть кутові швидкості ω_2 і ω_3.

Для відшукання вектора швидкості $\overline{V}_C$ скористаємося теоремою подібності планів швидкостей (див. задачу 2.3). Використовуючи лінію b_3a_3, як одну зі сторін Δb_3a_3c, будуємо його по подібності з ΔB_3A_3C. Для цього запишемо пропорцію співвідношення сторін подібних трикутників:

$$b_3c \,/\, B_3C = a_3c \,/\, A_3C = b_3a_3 \,/\, B_3A_3.$$

З першого і третього співвідношення знайдемо довжину відрізка $|b_3c|$, а з другого і третього співвідношення - довжину відрізка $|a_3c|$.

З точки a_3 довжиною $|a_3c|$ робимо дугову засічку, а з точки b_3 довжиною $|b_3c|$ координуємо точку c. При цьому стежимо, щоб обхід однойменних точок на ланці 3 і на плані відносних швидкостей збігався по напрямку.

Тепер можемо знайти

$$V_C = |p_Vc|\cdot\mu_V.$$

2. Будуємо план прискорень.

План W будується майже в такій же послідовності, як і план V.

Виберемо місце для полюса плану прискорень p_W (рис. 2.13**в**) і проведемо з нього відповідні відрізки $|p_W a_2|$ й $|p_W b_3|$ у напрямках, заданих векторами прискорень $\overline{W}_{A_2}$ і $\overline{W}_{B_3}$.

Для особливої точки A_3, що належить третій ланці, запишемо систему двох векторних рівнянь прискорень:

$$\overline{W}_{A_3} = \underline{\underline{\overline{W}}}_{A_2} + \underline{\underline{\overline{W}}}^k_{A_3A_2} + \underline{\overline{W}}^r_{A_3A_2},$$
$$(//BC)$$
$$\overline{W}_{A_3} = \underline{\underline{\overline{W}}}_{B_3} + \underline{\underline{\overline{W}}}^n_{A_3/B_3} + \underline{\overline{W}}^\tau_{A_3/B_3}.$$
$$(\perp AB)$$

Проаналізуємо ці рівняння.

Вектор $\overline{W}_{A_3}$ невідомий ні по величині ні по напрямку.

У першому рівнянні вектор $\overline{W}_{A_2}$ заданий, а отже відомий і по величині і по напрямку. Вектор $\overline{W}^k_{A_3A_2}$ (прискорення Коріоліса) можна визначити, а отже будемо мати і величину його і напрямок. Останній вектор - вектор відносного прискорення $\overline{W}^r_{A_3A_2}$ - містить у собі тільки вектор дотичного прискорення $\overline{W}^\tau_{A_3A_2}$, тому що траєкторія відносного руху точки A_3 є прямою лінією, паралельною BC, отже він направлений уздовж направляючої каменю, тобто паралельно лінії BC, а величина його невідома.

Таким чином у першому рівнянні - три невідомі, і значить одне воно окремо не вирішується.

В другому рівнянні вектор $\overline{W}_{B_3}$ відомий. Вектор $\overline{W}^n_{A_3/B_3}$ можна визначити і по величині і по напрямку на основі побудованого плану швидкостей. Останній вектор $\overline{W}^\tau_{A_3/B_3}$ перпендикулярний попередньому, а величина його невідома.

Таким чином і в другому рівнянні маємо три невідомі, і одне воно окремо теж не може бути вирішено.

Зате система двох векторних рівнянь вирішується, тому що має усього чотири загальні невідомі.

Визначимо $\overline{W}^k_{A_3A_2}$.

З курсу теоретичної механіки відомо, що

$$\overline{W}^k_{A_3A_2} = 2\overline{\omega}^e_2 \times \overline{V}^r_{A_3A_2}.$$

У даній задачі необов’язково відшукувати вектор прискорення Коріоліса як векторний добуток за правилами векторної алгебри - тут достатньо скористатися правилом М. Є. Жуковського. Відповідно до правила Жуковського, величина

$$W^k_{A_3A_2} = 2\omega_2 \cdot V_{A_3A_2}, \text{ де}$$
$$V_{A_3A_2} = |a_2a_3| \cdot \mu_V,$$

а напрямок $\overline{W}^k_{A_3A_2}$ (рис. 2.13*г*) покаже вектор відносної швидкості $\overline{V}_{A_3A_2}$, якщо його повернути на 90^0 градусів убік переносної кутової швидкості ω_2.

Розрахуємо відрізок, яким буде на плані прискорень поданий вектор $\overline{W}^k_{A_3A_2}$,

$$|a_2k| = W^k_{A_3A_2} / \mu_W \ (мм).$$

Тепер обчислимо величину нормального відносного прискорення з другого рівняння

$$W^n_{A_3/B_3} = \omega_3^2 \cdot l_{A_3B_3}.$$

Це прискорення буде на плані прискорень зображено відрізком

$$|b_3n| = W^n_{A_3/B_3} / \mu_W \ (мм).$$

Побудову плану прискорень виконуємо в наступній послідовності.

З кінця відрізка $|p_Wa_2|$ відкладаємо в напрямку $\overline{W}^k_{A_3A_2}$ відрізок $|a_2k|$, потім у точці k встановлюємо перпендикуляр.

На цьому рішення першого рівняння припиняємо і переходимо до другого рівняння.

З точки b_3 відрізка $|p_Wb_3|$ проводимо відрізок $|b_3n|$. Він буде направлений убік вектора $\overline{W}^n_{A_3/B_3}$, тобто від точки A_3 до точки B_3, як до центру відносного обертання, паралельно лінії A_3B_3. З точки n проводимо перпендикуляр до відрізка $|b_3n|$ (тобто в напрямку вектора $\overline{W}^\tau_{A_3/B_3}$) до перетинання з останнім вектором першого рівняння (тобто із перпендикуляром у точці k до відрізка $|a_2k|$).

Перетинання двох останніх ліній на плані прискорень координує точку a_3 кінця вектора $\overline{W}_{A_3}$. Його величина може бути знайдена по формулі

$$W_{A_3} = |p_Wa_3| \cdot \mu_W.$$

Прискорення точки C можна знайти, скориставшись теоремою подібності планів прискорень (див. задачу 2.3). Для цього на стороні b_3a_3 треба побудувати Δb_3a_3c, подібний ΔB_3A_3C. Ця побудова виконується таким же способом, як це було зроблено на плані швидкостей. Після побудов одержимо

$$W_C = |p_W c| \cdot \mu_W.$$

Тепер обчислимо величину кутового прискорення ланки 3:

$$\varepsilon_3 = W^{\tau}_{A_3/B_3} \,/\, l_{A_3B_3}, \text{ де}$$

$$W^{\tau}_{A_3/B_3} = |na_3| \cdot \mu_W.$$

Напрямок ε_3 покаже вектор $\overline{W}^{\tau}_{A_3/B_3}$, якщо його перенести мислено в точку A_3 ланки 3 (див. задачу 2.2). Вектор $\overline{W}^{\tau}_{A_3/B_3}$ має напрямок від точки n до точки a_3, отже ланка 3 має кутове прискорення ε_3, направлене проти годинникової стрілки, що і позначено на схемі групи Ассура.

Як уже було сказано вище, кутове прискорення $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, тому що завжди вірно $\omega_2 = \omega_3$ і, отже,

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}.$$

5. Контрольні запитання

1. Що собою являють плани швидкостей і прискорень механізму і яка їхня точність?
2. Як вибираються масштаби планів швидкостей і прискорень і як вони використовуються при визначенні швидкостей і прискорень точок ланок механізмів?
3. Опишіть правила оформлення планів швидкостей і прискорень.
4. Як визначаються величини і напрямки лінійних швидкостей точок ланок механізмів в абсолютному і відносному рухах?
5. Як визначити величини і напрямки кутових швидкостей ланок у складному плоскопаралельному русі?
6. Як визначаються величини і напрямки різних абсолютних, відносних і поворотних (нормальних, дотичних, Коріолісових) лінійних прискорень точок ланок механізмів?
7. Як визначаються величини і напрямки кутових прискорень ланок, які здійснюють складний плоскопаралельний рух?
8. Сформулюйте теорему подібності планів швидкостей. Як вона використовується при відшуканні швидкостей точок ланок?
9. Сформулюйте теорему подібності планів прискорень. Як вона використовується при відшуканні прискорень точок ланок?
10. Як уникнути помилки при використанні теорем подібності планів швид-

костей і прискорень?

11. У чому полягають особливості оформлення і вирішення векторних рівнянь руху при побудові планів швидкостей і прискорень?
12. У яких випадках слід виділяти особливі конкуруючі точки ланок при побудові планів швидкостей і прискорень?
13. Сформулюйте правило Жуковського М. Є. для визначення напрямку прискорення Коріоліса.
14. В якій послідовності здійснюється побудова планів швидкостей і прискорень?