

## Лекція 4

### Тема: Кінематичний аналіз механізмів

- Зміст: 1. Задачі кінематичного аналізу.  
2. Аналітичний метод кінематичного аналізу.  
3. Графічний метод кінематичного аналізу.  
4. Контрольні запитання.

#### 1. Задачі кінематичного аналізу

Кінематичний аналіз механізму включає такі задачі:

1. Побудова положень механізму (як правило суміщених) на його кінематичній схемі.
2. Визначення траєкторій руху будь-яких точок ланок механізму.
3. Визначення крайніх положень вихідної ланки, а також умов провртання (існування) кривошипа.
4. Визначення лінійних швидкостей і прискорень будь-яких точок ланок механізму.
5. Визначення кутових швидкостей і прискорень ланок механізму.
6. Визначення відносних лінійних і кутових швидкостей точок і ланок механізму.

Задачу кінематичного аналізу можна вирішувати з переважанням або аналітичних розрахунків, або графічних побудов. У навчальному процесі відповідно відрізняються графічні та графоаналітичні методи кінематичного аналізу механізмів. Вони мають наочність, легко засвоюються, мають точність, характерну для інженерних розрахунків (похибка, як правило, не перевищує 5%). Нижче цим методам буде віддана перевага.

Графічні методи можуть бути алгоритмізовані для машинного використання. У цьому випадку інженер - користувач ЕОМ вирішує задачі усвідомлено, володіючи вихідним ручним методом рішення задачі. Машина тільки прискорює одержання результатів і позбуває інженера-конструктора від рутинної праці. Користувач ЕОМ, який вирішує задачу формально і не володіє сам графічними навичками, може застосовувати тільки стандартні програми для стандартних випадків і не може вести діалог з машиною, оптимізувати рішення, інтерпретувати отримані результати, розвивати програму розрахунку.

Аналітичні методи рішення задач більш трудомісткі, потребують спеціальних математичних знань, ненаочні. У навчальній практиці вони знайшли обмежене застосування, що вплинуло і на зміст даного навчального посібника. Позитивним боком аналітичних методів кінематичного аналізу механізмів є їхня висока точність. Цим і виправдовується широке застосування аналіти-

чних розрахунків в окремих специфічних випадках.

Особливо ефективні аналітичні методи в сполученні з застосуванням обчислювальної техніки.

## 2. Аналітичний метод кінематичного аналізу

Проілюструємо аналітичний і графічний методи кінематичного аналізу на задачі визначення закону руху повзуна аксіального (центрального) кривошипно-повзунного механізму.

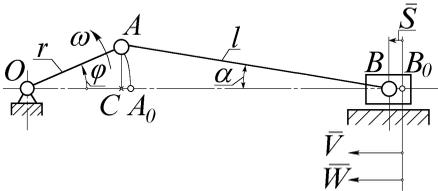
Будемо вважати відомими:

$l_{OA} = r$  - довжина кривошипа;

$\frac{r}{l} = \lambda$  (звичайно  $\lambda = \frac{1}{5} \dots \frac{1}{4}$ ), де

$l = l_{AB}$  - довжина шатуна;

$\omega = const$  - постійна кутова швидкість обертання кривошипа.



Зобразимо кінематичну схему механізму в довільному положенні (рис. 2.1).

Тому що  $\omega = const$ , маємо  $\varphi = \omega \cdot t$ .

Далі з рисунка знайдемо

Рис. 2.1. Кривошипно-повзунний механізм

$$S = OB_0 - OB = (r+l) - (OC+CB) = (r+l) - (r \cdot \cos \varphi + l \cdot \cos \alpha).$$

Зауважимо, що кут  $\alpha$  нахилу шатуна залежить від  $\lambda$  і  $\varphi$ .

Знайдемо  $\cos \alpha$  у такий спосіб.

З рисунка очевидно, що

$$AC = r \cdot \sin \varphi = l \cdot \sin \alpha,$$

звідси

$$\sin \alpha = \frac{r}{l} \cdot \sin \varphi = \lambda \cdot \sin \varphi.$$

Тому що  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , одержимо  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi}$ .

З урахуванням отриманого виразу запишемо точну функцію

$$S = r(1 - \cos \varphi) + l \left( 1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right). \quad (2.1)$$

Для обчислення швидкості  $V$  і прискорення  $W$  повзуна необхідно продиференціювати функцію (2.1) за часом двічі.

З теоретичної механіки відомо, що

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \omega,$$

де  $\frac{dS}{d\varphi}$  - аналог швидкості.

Відповідно

$$W = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \omega = \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \cdot \omega^2,$$

де  $\frac{d^2 S}{d\varphi^2}$  - аналог прискорення.

Якщо ж  $\omega \neq const$ , то тоді

$$W = \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \cdot \omega^2 + \varepsilon \cdot \frac{dS}{d\varphi}.$$

Диференціювання точної функції  $S$  (2.1) сполучене з труднощами, викликаними наявністю в ній радикала. Для спрощення розрахунків звичайно радикал розкладається в ряд, наприклад, по функції бінома Ньютона.

Запишемо

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi} = (1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = (1 - \chi)^{\frac{1}{2}},$$

де для спрощення подальших виразів позначене як  $\chi = \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi$ .

Розкладання функції  $(1 - \chi)^{\frac{1}{2}}$  в ряд виглядає в такий спосіб

$$(1 - \chi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \chi - \frac{1}{8} \chi^2 - \frac{1}{16} \chi^4 - \dots$$

При рішенні інженерних задач звичайно обмежуються двома першими членами розкладання, тобто  $(1 - \chi)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \chi$ .

Насамперед оцінимо похибку наближеної функції  $S$ , яку можна одержати після підстановки у формулу (2.1) останнього виразу.

Тому що відкинуті третій і наступні, які швидко убивають, члени розкладання радикала в ряд по біному Ньютона, то з високою точністю можна стверджувати, що максимальна абсолютна похибка наближеної функції  $S$  не перевищує величини третього члена ряду

$$\frac{1}{8} \chi^2 = \frac{1}{8} \lambda^4 \cdot \sin^4 \varphi, \text{ помноженого на довжину шатуна } l.$$

Тому що  $\lambda = \frac{r}{l} \approx \frac{1}{4}$ , а  $\sin^4 \varphi$  не перевищує 1, то максимальна похибка наближеної функції  $S$  буде

$$\Delta S \approx l \cdot \frac{1}{8} \chi^2 = l \cdot \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} \right)^4 = l / 2048.$$

При цьому відносна похибка  $\Delta S\%$  наближеної функції  $S$  буде

$$\Delta S\% = \frac{\Delta S}{l} \cdot 100\% \approx 0,2\%.$$

Така відносна похибка сумірна з відносною деформацією шатуна під максимальним навантаженням у межах пружності і нею можна зневажити.

З урахуванням сказаного вище наближене значення функції  $S$  буде

$$S = r(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} l \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi$$

або з урахуванням  $l \lambda^2 = l \cdot \frac{r^2}{l^2} = r \cdot \frac{r}{l} = r \lambda$

$$S = r(1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda \cdot \sin^2 \varphi). \quad (2.2)$$

Шляхом диференціювання функції (2.2), з огляду на те, що  $\varphi = \omega t$  знайдемо

$$V = r \omega \left( \sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right). \quad (2.3)$$

Шляхом диференціювання функції (2.3) отримаємо

$$W = r \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (2.4)$$

Проаналізуємо отримані функції  $S = f_1(\varphi)$  (2.2);  $V = f_2(\varphi)$  (2.3)

і  $W = f_3(\varphi)$  (2.4).

Функція швидкості повзуна  $V$  (2.3) приблизно являє собою суму (різницю) двох гармонік.

Перша гармоніка має кругову частоту  $\omega$ , а друга -  $2\omega$ .

Амплітуда другої гармоніки при  $\lambda = \frac{1}{4}$  у вісім разів менше амплітуди першої гармоніки, тому для аксіального кривошипно-повзунного механізму відмінність перебігу функції  $V$  у першій половині періоду і в другій половині періоду мало помітна (див. рис. 2.26).

Недосвідчене око часто при побудові функції  $V$  (2.2) приймає її просто за синусоїду, але це, звичайно, не так. Насправді це періодична функція, що є сумою гармонік із круговими частотами, що подвоюються, і зі швидко зростаючими амплітудами.

Функція прискорення повзуна  $W$  (2.4) також приблизно являє собою суму (різницю) двох гармонік із круговими частотами  $\omega$  і  $2\omega$ , але амплітуди їх уже більш близькі. Відмінність амплітуд тут кратна  $\lambda$ , і при значенні  $\lambda = \frac{1}{4}$  амплітуди гармонік відрізняються тільки в чотири рази.

Крім того, гармоніки знаходяться у фазі і протифазі в мертвих положеннях повзуна, тобто там, де прискорення екстремальні (див. рис. 2.22). У верхній мертвій точці повзуна амплітуди складаються, а в нижній мертвій точці - віднімаються.

При  $\lambda = \frac{1}{4}$  прискорення  $W$  повзуна у верхній мертвій точці більше ніж у нижній мертвій точці приблизно в 1,67 разів.

Справді, якщо прийняти амплітуду першої гармоніки за 1, то відношення прискорень повзуна в мертвих положеннях буде дорівнювати

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} = \frac{1 + 0,25}{1 - 0,25} = 1,666(6) \dots$$

Така відмінність дуже помітна, що часто викликає в недосвідченого спеціаліста подив.

Якщо, наприклад, потрібно моделювати гармонійні коливання за допомогою кривошипно-повзунного механізму, то бажано забезпечити  $\lambda \rightarrow 0$ . Прийняте в конструкції значення відношення  $\lambda$  повинно забезпечувати необхідну малість другої гармоніки в порівнянні з першою. Практичний вибір  $\lambda$ , таким чином, залежить від постановки задачі, тобто, від допустимого відхилення функції  $W$  від гармонійної.

Тепер зробимо графічне рішення цієї ж задачі методом кінематичних діаграм.

### 3. Графічний метод кінематичного аналізу

Побудуємо в масштабі кінематичну схему аксіального кривошипно-повзунного механізму в 12 співміщених положеннях (рис. 2.2а).

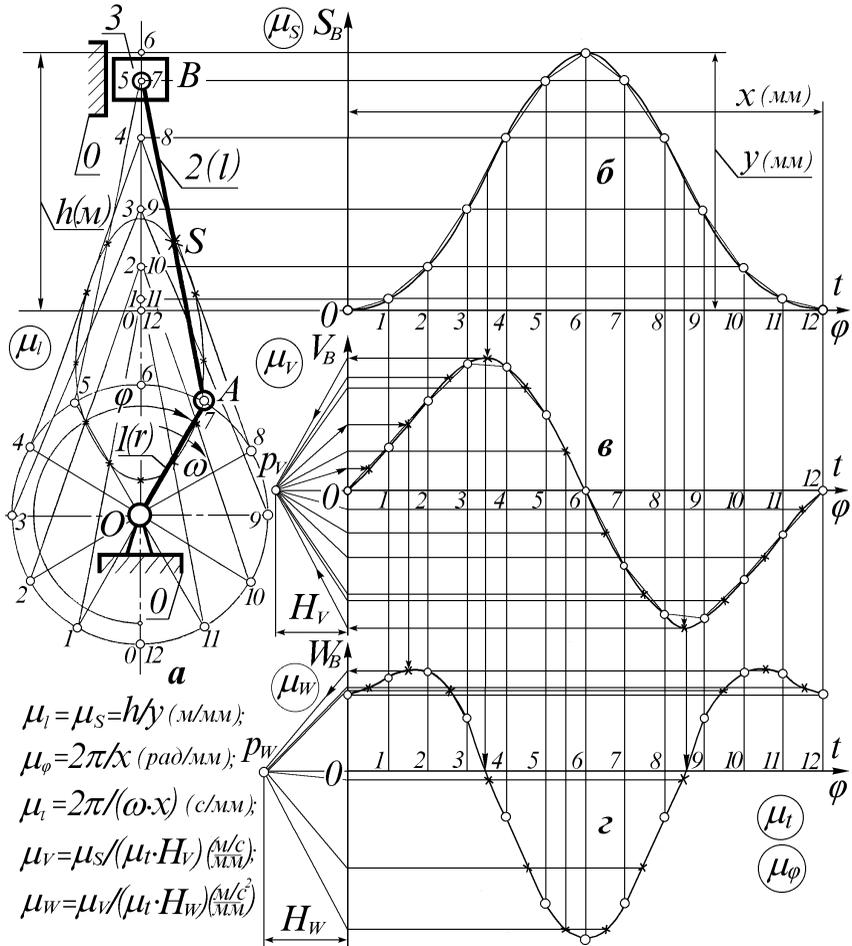


Рис. 2.2. Побудова кінематичних діаграм повзуна кривошипно-повзунного механізму

Розбивка траєкторії точки  $B$  на 12-ть положень дозволяє побудувати графік залежності  $S_B = f(\phi)$ . Взаємозв'язок графіка  $S_B$  і кінематичної схеми в 12-ти співміснених положеннях видний з рис. 2(а і б). Масштаби довжин і переміщень прийняті, для спрощення, рівними. При цьому максимальна ордината графіка переміщень

$$y = 2OA.$$

Відрізок  $x$  обраний довільно. Бажано, щоб число  $x$  було кратне чи-

слу 360. Це спрощує розбивку відрізка  $x$  на будь-яке число рівних частин, що відповідають  $\Delta\varphi$  у градусах. В аналізованому прикладі таких частин 12 (по числу положень механізму на кінематичній схемі). В інженерних розрахунках часто розглядають 24 або 36 положень механізму.

Графіки  $V_B$  (рис. 2.26) і  $W_B$  (рис. 2.27) отримані за допомогою подвійного графічного диференціювання графіка  $S_B$  (рис. 2.26).

В основу графічного диференціювання покладено геометричний смисл похідної. З математики відомо, що геометрично похідна є тангенсом кута нахилу дотичної в обраній точці диференціювання первородної функції, заданої графічно.

Розглянемо графічне диференціювання функції  $S_B$ . Воно виконується в такій послідовності:

1. Проводимо хорди (січні) по ділянках графіка  $S_B$ : 0 - 1; 1 - 2; 2 - 3 і т. д.
2. Приймаємо ці хорди відповідними по нахилу (тобто, паралельними) дотичним до графіка  $S_B$  в середині інтервалів 0 - 1; 1 - 2; 2 - 3 і т. д. Це допущення вносить певну похибку, яка буде тим меншою, чим на більше число інтервалів розбитий графік  $S_B$ .

На ділянках, де спостерігаються найбільш круто нахилені хорди додатного і від'ємного напрямків, будемо мати у середніх точках інтервалів найбільші додатне і від'ємне значення похідної, тобто  $V_B$ .

3. Вибираємо смугу на кресленні, на якій повинен розташуватися графік  $V_B$ .

На її верхньому обрізі намічаємо точку, що відповідає середині інтервалу із найбільш круто нахиленою хордою додатного напрямку графіка  $S_B$ .

На нижньому обрізі смуги майбутнього графіка  $V_B$  намічаємо точку, що відповідає середині інтервалу із самою круто нахиленою хордою від'ємного напрямку графіка  $S_B$ .

Зносимо ці точки горизонтальними прямими на вісь графіка  $V_B$ . Перераховані вище графічні побудови позначені стрілками на рис. 2.26.

4. З верхньої і нижньої точок на осі  $V_B$  проводимо промені назустріч один одному в напрямках, паралельних найбільш круто нахиленим хордам додатного і від'ємного напрямків графіка  $S_B$ . Пересічення променів координує допоміжний полюс  $P_V$ , який дозволяє визначити значення  $V_B$  в середині всіх 12-ти інтервалів в однім загальнім масштабі  $\mu_V$ , формула для ви-

значення якого записана на полі рис. 2.2.

5. Послідовно знаходимо значення величин  $V_B$  у масштабі  $\mu_V$  для середин всіх інтервалів.

Наприклад, у середині інтервалу 0 - 1 ординату  $V_B$  знайдемо, провівши з полюса  $p_V$  промінь (до пересічення з віссю  $V_B$ ) паралельно хорді інтервалу 0 - 1 графіка  $S_B$ .

Точно так же знайдемо ординату  $V_B$  для середин всіх інших інтервалів.

Знайдені ординати  $V_B$  в серединах усіх інтервалів позначені хрестиками. З'єднаємо всі ці точки-хрестики плавною кривою, що йде з початку координат і закінчується в 12-ой точці на осі абсцис графіка  $V_B$ .

При цьому екстремуми функції  $V_B$  виявляться поруч із найвищими і найнижчими хрестиками, першими нанесеними на верхньому і нижньому обрізах вибраної для графіка  $V_B$  смуги, і навіть вийдуть на декілька міліметрів за межі цієї смуги.

Нульові значення  $V_B$  спостерігаються в положеннях 0, 6 і 12, тобто, у так званих мертвих положеннях механізму.

Тепер можна приступити до другого графічного диференціювання. Подібним чином продиференціювавши графік  $V_B$ , одержимо графік  $W_B$  (рис. 2.22). Всі графічні прийоми другого диференціювання в точності повторюють прийоми першого диференціювання. Бажано залишити ті ж інтервали диференціювання, для чого необхідно відновити ординати графіка  $V_B$  у вузлах 1, 2, 3 і т. д., а потім провести хорди на ділянках 0 - 1; 1 - 2; 2 - 3 і т. д. Нульові значення графіка  $W_B$  спостерігаються в положеннях механізму, які відповідають максимальним швидкостям повзуна на прямому й зворотному ходах. Цей взаємозв'язок позначено вертикальними стрілками між рис. 2.2 (6 і 2).

Слід зазначити, що кінематичні діаграми повзуна, отримані за допомогою тільки графічних побудов, мають відносно великі похибки.

Похибка графіка  $S_B$  визначається тільки неточністю побудови кінематичної схеми співміщених положень механізму. Навіть неточність розбивки траєкторії точки  $A$  кривошипа спричиняє за собою великі похибки графіка  $S_B$ . Недосвідчений кресляр може допустити й інші неточності (наприклад, недотримання сталості довжини шатуна  $AB$  і ін.).

Велике значення для точності побудови графіка  $S_B$  має також число положень механізму. Як уже відзначалося, для задовільної точності інже-

нерних графічних побудов слід приймати число положень механізму рівним 24 або навіть 36.

У навчальних курсових проектах звичайно це число дорівнює 12. У результаті похибка графіка  $S_B$  в деяких точках може досягати 5%.

Графічне диференціювання також вносить свої додаткові похибки.

Так, нахил хорди приймається за нахил дотичної до графіка в середній точці інтервалу, але це не зовсім так. У результаті похибка графіка  $V_B$  може в окремих точках досягати 10%, а похибка графіка  $W_B$  - навіть до 20%.

Настільки висока похибка кінематичних діаграм, отриманих за допомогою графічного диференціювання, обмежує їхнє використання при точних інженерних розрахунках. Проте, простота і наочність даного методу має велике значення в навчальному процесі. Більш точно графіки  $S_B$ ,  $V_B$  і  $W_B$  можна розрахувати і побудувати по залежностях (2.2; 2.3; 2.4).

У інженерній практиці значно частіше метод кінематичних діаграм використовується при синтезі механізмів.

Звичайно задаються графіком аналога прискорень вихідної ланки. Потім, застосовуючи графічне інтегрування, одержують графіки аналога швидкості і переміщення вихідної ланки механізму.

Графічне інтегрування виконується в точно зворотному диференціюванню порядку (див. приклад графічного інтегрування при синтезі кулачкових механізмів в [8] - розділ 3).

Як не парадоксально, але графічне інтегрування можна виконати зі значно більшою точністю, ніж диференціювання. Пояснення цьому міститься в тому факті, що геометрично інтеграл означає площу під (або над) графіком у межах інтегрування. А площі криволінійних трапецій по інтервалах можна з високою візуальною точністю замінити площами прямокутників. Проілюструємо це на прикладі (рис. 2.3).

Як очевидно з рис. 2.3 у межах кожного інтервалу нескладно накреслити прямокутник, рівновеликий по площі з криволінійною трапецією. Для цього лише необхідно щоб у межах кожного інтервалу площі, позначені знаками  $\oplus$ , були рівні площам, позначеним знаком  $\ominus$ . Точне ж визначення площ прямокутників по інтервалах не має великої труднощі.

Дана властивість інтеграла дозволяє при графічному інтегруванні зберігати похибку побудов у межах 5%, тобто, у межах узвичасної точності інженерних розрахунків.

Адже приблизно 5%-ний розкид мають довідкові дані характеристик міцності матеріалів. Навантаження на ланки механізму також визначаються приблизно з такою ж похибкою.

Тому 5%-ний рубіж похибки при кінематичних розрахунках не порушує загальної похибки аналізу і синтезу механізмів.

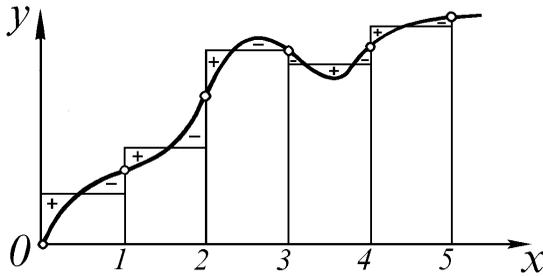


Рис. 2.3. Визначення площ криволінійних трапецій

Інша справа, якщо вирішується задача, наприклад, дослідницького характеру, із заздалегідь установленим рівнем допустимої похибки значно нижче 5% (іноді значно нижче 1%). У цьому випадку ні графічне інтегрування, ні, тим більше, графічне диференціювання неприйнятні. Задачу тоді слід вирішувати аналітичними методами.

#### 4. Контрольні запитання

1. Які задачі включає кінематичний аналіз механізмів?
2. Які існують методи кінематичного аналізу механізмів? Які їхні позитивні якості і недоліки?
3. Що називається аналогом швидкості й аналогом прискорення? Як аналоги зв'язані зі швидкістю і прискоренням?
4. Який геометричний зміст похідної і інтеграла? Як це використовується при графічному диференціюванні й інтегруванні?
5. Чому точність при графічному інтегруванні вища, ніж при графічному диференціюванні?
6. Опишіть кінематичний аналіз механізму методом кінематичних діаграм (на прикладі).
7. Визначте закон руху повзуна центрального (аксіального) кривошипно-повзунного механізму аналітичним методом.