

перпендикулярно проекции линии действия толкателя на плоскость xOy , в которой лежит точка F_0 ее пересечения с линией действия толкателя. Точку пересечения проекции линии действия толкателя с осью Oy обозначим N_0 . Угол между радиусом-вектором ρ_0 проекции точки A_0 на плоскость xOy и осью Oy , являющийся профильным углом кулачка, обозначим ψ_0 .

Для вращательных кулачков удобно пользоваться цилиндрической полярной системой координат ρ, ν, z . Подвижную ось ρ кулачка совместим с осью y . Точку пересечения этой оси с проекцией

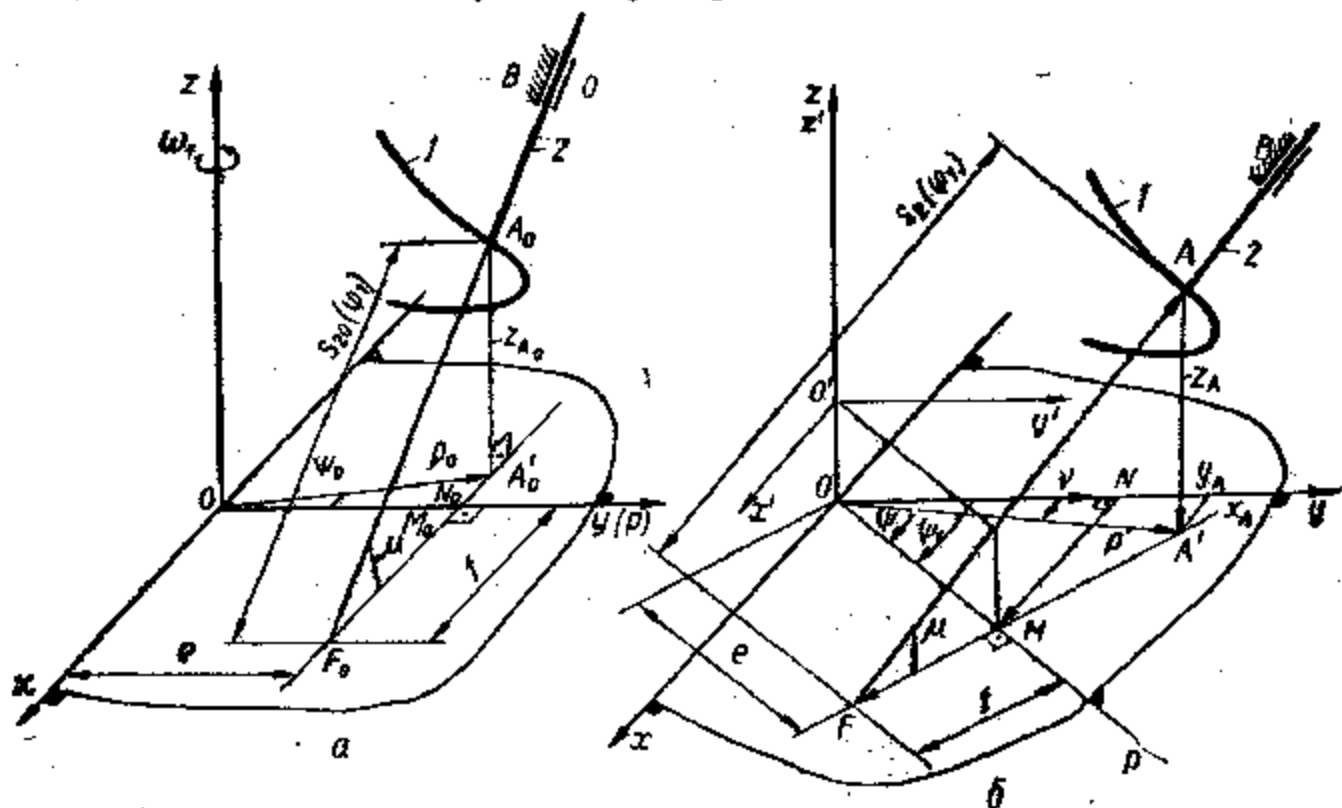


Рис. 15.16. Определение координат профильной поверхности пространственного кулачка при поступательно движущемся толкателе

линии действия толкателя обозначим через M_0 (в этом положении точки M_0 и N_0 совпадают). Применяя принцип обращения движения к механизму, сообщим ему скорость ω_1 . Тогда стойка O с толкателем начнет вращаться относительно неподвижного кулачка. Поворот ее на произвольный угол φ_1 (рис. 15.16, б) будет соответствовать повороту оси ρ в плоскости xOy на тот же угол. Радиус-вектор ρ проекции точки A при повороте на угол φ_1 оси ρ будет равен

$$\rho = \overline{ON} + \overline{NM} + \overline{MF} + \overline{FA} + \overline{AA'}, \quad (15.18)$$

где M и N — соответственно точки пересечения проекции линии действия толкателя с полярной осью и проекция этой точки на ось при повороте кулачка на угол φ_1 .

Апplikата z_A при повороте кулачка на угол φ_1 будет

$$z_A = s_2(\varphi_1) \sin \mu, \quad (15.19)$$

а абсциссу и ординату получим, составив уравнения проекций векторов (15.18) на оси Ox и Oy :

$$x_A = \rho \sin \nu = e \sin \varphi_1 - (f - s_2(\varphi_1) \cos \mu) \cos \varphi_1; \quad (15.20)$$

$$y_A = \rho \cos \nu = e \cos \varphi_1 + (f - s_2(\varphi_1) \cos \mu) \sin \varphi_1. \quad (15.21)$$

В цилиндрической полярной системе координат имеем:

$$\rho = \sqrt{e^2 + (f - s_2(\varphi_1) \cos \mu)^2};$$

$$\operatorname{tg} \nu = (e \sin \varphi_1 - (f - s_2(\varphi_1) \cos \mu) \cos \varphi_1) / (e \cos \varphi_1 + (f - s_2(\varphi_1) \cos \mu) \sin \varphi_1);$$

$$z_A = s_2(\varphi_1) \sin \mu.$$

Учитывая, что $\rho \cos \psi = e$; $\rho \sin \psi = f - s_2(\varphi_1) \cos \mu$ и $\operatorname{tg} \psi = (f - s_2(\varphi_1) \cos \mu) / e$, после преобразований получим

$$\rho = e / \cos \psi;$$

$$\nu = \varphi_1 - \psi;$$

$$z = s_2(\varphi_1) \sin \mu. \quad (15.22)$$

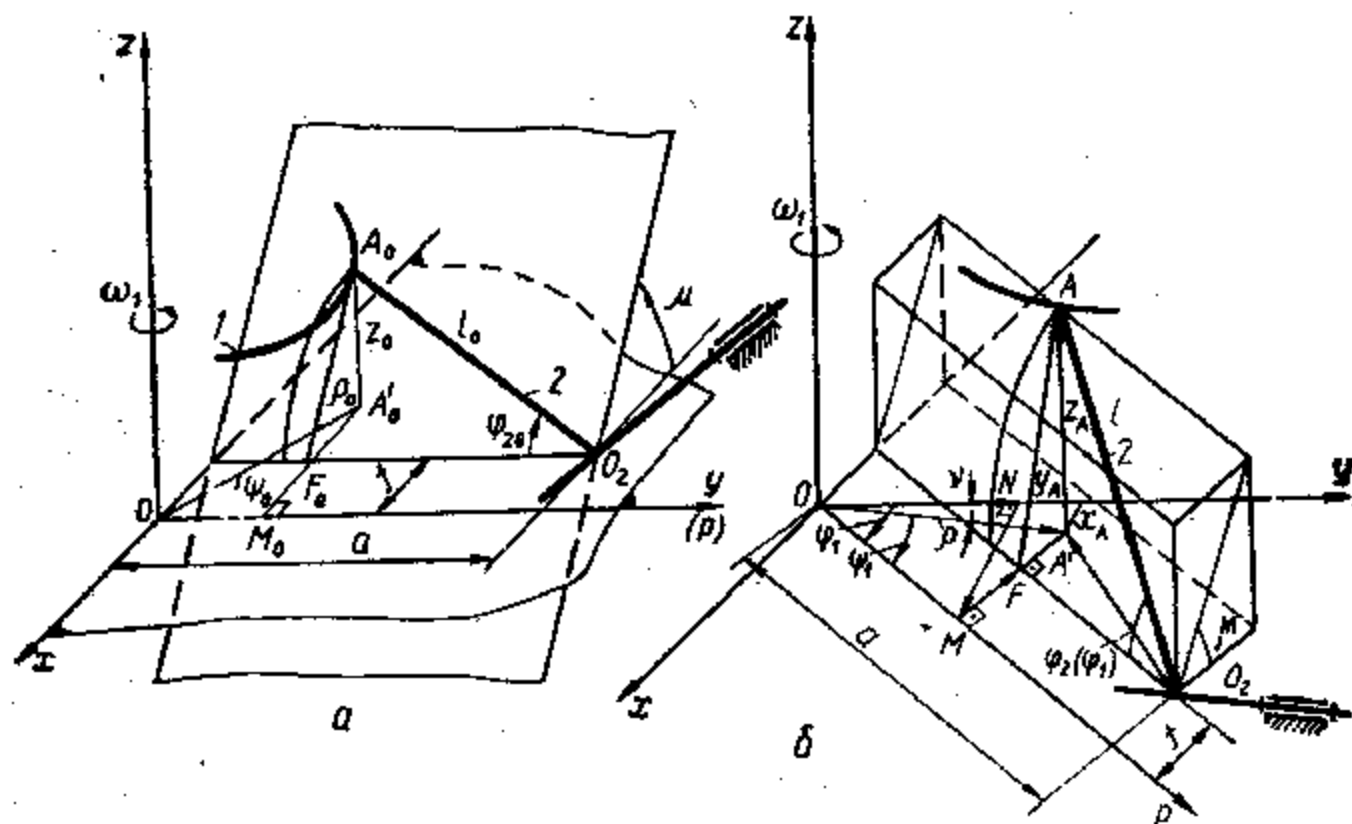


Рис. 15.17. Определение координат профильной поверхности пространственного кулачка при качающемся ведомом звене

Выражая $s_2(\varphi_1) = z_A / \sin \mu$, возводя в квадрат обе части уравнений (15.20) и (15.21) и складывая их, получим после преобразований уравнение теоретической поверхности кулачка в неявном виде $\Phi(x, y, z) = 0$:

$$x^2 + y^2 = e^2 + (f - z \operatorname{ctg} \mu)^2.$$

Полученное уравнение является уравнением *гиперболоида вращения*, что соответствует общему представлению о форме сопряженных поверхностей элементов высшей кинематической пары (см. гл. 9).

Вводя обозначение $z_1 = z - f \operatorname{tg} \mu$, получим уравнение однополостного гиперболоида вращения в системе координат $O'x'y'z'$, начало координат которой сдвинуто относительно точки O на

$$OO' = (x'/e^2 + y'/e^2 + z'/(e \operatorname{tg} \mu)^2) = 1. \quad (15.23)$$

Аналогично решается задача определения координат теоретической профильной поверхности пространственного кулачка для механизма с коромыслом (рис. 15.17). Коромысло 2, начальное положение которого определяется касанием с кулачком в точке A_0 (рис. 15.17, а), перемещается в плоскости, пересекающей плоскость xOy под углом μ , по линии, параллельной оси Oy и отстоящей от нее на расстоянии f . Координаты центра вращения коромысла в плоскости параллельной xOy , равны a и f . Радиус-вектор ρ_0 точки A_0 проекции точки A_0 на плоскость xOy образует с осью Oy профильный угол ψ_0 , которому соответствует угол наклона коромысла φ_{20} . Применяя принцип обращения движения, получим, как и в случае поступательного движения толкателя при повороте оси p на угол φ_1 (рис. 15.17, б), радиус-вектор точки A'

$$\rho = \overline{ON} + \overline{NM} + \overline{MF} + \overline{FA} + \overline{AO_2} + \overline{O_2A'}. \quad (15.24)$$

Проецируя радиус-вектор на оси x , y , z , получим координаты точки касания A коромысла 2 с кулачком 1 в неподвижной системе:

$$\begin{aligned} x_A &= \rho \sin \nu = (a - l \cos \varphi_2(\varphi_1)) \sin \varphi_1 - \\ &\quad - (f + l \sin \varphi_2(\varphi_1) \cos \mu) \cos \varphi_1; \\ y_A &= \rho \cos \nu = (a - l \cos \varphi_2(\varphi_1)) \cos \varphi_1 + \\ &\quad + (f + l \sin \varphi_2(\varphi_1) \cos \mu) \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (15.25)$$

В полярной цилиндрической системе координат ρ , ν , z с учетом того, что $\rho \cos \psi = a - l \cos \varphi_2(\varphi_1)$; $\rho \sin \psi = f + l \sin \varphi_2(\varphi_1) \times \times \cos \mu$; $\operatorname{tg} \psi = (f + l \sin \varphi_2(\varphi_1) \cos \mu) / (a - l \cos \varphi_2(\varphi_1))$, получим $\nu = \varphi_1 - \psi$; $\rho = (a - l \cos \varphi_2(\varphi_1)) \cos \psi$; $z = l \sin \varphi_2(\varphi_1) \sin \mu$.

Исключая $\varphi_2(\varphi_1)$ и φ_1 из условий (15.25), получим уравнение теоретической поверхности кулачка:

$$x^2 + y^2 = (a - l \sqrt{1 - z^2/l^2 \sin^2 \mu})^2 + (f + z \operatorname{ctg} \mu)^2. \quad (15.26)$$

Условие (15.26) описывает поверхность глобоидного кулачка, образованную дугой окружности, уравнения которой имеют вид

$$x = -(f + z \operatorname{ctg} \mu), \quad (a - y)^2 + (z \sin \mu - (x + f) \cos \mu)^2 = l^2.$$

15.8. Определение параметров элементов высшей кинематической пары кулачковых механизмов

Для обеспечения высокой работоспособности кулачкового механизма при его проектировании необходимо подобрать соответствующие сочетания параметров поверхностей кулачка и ведомого звена, в частности кривизны профиля кулачка и ролика толкателя. Если радиус кривизны профиля кулачка мал, то при эксплуатации он быстро выходит из строя из-за потери контактной прочности или из-за интенсивного износа, так как и контактные напряжения и темп изнашивания обратно пропорциональны приведенному радиусу кривизны. Если неправильно выбрать радиус ролика толкателя, то может случиться, что он не будет вращаться и введение его в кинематическую цепь не приведет к снижению потерь на трение.

Радиус кривизны кулачка в произвольной точке K его профиля будет

$$\rho_K = (r_K^2 + \dot{r}_K^2)^{3/2} / (r_K^2 + 2\dot{r}_K^2 - r_K \ddot{r}_K), \quad (15.27)$$

где r_K , \dot{r}_K , \ddot{r}_K — радиус-вектор профиля кулачка и его производные. Для механизма, изображенного на рис. 15.3,

$$r_A = \sqrt{(r_0 + s_2(\varphi_1))^2 + e^2};$$

$$\dot{r}_A = ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 = O_1B = e + (r_0 + s_2(\varphi_1)) \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\ddot{r}_A = dr_A/d\varphi_1 = \dot{s}_2(\varphi_1).$$

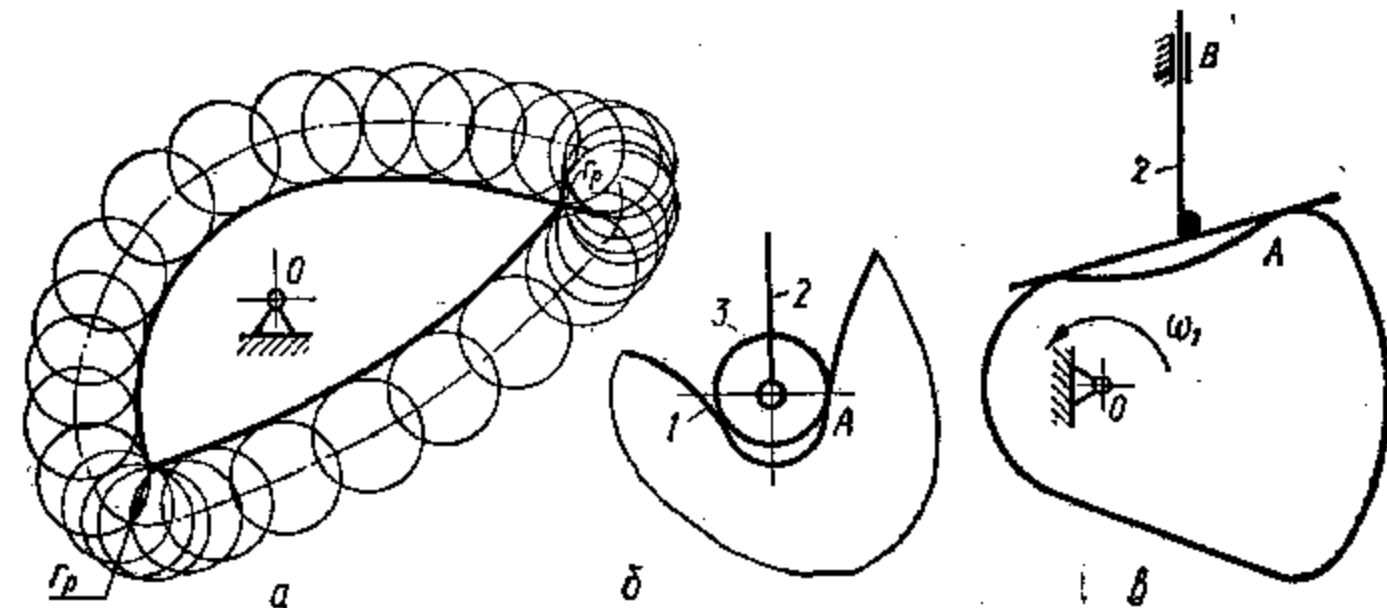


Рис. 15.18. Особенности контуров кулачков

Подставляя r_A , \dot{r}_A , \ddot{r}_A в формулу (15.27), после преобразований получим формулу для определения радиуса кривизны кулачка. Для механизма с поступательно движущимся толкателем при $s = r_0 + s_2(\varphi_1)$ будем иметь:

$$\rho_K = s^2 / (s \cos \alpha + s \sin \alpha \cos^2 \alpha - \dot{s} \cos^3 \alpha); \quad (15.28)$$

для механизма с коромыслом

$$\begin{aligned} \rho_K &= (l_0^2 + r_2^2 (1 + \dot{\varphi}_2)^2 - 2l_0 r_2 (1 + \varphi_2) \cos \varphi_2)^{3/2} / (l_0^2 + \\ &\quad + r_2^2 (1 + \dot{\varphi}_2)^2 - l_0 r_2 (\cos \varphi_2 (1 + \varphi_2) (2 + \varphi_2) \sin \varphi_2)). \end{aligned} \quad (15.29)$$

Полученные формулы позволяют определить радиус кривизны теоретических профилей кулачков. Радиус кривизны практического профиля может быть найден как радиус кривизны эквидистантной кривой. Если механизм имеет плоский толкатель, то радиус кривизны профиля определяется по формуле (15.7).

При назначении радиуса ролика r_p следует иметь в виду, что на участке наибольшей кривизны недопустимо соотношение $r_p \geq \geq \rho_{K \min}$, так как в этих случаях получается или двойной профиль, выполнение которого невозможно на станке из-за удаления материала при изготовлении кулачка, или заостренный профиль (рис. 15.18, а). Обычно выбирают $r_p \leq 0,7 \rho_{K \min}$. Это же условие нужно

соблюдать в кулачках с профилем разных знаков кривизны (б). В механизмах с такими кулачками нельзя применять выходные звенья с плоским толкателем (в).

15.9. Алгоритмы расчета плоских кулачковых механизмов на электронных вычислительных машинах

Для механизма с поступательно движущимся остроконечным толкателем алгоритм расчета профиля кулачка по зависимости (15.3), (15.14) и (15.28) может быть реализован функцией

$$PRFLP(N, r_0, e, \omega_1, s_2(N), v_2(N); x_A(N), y_A(N), \alpha(N), \rho_K(N)). \quad (15.30)$$

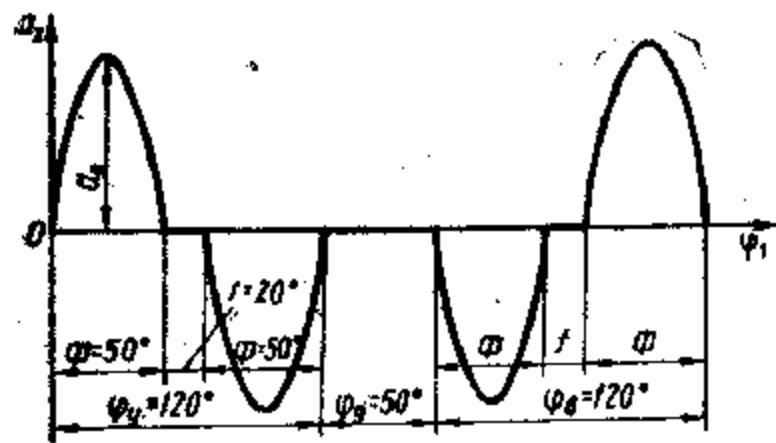


Рис. 15.19. Закон изменения ускорений толкателя

При обращении к операторной функции *PRFLP* должны быть определены: размерность *N* массивов величин исходных данных; массивы чисел, соответствующие скоростям $v_2(N)$ и перемещениям $s_2(N)$ толкателя для углов поворота кулачка $\varphi_1(N)$; основные размеры кулачкового механизма, определяемые операторной функцией *KLCHK* по формуле (15.6), и угловая скорость кулачка ω_1 .

Для механизма с плоским толкателем алгоритм расчета профиля кулачка по зависимостям (15.7) и (15.16) может быть реализован функцией

$$PRFLPL(N, r_0, \omega_1, v_2(N), s_2(N); x_A(N), y_A(N), \rho_K(N)). \quad (15.31)$$

Для определения радиуса основной шайбы r_0 используется операторная функция *KLCHPL* (15.9).

Для механизма с коромыслом операторная функция, реализующая зависимости (15.13), (15.17) и (15.29), будет иметь вид

$$PRFLKT(N, r_2, l_0, \omega_1, \varphi_2(N), \psi(N); \varphi_3(N); x_A(N), y_A(N), \alpha(N), \rho_K(N)). \quad (15.32)$$

Принятое описание операторными функциями алгоритмов решения частных задач синтеза кулачковых механизмов упрощает структуру алгоритма решения задачи расчета кулачкового механизма, сводя ее к последовательному обращению к операторным функциям. Пусть, например, требуется рассчитать параметры механизма с поступательно движущимся толкателем. Фазовые углы соответственно равны $\varphi_y = \varphi_v = 120^\circ$, $\varphi_d = 50^\circ$, $\varphi_0 = 70^\circ$. Закон изменения ускорений толкателя графически представлен на

рис. 15.19, а аналитически выражается функцией

$$a_2 = \begin{cases} a_0 \sin(\varphi_1 (2\pi/2\varphi + f)), & \varphi + f \leq \varphi_1 \leq \varphi; \\ 0 & \varphi < \varphi_1 < \varphi + f; \\ 0 & \varphi_y < \varphi_1 < \varphi_y + \varphi_d; \\ -a_0 \sin[(\varphi_1 - \varphi_y - \varphi_d (2\pi/2\varphi + f))], & \varphi_y + \varphi_d + \varphi + f \leq \\ & \leq \varphi_1 \leq \varphi_y + \varphi_d + \varphi; \\ 0 & \varphi_y + \varphi_d + \varphi < \varphi_1 < \\ & < \varphi_y + \varphi_d + \varphi + f. \end{cases} \quad (15.33)$$

Если требуется определить параметры профиля через шаг $\Delta\varphi_1$, то число расчетных шагов $N = (\varphi_y + \varphi_d + \varphi_0)/\Delta\varphi_1$. Подставляя в формулу (15.33) φ_1 с шагом $\Delta\varphi_1$, найдем массив значений $a_2(N)$. Значения массивов скоростей и перемещений толкателя для расчетных точек определяются по формуле (5.8):

$$INTGR(N, \Delta\varphi_1, 2, a_2(N); v_2(N)). \quad (15.34)$$

Число 2 в функции (15.34) свидетельствует, что при численном интегрировании применяется метод трапеций (см. гл. 5). Аналогично для перемещений

$$INTGR(N, \Delta\varphi_1, 2, v_2(N); s_2(N)). \quad (15.35)$$

Примем допустимое значение угла давления α_d в зависимости от материалов пары кулачок — толкатель и назовем угол β . Тогда основные размеры механизма определяются операторной функцией (15.6), которая для этого случая имеет вид

$$KLCHK(N, s_2(N), v_2(N), \alpha, \beta; r_0, e), \quad (15.36)$$

а параметры профиля кулачка, радиусы кривизны, углы давления для значений φ_1 операторной функцией

$$PRFLP(N, r_0, e, \omega_1, s_2(N), v_2(N); x_A(N), y_A(N), \alpha(N), \rho_K(N)). \quad (15.37)$$

Последовательность зависимостей (15.33) ... (15.37) представляют алгоритм расчета кулачкового механизма.

Раздел третий

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

16. ПЛОСКИЕ МЕХАНИЗМЫ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

16.1. Основные задачи анализа

Задачи анализа заключаются в определении кинематических характеристик движения механизма, геометрические размеры которого известны. В зависимости от цели исследования определяются положения звеньев, их перемещения, траектории, скорости и ускорения. Задача кинематического исследования решается с целью получения

значений характеристик при конкретных положениях звеньев механизма, а также для определения законов изменения кинематических параметров в функции времени или обобщенной координаты.

Кинематические характеристики механизма необходимы не только для оценки качества синтеза схемы механизма, но и для решения задач, связанных с прочностным расчетом и конструированием его звеньев, оценки динамических свойств механизма. Например, для проведения силового расчета механизма необходимо определить силы инерции и сопротивления движению звеньев, для чего должны быть известны скорости и ускорения их. Для вписывания механизма в конструкцию машинного агрегата необходимо знать траекторию движения его звеньев и их положения, определяющие габаритные размеры механизма. Для многих механизмов траектории движения звеньев определяют форму корпусных деталей, являющихся наиболее материалоемкими в машинах (картеры двигателей внутреннего сгорания, корпуса насосов и турбин, головки элеваторов и т. п.).

16.2. Методы анализа

Кинематический анализ плоских механизмов основывается на положениях кинематики точки и твердого тела. Координаты точек звеньев механизмов получают с помощью векторных уравнений, описывающих геометрические соотношения схемы механизма и связь их с координатной системой. Радиус-вектор точки звена механизма полностью определяет ее положение в координатной системе, а условие замкнутости векторного контура схемы механизма (см. гл. 6) определяет кинематику его звеньев в любой момент времени, функции положения звеньев и передаточные.

Уравнения линейных и угловых координат обычно получают для обобщенных координат, под которыми понимают линейную или угловую координату входного звена механизма, определяющую его положение на своей траектории. Это дает возможность получить кинематические характеристики независимо от закона движения ведущего звена. Функции положения и передаточные функции также получают для обобщенных координат.

При исследовании движения звеньев механизма на основании теорем о сложном составном движении и о сложении движений получают **векторные уравнения**, описывающие скорости и ускорения точек звеньев. Численное решение векторных уравнений сводится к решению системы алгебраических линейных уравнений, параметры которой описываются операторными функциями (см. гл. 5).

Решение любой задачи анализа в общем виде сводится к получению **алгоритма**, позволяющего проводить расчет по единой схеме при любых численных значениях геометрических параметров механизмов. Алгоритм кинематического расчета механизма целесообразно представить как совокупность алгоритмов кинематического расчета — ведущих звеньев и структурных групп. Это позволяет

проводить расчеты любых плоских механизмов в той же последовательности, в которой осуществляется структурный синтез механизма.

16.3. Определение кинематических характеристик движения звена на плоскости

Движение звена на плоскости характеризуется угловыми скоростями и ускорениями звена и координатами мгновенных центров скоростей и ускорений; угловыми скоростями и ускорениями звена и векторами скорости и ускорения одной точки его звена; векторами скоростей и ускорения двух точек звена.

Когда мгновенные центры скоростей и ускорений звена совпадают и при работе механизма не меняют своего положения, это соответствует частному случаю плоского движения — вращательному (рис. 16.1). Вектор скорости произвольной точки A звена определится по величине и направлению из условий:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= l_{OA} \cdot |\omega|; \\ UGL3(\varphi_{OA}, \pi/2, \omega; \alpha_A). \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Вектор ускорения \bar{a}_B произвольной точки B определится как сумма векторов нормального \bar{a}_B^n и тангенциального \bar{a}_B^t ускорений — $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^t$. Величина и направляющий угол вектора полного ускорения будут

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_B &= l_{OB} \sqrt{\omega^2 + \epsilon^2}; \\ UGL3(\varphi_{OB}, \pi - \delta, \epsilon; \beta_B). \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

В уравнениях (16.1) и (16.2) и в дальнейшем знаки угловой скорости и углового ускорения принимаются по правилам для правой системы координат положительными, а в случае вращения звена против часовой стрелки — отрицательными.

Для звена, совершающего *поступательное движение*, скорости и ускорения всех его точек равны и направлены в одну сторону.

Если движение звена задается векторами скорости и ускорения какой-либо точки A , а также угловой скоростью ω и угловым ускорением ϵ звена, величины и направления скорости и ускорения любой другой точки звена, например, B , определяются с помощью **теоремы о сложении движений**. Движение точки B звена (рис. 16.2) представляют как поступательное с координатной системой $x'Ay'$ и вращательное вокруг точки A в этой же системе. В соответствии с этим скорость точки B будет равна $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, а вектор скорости \bar{v}_{BA} определится по зависимостям, аналогичным уравнениям (16.1):

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{BA} &= l_{AB} \cdot |\omega|; \\ UGL3(\varphi_{AB}, \pi/2, \omega, \alpha_{BA}). \end{aligned} \right\}$$

Алгоритм вычисления реализуется операторной функцией

$$SMVKT(v_A, \alpha_A, v_{BA}, \alpha_{BA}; v_B, \alpha_B). \quad (16.3)$$

Ускорение точки B (рис. 16.3) по условию сложения ускорений $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$. Составляющие ускорений будут: $a_{BA}^n = l_{AB}\omega^2$; $\beta_{BA} = \varphi_{AB} - \pi$; $a_{BA}^t = l_{AB}|\varepsilon|$; UGL3 (φ_{AB} , $\pi/2$, ε ; β_{BA}).

Определение величины и направляющего угла вектора полного ускорения реализуется операторными функциями

$$SMVKT(a_A, \beta_A, a_{BA}^n, \beta_{BA}^n; a, \beta);$$

$$SMVKT(a, \beta, a_{BA}^t, \beta_{BA}^t; a_{\beta B}),$$

где a и β — промежуточные результаты.

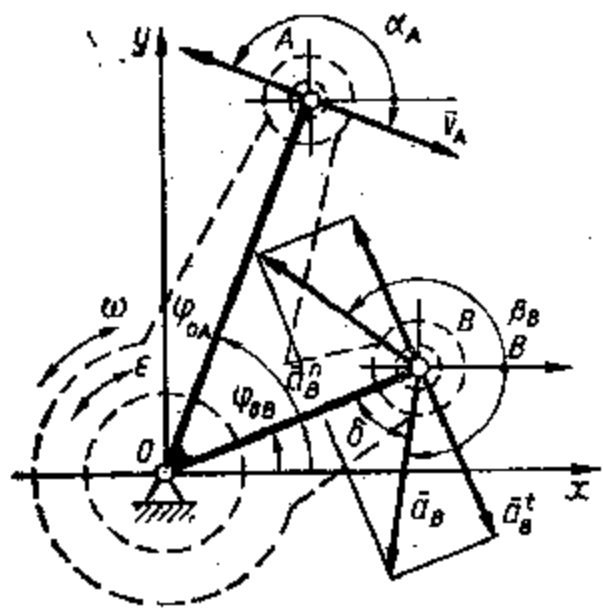


Рис. 16.1. Кинематические характеристики вращающегося звена

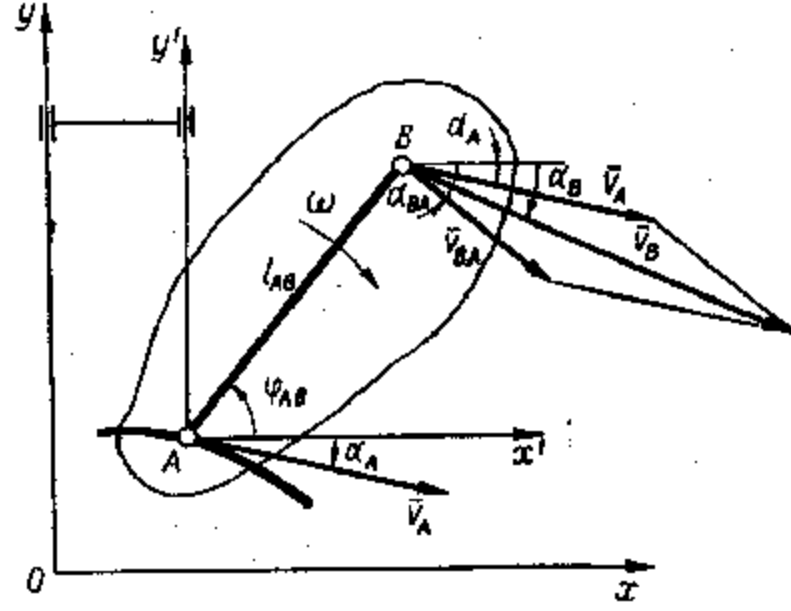


Рис. 16.2. Скорость точки звена, движущегося по плоскости

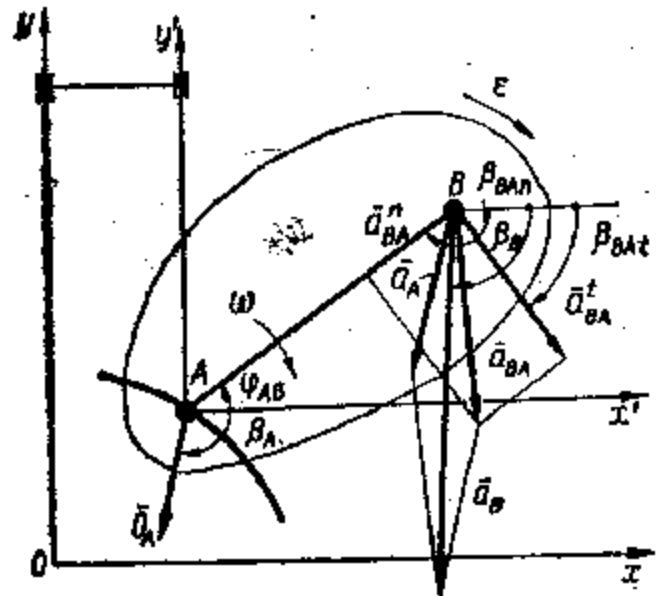


Рис. 16.3. Ускорения точки звена, движущегося по плоскости

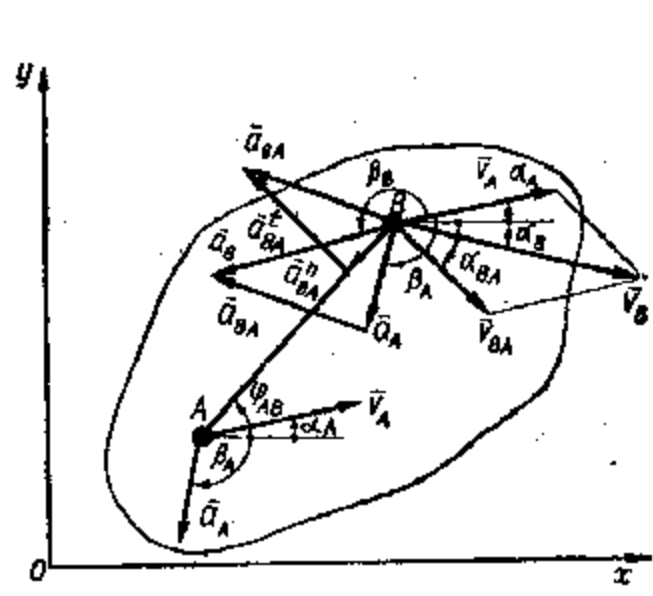


Рис. 16.4. Относительные скорости и ускорения звена

Если закон движения звена задается векторами скоростей \bar{v}_A от \bar{v}_B , а ускорений — \bar{a}_A и \bar{a}_B двух произвольных его точек A и B , то угловая скорость ω и угловое ускорение звена ε определяются по векторам относительных скоростей и ускорений. Из уравнения $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ получим вектор относительной скорости $\bar{v}_{BA} = \bar{v}_B -$

— v_A (рис. 16.4), откуда (см. гл. 5)

$$\left. \begin{aligned} v_{BAx} &= v_B \cos \alpha_B - v_A \cos \alpha_A; \\ v_{BAy} &= v_B \sin \alpha_B - v_A \sin \alpha_A; \\ v_{BA} &= \sqrt{v_{BAx}^2 + v_{BAy}^2}; \\ UGL5 &(v_{BAx}, v_{BAy}, \alpha_{BA}); \\ \omega &= \text{sign}(\alpha_{BA} - \varphi_{AB}) v_{BA}/l_{AB}. \end{aligned} \right\} (16.4)$$

Из уравнения для $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$ получим вектор относительно ускорения $\bar{a}_{BA} = \bar{a}_B - \bar{a}_A$, откуда

$$\left. \begin{aligned} a_{BAx} &= a_B \cos \alpha_B - a_A \cos \alpha_A; \\ a_{BAy} &= a_B \sin \alpha_B - a_A \sin \alpha_A; \\ a_{BA} &= \sqrt{a_{BAx}^2 + a_{BAy}^2}; \\ UGL5 &(a_{BAx}, a_{BAy}, \beta_{BA}); \\ \varepsilon &= \text{sign}(\beta_{BA} - \varphi_{AB}) \sqrt{a_{BA}^2 - \omega^4 l_{AB}^2}/l_{AB}. \end{aligned} \right\} (16.5)$$

Выражения типа (16.4) и (16.5) в дальнейшем при анализе механизмов будем реализовать операторной функцией (см. гл. 5)

$$OMEGA(l, \varphi, v, \alpha; \Omega) = \text{sign}(\alpha - \varphi) |v|/l, (16.6)$$

где l , φ — радиус-вектор точки и его направляющий угол.

В функции (16.6) заданы модуль вектора и его направляющий угол для кинематического параметра: скорости — v , α ; ускорения — a , β ; Ω — выходная переменная операторной функции, соответствующая значению угловой скорости или углового ускорения.

16.4. Кинематика звеньев, образующих вращательную кинематическую пару

Во вращательной кинематической паре C (рис. 16.5) движение звена 2 можно представить как сумму двух движений — переносного вместе с точкой C звена 1 и вращательного — относительно точки C . Абсолютная скорость произвольной точки B на звене 2 будет

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC} \text{ при } \bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}. (16.7)$$

При этом

$$\begin{aligned} v_{CA} &= |\omega_1| \cdot l_{AC}; \quad UGL3(\varphi_1, \pi/2, \omega_1; \alpha_{CA}); \\ v_{BC} &= |\omega_2| \cdot l_{BC}; \quad UGL3(\varphi_2 + \pi, \pi/2, \omega_2; \alpha_{BC}). \end{aligned}$$

Как видно, для решения векторных уравнений (16.7) необходимо определить угловые скорости ω_1 и ω_2 движения звеньев 1 и 2. Для этого рассмотрим движение точки C со звеньями 1 и 2. Из условий (16.7) получим $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}$; $\bar{v}_C = \bar{v}_B - \bar{v}_{BC} = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}$ и,

следовательно,

$$\bar{v}_A + v_{CA} = \bar{v}_B + v_{CB}. \quad (16.8)$$

Линии действия векторов относительных скоростей \bar{v}_{CA} и \bar{v}_{CB} известны. Они перпендикулярны соответственно отрезкам CA и CB , но направления векторов на линиях действия неизвестны. Примем предварительные значения направляющих углов векторов \bar{v}_{CA} и

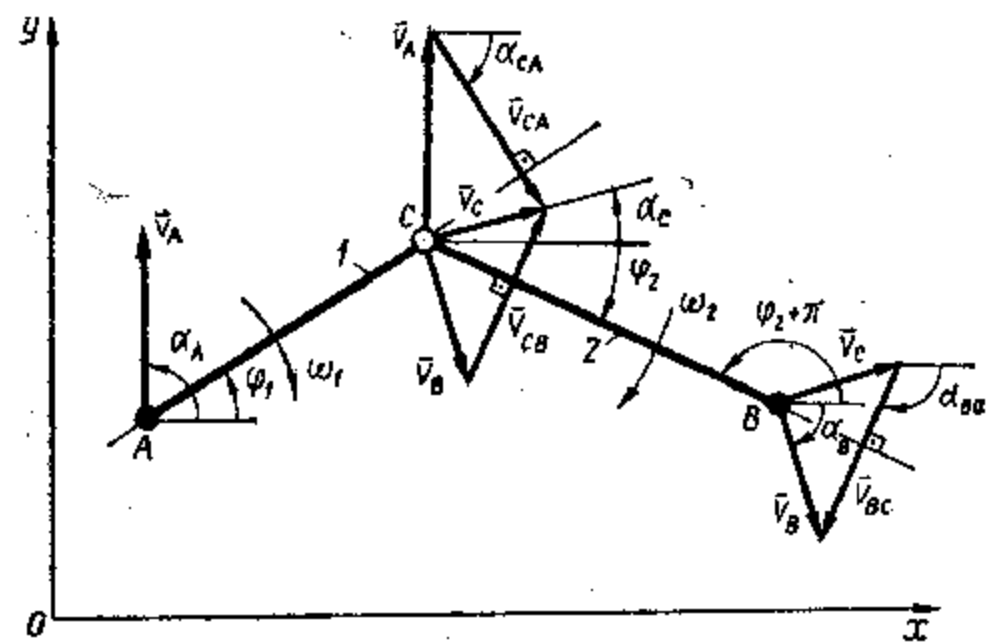


Рис. 16.5. Скорости звеньев, образующих вращательную кинематическую пару

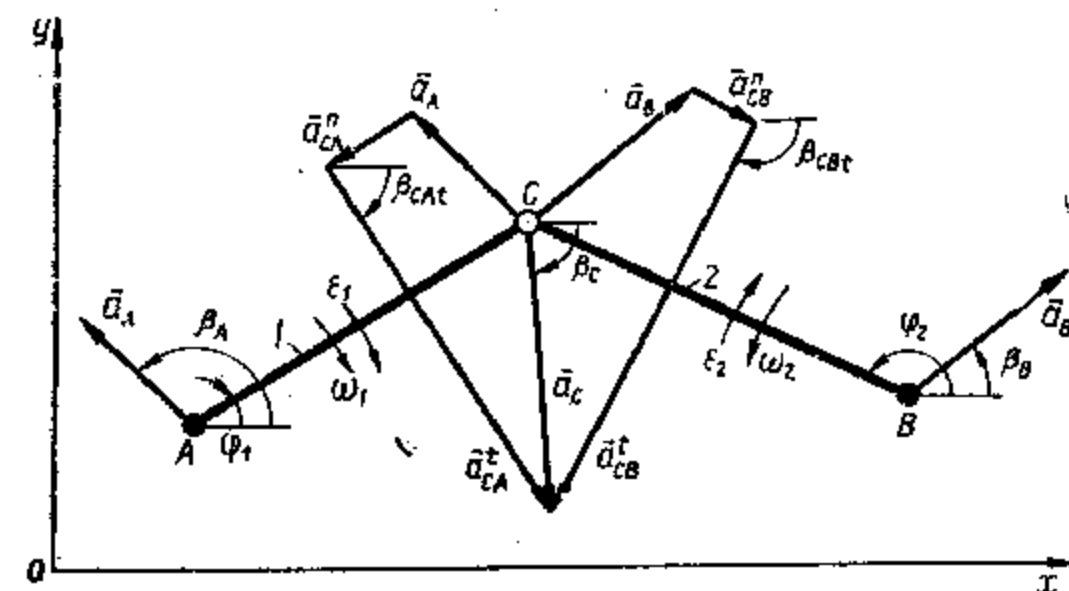


Рис. 16.6. Ускорения звеньев, образующих вращательную кинематическую пару

\bar{v}_{CB} : $\alpha_{CA} = \varphi_1 + \pi/2$, $\alpha_{CB} = \varphi_2 + \pi/2$, и сведем условие (16.8) к системе линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} v_A \cos \alpha_A + v_{CA} \cos \alpha_{CA} &= v_B \cos \alpha_B + v_{CB} \cos \alpha_{CB}; \\ v_A \sin \alpha_A + v_{CA} \sin \alpha_{CA} &= v_B \sin \alpha_B + v_{CB} \sin \alpha_{CB}. \end{aligned} \right\}$$

Приведем систему к каноническому виду

$$\left. \begin{aligned} v_{CA} \cos \alpha_{CA} - v_{CB} \cos \alpha_{CB} &= v_B \cos \alpha_B - v_A \cos \alpha_A; \\ v_{CA} \sin \alpha_{CA} - v_{CB} \sin \alpha_{CB} &= v_B \sin \alpha_B - v_A \sin \alpha_A. \end{aligned} \right\} \quad (16.9)$$

Запишем алгоритм вычисления векторов \bar{v}_{CA} и \bar{v}_{CB} :

$$A(2,2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{CA} & \cos \alpha_{CB} \\ \sin \alpha_{CA} & \sin \alpha_{CB} \end{vmatrix}; \quad C(2) = \begin{vmatrix} v_B \cos \alpha_B - v_A \cos \alpha_A \\ v_B \sin \alpha_B - v_A \sin \alpha_A \end{vmatrix}.$$

Тогда получим модули векторов \bar{v}_{CA} , \bar{v}_{CB} через операторную функцию

$$SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); v_{CA}, \alpha_{CA}),$$

а истинные значения направляющих углов уточним, используя операторную функцию (см. гл. 5):

$$UGL4(\alpha_{CA}, \pi, v_{CA}; \alpha_{CA});$$

$$UGL4(\alpha_{CB}, \pi, v_{CB}; \alpha_{CB}).$$

Угловые скорости звеньев определим с помощью операторной функции (16.6):

$$OMEGA(l_{AC}, \varphi_1, |v_{CA}|, \alpha_{CA}; \omega_1);$$

$$OMEGA(l_{BC}, \varphi_2 + \pi, |v_{CB}|, \alpha_{CB}; \omega_2).$$

Аналогичным образом решается задача определения составляющих относительных ускорений точек C и угловых ускорений звеньев 1 и 2. Для звеньев 1 и 2 (рис. 16.6) получим

$$\bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^t = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t. \quad (16.10)$$

В уравнении (16.10) ускорения \bar{a}_A и \bar{a}_B известны по величине и направлению, нормальные составляющие относительных ускорений будут:

$$a_{CA}^n = \omega_1^2 l_{AC}; \quad \beta_{CA}^n = \varphi_1 - \pi; \quad a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{CB}; \quad \beta_{CB}^n = \varphi_2 - \pi.$$

Приняв предварительно направляющие углы β_{CA}^t и β_{CB}^t векторов тангенциальных ускорений равными направляющим углам векторов соответствующих относительных скоростей ($\beta_{CA}^t = \alpha_{CA}$ и $\beta_{CB}^t = \alpha_{CB}$), сведем после преобразований условие (16.10) к канонической системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{CA}^t \cos \beta_{CA}^t - a_{CB}^t \cos \beta_{CB}^t &= a_B \cos \beta_B + \\ + a_{CB}^n \cos \beta_{CB}^n - a_{CA}^n \cos \beta_{CA}^n - a_A \cos \beta_A; \\ a_{CA}^t \sin \beta_{CA}^t - a_{CB}^t \sin \beta_{CB}^t &= a_B \sin \beta_B + \\ + a_{CB}^n \sin \beta_{CB}^n - a_{CA}^n \sin \beta_{CA}^n - a_A \sin \beta_A. \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

Формируя массивы $A(2, 2)$, $C(2)$ операторной функции $SISTEMA$ (см. гл. 5) из уравнений (16.11), получим модули векторов тангенциальных ускорений

$$SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); a_{CA}^t, a_{CB}^t),$$

а значения направляющих углов уточним с помощью операторных функций $UGL4(\alpha_{CA}, \pi, a_{CA}^t; \beta_{CA}^t)$ и $UGL4(\alpha_{CB}, \pi, a_{CB}^t; \beta_{CB}^t)$.

Угловые ускорения звеньев определим, используя операторную функцию (16.6):

$$OMEGA(l_{AC}, \varphi_1, |a_{CA}^t|, \beta_{CA}^t; \epsilon_1);$$

$$OMEGA(l_{CB}, \varphi_2, |a_{CB}^t|, \beta_{CB}^t; \epsilon_2).$$

16.5. Кинематика звеньев, образующих поступательную кинематическую пару

Если звенья 1 и 2 образуют поступательную кинематическую пару (рис. 16.17), то скорости и ускорения произвольной точки B_2 звена 2 можно найти, используя теорему о сложном составном движении. Скорость точки B_2 , принадлежащей звену 2 и совпадающей в данный момент с точкой B_1 на звене 1, будет

$$\bar{v}_B = \bar{v}_B + \bar{v}_{B_2, B_1}.$$

Направление вектора \bar{v}_{B_2, B_1} совпадает с линией движения звена 1 относительно звена 2, вектор \bar{v}_B перпендикулярен линии $P_v B$, соединяющей точку B_2 с мгновенным центром скоростей звена P_v , его направляющий угол будет $\alpha_{B_2} = \varphi_{P_v B} + \pi/2$. Тогда, сводя векторное уравнение к системе линейных уравнений, получим

$$\left. \begin{aligned} v_{B_2} \cos \alpha_{B_2} - v_{B_2, B_1} \cos \varphi_1 &= v_B \cos \alpha_{B_2}, \\ v_{B_2} \sin \alpha_{B_2} - v_{B_2, B_1} \sin \varphi_1 &= v_B \sin \alpha_{B_2}. \end{aligned} \right\}$$

Модули векторов \bar{v}_B и \bar{v}_{B_2, B_1} получим, обратившись к операторной функции

SISTEMA (2, A (2, 2), C (2);

$$v_{B_2}, v_{B_2, B_1}).$$

Направляющие углы этих векторов уточним через операторные функции

UGL4 ($\varphi_{P_v B} + \pi/2, \pi, v_{B_2}; \alpha_{B_2}$);

UGL4 ($\varphi_1, \pi, v_{B_2, B_1}; \alpha_{B_2, B_1}$).

Угловая скорость звена 2 определится через операторную функцию

OMEGA ($P_v B, \varphi_{P_v B}, v_{B_2}, \alpha_{B_2}; \omega_2$).

Рис. 16.7. Скорости звеньев, образующих поступательную кинематическую пару

Ускорение точки B_2 относительно точки B_1 (рис. 16.8, а) определится по теореме о сложном составном движении $\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_B + \bar{a}_{B_2, B_1}^k + \bar{a}_{B_2, B_1}^t$, а относительно мгновенного центра ускорений P_a по теореме о сложном движении; $\bar{a}_B = \bar{a}_{B_2, P}^n + \bar{a}_{B_2, P}^t$. Тогда (б)

$$\bar{a}_{B_2, P}^n + \bar{a}_{B_2, P}^t = \bar{a}_B + \bar{a}_{B_2, B_1}^k + \bar{a}_{B_2, B_1}^t. \quad (16.12)$$

В выражении (16.12) вектор \bar{a}_B задан, $\bar{a}_{B_2, P}^n = \omega^2 l_{P_a B_2}$ и $\beta_{B_2, P_a} = \varphi_{P_a B} + \pi$.

Вектор кориолисова ускорения \bar{a}_{B_2, B_1}^k по величине и направлению определится из условий

$$\left. \begin{aligned} a_{B_2, B_1}^k &= 2 |\omega| v_{B_2, B_1}; \\ UGL3 &(\alpha_{B_2, B_1}, \pi/2, \omega; \beta_{B_2, B_1}). \end{aligned} \right\}$$

Принимая предварительные направления \bar{a}_{B_2, B_1}^t и \bar{a}_{B_2, P_a}^t на линиях действия такими же, как и у векторов скоростей \bar{v}_{B_2, B_1} и \bar{v}_B , получим для условия (16.12):

$$\left. \begin{aligned} a_{B_2, P}^t \cos \alpha_{B_2} - a_{B_2, B_1}^t \cos \alpha_{B_2, B_1} &= a_B \cos \alpha_{B_2} + \\ &+ a_{B_2, B_1}^k \cos \beta_{B_2, B_1, k} - a_{B_2, P}^n \cos \beta_{B_2, P_n}, \\ a_{B_2, P}^t \sin \alpha_{B_2} - a_{B_2, B_1}^t \sin \alpha_{B_2, B_1} &= a_B \sin \alpha_{B_2} + \\ &+ a_{B_2, B_1}^k \sin \beta_{B_2, B_1, k} - a_{B_2, P}^n \sin \beta_{B_2, P_n}. \end{aligned} \right\}$$

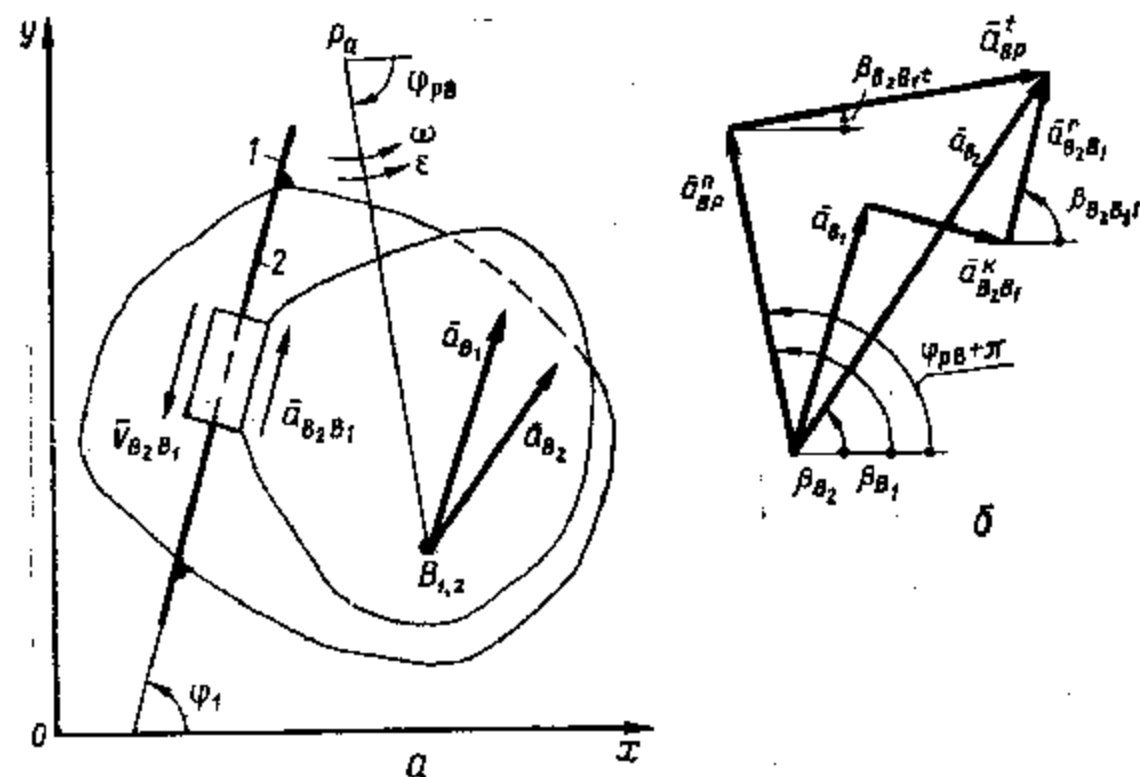


Рис. 16.8. Ускорения звеньев, образующих поступательную кинематическую пару

Модули векторов $\bar{a}_{B_2, P}^t$ и \bar{a}_{B_2, B_1}^t получим, обратившись к операторной функции

SISTEMA (2, A (2, 2), C (2); $a_{B_2, P}^t, a_{B_2, B_1}^t$).

Направляющие углы этих векторов уточним через операторные функции

UGL4 ($\alpha_{B_2}, \pi, a_{B_2, P}^t; \beta_{B_2, P_t}$);

UGL4 ($\alpha_{B_2, B_1}, \pi, a_{B_2, B_1}^t; \beta_{B_2, B_1, t}$).

Угловое ускорение звена 2 определится операторной функцией

OMEGA ($P B_2, \varphi_{P B_2}, \{a_{B_2, P}^t\}, \beta_{B_2, P_t}; \varepsilon_2$).

16.6. Алгоритмы кинематического расчета структурных групп с внутренней вращательной парой

Если звенья структурной группы соединяются вращательной парой, то для кинематических расчетов необходимо знать координаты центра этой пары или угловые координаты звеньев. Структурная

группа первого вида (рис. 16.9, а) присоединяется к кинематической цепи механизма вращательными парами, для которых известны координаты присоединительных точек $A(x_A, y_A)$ и $C(x_C, y_C)$, векторы скоростей \bar{v}_A, \bar{v}_C и ускорений \bar{a}_A, \bar{a}_C . Из двух возможных положений (второе показано тонкими линиями) вариант определяется соответствующим условием сборки q (см. гл. 7).

Координаты точки B — центра внутренней вращательной пары — определяются из следующих геометрических соотношений. Расстояние между точками A и C

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}; \quad (16.13)$$

угол наклона отрезка AC к оси абсцисс

$$\varphi_{AC} = \arctg((y_C - y_A)/(x_C - x_A)).$$

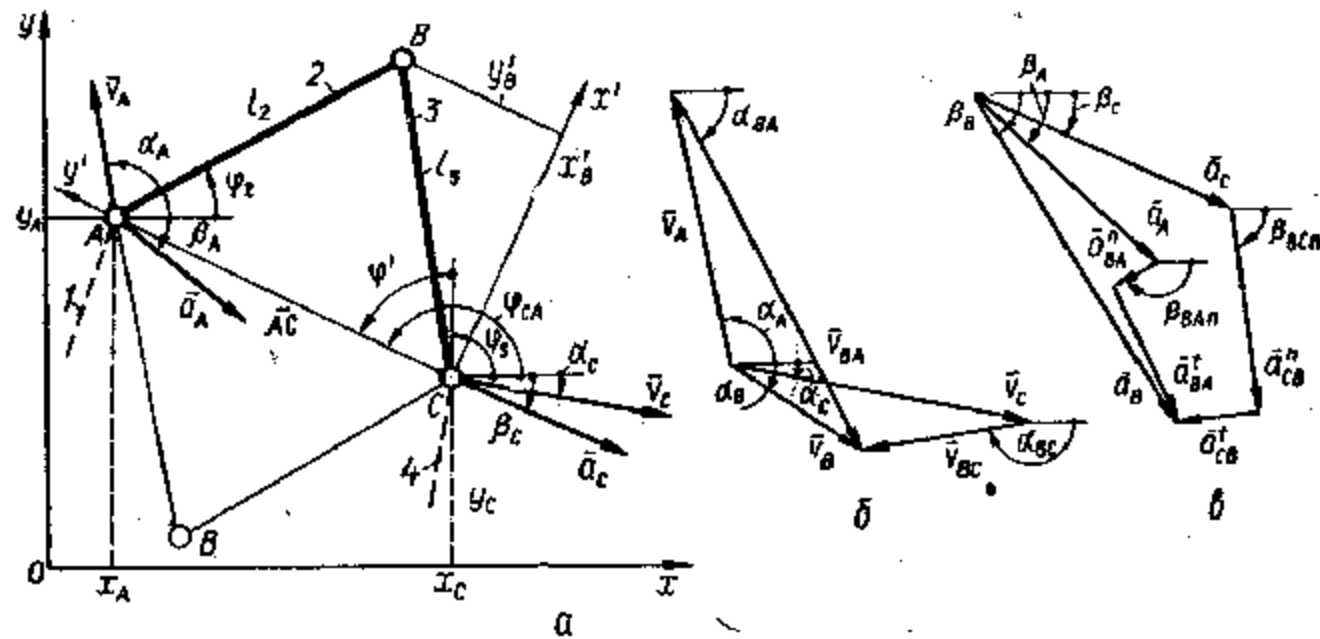


Рис. 16.9. Кинематика звеньев структурной группы первого вида

Поместим в точку C начало правой координатной системы $x'Cy'$, ось ординат которой направим по линии CA . Угол поворота координатной системы $x'Cy'$ относительно системы xOy будет: $\varphi' = \varphi_{CA} - \pi/2$. Угол φ_{CA} , определяющий положение оси y' относительно оси Ox , найдем с помощью операторной функции (см. гл. 5) $UGL1(y_C, y_A, \varphi_{AC}; \varphi_{CA})$.

Из $\triangle ABC$ следует, что $\sphericalangle BAC = \arccos((l_2^2 + AC^2 - l_3^2)/2l_2 \times AC)$. Тогда координаты точки B в системе $x'Cy'$ будут

$$\left. \begin{aligned} x_B &= \text{sign}(q) l_2 \sin \sphericalangle BAC; \\ y_B &= AC - l_2 \cos \sphericalangle BAC. \end{aligned} \right\}$$

Используя формулы перехода от одной координатной системы к другой (см. гл. 5), получим координаты точки B в исходной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= x'_B \cos \varphi' - y'_B \sin \varphi' + x_C; \\ y_B &= x'_B \sin \varphi' + y'_B \cos \varphi' + y_C, \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

что дает возможность определить направляющие углы звеньев 2 и 3 с помощью операторных функций:

$$UGL2(x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_2); \quad (16.15)$$

$$UGL2(x_C, y_C, x_B, y_B; \varphi_3). \quad (16.16)$$

Параметры линейных и угловых скоростей звеньев определяются из плана скоростей (рис. 16.9, б) решением уравнения

$$\bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}.$$

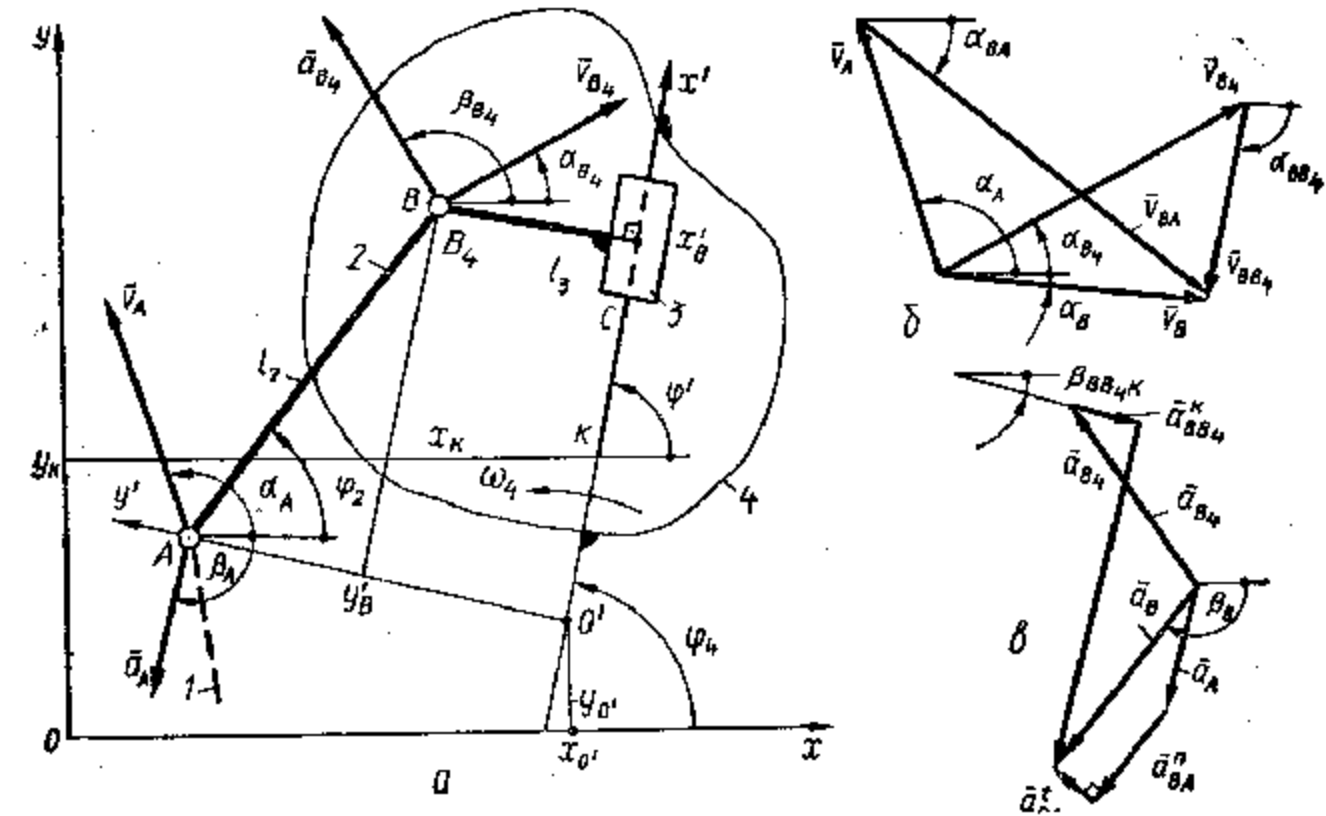


Рис. 16.10. Кинематика звеньев структурной группы второго вида

а параметры линейных и угловых ускорений звеньев из плана ускорения (в) — решением уравнения

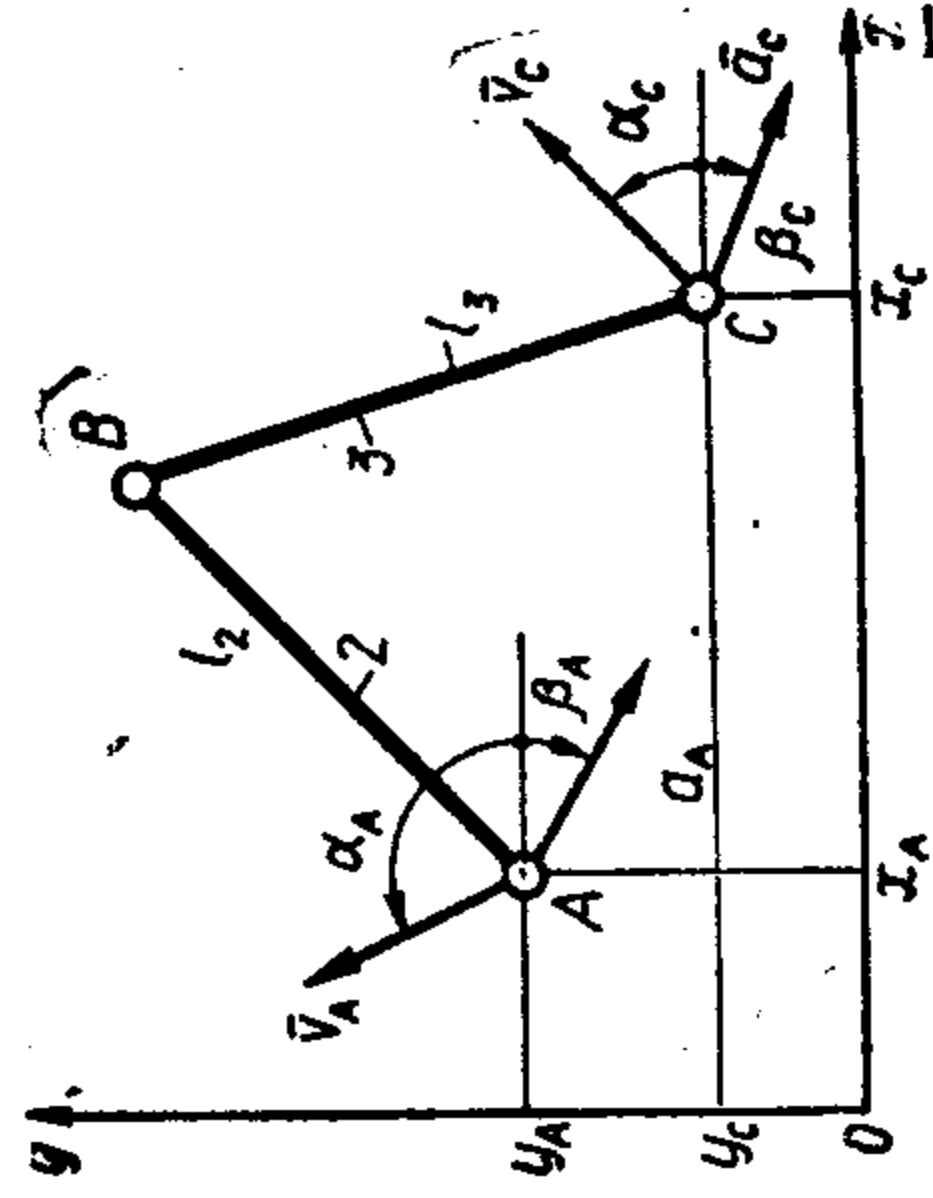
$$\bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t.$$

Независимо от формы и размеров звеньев 2 и 3 алгоритм кинематического расчета структурной группы не изменяется. Он описывается операторной функцией, обозначенной $KNMA1$ (табл. 16.1). Входными параметрами $KNMA1$, по которым определяются выходные параметры функции, будут $x_A, y_A, x_C, y_C, l_2, l_3, v_A, \alpha_A, v_C, \alpha_C, \beta_A, \beta_C, q$ в приведенной последовательности. Нумерация выходных параметров, приведенная в таблице, должна сохраняться в обращении к функции.

Структурная группа второго вида (рис. 16.10, а) присоединяется к кинематической цепи механизма вращательной парой A , для которой известны координаты ее центра (x_A, y_A) , и поступательной парой C , для которой известен угол φ_4 наклона направляющей 4 и координаты одной из ее точек $K(x_K, y_K)$. Условие сборки q определяет вариант присоединения группы к механизму.

Для определения координат центра вращательной пары B воспользуемся вспомогательной системой координат $x'O'y'$, ось

Таблица 16.1. Алгоритм кинематического расчета звеньев структурной группы 2-го класса первого вида



$$1. AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$2. \varphi_{AG} = \arctg((y_C - y_A)/(x_C - x_A))$$

$$3. \varphi = UGL1(y_C, y_A, \varphi_{AC}; \varphi_{CA}) - \pi/2$$

$$4. \rightarrow BAC = \arccos((l_2^2 + AC^2 - l_3^2)/2l_2AC)$$

$$5. \left. \begin{aligned} x'_B &= \text{sign}(\varphi) l_3 \sin \rightarrow BAC; \\ y'_B &= AC - l_3 \cos \rightarrow BAC. \end{aligned} \right\}$$

$$6. \left. \begin{aligned} x_B &= x'_B \cos \varphi' - y'_B \sin \varphi' + x_C; \\ y_B &= x'_B \sin \varphi' + y'_B \cos \varphi' + y_C. \end{aligned} \right\}$$

$$7. UGL2(x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_2)$$

$$8. UGL2(x_C, y_C, x_B, y_B; \varphi_2)$$

$$9. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_2 + \pi/2), & -\cos(\varphi_2 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_2 + \pi/2), & -\sin(\varphi_2 + \pi/2) \end{vmatrix}$$

$$10. C(2) = \begin{vmatrix} v_C \cos \alpha_C - v_A \cos \alpha_A \\ v_C \sin \alpha_C - v_A \sin \alpha_A \end{vmatrix}$$

$$11. СИСТЕМА(2, A(2, 2), C(2)); v_{BA}, v_{BC}$$

$$12. UGL3(\varphi_2, \pi/2, v_{BA}; \alpha_{BA})$$

$$13. UGL3(\varphi_2, \pi/2, v_{BC}; \alpha_{BC})$$

$$14. ОМЕГА(l_2, \varphi_2, v_{BA}, \alpha_{BA}; \omega_2)$$

$$15. ОМЕГА(l_3, \varphi_2, v_{BC}, \alpha_{BC}; \omega_2)$$

$$16. SMVKT(v_A, \alpha_A, v_{BA}, \alpha_{BA}; v_A, \alpha_B)$$

$$17. a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2; a_{BC}^n = \omega_2^2 l_3$$

$$18. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{BA}, & -\cos \alpha_{BC} \\ \sin \alpha_{BA}, & -\sin \alpha_{BC} \end{vmatrix}$$

$$19. C(2) = \begin{vmatrix} a_C \cos \beta_C + a_{BC}^n \cos(\varphi_2 + \pi) - \\ -a_A \cos \beta_A - a_{BA}^n \cos(\varphi_2 + \pi); \\ a_C \sin \beta_C + a_{BC}^n \sin(\varphi_2 + \pi) - \\ -a_A \sin \beta_A - a_{BA}^n \sin(\varphi_2 + \pi) \end{vmatrix}$$

$$20. СИСТЕМА(2, A(2, 2), C(2)); a_{BA}^t, a_{BC}^t$$

$$21. UGL4(\alpha_{BA}, \pi, a_{BA}^t; \beta_{BA}^t)$$

$$22. UGL4(\alpha_{BC}, \pi, a_{BC}^t; \beta_{BC}^t)$$

$$23. ОМЕГА(l_2, \varphi_2, a_{BA}^t, \beta_{BA}^t; \varepsilon_2)$$

$$24. ОМЕГА(l_3; \varphi_2, a_{BC}^t, \beta_{BC}^t; \varepsilon_2)$$

$$25. SMVKT(a_A, \beta_A, a_{BA}^t, \varphi_2 + \pi; a, \beta)$$

$$26. SMVKT(a, \beta, a_{BA}^t, \beta_{BA}^t; a_B, \beta_B)$$

$$KNMAl(x_A, y_A, x_C, y_C, l_2, v_A, \alpha_A, v_C, \alpha_C, a_A, \beta_A, a_C, \beta_C, \varphi; x_B, y_B, \varphi_2, \varphi_2, v_{BA}, \alpha_{BA}, v_{BC}, \alpha_{BC}, \omega_2, \omega_2,$$

$$\omega_2, a_{BA}^n, a_{BC}^n, a_{BA}^t, \beta_{BA}^t, a_{BC}^t, \beta_{BC}^t, a_B, \beta_B, \varepsilon_2, \varepsilon_2)$$

абсцисс которой направим вдоль оси направляющей 4, а ось ординат — таким образом, чтобы она проходила через точку A . Координаты точки O' — начала вспомогательной координатной системы — определим как точку пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых, угловые коэффициенты которых k_1 и k_2 , как известно, связаны зависимостью $k_1 k_2 = -1$. Для оси направляющей из исходных данных имеем $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_4$, тогда $k_2 = -1/\operatorname{tg} \varphi_4$. Решив совместно уравнения прямых с указанными угловыми коэффициентами, получим координаты точки O'

$$x_{O'} = ((x_A + k_1^2 x_k - k_1 (y_k - y_A)) / (k_1^2 + 1));$$

$$y_{O'} = ((y_k + k_1^2 y_A) - k_1 (x_k - x_A)) / (k_1^2 + 1).$$

Угол поворота осей координатной системы $x'O'y'$ относительно осей исходной системы xOy определим из предположения, что точка A всегда находится на положительном направлении оси ординат $O'y'$:

$$\varphi' = \varphi_{O'y'} - \pi/2.$$

Угол $\varphi_{O'y'}$ найдем с помощью операторной функции

$$UGL1(y_{O'}, y_A, (\varphi_4 - \pi/2), \varphi_{O'y'}).$$

Расстояние между точками A и O' будет

$$AO' = \sqrt{(x_A - x_{O'})^2 + (y_A - y_{O'})^2}.$$

Координаты точки B в системе координат $x'O'y'$:

$$y_B = l_3 \sin(\theta + (\varphi' - \varphi_4));$$

$$x_B = ql_2 \sin \angle BAO' = ql_2 \sin(\arccos((AO' - y_B)/l_2 + (\varphi' - \varphi_4))),$$

где q — условие сборки звеньев группы.

Координаты точки B в исходной координатной системе будут

$$\left. \begin{aligned} x_B &= x_B \cos \varphi' - y_B \sin \varphi' + x_{O'}; \\ y_B &= x_B \sin \varphi' + y_B \cos \varphi' + y_{O'}, \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

откуда направляющий угол звена 2 определим с помощью операторной функции

$$UGL2(x_A, y_A, x_B, y_B, \varphi_2). \quad (16.18)$$

Если на звене 4 с направляющей выбрать точку B_4 (b), совпадающую с центром средней вращательной пары, то параметры линейных и угловых скоростей определяются решением уравнения

$$\bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_{B_4} + \bar{v}_{BB_4},$$

а параметры линейных и угловых ускорений из плана ускорений (θ) — уравнения

$$\bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{BB_4}^k + \bar{a}_{BB_4}^r.$$

Алгоритм кинематического расчета группы второго вида описывается операторной функцией $KNMA2$ (табл.16.2), входными

параметрами которой являются $x_A, y_A, x_K, y_K, \varphi_4, l_2, l_3, v_A, \alpha_A, v_{B_4}, \alpha_{B_4}, \omega_4, a_A, \beta_A, a_{B_4}, \beta_{B_4}, \varepsilon_4, q$.

В структурной группе четвертого вида (рис. 16.11, а) координаты точки B можно определить как для точки пересечения вспомогательных прямых, параллельных осям направляющих движения звеньев 2 и 3. Если положения направляющих на плоскости задать координатами точек A и C (x_A, y_A, x_C, y_C), через которые проходят оси направляющих, и углами φ_1 и φ_4 , которые они образуют с осью

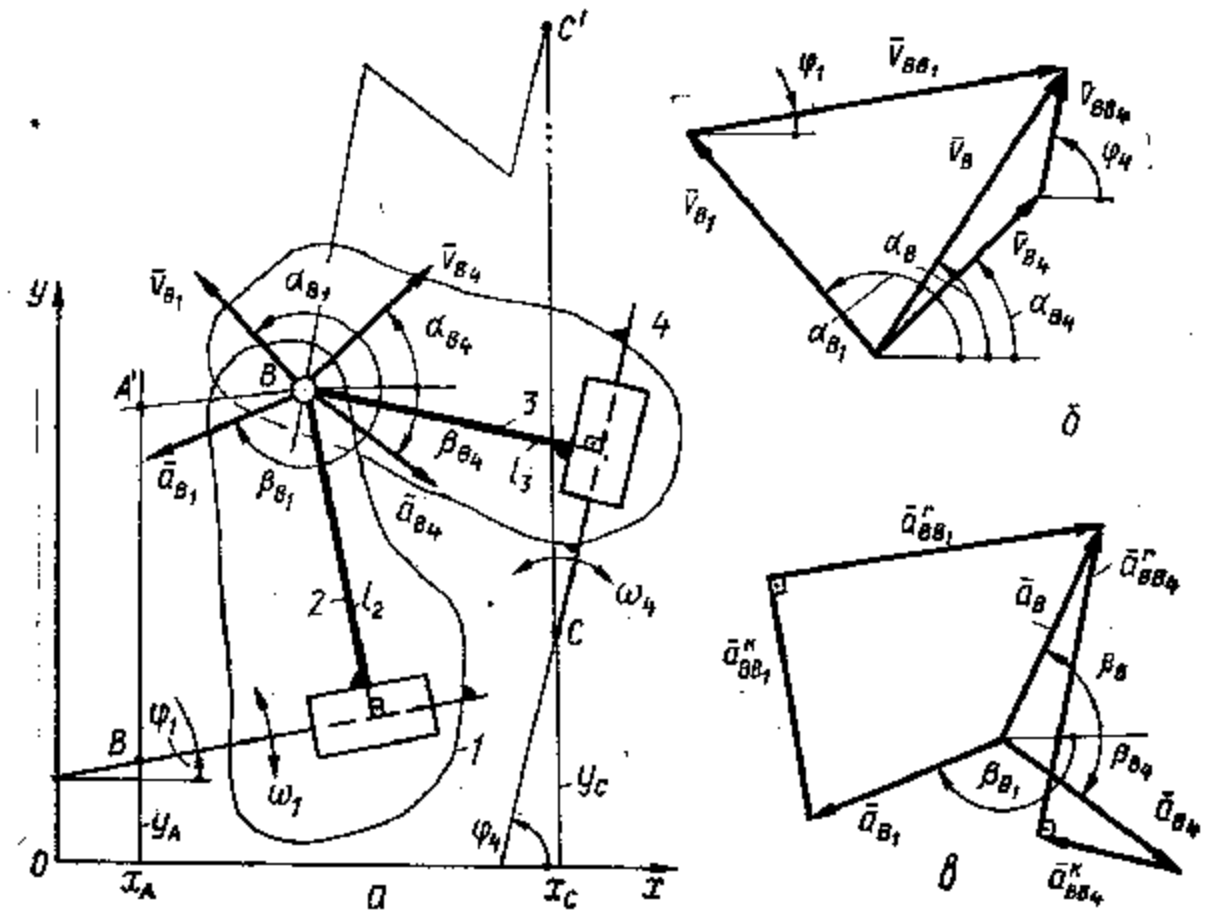


Рис. 16.11. Кинематика звеньев структурной группы четвертого вида

абсцисс координатной системы, то при угловых коэффициентах этих прямых, проходящих через точки A' и C' ,

$$\left. \begin{aligned} y - y_{A'} &= k_1(x - x_{A'}); \\ y - y_{C'} &= k_2(x - x_{C'}). \end{aligned} \right\} \quad (16.19)$$

Из геометрических соотношений координаты точек A' и C'

$$\left. \begin{aligned} x_{A'} &= x_A; & y_{A'} &= y_A + l_2/\cos \varphi_1; \\ x_{C'} &= x_C; & y_{C'} &= y_C + l_3/\cos \varphi_4. \end{aligned} \right\}$$

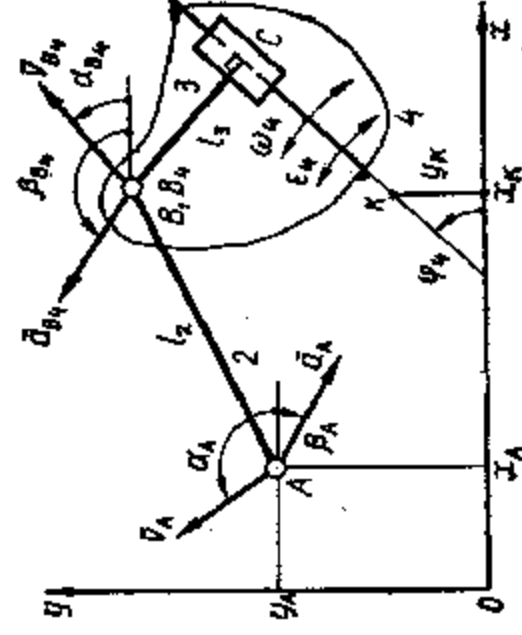
После подстановки этих значений в уравнения (16.19), получим

$$\left. \begin{aligned} y - k_1 x &= y_A + l_2/\cos \varphi_1 - k_1 x_A; \\ y - k_2 x &= y_C + l_3/\cos \varphi_4 - k_2 x_C. \end{aligned} \right\} \quad (16.20)$$

Координаты точки B определяются решением системы уравнений (16.20), реализуемой операторной функцией

$$SISTEMA(2, A(2, 2), C(2); y_B, x_B).$$

Таблица 16.2. Алгоритм кинематического расчета звеньев структурной группы 2-го класса второго вида



1. $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_A$.

2.
$$\left. \begin{aligned} x_{O'} &= (x_A + k_1^2 x_K) - k_1 (y_K - y_A) / (k_1^2 + 1); \\ y_{O'} &= (y_K + k_1^2 y_A) - k_1 (x_K - x_A) / (k_1^2 + 1). \end{aligned} \right\}$$

3. $\varphi' = UGL1 (y_{O'}, y_A, (\varphi_A - \pi/2); \varphi_{O'y}) - \pi/2$.

4. $AO' = \sqrt{(x_A - x_{O'})^2 + (y_A - y_{O'})^2}$.

5. $y'_B = l_3 \sin (\varphi' - \varphi_K)$.

11. СИСТЕМА (2, A (2, 2), C (2); $v_{BA}, v_{BB}, \alpha_{BA}$).

12. UGL3 ($\varphi_2, \pi/2, v_{BA}; \alpha_{BA}$).

13. UGL4 ($\varphi_4, \pi, v_{BB}; \alpha_{BB}$).

14. OMEGA ($l_3, \varphi_2, v_{BA}, \alpha_{BA}; \omega_2$).

15. SMVKT ($v_{B_1}, \alpha_{B_1}, v_{BB_1}, \alpha_{BB_1}; v_B, \alpha_B$).

16. $a_{BA}^r = \omega_2^2 l_3$.

17. $a_{BB}^k = 2 | \omega_4 | v_{BB_1}$.

18. UGL3 ($\alpha_{BB_1}, \pi/2, \omega_4; \beta_{BB_1}$).

19. A (2, 2) =
$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_{BA} & - \cos \alpha_{BB_1} \\ \sin \alpha_{BA} & - \sin \alpha_{BB_1} \end{vmatrix}$$
.

6. $x_B = ql_3 \sin (\arccos ((AO' - y'_B)/l_2) + (\varphi' - \varphi_K))$.

7.
$$\left. \begin{aligned} x_B &= x'_B \cos \varphi' - y'_B \sin \varphi' + x_C; \\ y_B &= x'_B \sin \varphi' + y'_B \cos \varphi' + y_C. \end{aligned} \right\}$$

8. UGL2 ($x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_2$).

9. A (2, 2) =
$$\begin{vmatrix} \cos (\varphi_2 + \pi) & - \cos (\varphi_4 + \pi/2) \\ \sin (\varphi_2 + \pi) & - \sin (\varphi_4 + \pi/2) \end{vmatrix}$$
.

10. C (2) =
$$\begin{vmatrix} v_B \cos \alpha_{B_1} - v_A \cos \alpha_A \\ v_B \sin \alpha_{B_1} - v_A \sin \alpha_A \end{vmatrix}$$
.

20. C (2) =
$$\begin{vmatrix} a_{B_1} \cos \alpha_{B_1} + a_{BB_1}^k \cos \beta_{BB_1} - \\ - a_A \cos \beta_A - a_{BA}^r \cos (\varphi_2 + \pi); \\ a_{B_1} \sin \alpha_{B_1} + a_{BB_1}^k \sin \beta_{BB_1} - \\ - a_A \sin \beta_A - a_{BA}^r \sin (\varphi_2 + \pi). \end{vmatrix}$$

21. СИСТЕМА (2, A (2, 2), C (2); a'_{BA}, a'_{BB_1}).

22. UGL4 ($\alpha_{BA}, \pi, a'_{BA}; \beta_{BA}$).

23. UGL4 ($\alpha_{BB_1}, \pi, a'_{BB_1}; \beta_{BB_1}$).

24. SMVKT ($a_{B_1}, \beta_{B_1}, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1}^k; a, \beta$).

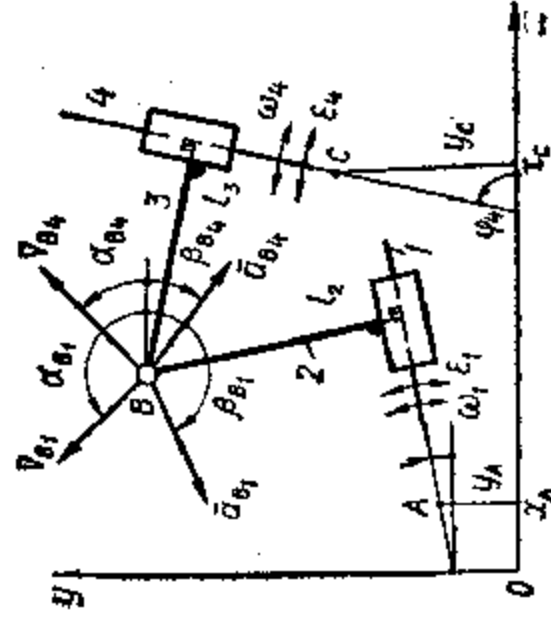
25. SMVKT ($a, \beta, a'_{BB_1}, \beta_{BB_1}; a_B, \beta_B$).

26. OMEGA ($l_2, \varphi_2, a'_{BA}, \beta_{BA}; \varepsilon_2$).

KNMA2 ($x_A, y_A, x_B, y_B, \varphi_A, l_2, l_3, v_A, \alpha_A, v_B, \alpha_B, \omega_4, a_A, \beta_A, a_{B_1}, \beta_{B_1}, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1}^k, \varphi_2, v_{BA}, \alpha_{BA}, v_{BB_1}, \alpha_{BB_1}, v_B, \alpha_B$,

$\alpha_B, \omega_2, a_{BA}^r, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1}^k, \beta_{BA}, a'_{BA}, \beta_{BA}, a'_{BB_1}, \beta_{BB_1}, a_B, \beta_B, \varepsilon_2$).

Таблица 16.9. Алгоритм винематического расчета звеньев структурной группы 2-го класса четвертого вида



$$1. A(2, 2) = \begin{vmatrix} 1, & -\operatorname{tg} \varphi_1 \\ 1, & -\operatorname{tg} \varphi_4 \end{vmatrix}.$$

$$2. C(2) = \begin{vmatrix} y_A + l_2 / \cos \varphi_1 - x_A \operatorname{tg} \varphi_1 \\ y_C + l_3 / \cos \varphi_4 - x_C \operatorname{tg} \varphi_4 \end{vmatrix}.$$

3. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2); x_B, y_B).

$$4. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1, & \cos \varphi_4 \\ \sin \varphi_1, & \sin \varphi_4 \end{vmatrix}.$$

9. SMVKT ($v_{B_1}, \alpha_{B_1}, v_{BB_1}, \alpha_{BB_1}; v_B, \alpha_B$).

$$10. a_{BB_1}^k = 2 |\omega_1| v_{BB_1}.$$

$$11. a_{BB_1}^k = 2 |\omega_4| v_{BB_1}.$$

12. UGL3 ($\alpha_{BB_1}, \pi/2, \omega_1; \beta_{BB_1, k}$).

13. UGL3 ($\alpha_{BB_1}, \pi/2, \omega_4; \beta_{BB_1, k}$).

$$14. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{BB_1}, & -\cos \alpha_{BB_1} \\ \sin \alpha_{BB_1}, & -\sin \alpha_{BB_1} \end{vmatrix}.$$

$$15. C(2) = \begin{vmatrix} a_{B_1} \cos \beta_{B_1} + a_{BB_1}^k \cos \beta_{BB_1, k} & - \\ -a_{B_1} \cos \beta_{B_1} - a_{BB_1}^k \cos \beta_{BB_1, k} & \\ a_{B_1} \sin \beta_{B_1} + a_{BB_1}^k \sin \beta_{BB_1, k} & - \\ -a_{B_1} \sin \beta_{B_1} - a_{BB_1}^k \sin \beta_{BB_1, k} & \end{vmatrix}.$$

$$5. C(2) = \begin{vmatrix} v_{B_4} \cos \alpha_{B_4} - v_{B_1} \cos \alpha_{B_1} \\ v_{B_4} \sin \alpha_{B_4} - v_{B_1} \sin \alpha_{B_1} \end{vmatrix}.$$

6. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2); v_{BB_1}, v_{BB_1}).

7. UGL4 ($\varphi_1, \pi, v_{BB_1}; \alpha_{BB_1}$).

8. UGL4 ($\varphi_4, \pi, v_{BB_1}; \alpha_{BB_1}$).

16. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2); $a_{BB_1}^k, a_{BB_1}^k$).

17. UGL4 ($\alpha_{BB_1}, \pi, a_{BB_1}^k; \beta_{BB_1, k}$).

18. UGL4 ($\alpha_{BB_1}, \pi, a_{BB_1}^k; \beta_{BB_1, k}$).

19. SMVKT ($a_{B_1}, \beta_{B_1}, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1, k}; a, \beta$).

20. SMVKT ($a, \beta, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1, k}; a_B, \beta_B$).

KNMMA4 ($x_A, y_A, \varphi_1, x_C, y_C, \varphi_4, v_{B_1}, \alpha_{B_1}, \omega_1, v_{B_4}, \alpha_{B_4}, \omega_4, \beta_{B_1}, \beta_{B_4}, l_2, l_3; x_B, y_B, v_{BB_1}, \alpha_{BB_1}, v_{BB_1}, \alpha_{BB_1}$,

$v_B, \alpha_B, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1, k}, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1, k}, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1, k}, a_{BB_1}^k, \beta_{BB_1, k}; a_B, \beta_B$).

Параметры линейных и угловых скоростей звеньев определяются из плана скоростей (б) решением уравнения

$$\bar{v}_B + \bar{v}_{BB_1} = \bar{v}_A + \bar{v}_{AA_1},$$

а параметры линейных и угловых ускорений из плана ускорений — уравнением

$$\bar{a}_B + \bar{a}_{BB_1}^k + \bar{a}_{BB_1}^l = \bar{a}_A + \bar{a}_{AA_1}^k + \bar{a}_{AA_1}^l.$$

Операторную функцию кинематического расчета структурной группы четвертого вида, алгоритм которой приведен в табл. 16.3, обозначим $KНМА4$; входные параметры ее — $x_A, y_A, \varphi_1, x_C, y_C, \varphi_4, v_B, \alpha_B, \omega_1, v_A, \alpha_A, \omega_4, a_B, \beta_B, \epsilon_1, a_A, \beta_A, \epsilon_4, l_2, l_3$.

16.7. Алгоритмы кинематического расчета структурных групп с внутренней поступательной парой

Для группы третьего вида (рис. 16.12, а) будут заданы координаты центров вращательных пар A и C (x_A, y_A, x_C, y_C), линейные и угловые размеры звеньев 2 и 3, а также условие сборки звеньев группы. Для определения линейных и угловых координат звеньев используют точку B' пересечения двух прямых, одна из которых проходит

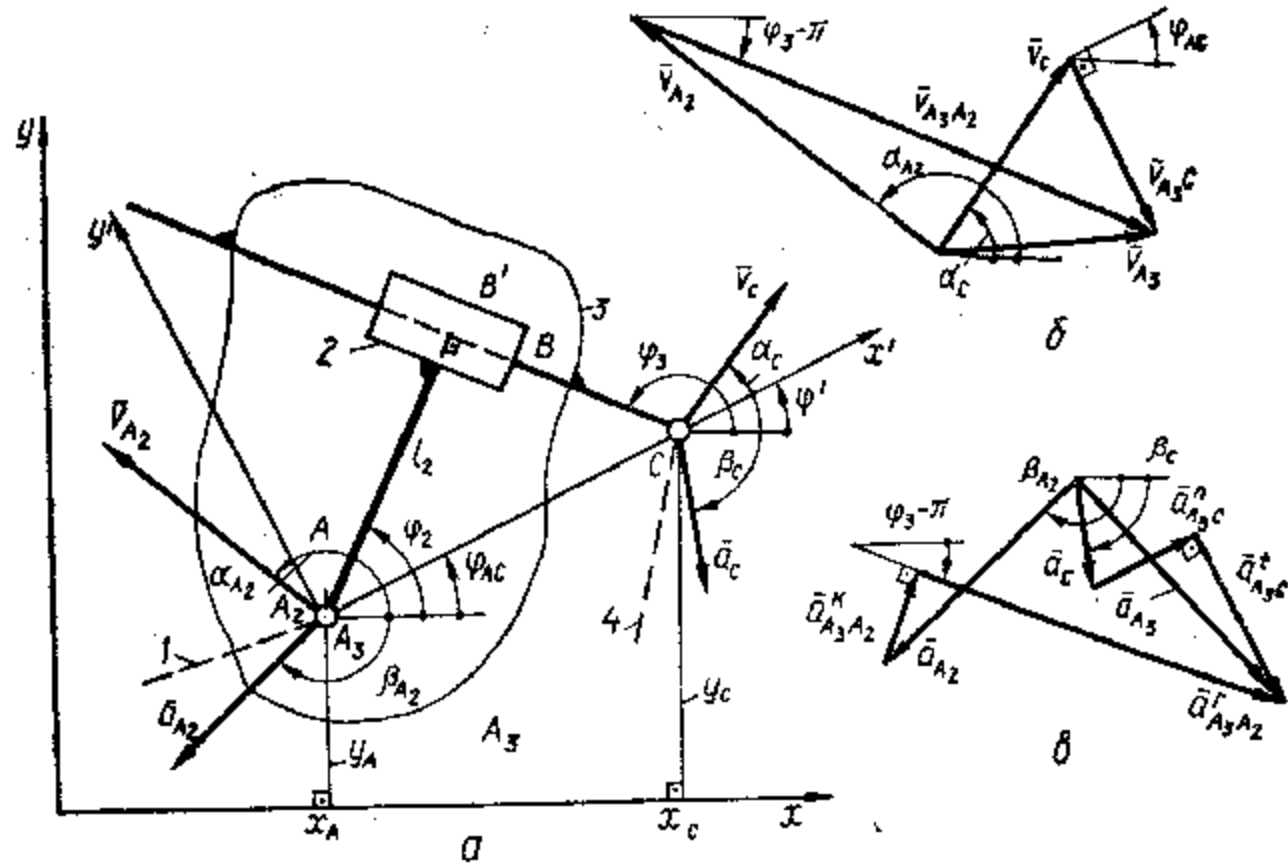


Рис. 16.12. Кинематика звеньев структурной группы третьего вида

параллельно направляющей через центр присоединительной кинематической пары звена, имеющего направляющую, а вторая — через центр присоединительной пары другого звена перпендикулярно направляющей. Воспользуемся вспомогательной системой координат $x'Ay'$, начало которой поместим в точку A , а ось абсцисс направим по линии, соединяющей центры A и C так, чтобы точка C всегда лежала на ее положительном направлении. Угол φ' поворота

координатных осей $x'Ay'$ определим с помощью операторной функции

$$UGL1(y_A, y_C, \varphi_{AC}; \varphi'),$$

в которой угол $\varphi_{AC} = \arctg((y_C - y_A)/(x_C - x_A))$.

Во вспомогательной системе определим координаты точки звена 2, например точки B' пересечения перпендикуляра AB' из точки

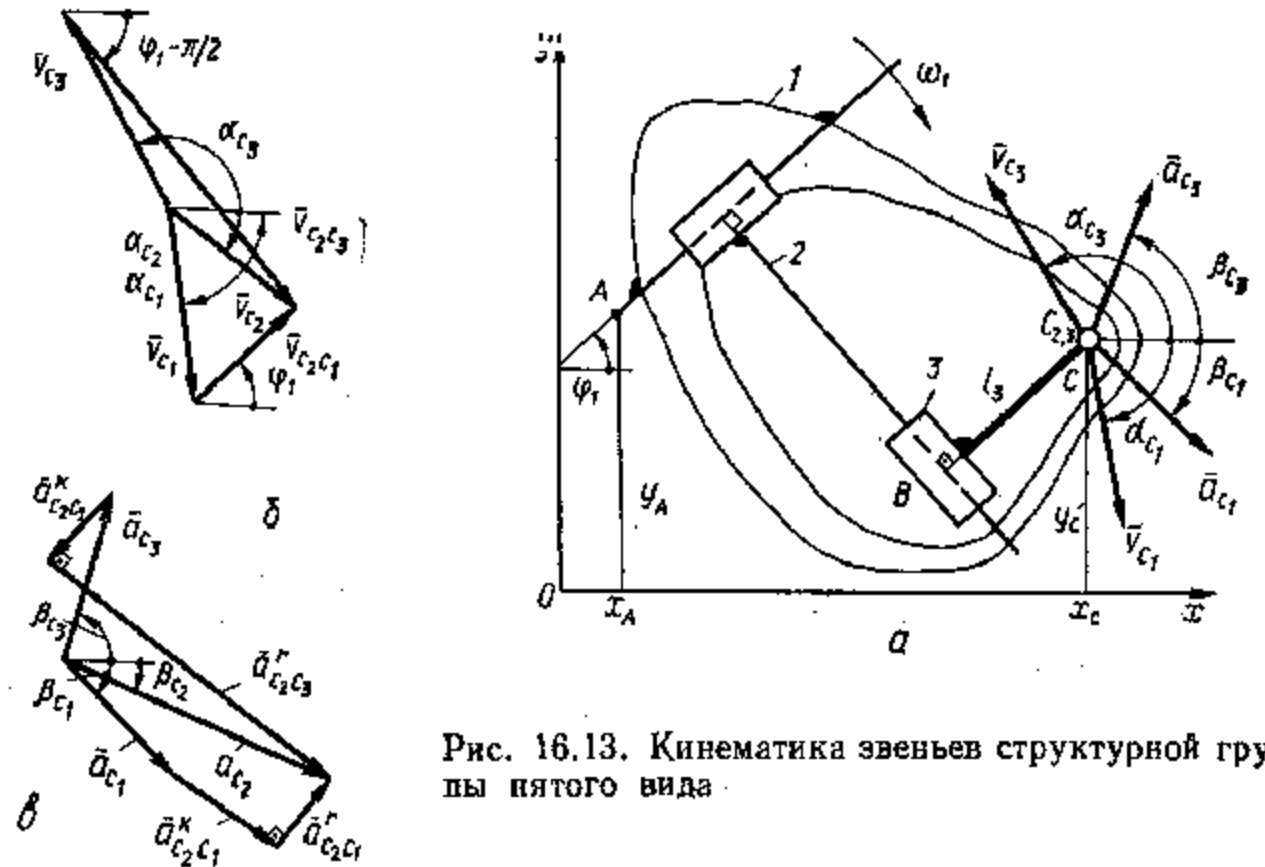


Рис. 16.13. Кинематика звеньев структурной группы пятого вида

А на линию, параллельную направляющей звена 3. Из $\triangle AB'C$ получим

$$\Rightarrow B'CA = \arcsin(l_2/l_{AC});$$

$$\Rightarrow B'AC = \pi/2 - \arcsin(l_2/l_{AC}),$$

где

$$l_{AC} = \sqrt{(y_A - y_C)^2 + (x_A - x_C)^2}.$$

Тогда

$$x_{B'} = l_2 \cos \Rightarrow BAC;$$

$$y_{B'} = l_2 \sin \Rightarrow BAC;$$

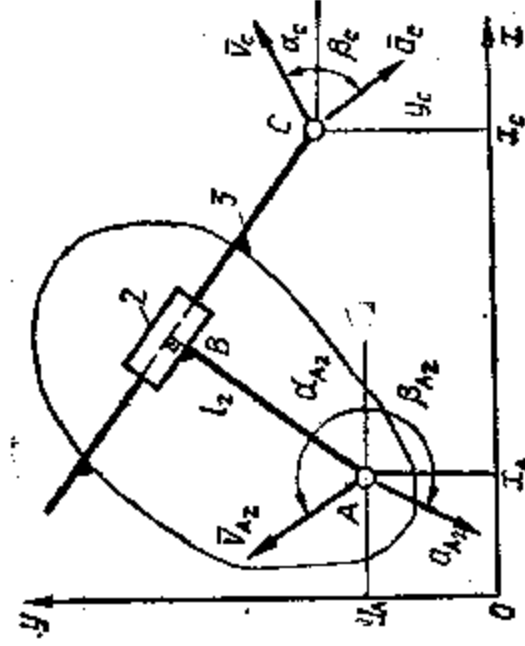
координаты точки B в исходной системе координат будут

$$\left. \begin{aligned} x_B &= x_{B'} \cos \varphi' - y_{B'} \sin \varphi' + x_A; \\ y_B &= y_{B'} \sin \varphi' + x_{B'} \cos \varphi' + y_A. \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

Направляющий угол φ_3 звена 3 определим с помощью операторной функции

$$UGL2(x_C, y_C, x_B, y_B; \varphi_3).$$

Если на звене 3 выбрать точку A_3 , геометрически совпадающей с центром вращательной пары A , то параметры линейных и угловых скоростей звеньев этой группы определяются из решения вектор-



1. $\varphi = \arctg((y_C - y_A)/(x_C - x_A))$.
2. UGL1 ($y_A, y_C, \varphi; \varphi'$).
3. $AC = \sqrt{(y_A - y_C)^2 + (x_A - x_C)^2}$.
4. $\sphericalangle BAC = \pi/2 - \arcsin(l_2/AC)$.
5. $x_B = l_2 \cos \sphericalangle BAC; y_B = ql_2 \sin \sphericalangle BAC$.
6.
$$\left. \begin{aligned} x_B &= x'_B \cos \varphi' - y'_B \sin \varphi' + x_A; \\ y_B &= x'_B \sin \varphi' + y'_B \cos \varphi' + y_A. \end{aligned} \right\}$$

12. UGL3 ($\varphi', \pi/2, v_{A_2C}; \alpha_{A_2C}$).
13. OMEGA ($AC, \varphi', v_{A_2C}; \alpha_{A_2C}; \omega_3$).
14. SMVKT ($v_C, \alpha_C, v_{A_2C}; \alpha_{A_2C}; v_A, \alpha_A$).
15. $d_{A_2A_3}^k = 2 |\omega_3| v_{A_2A_3}; d_{A_2C}^n = \omega_3^2 AC$.

16. UGL3 ($\alpha_{A_2A_3}, \pi/2, \omega_3; \beta_{A_2A_3}$).

$$17. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{A_2A_3} & -\cos((\varphi' + \pi) + \pi/2) \\ \sin \alpha_{A_2A_3} & -\sin((\varphi' + \pi) + \pi/2) \end{vmatrix}$$

$$18. C(2) = \begin{vmatrix} \alpha_C \cos \beta_C + d_{A_2C}^n \cos \varphi' - \\ - d_{A_2C}^k \cos \beta_{A_2A_3k} - \alpha_{A_2} \cos \beta_{A_2}; \\ \alpha_C \sin \beta_C + d_{A_2C}^n \sin \varphi' - \\ - d_{A_2A_3}^k \sin \beta_{A_2A_3k} - \alpha_2 \sin \beta_{A_2} \end{vmatrix}$$

7. UGL2 ($x_C, y_C, x_B, y_B; \varphi_3$).

$$8. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_3 & -\cos((\varphi' + \pi) + \pi/2) \\ \sin \varphi_3 & -\sin((\varphi' + \pi) + \pi/2) \end{vmatrix}$$

$$9. C(2) = \begin{vmatrix} v_C \cos \alpha_C - v_{A_2} \cos \alpha_{A_2} \\ v_C \sin \alpha_C - v_{A_2} \sin \alpha_{A_2} \end{vmatrix}$$

10. STSYSTEMA (2, A(2, 2), C(2); $v_{A_2A_3}, v_{A_2C}$).

11. UGL4 ($\varphi_3, \pi, v_{A_2A_3}; v_{A_2A_3}$).

19. SISTEMA (2, A(2, 2), C(2); $d_{A_2A_3}^k, d_{A_2C}^n$).

20. UGL4 ($\alpha_{A_2A_3}, \pi, d_{A_2A_3}^k; \beta_{A_2A_3}$).

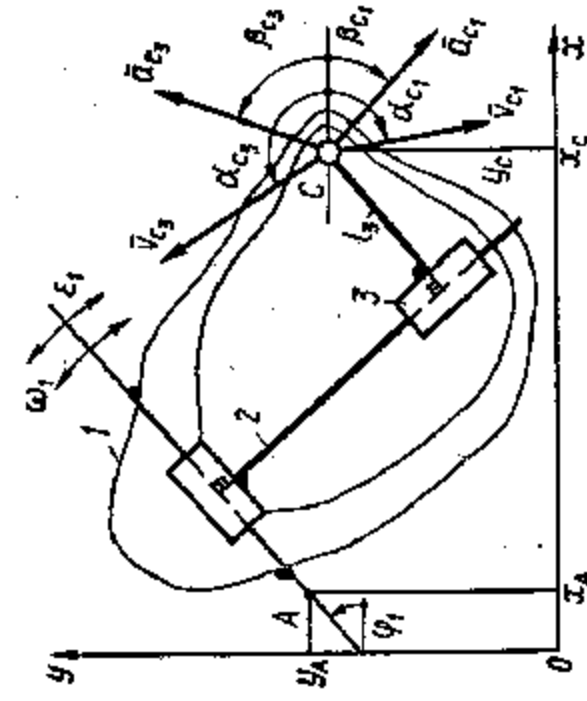
21. UGL4 ($\alpha_{A_2C}, \pi, d_{A_2C}^n; \beta_{A_2C}$).

22. SMVKT ($\alpha_{A_2}, \beta_{A_2}, d_{A_2A_3}^k, \beta_{A_2A_3}; \alpha, \beta$).

23. SMVKT ($\alpha, \beta, d_{A_2A_3}^k, \beta_{A_2A_3}; \alpha_{A_2}, \beta_{A_2}$).

24. OMLGA ($AC, \varphi', d_{A_2C}^n, \beta_{A_2C}; \varepsilon_3$).

KNMA3 ($x_A, y_A, x_C, y_C, l_2, v_{A_2}, \alpha_{A_2}, v_{\theta}, \alpha_{\theta}, \alpha_{A_2}, \beta_{A_2}, \alpha_{\theta}, \beta_{\theta}, \varphi; x_B, y_B, \varphi_3, v_{A_2A_3}, \alpha_{A_2A_3}, v_{A_2C}, \alpha_{A_2C}, v_{A_2}, \omega_3, \alpha_{A_2A_3}, \beta_{A_2A_3}, d_{A_2A_3}^k, \beta_{A_2A_3}, d_{A_2C}^n, \beta_{A_2C}, \alpha_{A_2}, \beta_{A_2}, \varepsilon_3$).



1. $A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \pi/2), & -\cos \varphi_1 \\ \sin(\varphi_1 + \pi/2), & -\sin \varphi_1 \end{vmatrix}$.
2. $C(2) = \begin{vmatrix} v_{C_1} \cos \alpha_{C_1} - v_{C_2} \cos \alpha_{C_2} \\ v_{C_1} \sin \alpha_{C_1} - v_{C_2} \sin \alpha_{C_2} \end{vmatrix}$.
3. **SISTEMA** (2, A(2, 2), C(2)); v_{C_2}, v_{C_1} .
4. **UGLA** ($\varphi_1 + \pi/2, \pi, v_{C_2}; \alpha_{C_2}$).
5. **UGLA** ($\varphi_1, \pi, v_{C_1}; \alpha_{C_1}$).
6. **SMVKT** ($v_{C_1}, \alpha_{C_1}, v_{C_2}, \alpha_{C_2}; v_{C_2}, \alpha_{C_2}$).

KNMA5 ($\varphi_1, l_2, \omega_1, v_{C_2}, \alpha_{C_2}, v_{C_1}, \alpha_{C_1}, \beta_{C_2}, \beta_{C_1}; v_{C_2}, \alpha_{C_2}, v_{C_1}, \alpha_{C_1}, \beta_{C_2}, \beta_{C_1}$).

$a_{C_2}, \beta_{C_2}, a_{C_1}, \beta_{C_1}$.

7. $a_{C_2, C_1}^k = 2|\omega_1|v_{C_2, C_1}$.
3. **UGL3** ($\alpha_{C_2, C_1}, \pi/2, \omega_1; \beta_{C_2, C_1, k}$).
9. $a_{C_2, C_1}^k = 2|\omega_1|v_{C_2, C_1}$.
10. **UGL3** ($\alpha_{C_2, C_1}, \pi/2, \omega_1; \beta_{C_2, C_1, k}$).
11. $A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{C_2, C_1}, & -\cos \alpha_{C_2, C_1} \\ \sin \alpha_{C_2, C_1}, & -\sin \alpha_{C_2, C_1} \end{vmatrix}$.
12. $C(2) = \begin{vmatrix} a_{C_2} \cos \beta_{C_2} + a_{C_2, C_1}^k \cos \beta_{C_2, C_1, k} - \\ - a_{C_2, C_1}^k \cos \beta_{C_2, C_1, k} - a_{C_1} \cos \beta_{C_1}; \\ a_{C_2} \sin \beta_{C_2} + a_{C_2, C_1}^k \sin \beta_{C_2, C_1, k} - \\ - a_{C_2, C_1}^k \sin \beta_{C_2, C_1, k} - a_{C_1} \sin \beta_{C_1} \end{vmatrix}$.
13. **SISTEMA** (2, A(2, 2), C(2)); $a_{C_2, C_1}^k, a_{C_2, C_1}^k$.
14. **UGLA** ($\alpha_{C_2, C_1}, \pi, a_{C_2, C_1}^k; \beta_{C_2, C_1, k}$).
15. **UGLA** ($\alpha_{C_2, C_1}, \pi, a_{C_2, C_1}^k; \beta_{C_2, C_1, k}$).
16. **SMVKT** ($a_{C_1}, \beta_{C_1}, a_{C_2, C_1}^k, \beta_{C_2, C_1, k}; a, \beta$).
17. **SMVKT** ($a, \beta, a_{C_2, C_1}^k, \beta_{C_2, C_1, k}; a_{C_2, C_1}^k, \beta_{C_2, C_1, k}$).

ного уравнения (б)

$$\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{A_2} + \bar{v}_{A_2 A_1} = \bar{v}_C + \bar{v}_{A_2 C}, \quad (16.22)$$

а параметры линейных и угловых ускорений — из решения векторного уравнения (в)

$$\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}_{A_2 A_1}^k + \bar{a}_{A_2 A_1}^t = \bar{a}_C + \bar{a}_{A_2 C}^n + \bar{a}_{A_2 C}^t. \quad (16.23)$$

Решение уравнений (16.22) и (16.23) выполняется с использованием алгоритмов, полученных ранее для звеньев, образующих вращательную кинематическую пару. Операторную функцию кинематического расчета структурной группы третьего вида, алгоритм которой приведен в табл. 16.4, обозначим **KNMA3**, входные параметры ее — $x_A, y_A, x_C, y_C, l_2, v_A, \alpha_A, v_C, \alpha_C, a_A, \beta_A, a_C, \beta_C$.

В структурной группе пятого вида (рис. 16.13, а) исходные данные по геометрии звеньев группы, координаты присоединительных элементов полностью определяют положение звеньев на координатной плоскости. Параметры линейных и угловых скоростей и ускорений определяют с помощью вспомогательных точек C_2 и C_3 , принадлежащих соответственно звеньям 2 и 3 и совпадающих с центром вращательной пары C , решением уравнений

$$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_{C_2} + \bar{v}_{C_2 C} = \bar{v}_{C_1} + \bar{v}_{C_2 C_1};$$

$$\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_2} + \bar{a}_{C_2 C}^k + \bar{a}_{C_2 C}^t = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{C_2 C_1}^k + \bar{a}_{C_2 C_1}^t.$$

Операторную функцию, описывающую алгоритм кинематического расчета группы пятого вида (табл. 16.5), обозначим **KNMA5**, ее входные параметры — $\varphi_1, l_2, \omega_1, v_{C_1}, \alpha_{C_1}, v_{C_2}, \alpha_{C_2}, a_{C_2}, \beta_{C_2}, a_{C_1}, \beta_{C_1}$.

16.8. Структура алгоритмов кинематического исследования механизмов

Так как любой механизм может быть получен последовательным присоединением к механизму 1-го класса структурных групп звеньев, то алгоритм кинематического расчета механизма тоже может быть представлен как последовательность операторных функций кинематического расчета структурных групп и зависимостей для определения их входных параметров. Разберем пример составления алгоритма кинематического расчета механизма, схема которого приведена на рис. 16.14. Координаты и кинематические характеристики центра вращательной пары A , которая образована входным звеном 1 и присоединенным к нему звеном 2, определяются по условиям: $x_A = l_1 \cos \varphi_1, y_A = l_1 \sin \varphi_1, v_A = |\omega_1| l_1, \alpha_A = \dot{\varphi}_1 - \pi/2, a_A = \omega_1^2 l_1, \beta_A = \varphi_1 - \pi$.

Линейные и угловые координаты звеньев 2 и 3, их характерных точек и кинематические параметры этих звеньев определим через операторную функцию **KNMA1** ($x_A, y_A, l_{OD}, 0, l_2, l_{BD}, v_A, \alpha_A, 0, 0, a_A, \beta_A, 0, 0, 1; x_B, y_B, \varphi_2, \varphi_3, v_{BA}, \alpha_{BA}, v_{BC}, \alpha_{BC}, v_B, \alpha_B, \omega_2, \omega_3, a_{BA}^n, a_{BD}^n, a_{BA}^t, \beta_{BA}, a_{BD}^t, \beta_{BD}, a_B, \beta_B, \varepsilon_2, \varepsilon_3$).

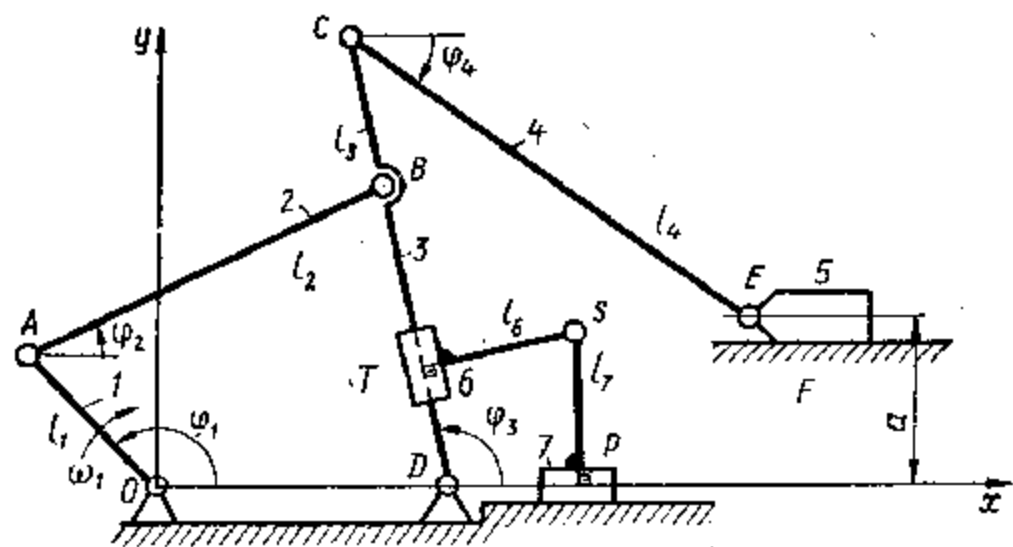


Рис. 16.14. Составление алгоритма кинематического расчета

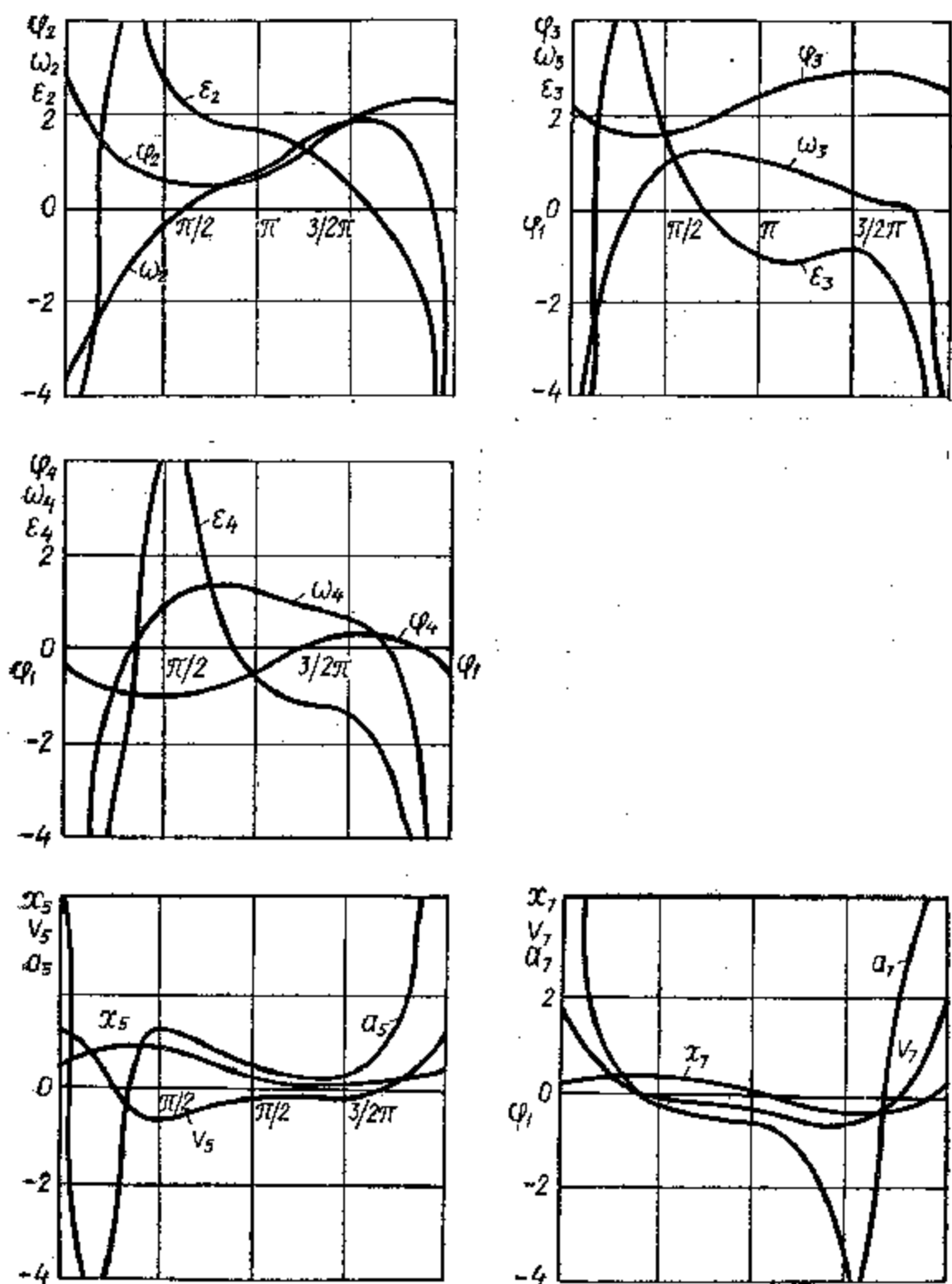


Рис. 16.15. Законы движения звеньев восьмизвенного механизма

Для кинематического исследования групп второго (звенья 4 и 5) и четвертого (звенья 6 и 7) видов определим кинематические параметры, необходимые для обращения к операторным функциям $KNMA2$ и $KNMA4$:

$$x_C = l_{DC} \cos \varphi_3 + l_{OD}; \quad y_C = l_{DC} \sin \varphi_3; \quad v_C = |\omega_3| \cdot l_{DC};$$

$$UGL3(\varphi_3, \pi/2, \omega_3; \alpha_C); \quad a_C = l_{DC} \sqrt{\omega_3^4 + \epsilon_3^2}; \quad UGL3(\varphi_3, \pi - \arctg(|\epsilon_3|/\omega_3^2), \epsilon_3; \beta_G).$$

Координаты и законы движения звеньев 4, 5 и 6, 7 определим через соответствующие операторные функции:

$$KNMA2(x_C, y_C, 0, a, 0, l_4, 0, v_G, \alpha_C, 0, 0, 0, a_G, \beta_C, 0, 0, 0;$$

$$x_E, y_E, \varphi_4, v_{EC}, \alpha_{EC}, v_{EE0}, \alpha_{EE0}, v_E, \alpha_E, \omega_4, a_{EC}^k, a_{EE0}^k,$$

$$\beta_{EE0r}, a_{EA}^k, \beta_{EA}, a_{EE0}, \beta_{EE0}, a_E, \beta_E, \epsilon_2);$$

$$KNMA4(l_{OD}, 0, \varphi_3, 0, 0, 0, v_B, \alpha_B, \omega_3, 0, 0, 0, a_B, \beta_B, 0, 0, l_6, l_7;$$

$$x_S, y_S, v_{SS}, \alpha_{SS}, \alpha_{SS0}, v_{SS0}, v_S, \alpha_S, a_{SS}^k, \beta_{SS,k}, a_{SS0}^k,$$

$$\beta_{SS,k}, a_{SS}, \beta_{SS,r}, a_{SS0}, \beta_{SS0,r}, \alpha_S, \beta_S).$$

Приведенный алгоритм может быть реализован программой на алгоритмическом языке ФОРТРАН. В программе предполагается, что используемые операторные функции реализованы подпрограммами, которые находятся в библиотеке стандартных программ ЭВМ. На рис. 16.15 приведены законы движения звеньев рассматриваемого механизма, полученные реализацией программы на ЭВМ для следующих значений: $\omega_1 = 2,5 \text{ с}^{-1}$; $l_1 = 0,3 \text{ м}$; $l_2 = 0,5 \text{ м}$; $l_{DB} = 0,6 \text{ м}$; $l_{DG} = 0,75 \text{ м}$; $l_4 = 0,5 \text{ м}$; $l_6 = l_7 = 0,1 \text{ м}$; $a = 0,3 \text{ м}$; $l_{OD} = 0,45 \text{ м}$.

17. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

17.1. Методы кинематического анализа пространственных механизмов

При кинематическом исследовании пространственных механизмов с низшими парами используют те же зависимости и соотношения между векторами перемещений, скоростей и ускорений, что и для плоских механизмов, только необходимые преобразования проводятся в пространственной системе координат. Основная задача анализа пространственных механизмов — это определение перемещений точек звеньев, получение функций положения и уравнений траекторий движения. Эти задачи решаются как общим векторным методом, применимым для всех механизмов, так и аналитическим, применяющимся для малозвенных механизмов с простыми соотношениями линейных и угловых координат. При анализе пространственных

механизмов широко применяются *методы преобразования координат* (см. гл. 5), что позволяет использовать разные координатные системы для звеньев одного механизма.

Скорости и ускорения точек звеньев пространственных механизмов обычно не определяют векторным методом, так как решение векторных пространственных многоугольников требует сложных пространственных построений и способ теряет свою наглядность. Скорости и ускорения точек для этих механизмов проще определять дифференцированием функций положения или законов перемещений. При численном решении задачи дифференцируются матрицы векторных соотношений.

17.2. Кривошипно-коромысловые механизмы

Определим угол поворота φ_3 коромысла 3 при повороте на угол φ_1 кривошипа 1 четырехзвенного механизма (рис. 17.1), для которого описание выбора координатных систем, а также ортов $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1, \bar{e}_1, \bar{e}_3$ рассмотрено в гл. 8.

Из условия замкнутости векторного ΔDBC получим

$$l_{DB}\bar{e}_{DB} + l_2\bar{e}_2 - l_3\bar{e}_3 = 0. \quad (17.1)$$

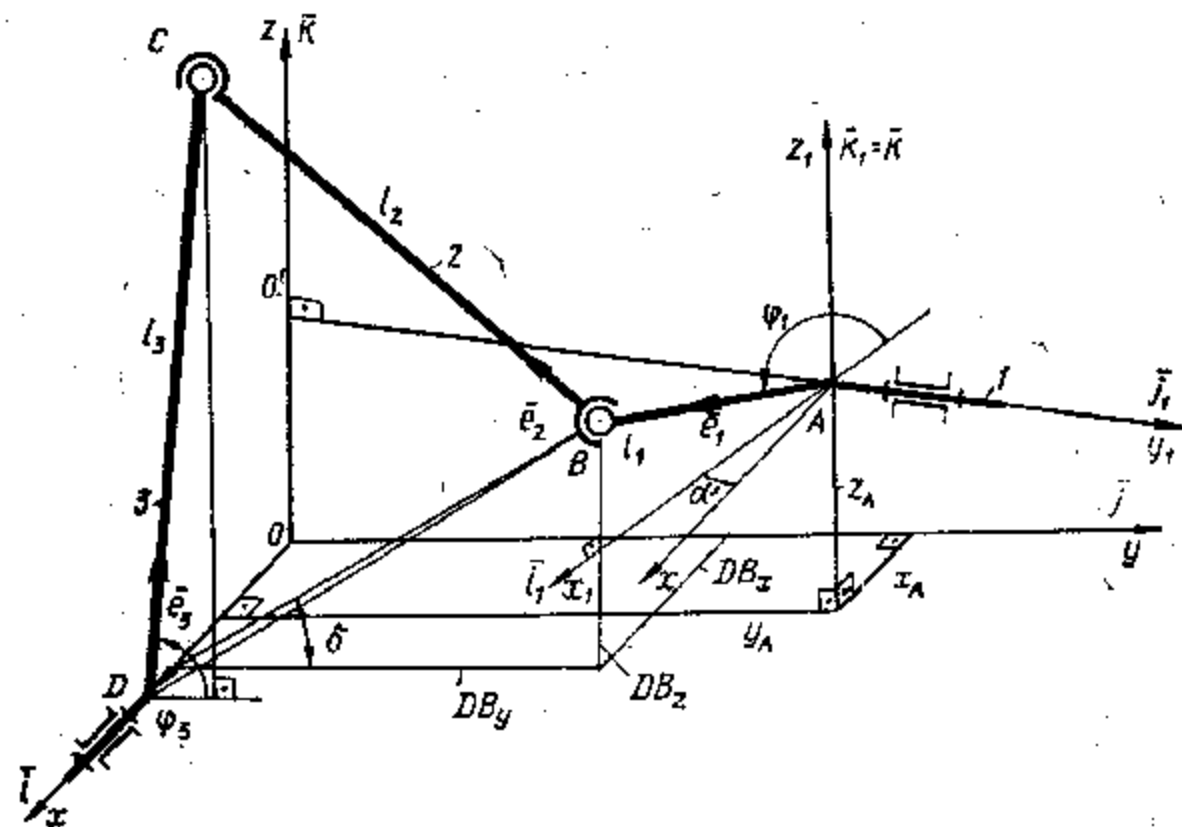


Рис. 17.1. Кинематика кривошипно-коромыслового механизма

Перенесем вектор $l_2\bar{e}_2$ в правую часть выражения (17.1) и, возводя его в скалярный квадрат, исключим орт \bar{e}_2 . После преобразований, обозначив $2p = l_{DB}^2 + l_3^2 - l_2^2$, получим $p - l_{DB}l_3\bar{e}_{DB}\bar{e}_3 = 0$. Определим орты \bar{e}_1 и \bar{e}_3 , рассматривая обе координатные системы:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \bar{i}_1 \cos \varphi_1 + \bar{k}_1 \sin \varphi_1 = \bar{i} \cos \alpha \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \bar{k} \sin \varphi_1; \\ \bar{e}_3 &= \bar{j} \cos \varphi_3 + \bar{k} \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Тогда, используя свойства скалярных произведений ортов координатных осей (см. гл. 5), получим:

$$\begin{aligned} l_{DB}\bar{e}_{DB}\bar{e}_3 &= (DB_x\bar{i} + DB_y\bar{j} + DB_z\bar{k})(\bar{j} \cos \varphi_3 + \bar{k} \sin \varphi_3) = p/l_3; \\ DB_x \cos \varphi_3 \cdot \bar{i} \cdot \bar{j} + DB_x \sin \varphi_3 \cdot \bar{i} \cdot \bar{k} + DB_y \cos \varphi_3 \cdot \bar{j} \cdot \bar{j} + \\ + DB_y \sin \varphi_3 \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} + DB_z \cos \varphi_3 \cdot \bar{k} \cdot \bar{j} + DB_z \sin \varphi_3 \bar{k} \cdot \bar{k} &= p/l_3. \end{aligned}$$

На основании свойства скалярных произведений ортов

$$DB_y \cos \varphi_3 + DB_z \sin \varphi_3 = p/l_3,$$

и, вводя в рассмотрение угол δ , для которого $\text{tg } \delta = DB_z/DB_y$, получим

$$DB_y \cos (\varphi_3 - \delta) / \cos \delta = p/l_3,$$

откуда

$$\varphi_3 = \delta + \arccos (p \cos \delta / l_3 DB_y). \quad (17.2)$$

Для приведения выражения (17.2) к явному виду рассмотрим векторный многоугольник $ODBAO'$, условие замкнутости которого имеет такой вид:

$$l_{OD}\bar{i} + l_{DB}\bar{e}_{DB} - l_1\bar{e}_1 - l_{AO'}\bar{j}_1 - l_{O'O}\bar{k} = 0. \quad (17.3)$$

Выражая вектор \bar{l}_{DB} в проекциях на координатные оси и учитывая $\bar{e}_1, \bar{j}_1 = \bar{i} \sin \alpha + \bar{j} \cos \alpha$, получим:

$$\left. \begin{aligned} DB_x &= l_1 \cos \alpha \cos \varphi_1 - l_{OD} + l_{AO'} \sin \alpha; \\ DB_y &= l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1 + l_{AO'} \cos \alpha; \\ DB_z &= l_1 \sin \varphi_1 + l_{O'O}. \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Подставляя значения проекций из уравнений (17.4) в формулу (17.2), найдем

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \arctg ((l_1 \sin \varphi_1 + l_{O'O}) / (l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1 + l_{AO'} \cos \alpha)); \\ \varphi_3 &= \delta + \arccos (p \cos \delta / l_3 (l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1 + l_{AO'} \cos \alpha)). \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

Для получения передаточной функции выражение φ_3 (φ_1) необходимо продифференцировать по φ_1 , а для получения угловой скорости звена 3 — по t .

Направление орта \bar{e}_2 звена 2 определяем, воспользовавшись выражением (17.1):

$$l_2\bar{e}_2 = l_3\bar{e}_3 - l_{DB}\bar{e}_{DB} = l_3 \cos \varphi_3 \cdot \bar{j} + l_3 \sin \varphi_3 \bar{k} - DB_x\bar{i} - DB_y\bar{j} - DB_z\bar{k},$$

откуда

$$\bar{e}_2 = -\bar{i}DB_x/l_2 + \bar{j}(l_3 \cos \varphi_3 - DB_y)/l_2 + \bar{k}(l_3 \sin \varphi_3 - DB_z)/l_2. \quad (17.6)$$

Определяя по (17.4) и (17.5) $\nu = (\widehat{e}_2, \bar{i})$, $\mu = (\widehat{e}_2, \bar{j})$, $\gamma = (\widehat{e}_2, \bar{k})$ через направляющие косинусы, дифференцируя зависимости по t , получим составляющие вектора угловой скорости звена 2 — $\omega_{2x}, \omega_{2y}, \omega_{2z}$. По их значениям можно определить величину и направление вектора $\bar{\omega}_2$.

17.3. Кривошипно-ползунные механизмы

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 17.2) основной задачей анализа является определение перемещения l_{OC} ползуна 3 и угловых координат шатуна 2. Рассмотрим условие замкнутости векторного контура $ABCO'A$:

$$l_1 \bar{e}_1 + l_2 \bar{e}_2 - l_{OC} \bar{i} + l_{OO'} \bar{k} + l_{O'A} \bar{j}_1 = 0. \quad (17.7)$$

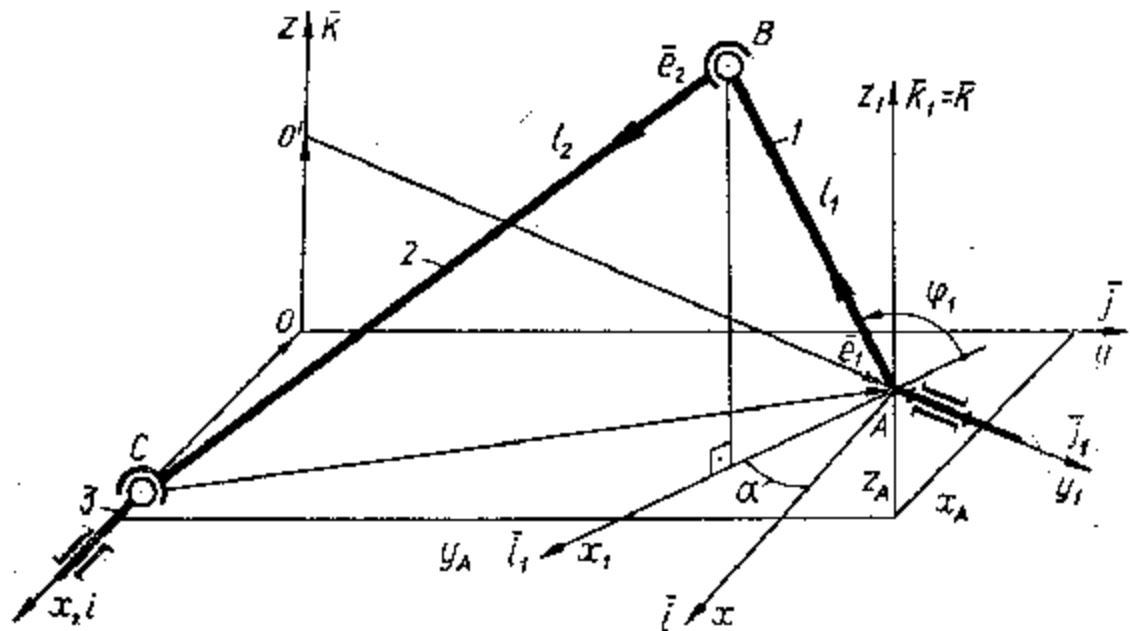


Рис. 17.2. Кинематика кривошипно-ползунного механизма

Орт $\bar{e}_1 = \bar{i}_1 \cos \varphi_1 + \bar{k}_1 \sin \varphi_1 = \bar{i} \cos \alpha \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \bar{k} \sin \varphi_1$, а орт $\bar{j}_1 = \bar{i} \sin \alpha + \bar{j} \cos \alpha$ по свойствам координатных систем; орт \bar{e}_2 представим в проекциях

$$\bar{e}_2 = \bar{i} e_{2x} + \bar{j} e_{2y} + \bar{k} e_{2z}. \quad (17.8)$$

Умножим уравнение (17.7) скалярно на \bar{j} и \bar{k} :

$$l_1 \bar{e}_1 \bar{j} + l_2 \bar{e}_2 \bar{j} - l_{OC} \bar{i} \cdot \bar{j} + l_{OO'} \bar{k} \bar{j} + l_{O'A} \bar{j}_1 \cdot \bar{j} = 0;$$

$$l_1 \bar{e}_1 \bar{k} + l_2 \bar{e}_2 \bar{k} - l_{OC} \bar{i} \cdot \bar{k} + l_{OO'} \bar{k} \cdot \bar{k} + l_{O'A} \bar{j}_1 \cdot \bar{k} = 0.$$

Подставляя значения \bar{e}_1 , \bar{j}_1 и используя свойства скалярного произведения ортов, получим

$$\cos \mu = e_{2y} = (l_{O'A} \cos \alpha - l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1) / l_2; \quad (17.9)$$

$$\cos \nu = e_{2z} = -(l_{OO'} + l_1 \sin \varphi_1) / l_2. \quad (17.10)$$

Тогда

$$\cos \nu = e_{2x} = \sqrt{1 - e_{2y}^2 - e_{2z}^2}. \quad (17.11)$$

Умножая уравнение (17.7) на орт \bar{i} , найдем

$$l_{OC} = l_1 \cos \alpha \cos \varphi_1 - l_{O'A} \sin \alpha + l_2 \sqrt{1 - e_{2y}^2 - e_{2z}^2}. \quad (17.12)$$

Для получения передаточной функции ползуна необходимо продифференцировать выражение (17.12) по φ_1 ; для получения функции

скорости — по t . Для получения составляющих ω_{2x} , ω_{2y} , ω_{2z} векторов угловой скорости $\bar{\omega}_2$ шатуна необходимо продифференцировать по t зависимости (17.9), (17.10) и (17.11). По значениям этих составляющих можно определить величину и направление вектора $\bar{\omega}_2$.

17.4. Механизм универсального шарнира

Механизм универсального шарнира представляет собой пространственный шарнирный четырехзвенный механизм с вращательными парами 5-го класса, оси которых пересекаются в одной точке. Его кинематическое исследование выполняется так же, как и ранее для кривошипно-коромыслового механизма. Однако из-за сложной геометрической формы звеньев зависимости для ортов имеют громоздкую структуру. Удобнее рассматривать кинематику механизма

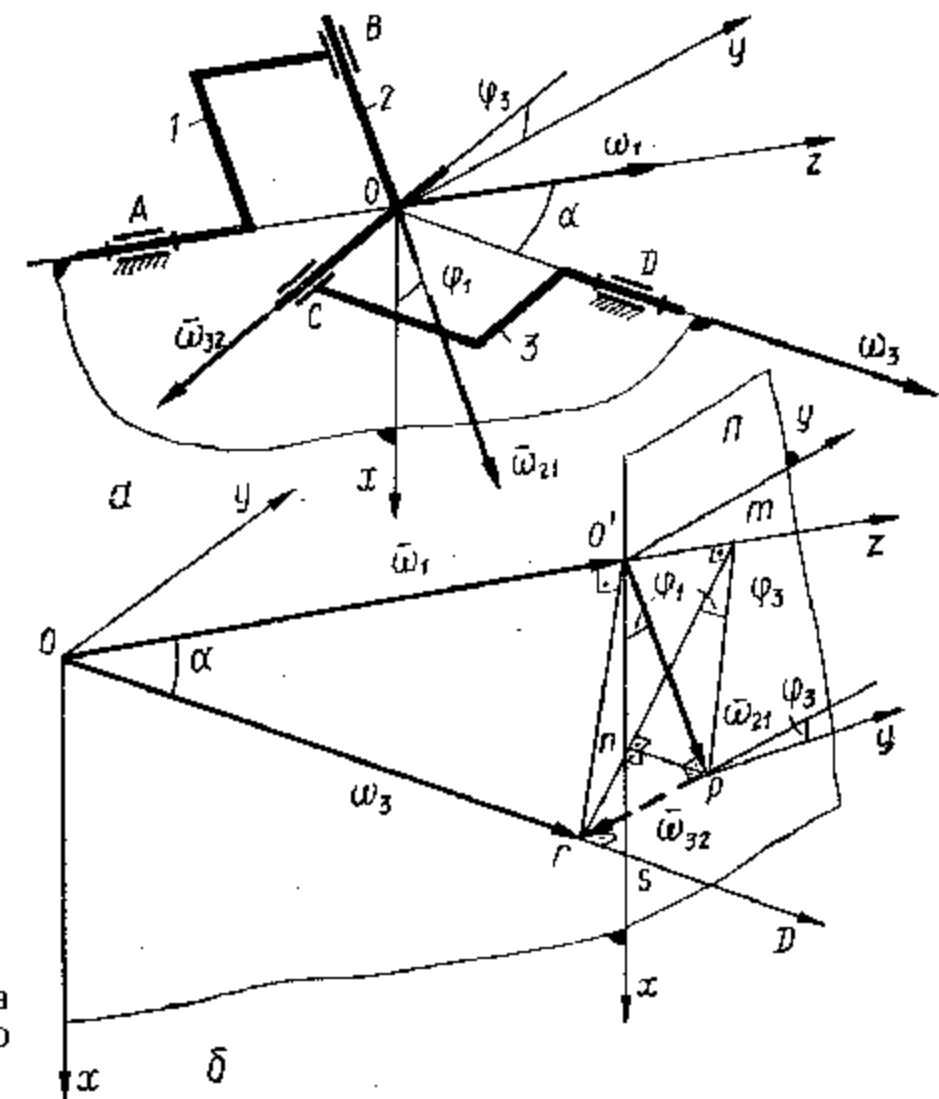


Рис. 17.3. Кинематика звеньев универсального шарнира

универсального шарнира, основываясь на свойствах векторов угловых скоростей. Поместим начало координат O системы $Oxyz$ (рис. 17.3, б) в центр крестовины 2 механизма. Ось Oz направим по оси вращательной кинематической пары A , ось Ox — перпендикулярно Oz в плоскости осей вращательных кинематических пар A и D .

Вектор угловой скорости перпендикулярен плоскости вращения, поэтому вектор $\bar{\omega}_1$ угловой скорости звена 1 будет направлен по оси Oz , вектор $\bar{\omega}_3$ — по оси OD , векторы относительных угловых

скоростей $\bar{\omega}_{21}$ крестовины 2 относительно звена 1 и $\bar{\omega}_{32}$ звена 3 относительно крестовины 2 — соответственно по осям кинематических пар B и C. На основании теоремы о сложном движении запишем

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{32}. \quad (17.13)$$

Так как угловые скорости звеньев 1 и 3 $\omega_1 = d\varphi_1/dt$ и $\omega_3 = d\varphi_3/dt$ определяются через углы поворота φ_1 и φ_3 крестовины относительно координатных осей Ox и Oy , а векторы $\bar{\omega}_{21}$ и $\bar{\omega}_{32}$ всегда перпендикулярны к осям кинематических пар A и D и друг другу, то согласно условию (17.13) величина и направление вектора $\bar{\omega}_1$ полностью определяют вектор $\bar{\omega}_3$, так как направление его задано положением оси вращательной пары D.

Построим пространственный векторный многоугольник по уравнению (17.13). Из конца вектора $\bar{\omega}_1$ в плоскости П, параллельной плоскости xOy (рис. 17.3, б), отложим вектор $\bar{\omega}_{21}$ под углом φ_1 к оси Ox . Из конца вектора $\bar{\omega}_{21}$ в плоскости, перпендикулярной к оси AO , опустим на ось OD перпендикуляр. Этот перпендикуляр определит вектор $\bar{\omega}_{32}$, конец которого на оси OD совпадает с концом вектора $\bar{\omega}_3$.

Спроецируем векторы уравнения (17.13) на плоскость, образованную векторами $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_3$. Точка P пересечения векторов $\bar{\omega}_{21}$ и $\bar{\omega}_{32}$ проецируется в точку n. Тогда $O'n = \omega_{21} \cos \varphi_1$; $nr = \omega_{32} \sin \varphi_3$.

Спроецируем многоугольник на плоскость, перпендикулярную вектору $\bar{\omega}_3$. Угол $\angle Pmr = \varphi_3$, так как $Pn \perp mr$; $Pm \perp \bar{\omega}_2$, потому что $\angle O'Pr$ проецируется на эту плоскость тоже как прямой. Если $\operatorname{tg} \varphi_1 = Pn/O'n$; $Pn = mn \operatorname{tg} \varphi_3$, а $O'n = mn/\cos \alpha$, то

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_3 \cos \alpha. \quad (17.14)$$

Дифференцируя формулу (17.14) по φ_1 , получим передаточную функцию

$$i_{31} = \omega_3/\omega_1 = \cos \alpha / (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1). \quad (17.15)$$

Из проекций векторного многоугольника (см. рис. 17.3, б) на плоскость xOy получим относительные угловые скорости крестовины. Из $\Delta O'PS$ следует

$$\left. \begin{aligned} \omega_{21} &= O'S \cos \varphi_1 = \omega_3 \sin \alpha \cos \varphi_1; \\ \omega_{32} &= \omega_1 \sin \alpha \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (17.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_1 \cos \alpha + O'n \sin \alpha = \omega_1 \cos \alpha + \omega_{21} \cos \varphi_1 \sin \alpha = \\ &= \omega_1 \cos \alpha + \omega_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1. \end{aligned}$$

Выразим относительную угловую скорость крестовины ω_{21} и ω_{32} через угловую скорость звена 1:

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= \omega_1 \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1 / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi_1); \\ \omega_{32} &= \omega_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1 / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi_1). \end{aligned}$$

Из зависимости (17.16) получим экстремальные значения угловых скоростей. При $\varphi_1 = 0$ имеем $\omega_{3 \max} = \omega_1 / \cos \alpha$; $\omega_{21 \max} = \omega_1 / \operatorname{tg} \alpha$; $\omega_{32 \min} = 0$; при $\varphi_1 = \pi/2$ — $\omega_{3 \min} = \omega_1 \cos \alpha$; $\omega_{21 \min} = 0$; $\omega_{32 \max} = \omega_1 \sin \alpha$.

Для того чтобы получить равномерное вращение ведомого звена, применяют сдвоенный сферический шарнир (рис. 17.4). В этом механизме при углах $\alpha_1 = \alpha_2$ между осями вращения звеньев 1 и 4 промежуточным валом 3, а также расположении вилок крестовин 2 и 2' на оси 3 в одной плоскости получим $\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_1$.

17.5. Винтовые механизмы

Движение звеньев винтового механизма (рис. 17.5) состоит из вращения вокруг своей оси и прямолинейного поступательного движения вдоль нее. Если векторы скоростей $\bar{\omega}$ и \bar{v} , описывающие эти движения, направлены вдоль координатной оси в правой системе координат в одну сторону, то такой винт называют *правым*; противоположно направленные векторы $\bar{\omega}$ и \bar{v} характеризуют *левый*

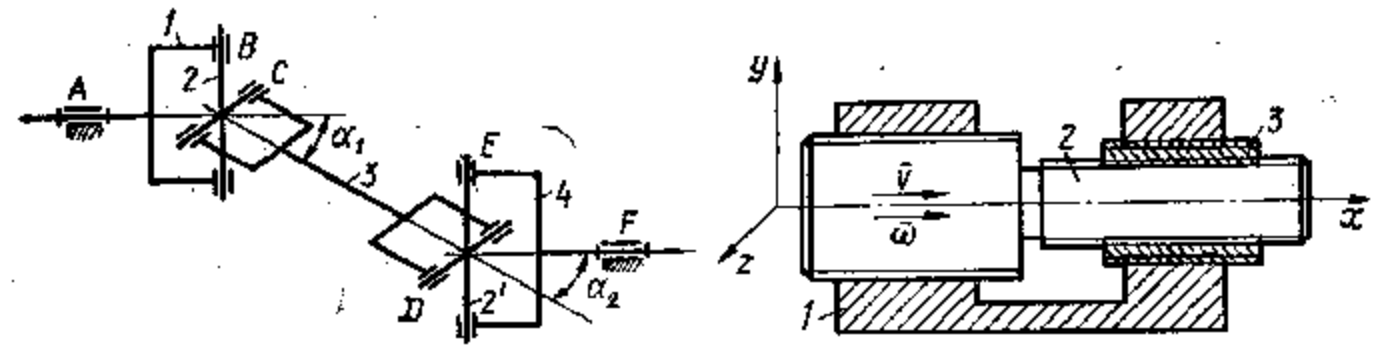


Рис. 17.4. Сдвоенный сферический шарнир

Рис. 17.5. Винтовой механизм

винт. Для правого винта $v > 0$, $\omega > 0$ соответствуют ввинчиванию, $v < 0$, $\omega < 0$ — вывинчиванию. Отношение $p = v/\omega$ называется *параметром винта*.

Если φ — угол поворота винта относительно оси, s — соответствующее ему перемещение, то $v = ds/dt$, $\omega = d\varphi/dt$ и $p = ds/d\varphi$. При $p = ds/d\varphi = \text{const}$, $s = p\varphi$, т. е. s и φ — пропорциональные величины. При $\varphi = 2\pi$ и перемещении, равном шагу h , получим $s = h = 2\pi p$ и $p = h/2\pi$.

Если на винте нарезаны z винтовых поверхностей одного шага, то при $\varphi = 2\pi$ и перемещении, равном ходу винта H , получим

$$s = H = 2\pi pz \text{ и } p = H/2\pi z.$$

Рассмотрим соотношения между перемещениями и угловыми скоростями вращения винтов в механизме с тремя винтовыми парами с параметрами $p_{21} = h_1/2\pi$; $p_{32} = h_2/2\pi$; $p_{31} = h_3/2\pi$, где h_1 , h_2 , h_3 — шаги соответствующих резьб.

При повороте винта 2 на угол φ_{21} относительные углы поворота в парах 3 — 2 и 3 — 1 будут φ_{32} и φ_{31} . Тогда

$$\varphi_{31} = \varphi_{21} + \varphi_{32}, \quad (17.17)$$

а перемещение

$$s_{31} = s_{21} + s_{32}. \quad (17.18)$$

Так как $s = r\varphi$, то $s_{31} = h_3\varphi_{31}/2\pi$; $s_{32} = h_2\varphi_{32}/2\pi$; $s_{21} = h_1\varphi_{21}/2\pi$, и после подстановки значений s в формулу (17.18) получим

$$h_3\varphi_{31} = h_1\varphi_{21} + h_2\varphi_{32}. \quad (17.19)$$

Подставляя значение φ_{32} из формулы (17.17) в формулу (17.19), получим

$$\varphi_{31} = \varphi_{21}(h_1 - h_2)/(h_3 - h_2); \quad s_{31} = \varphi_{31}h_3/2\pi.$$

Аналогично находят углы поворота φ_{21} и φ_{32} .

18. ПРОМЫШЛЕННЫЕ РОБОТЫ

18.1. Общие понятия и определения

В качестве эффективных средств автоматизации и механизации различных видов производства широкое распространение получили **промышленные роботы (ПР)**. Они предназначены для различных манипуляций при выполнении основных и вспомогательных производственных и транспортных операций без непосредственного участия человека. Промышленные роботы характеризуются возможностью и быстротой перехода на выполнение новых операций при перепрограммировании управляющего устройства и перестройке манипуляционной части.

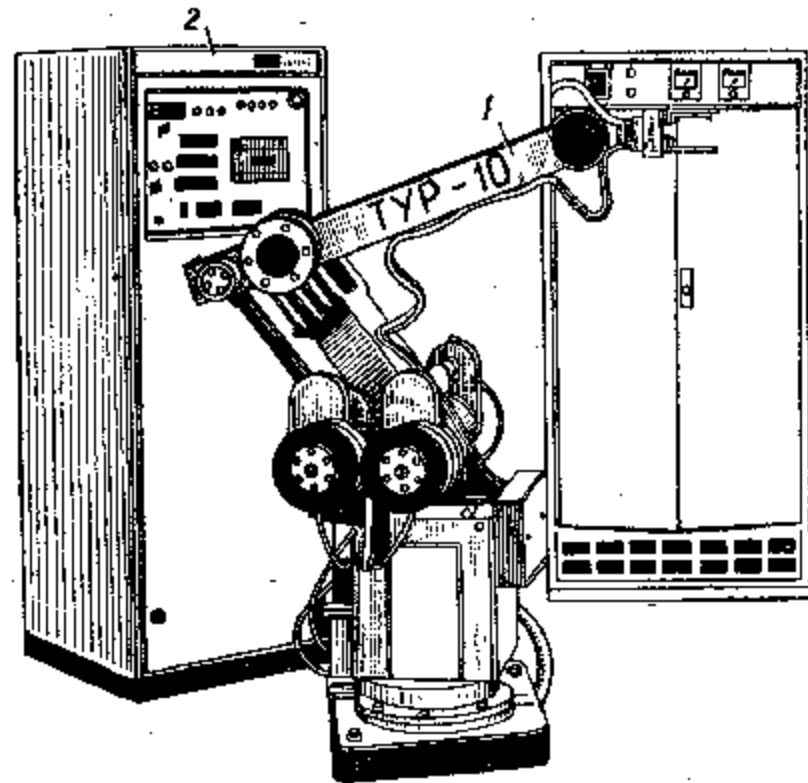


Рис. 18.1. Промышленный робот ТУР-10

Отличительный признак ПР (рис. 18.1) — наличие манипулятора 1. В сочетании с автоматическим устройством управления 2 манипулятор становится промышленным роботом. В общем случае ПР состоит из трех систем: *манипуляционной* — для целенаправленного воздействия на окружающую среду, *информационной* — для определения состояния манипуляционной системы робота и оценки результатов воздействия на окружающую среду и *управляющей* — для выработки алгоритма оптимального взаимодействия с окружающей средой.

Промышленный робот представляет сочетание разнообразных устройств механических звеньев, управляемых приводами различных типов, измерительных датчиков обратной связи и оцувствле-

ния, управляющих ЭВМ, встроенных микропроцессорных и логических устройств, работающих взаимосвязанно как единая динамическая и информационно-управляющая система. Поэтому из-за многообразия факторов, явлений и процессов, лежащих в основе строения и функционирования ПР, их классификация характеризуется большим числом параметров и критериев качества. Они объединены в основные группы характеристик: *структурные, кинематические, силовые, динамические, эксплуатационные, управления, информационной емкости и типа исполнения*.

По назначению ПР делятся на *универсальные, специализированные* и *специальные*. По грузоподъемности различают роботы: *сверхлегкие* (до 1 кг), *легкие* (1...10 кг), *средние* (10...200 кг), *тяжелые* (200...1000 кг), *сверхтяжелые* (более 1000 кг). По типу силового привода звеньев манипулятора различают роботы с гидравлическим, пневматическим, электрическим и комбинированным приводом. Промышленные роботы по типу системы управления делятся на *программные* — это роботы, работающие по жесткой программе с цикловой или числовой системой программного управления, *адаптивные* роботы, оснащенные датчиками с управлением от системы ЭВМ или ЧПУ, позволяющими реагировать на изменение некоторых условий эксплуатации, и *интеллектуальные* роботы, управляемые от ЭВМ с программированием цели и обладающие широкими возможностями реагирования на изменение технологии процесса, распознавания объектов, принятия решений и т. п.

18.2. Основные схемы манипуляторов промышленных роботов

Основой схем манипуляторов являются кинематические цепи, не образующие структурные замкнутые контуры, звенья которых соединены кинематическими парами 3, 4, 5-го классов. Положение каждого звена таких кинематических цепей изменяется обычно отдельным приводом. Если привод смонтирован на звеньях, составляющих кинематическую пару, то такая кинематическая пара называется *приводной*. Наибольшее распространение получили манипуляторы с поступательными и вращательными приводными кинематическими парами 5-го класса, однако известны конструкции с приводными парами цилиндрической 4-го и сферической 3-го классов. Число степеней свободы манипулятора с кинематическими парами 5-го класса соответствует числу приводных кинематических пар.

Функционально манипулятор состоит из двух частей — *транспортирующей* и *ориентирующей* (рис. 18.2). Звенья, составляющие транспортирующую кинематическую цепь, предназначены для переноса объекта манипулирования в заданную точку пространства. Для этой цели достаточно трех степеней свободы, поэтому в состав транспортирующих кинематических цепей входят обычно четыре звена, включая и неподвижное звено — стойку манипулятора, составляющие три приводные кинематические пары 5-го класса. При этом могут быть четыре основные схемы (рис. 18.3). При трех

поступательных кинематических пар (рис. 18.3, а), движение заданной точки D_1 звена 3 организуется в прямоугольной системе координат, при одной вращательной и двух поступательных (рис. 18.3, б) — в цилиндрической, при двух вращательных и одной поступательной (рис. 18.3, в) — в сферической системе координат. При

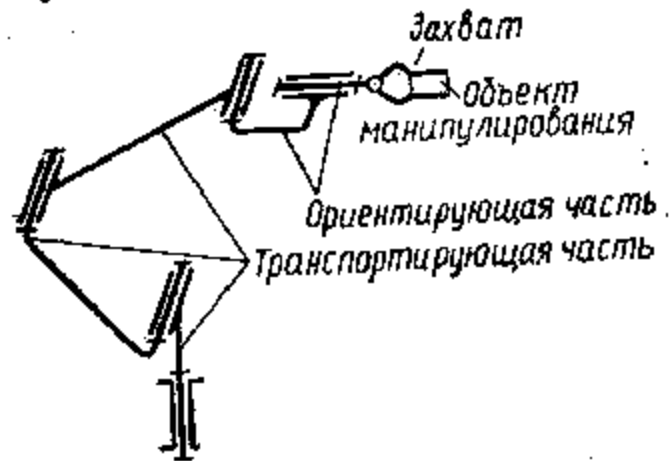


Рис. 18.2. Манипулятор промышленного робота

Рис. 18.3. Транспортирующие кинематические цепи

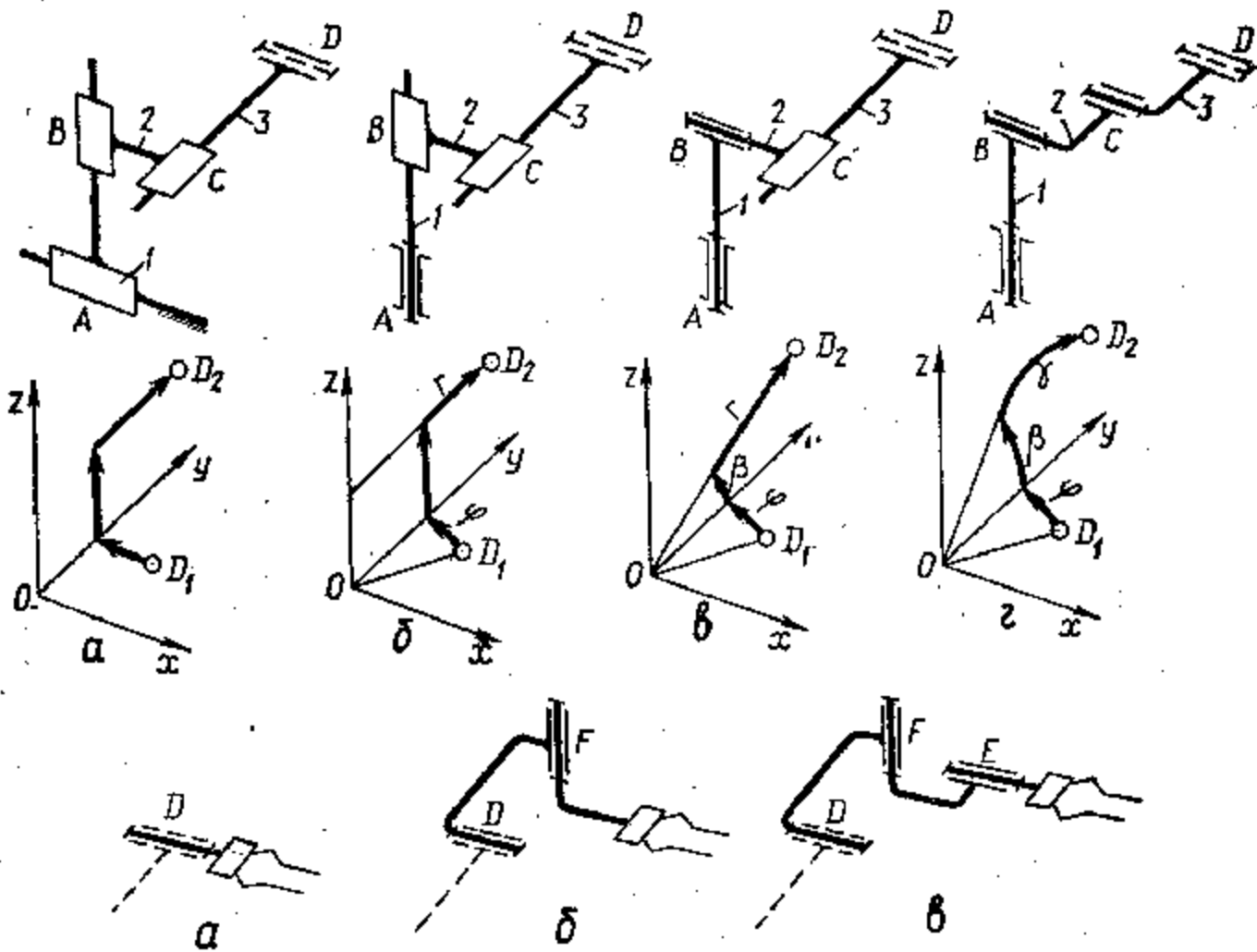


Рис. 18.4. Ориентирующие кинематические цепи

трех вращательных кинематических пар (рис. 18.3, г), манипулятор называется *антропоморфным* и перемещение заданной точки звена 3 организуется в системе координат, называемой *ангулярной*.

Ориентирующие кинематические цепи присоединяются обычно вращательной кинематической парой к транспортирующим (рис. 18.4). Оси кинематических пар ориентирующих кинематических цепей манипулятора располагаются обычно перпендикулярно друг другу. К ориентирующим кинематическим цепям присоединяется захватное устройство (захват), предназначенное для удержания

объекта манипулирования в определенном положении. Захваты могут быть *механическими*, *пневматическими* или *электромагнитными*. Они относятся к числу сменных звеньев манипуляторов, которые меняют в зависимости от требования конкретного рабочего задания.

В схемах механических захватов используются различные шарнирно-рычажные механизмы (рис. 18.5). В большинстве конструк-

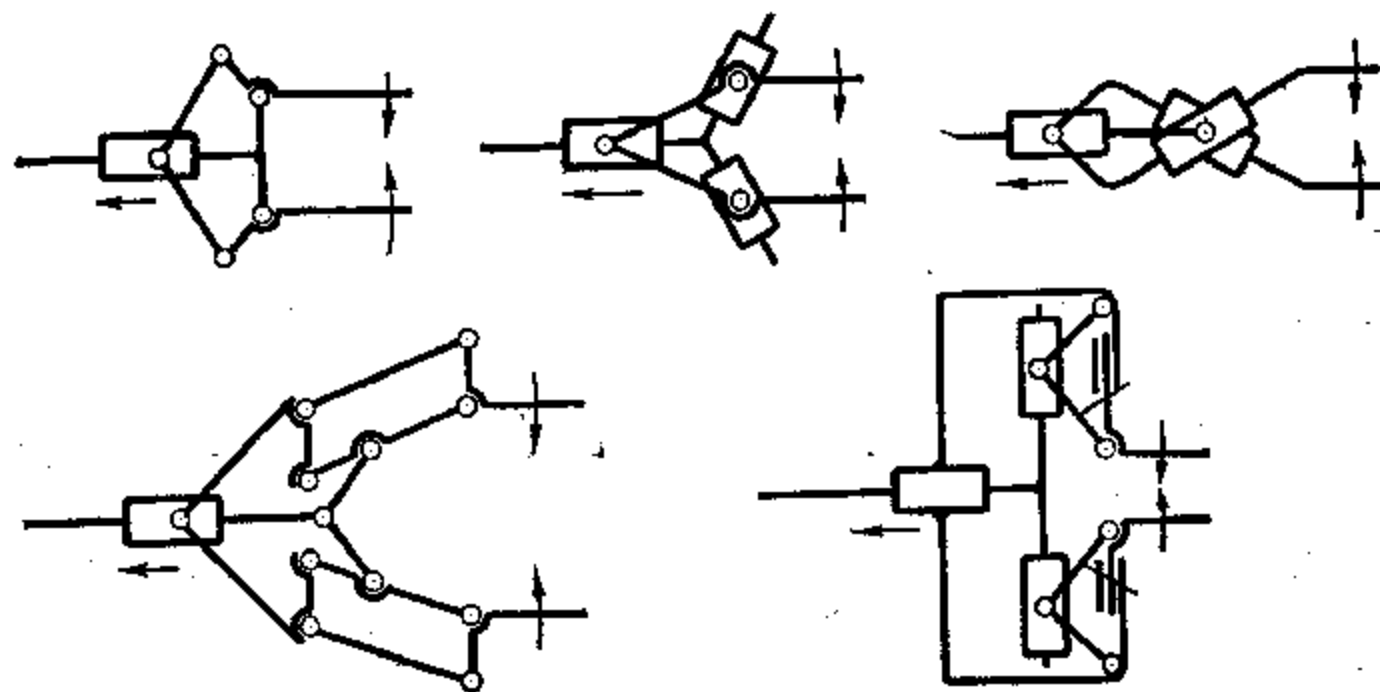


Рис. 18.5. Шарнирно-рычажные механизмы манипуляторов

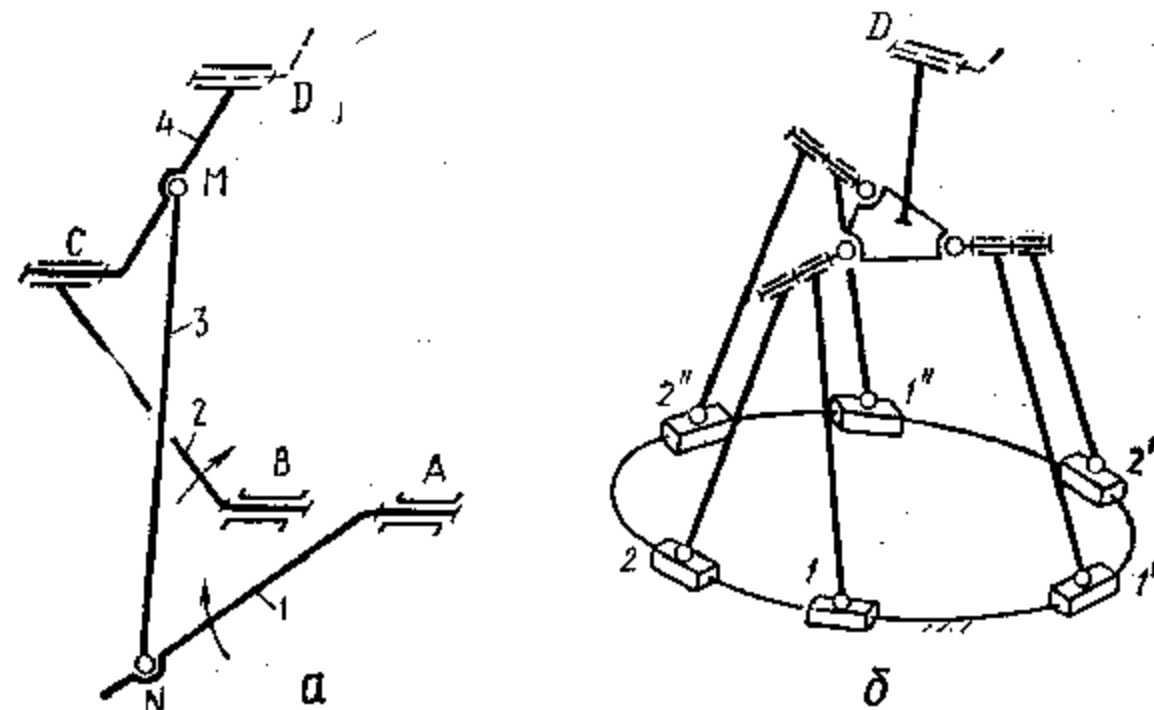


Рис. 18.6. Манипуляторы, звенья которых образуют замкнутые контуры

ций губки захвата располагаются параллельно и симметрично оси последней перед захватом вращательной кинематической пары, что позволяет осуществить широкий класс таких технологических операций, как сверление, нарезание резьбы, завинчивание гаек, винтов, шурупов и т. п.

Манипуляторы с такими схемами позволяют совершать сложные движения захвата. Необходимая точность позиционирования достига-

ется с помощью микропроцессорного управления движением входных звеньев. На рис. 18.6 показаны схемы манипуляторов, требуемая точность позиционирования у которых достигается применением транспортирующих кинематических цепей, образующих замкнутые контуры. Общий принцип построения таких схем заключается в следующем. К входным звеньям, составляющим со стойкой приводные вращательные (рис. 18.6, а) или поступательные (б) кинематические пары, присоединяется пространственная структурная группа, число поводков которой соответствует числу входных звеньев. К входным звеньям 1 и 2 (см. рис. 18.6, а), составляющим со стойкой приводные вращательные кинематические пары А и В, присоединяется диада 3 — 4 с вращательной С и сферическими N и M кинематическими парами. В таком манипуляторе число степеней свободы звена 4 равно двум. Большое число степеней свободы может быть получено использованием многоповодковой структурной группы с входными звеньями 1, 1', 1'', 2, 2', 2'' (б).

18.3. Определение положения объекта манипулирования

С целью упрощения кинематического и геометрического исследования каждому подвижному звену манипулятора, начиная от стойки, присваивают порядковый номер, неподвижному звену — стойке — присваивают индекс 0. При таких обозначениях номер звена с захватом будет соответствовать числу подвижных звеньев манипулятора. С каждым звеном манипулятора жестко связывается правая система декартовых координат, одна из осей которой совпадает с осью OO кинематической пары. Под осью вращательной кинематической пары (рис. 18.7, а) понимают ось относительного поворота, а поступательной (рис. 18.7, б) — прямую, параллельную направлению относительного перемещения.

Ось z_i (рис. 18.8, а) должна совпадать с осью кинематической пары, связывающей звенья i и $i + 1$; ось x_i должна пересекать ось z_{i-1} под углом 90° ; оси y_i обеспечивают правую ориентацию всех систем координат; ось z_n системы координат, связанной с захватом (рис. 18.8, б), расположена вдоль губок захвата, а ось y_n — перпендикулярно губкам захвата. Направление оси x_0 системы координат, связанной со стойкой (рис. 18.8, в), выбирается произвольно.

Преимущество таких связанных систем координат заключается в том, что две последовательные системы координат звеньев, например T_i и T_{i-1} , всегда могут быть совмещены при помощи четырех промежуточных преобразований. Операция совмещения систем координат (рис. 18.9) выполняется в следующей последовательности: а) поворот вокруг оси x_i на угол β до достижения параллельности осей z_i и z_{i-1} ; б) перенос вдоль оси x_i на расстояние b до совпадения осей z_i и z_{i-1} ; в) перенос вдоль оси z_i на расстояние s до совмещения начал координат O_i и O_{i-1} ; г) поворот вокруг оси z_i на угол φ до совмещения всех осей. Эти элементарные перемещения описываются матрицами преобразования размера 4×4 , задающими как

Рис. 18.7. Положение осей кинематических пар

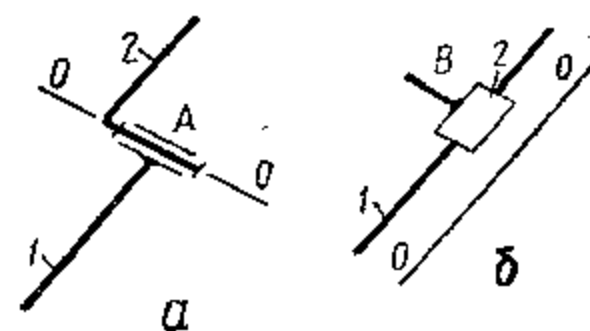


Рис. 18.8. Образование связанных систем координат

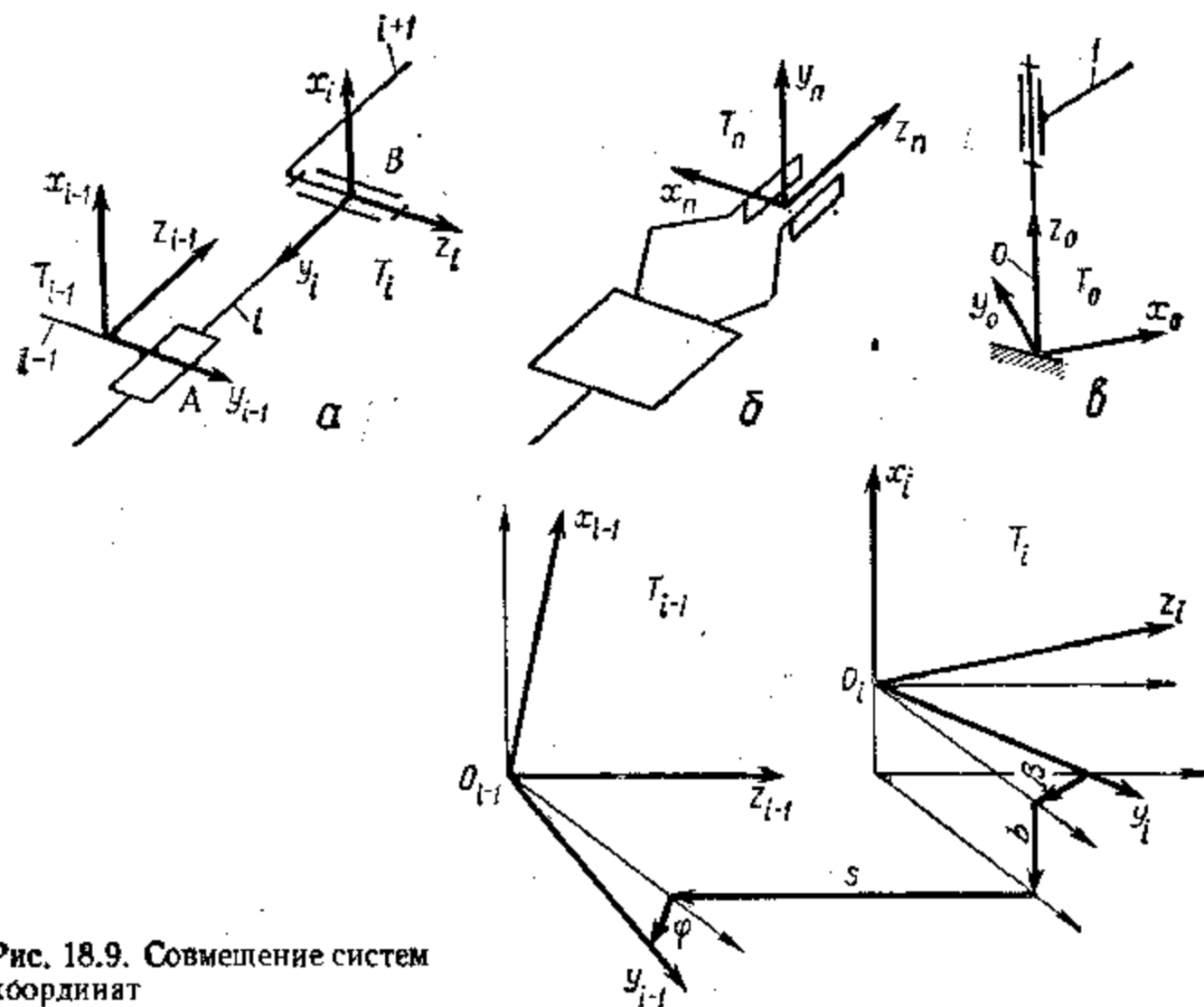


Рис. 18.9. Совмещение систем координат

преобразование поворота, так и преобразование переноса (см. гл. 5):

$$M = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & l_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & l_2 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & \bar{l} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (18.1)$$

где γ — матрица размером 3×3 , задающая преобразование поворота для декартовых координат, а \bar{l} — столбцовая матрица, задающая перенос.

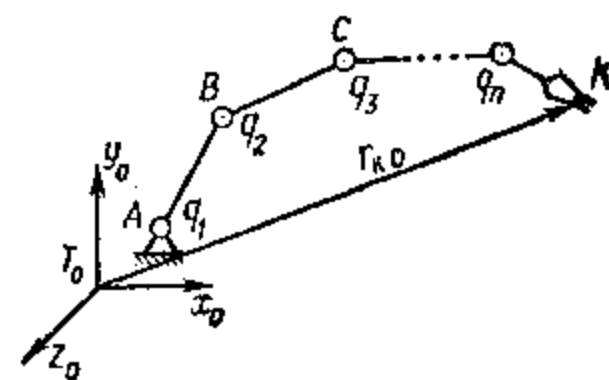


Рис. 18.10. Определение функции перемещения точки захвата манипулятора

Для последовательных движений, соответствующих переходу от i -й системы к $i-1$ -й, матрицы преобразований запишутся в следующем виде:

$$M_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (18.2)$$

$$M_b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (18.3)$$

$$M_s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (18.4)$$

$$M_\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (18.5)$$

На основании этого переход от системы координат i к системе $i-1$ через четыре указанных промежуточных преобразований запишется матричным произведением

$$M_i = M_\varphi M_s M_b M_\beta, \quad (18.6)$$

а матрица перехода от системы T_i к системе T_{i-1} будет иметь вид

$$M_i = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \beta & \sin \varphi \sin \beta & b \cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \cos \beta & -\cos \varphi \sin \beta & b \sin \varphi \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & s \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (18.7)$$

Координаты точки K объекта манипулирования (рис. 18.10) в системе $T_0 (x_0, y_0, z_0)$, связанной со стойкой, определяются следующим матричным уравнением:

$$\bar{r}_{K0} = M_1 M_2 M_3 \dots M_n \bar{r}_{Kn} = \Gamma_n \bar{r}_{Kn}, \quad (18.8)$$

где n — число подвижных звеньев манипулятора; M_1, M_2, \dots — матрицы перехода вида (18.7); r_{Kn} — столбцевая матрица координат точки K объекта манипулирования в системе T_n , связанной с захватом; Γ_n — матрица перехода от системы T_n к системе T_0 .

Столбцевая матрица r_{Kn} имеет вид

$$r_{Kn} = \begin{vmatrix} x_{Kn} \\ y_{Kn} \\ z_{Kn} \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (18.9)$$

а матрица перехода:

$$\Gamma_n = \prod_{i=1}^n M_i. \quad (18.10)$$

18.4. Исследование кинематики манипуляторов

При исследовании кинематики манипулятора решают две задачи: определение перемещения, скорости и ускорения объекта манипулирования при заданных перемещениях, скоростях и ускорениях приводов в кинематических парах и обратную — определение необходимых перемещений, скоростей и ускорений в кинематических парах по заданному перемещению, скорости и ускорению объекта манипулирования. Решить первую задачу можно, раскрывая матричное выражение (18.8), в результате чего получим функцию перемещения объекта манипулирования, определяющую зависимость координат его точки K от перемещений в кинематических парах A, B, C, \dots (рис. 18.10). Эти перемещения в n приводных кинематических парах манипулятора, выполненного по разомкнутой кинематической схеме, обозначим q_1, q_2, \dots, q_n . Под перемещениями будем понимать как углы поворота во вращательных, так и перемещения в поступательных кинематических парах. Тогда функция перемещения точки K объекта манипулирования в системе координат T_0 , связанной со стойкой, запишется в виде

$$r_{K0} = r_{K0}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n). \quad (18.11)$$

Скорость объекта манипулирования определится дифференцированием выражения (18.11):

$$v_{K0} = \dot{r}_{K0} = \dot{\Gamma}_n r_{Kn}. \quad (18.12)$$

Рассмотрим способ дифференцирования матрицы Γ_n . Если кинематическая пара, соединяющая $i-1$ -е и i -е звенья манипулятора, является вращательной, то перемещением q в выражении (18.11) будет изменяемый угловой параметр φ . Тогда из выражения (18.7), пользуясь правилом дифференцирования матриц (см. гл. 5), получим

$$\frac{dM_i}{dt} = \begin{vmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \cos \beta & \cos \varphi \sin \beta & -b \sin \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \beta & \sin \varphi \sin \beta & b \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad (18.13)$$

где $\frac{d\varphi}{dt}$ — угловая скорость поворота во вращательной кинематической паре.

Нетрудно убедиться, что в соответствии с правилами умножения матриц (см. гл. 5) дифференцирование соответствует умножению матрицы M на матрицу θ_φ :

$$\theta_\varphi = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для i -й вращательной кинематической пары получим

$$dM_i/dt = \theta_\varphi M_i d\varphi/dt.$$

Если кинематическая пара, соединяющая $i-1$ -е и i -е звенья, поступательная, то перемещением q в выражении (18.11) будет изменяемый линейный параметр s . Тогда матрица будет иметь следующий вид:

$$\frac{dM_i}{dt} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{ds}{dt}, \quad (18.14)$$

где $\frac{ds}{dt}$ — линейная скорость перемещения в кинематической паре.

Дифференцирование в случае поступательной кинематической пары, аналогично ранее указанному (см. гл. 5), соответствует умножению на матрицу

$$\theta_s = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для i -й поступательной кинематической пары получим

$$dM_i/dt = \theta_s M_i ds_i/dt. \quad (18.15)$$

Далее матрицу θ будем записывать без индекса, а $d\varphi_i/dt$ и ds_i/dt для вращательной и поступательной кинематической пары — обозначать через q_i .

Общее выражение для производной матрицы Γ_n будет иметь вид

$$\dot{\Gamma}_n = \sum_{i=1}^n U_{ni} \dot{q}_i, \quad U_{ni} = M_1 M_2 \dots M_{i-1} \theta M_i \dots M_n, \quad (18.16)$$

где θ — матрица, соответствующая кинематической паре, которую составляют $i-1$ и i -е звенья.

Аналогично может быть найдено и ускорение точки K , принадлежащей захвату

$$\ddot{r}_{K0} = \dot{\Gamma}_n \Gamma_{Kl}. \quad (18.17)$$

Решение обратной задачи, т. е. определение перемещений q_1, q_2, \dots, q_n в кинематических парах по заданной матрице Γ_n , как правило, является сложной задачей с n неизвестными, требующей реше-

ния уравнения

$$M_1(q_1) M_2(q_2) \dots M_n(q_n) = \Gamma_n. \quad (18.18)$$

Каждая комбинация перемещений q соответствует определенному взаимному расположению звеньев механизма. Существует множество методов решения этой задачи, которые в основном заключаются в сведении ее к задаче с меньшим количеством неизвестных путем наложения различных относительных связей на перемещения в кинематических парах.

18.5. Манипулятор с кинематическими парами 5-го класса

Определение функции положения объекта манипулирования рассмотрим на примере манипулятора, все звенья которого связаны кинематическими парами 5-го класса (рис. 18.11). Транспортирующая кинематическая цепь состоит из стойки 0 и звеньев 1, 2, 3.

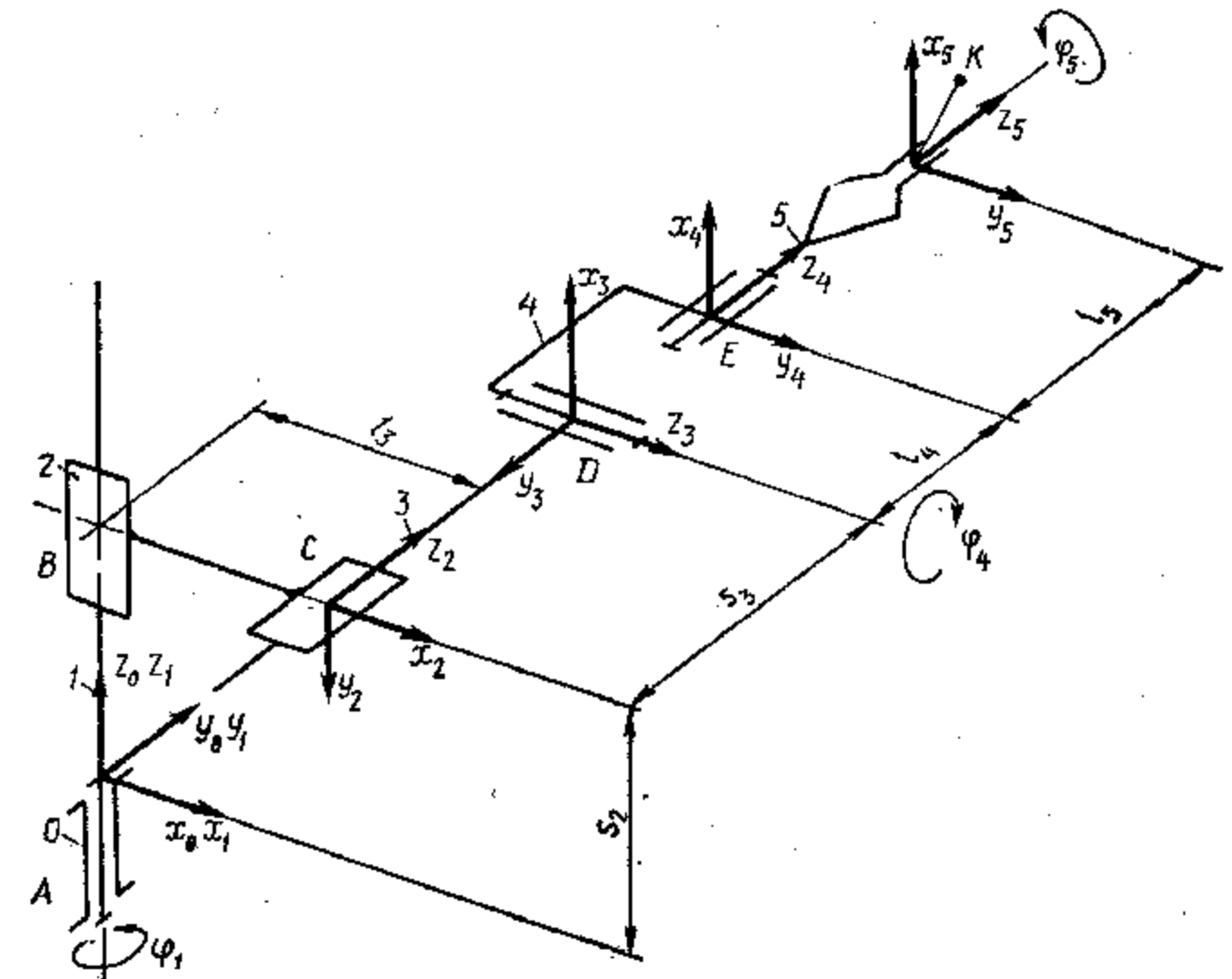


Рис. 18.11. Схема манипулятора с кинематическими парами 5-го класса

К этой кинематической цепи присоединена ориентирующая кинематическая цепь, состоящая из звеньев 4, 5; на звене 5 закреплен захват. Системы координат в каждой кинематической паре расположим в соответствии с последовательностью, указанной выше.

Со стойкой свяжем неподвижную систему координат T_0 , ось z_0 которой направим по оси кинематической пары A , ось x_0 — произвольно, а ось y_0 — в соответствии с правой системой координат.

Так как оси кинематических пар A и B совпадают, то при угле $\varphi = 0$ оси системы координат T_1 , связанной со звеном 1, и оси системы T_0 будут совпадать. Ось z_2 системы координат T_2 , связанной со звеном 2, совпадает с осью кинематической пары C , а ось x_2 направлена перпендикулярно оси z_1 . Ось z_3 системы координат T_3 , связанной со звеном 3, направлена по оси кинематической пары D , а ось x_3 располагается перпендикулярно оси z_2 при $\varphi_4 = 0$. Ось z_4 системы

Таблица 18.1. Значения коэффициентов в матрицах совмещения систем координат

	β	b	s	φ
M_1	0	0	0	φ_1
M_2	$3\pi/2$	l_3	s_2	0
M_3	$3\pi/2$	0	s_3	$3\pi/2$
M_4	$\pi/2$	$-l_4$	0	φ_4
M_5	0	0	l_5	φ_5

координат T_4 , связанной со звеном 4, совпадает с осью кинематической пары E , а ось x_4 перпендикулярна оси z_3 при $\varphi_5 = 0$. Ось z_5 системы T_5 , связанной с захватом, ориентируется параллельно его губкам и в данной кинематической схеме совпадает с осью z_4 . Ось x_5 направляется перпендикулярно оси z_4 и при $\varphi_6 = 0$ параллельна оси x_4 .

Пользуясь этими системами координат, определим функцию положения точки K объекта манипулирования с координатами x_{5K} , y_{5K} , z_{5K} в системе координат T_5 . Координаты этой точки определяются матричным уравнением вида (18.8), которое для этого манипулятора имеет вид

$$\bar{r}_{K0} = M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 \bar{r}_{K5} = \Gamma_5 \bar{r}_{K5}. \quad (18.19)$$

Для совмещения системы T_5 с системой T_4 необходимо переместить систему T_5 вдоль оси z_5 на расстояние l_5 до совпадения начал координат и повернуть систему T_5 на угол φ_5 до полного совпадения систем. Матрица M_5 определится подстановкой в матрицу (18.7) значений $\beta = 0$, $b = 0$, $s = l_5$, $\varphi = \varphi_5$:

$$M_5 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_5 & -\sin \varphi_5 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_5 & \cos \varphi_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18.20)$$

Значения β , b , s и φ для остальных матриц сведены в табл. 18.1.

Подставляя значения β , b , s и φ из табл. 18.1 в матрицу (18.7), определим матрицы M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_5 , перемножая которые по формуле (18.20), получим элементы a_{ij} , $i = 1, 4$, $j = 1, 4$ матрицы Γ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_4 \cos \varphi_5 + \cos \varphi_4 \sin \varphi_5, \\ a_{21} &= -\cos \varphi_1 \sin \varphi_4 \cos \varphi_5 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_5, \\ a_{31} &= \cos \varphi_4 \cos \varphi_5, \quad a_{41} = 0, \\ a_{12} &= -\sin \varphi_1 \sin \varphi_4 \sin \varphi_5 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_5, \\ a_{22} &= \cos \varphi_1 \sin \varphi_4 \sin \varphi_5 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_5, \\ a_{32} &= -\cos \varphi_4 \sin \varphi_5, \quad a_{42} = 0, \quad a_{13} = -\cos \varphi_4 \sin \varphi_1, \\ a_{23} &= \cos \varphi_4 \cos \varphi_1, \quad a_{33} = \sin \varphi_4, \quad a_{43} = 0, \\ a_{14} &= l_3 \cos \varphi_1 - s_2 \sin \varphi_1 - l_4 \sin \varphi_1 \cos \varphi_4 - l_5 \sin \varphi_1 \cos \varphi_4, \\ a_{34} &= s_2 + l_4 \sin \varphi_4 + l_5 \sin \varphi_4, \quad a_{44} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

Так как дифференцирование такой матрицы непосредственно на основании известных правил (см. гл. 5) сложно, то скорости и ускорения точки захвата получают, пользуясь выражениями (18.16) и (18.17). Кинематический анализ манипулятора с вращательными и поступательными кинематическими парами производится операторной функцией

$$\begin{aligned} KINMAP(n, b_1, \dots, b_n, s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \beta_1, \dots, \beta_2, \theta_1, \dots, \theta_n, \\ \omega_1, \dots, \omega_n, v_1, \dots, v_n, e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_n, x_{nK}, \quad (18.22) \\ y_{nK}, z_{nK}; r_K, v_K, a_K), \end{aligned}$$

где n — число подвижных звеньев манипулятора; ω_i , e_i — угловые скорости и ускорения во вращательных парах; v_i , a_i — линейные скорости и ускорения в поступательных парах; x_{nK} , y_{nK} , z_{nK} — координаты объекта манипулирования в системе T_n , r_K , v_K , a_K — положение, скорость и ускорение точки K .

19. ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ С ВЫСШИМИ ПАРАМИ

19.1. Фрикционные механизмы

Простейший фрикционный механизм (рис. 19.1) состоит из двух круглых фрикционных колес. Если обеспечить достаточную силу сцепления (трения) между этими цилиндрическими колесами, чтобы отсутствовало проскальзывание, то при перекачивании колес модуль вектора скорости v_W по линии их касания WW определится из условия

$$v_{W1} = v_{W2} = v_W = 0,5\omega_1 d_{W1} = 0,5\omega_2 d_{W2}.$$

Передаточное отношение i_{12} таких механизмов имеет: знак «—» для внешнего (а) контакта, знак «+» — для внутреннего (б):

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = \pm d_{W_2}/d_{W_1}, \quad (19.1)$$

где ω_1, d_{W_1} и ω_2, d_{W_2} — угловые скорости и диаметры фрикционных колес.

Знак передаточного отношения определяется по общему правилу, вытекающему из основной теоремы зацепления (см. гл. 9).

Фрикционные механизмы с коническими колесами, представляющими собой усеченные конусы 1 и 2 (рис. 19.2), являющиеся аксоидами в относительном движении, служат для передачи вращения

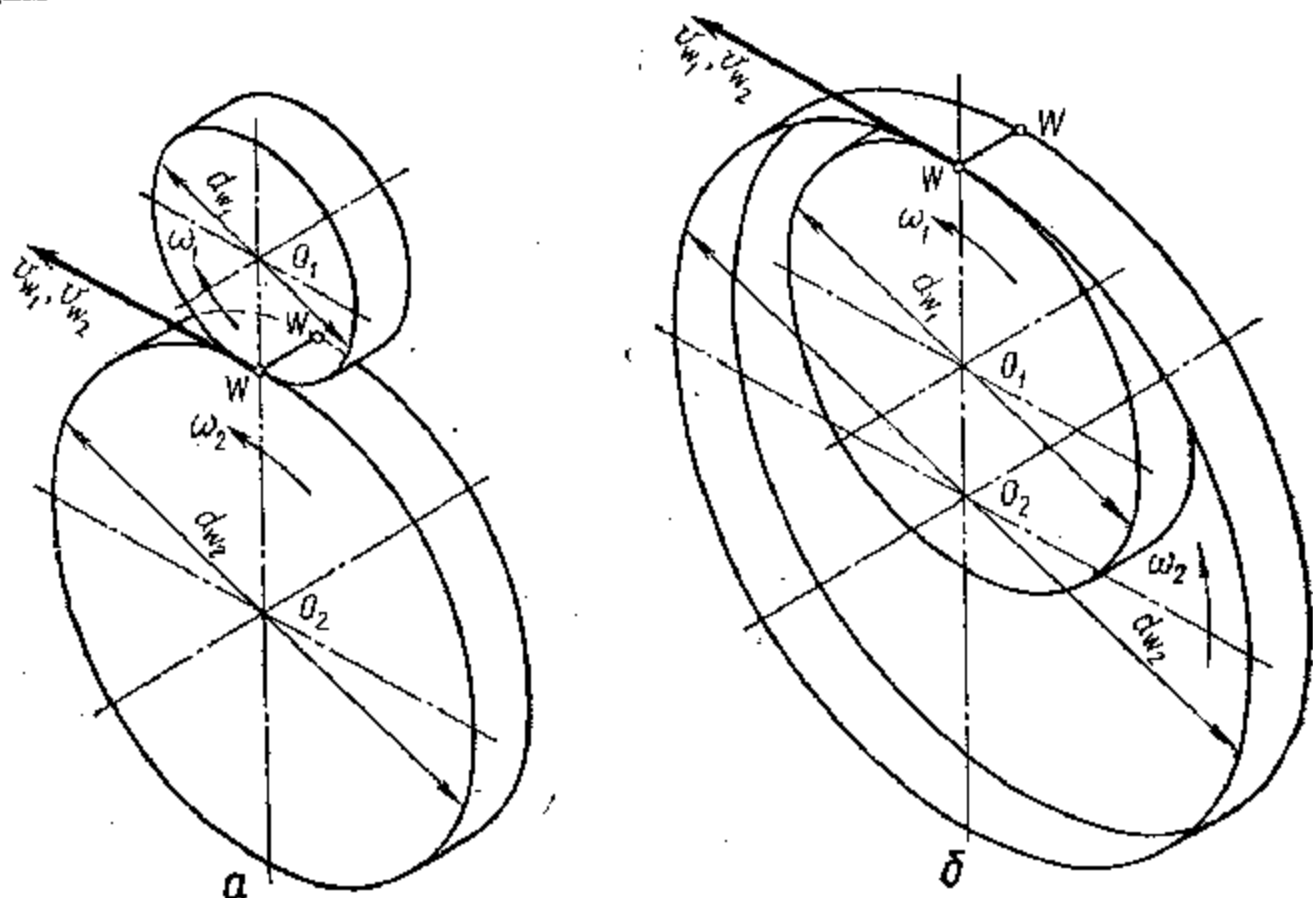


Рис. 19.1. Фрикционные механизмы с цилиндрическими колесами

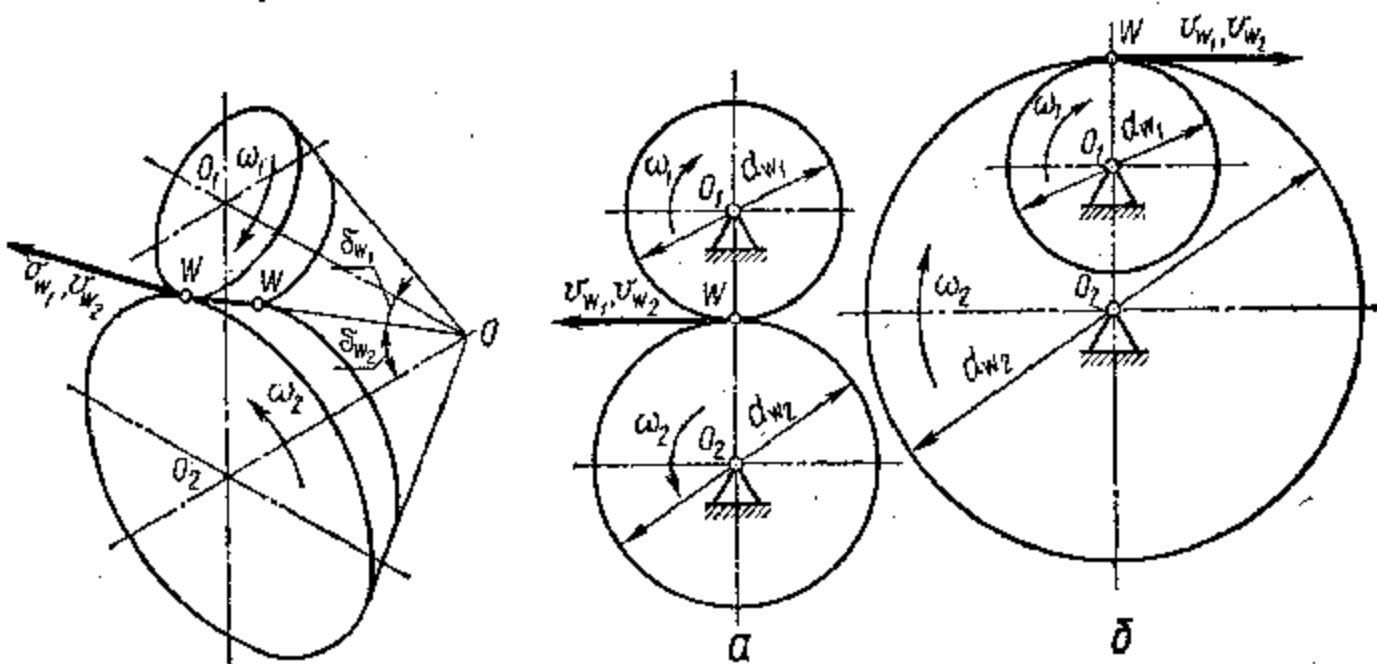


Рис. 19.2. Фрикционные механизмы с коническими колесами

Рис. 19.3. Трехзвенный зубчатый механизм

между звеньями с пересекающимися осями. Передаточное отношение при отсутствии проскальзывания будет

$$i_{12} = \sin \delta_{W_2} / \sin \delta_{W_1}. \quad (19.2)$$

Если имеет место проскальзывание, то оно может быть учтено коэффициентом относительного скольжения

$$\xi = (v_{W_1} - v_{W_2}) / v_{W_1}. \quad (19.3)$$

Преобразуя выражения (19.3), получим

$$\xi = 1 - v_{W_2} / v_{W_1} = 1 - \omega_1 d_1 / \omega_2 d_2 = 1 - (i_{12} d_1 / d_2),$$

откуда

$$i_{12} = (1 - \xi) d_2 / d_1. \quad (19.4)$$

Коэффициент ξ незначителен и колеблется в пределах 0,01...0,03.

19.2. Зубчатые механизмы с неподвижными осями колес

Для простейшего трехзвенного механизма с двумя зубчатыми колесами (рис. 19.3) передаточное отношение определится из кинематики центроид (аксоид) колес. Для точки касания центроид W (полюс) имеем $v_{W_1} = v_{W_2}$ или, выражая длины окружностей через числа зубьев z_1 и z_2 и шаг P ,

$$v_W = 0,5 \omega_1 d_W = 0,5 \omega_2 d_W = \omega_2 z_1 P = \omega_2 z_2 P,$$

откуда

$$i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = \pm z_2 / z_1. \quad (19.5)$$

Знак «—» относится к случаю наружного зацепления (рис. 19.3, а), знак «+» — к случаю внутреннего (рис. 19.3, б). Для трехзвенных механизмов, оси колес которых непараллельны, знак передаточного отношения не учитывается.

При необходимости реализовать большие передаточные отношения применяются составные многоступенчатые зубчатые механизмы (рис. 19.4). Так как передаточное отношение от звена 1 к звену 2 $i_{12} = \omega_1 / \omega_2$, а от звена 2 к звену 3 $i_{23} = \omega_2 / \omega_3$, то передаточное отношение i_{13} (рис. 19.4, а) определится из выражения

$$i_{12} \cdot i_{23} = (\omega_1 / \omega_2) (\omega_2 / \omega_3) = \omega_1 / \omega_3 = i_{13}, \quad (19.6)$$

т. е. общее передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных ступеней. Выражая его через числа зубьев, получим

$$i_{12} = (-z_2 / z_1) (-z_3 / z_2) = z_2 z_3 / z_1 z_2. \quad (19.7)$$

При n ступенях

$$i_{1n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} \cdot \dots \cdot i_{n-1,n} = (-1)^c (z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot \dots \cdot z_n) / (z_1 \cdot z_2' \cdot z_3' \cdot \dots \cdot z_{n-1}), \quad (19.8)$$

где c — число ступеней с внешним зацеплением.

Если зубчатое колесо входит в зацепление с двумя другими колесами (рис. 19.4, б), то оно не оказывает влияния на передаточ-

ные отношения между ними. Для такого механизма получим

$$i_{13} = -(z_2/z_1)(z_3/z_2) = z_3/z_1. \quad (19.9)$$

Такие *промежуточные* («паразитные») колеса влияют не только на знак передаточного отношения механизма.

Знак передаточного отношения в конических механизмах с параллельными осями входных и выходных звеньев определяется по *правилу стрелок* следующим образом. Перпендикулярно к оси коле-

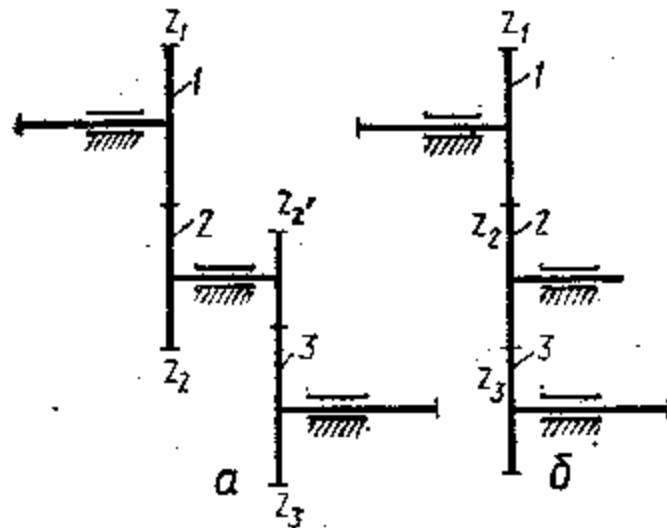


Рис. 19.4. Двухступенчатые зубчатые механизмы

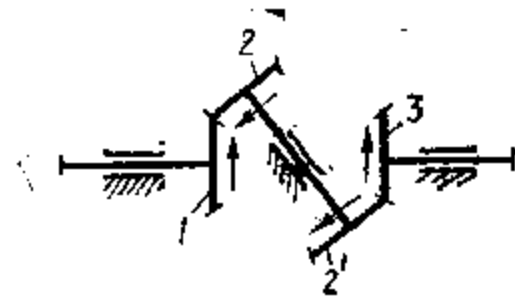


Рис. 19.5. Двухступенчатый зубчатый механизм с коническими колесами

са входного звена 1 (рис. 19.5) проводится стрелка в направлении зацепления зубчатых колес 1 и 2. Стрелка на колесе 2 проводится перпендикулярно его оси таким образом, чтобы острие шло навстречу стрелке 1. В этом же направлении проводится стрелка на колесе 2', острие которой будет направлено в сторону удаления от зацепления зубчатых колес 2' и 3. Аналогично на колесе 3 располагаем стрелку в направлении удаления от зацепления колес 2 и 3. Одинаковое или противоположное направление стрелок на входном и выходном звеньях механизма определяет положительный или отрицательный знак передаточного отношения.

19.3. Сателлитные зубчатые механизмы

Если ось одного из колес механизма перемещается в пространстве, то характер относительного движения их центроид изменится, поэтому выражением (19.5) для кинематических расчетов механизмов с подвижными осями вращения колес пользоваться нельзя. Рассмотрим определение отношения угловых скоростей колес для сателлитных механизмов. В общем случае простейший сателлитный механизм (рис. 19.6, а) имеет степень подвижности $W = 2$, т. е. у него два входных звена. Для определения передаточного отношения между колесами 1 и 2 механизма его звеньям надо дать такое движение, при котором центроиды колес 1 и 2 будут перекатываться друг по другу при неподвижных осях. Придадим всей системе угловую скорость $(-\omega_h)$. Тогда звено 1 в неподвижной координатной

системе будет иметь скорость $\omega_1 = (\omega_1 - \omega_h)$, звено 2 — $\omega_2 = (\omega_2 - \omega_h)$, водило h — $\omega_h = \omega_h - \omega_h = 0$, т. е. будет неподвижным. Так как теперь оси звеньев 1 и 2 относительно неподвижны, то для определения передаточного отношения можно воспользоваться выражением (19.5):

$$\omega_1/\omega_2 = i_{12}^{(h)} = (\omega_1 - \omega_h)/(\omega_2 - \omega_h), \quad (19.10)$$

где $i_{12}^{(h)}$ — передаточное отношение обращенного механизма, получаемого из сателлитного остановкой водила h .

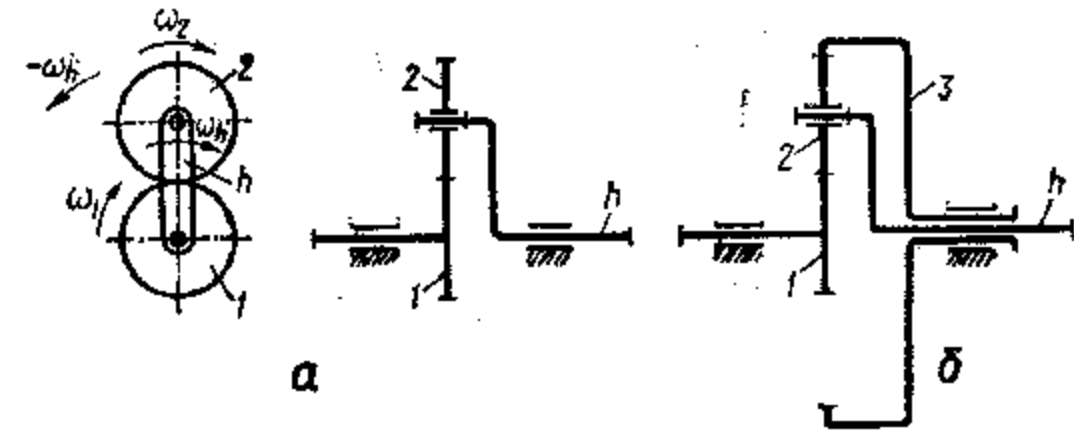
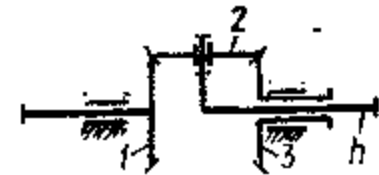


Рис. 19.6. Сателлитные зубчатые механизмы

Рис. 19.7. Конический зубчатый дифференциал



При входных звеньях 1 и 2 угловая скорость водила h определяется из формулы (19.10):

$$\omega_h = (\omega_1 - \omega_2 i_{12}^{(h)}) / (1 - i_{12}^{(h)}). \quad (19.11)$$

Выражения (19.10) и (19.11) используют для анализа более сложных сателлитных механизмов с двумя центральными зубчатыми колесами (рис. 19.6, б), для которых

$$\omega_h = (\omega_1 - \omega_3 i_{13}^{(h)}) / (1 - i_{13}^{(h)}). \quad (19.12)$$

Передаточное отношение $i_{13}^{(h)}$ определится по формуле

$$i_{13}^{(h)} = (-1)^1 (z_2 \cdot z_3) / (z_1 \cdot z_2) = -z_3/z_1. \quad (19.13)$$

Большое распространение получили дифференциальные механизмы с коническими зубчатыми колесами, у которых числа зубьев зубчатых колес 1 и 3 равны (рис. 19.7). Соотношение скоростей звеньев в этих механизмах определяется выражением (19.12), а знак передаточного отношения $i_{13}^{(h)}$ находят по правилу стрелок. Так как $i_{13}^{(h)} = -1$, формула (19.12) преобразуется к виду

$$\omega_h = (\omega_1 + \omega_3)/2.$$

19.4. Планетарные зубчатые механизмы

Планетарные зубчатые механизмы представляют собой дифференциальные механизмы с остановленным центральным зубчатым колесом. Для их кинематического анализа можно воспользоваться

выражениями (19.10) и (19.11), приравняв в них скорость остановленного звена к нулю. Определим передаточное отношение i_{2h} в планетарном механизме с остановленным центральным колесом 1 (рис. 19.8, а). Тогда согласно формуле (19.10)

$$i_{21}^h = (\omega_2 - \omega_h) / (\omega_1 - \omega_h) = (\omega_2 - \omega_h) / -\omega_h = -\omega_2 / \omega_h + 1. \quad (19.14)$$

Так как $\omega_2 / \omega_h = i_{2h}$, то, преобразуя выражение (19.14), получим:

$$i_{2h} = 1 - i_{21}^h = 1 + z_1 / z_2. \quad (19.15)$$

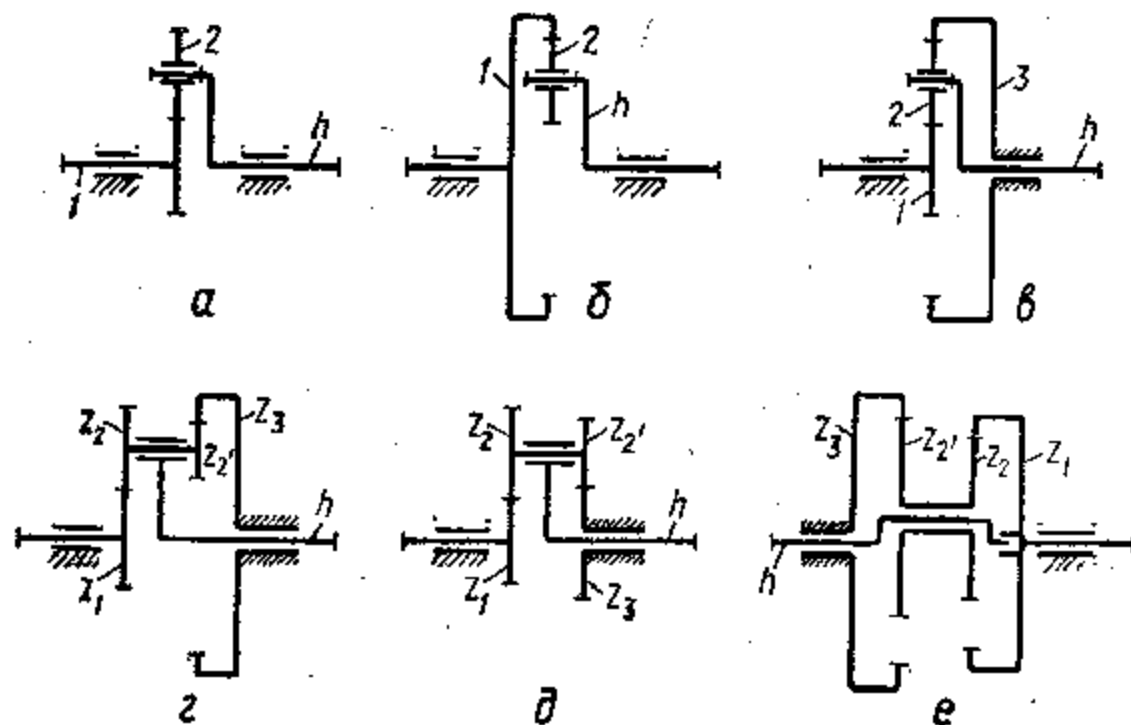
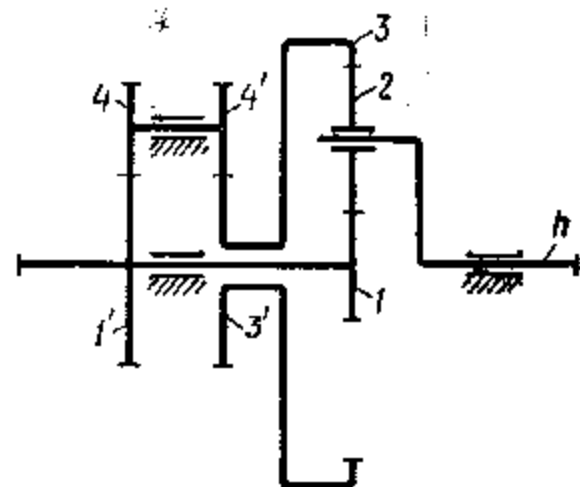
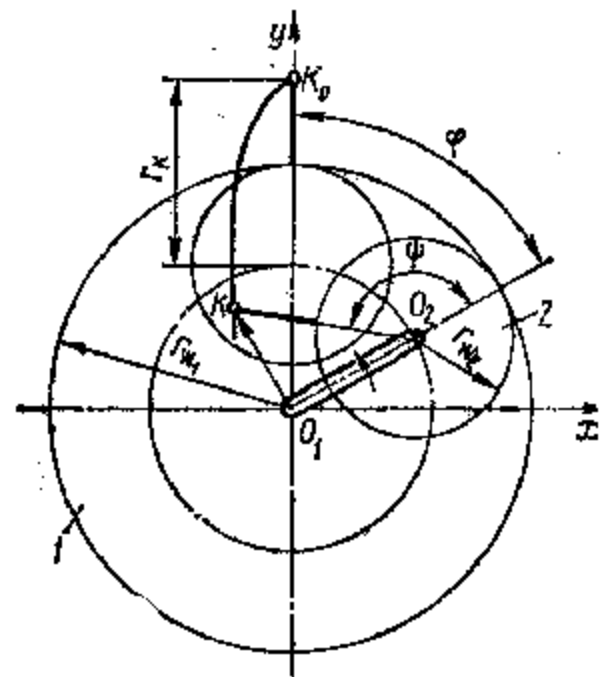


Рис. 19.8. Планетарные зубчатые механизмы

Рис. 19.9. Направляющий планетарный зубчатый механизм

Рис. 19.10. Замкнутый дифференциальный механизм



Аналогично для механизма с внутренним зацеплением колес 1 и 2 (рис. 19.8, б) имеем

$$i_{2h} = 1 - z_1 / z_2. \quad (19.16)$$

Передаточное отношение для планетарного механизма с двумя центральными колесами, из которых одно колесо 3 остановлено

(рис. 19.8, в), определится аналогично

$$i_{13}^h = (\omega_1 - \omega_h) / (\omega_3 - \omega_h) = (\omega_1 - \omega_h) / -\omega_h = -i_{1h} + 1; \quad (19.17)$$

$$i_{1h} = 1 - i_{13}^h = 1 + z_3 / z_1.$$

Используя формулу (19.17), получим передаточное отношение для планетарных механизмов с одним внешним и одним внутренним зацеплениями (рис. 19.8, г):

$$i_{1h} = 1 - i_{13}^h = 1 + z_2 z_3 / z_1 z_2'; \quad (19.18)$$

с двумя внешними (рис. 19.8, д) и двумя внутренними (рис. 19.8, е) зацеплениями двухвенцовых сателлитов с центральными колесами:

$$i_{1h} = 1 - i_{13}^{(h)} = 1 - z_2 z_3' / z_1 z_2'. \quad (19.19)$$

При исследовании направляющих планетарных зубчатых механизмов определяется функция положения заданной точки K сателлита 2 (рис. 19.9). Свяжем неподвижную систему координат x, y с неподвижным центральным колесом 1, входящим в зацепление с сателлитом 2. При повороте водила на угол φ точка K сателлита опишет циклическую кривую KK_0 . Радиус-вектор $\overline{O_1 K}$ этой точки определяется уравнением

$$\overline{O_1 K} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 K}. \quad (19.20)$$

Спроецируем эти векторы на оси координат:

$$x_K = (r_{\omega_1} - r_{\omega_2}) \sin \varphi - r_K \sin (\psi - \varphi); \quad (19.21)$$

$$y_K = (r_{\omega_1} - r_{\omega_2}) \cos \varphi + r_K \cos (\psi - \varphi),$$

где r_K — радиус точки K на сателлите; r_{ω_1} и r_{ω_2} — радиусы начальных окружностей центрального колеса и сателлита; ψ — угол поворота сателлита относительно водила.

При повороте водила на угол φ получим

$$\psi = i_{21}^h \varphi = \varphi z_1 / z_2. \quad (19.22)$$

При $r_K = r_{\omega_2}$ кривая KK_0 представляет собой гипоциклоиду, а при $i_{21}^{(h)} = 2$ гипоциклоида вырождается в прямую, определяемую уравнением

$$x = 0; \quad y = r_{\omega_1} \cos \varphi.$$

19.5. Замкнутые дифференциальные механизмы

Для определения передаточного отношения замкнутого дифференциального механизма (рис. 19.10) разомкнем кинематические цепи 4—1' и 4'—3' и рассмотрим собственно дифференциальный зубчатый механизм, для которого в соответствии с формулой (19.10) можно записать

$$i_{h3}^{(1)} = (\omega_h - \omega_1) / (\omega_3 - \omega_1); \quad i_{h1}^{(3)} = (\omega_h - \omega_3) / (\omega_1 - \omega_3). \quad (19.23)$$

Сложив эти равенства, получим

$$i_{h3}^{(1)} + i_{h1}^{(3)} = 1. \quad (19.24)$$

Подставив $i_{h1}^{(3)} = 1 - i_{h3}^{(1)}$ в формулу (19.23), найдем

$$\omega_h = i_{h1}^{(3)} \omega_1 + i_{h3}^{(1)} \omega_3. \quad (19.25)$$

Выражение для i_h , можно получить, разделив это уравнение на ω_1 :

$$\omega_h/\omega_1 = i_{h1} = i_{h1}^{(3)} \omega_1/\omega_1 + i_{h3}^{(1)} \omega_3/\omega_1 = i_{h1}^{(3)} + i_{h3}^{(1)} \cdot i_{31}, \quad (19.26)$$

где i_{31} — передаточное отношение механизма, замыкающего кинематическую цепь дифференциального механизма.

Пользуясь формулой (19.26), определяют передаточное отношение замкнутого механизма, если известны числа зубьев зубчатых колес. Так, для схемы на рис. 19.10 при известных $z_1, z_2, z_3, z_1, z_3, z_4, z_4'$

$$\left. \begin{aligned} i_{h1} &= 1/i_{1h}^{(3)} = 1/(1 - i_{13}^{(2)}) = 1/(1 + z_3/z_1); \\ i_{h3} &= 1/i_{3h}^{(1)} = 1/(1 - i_{31}^{(2)}) = 1/(1 + z_1/z_3); \\ i_{31} &= z_1 z_4 / z_3 z_4'; \\ i_{h1} &= (1/(1 + z_3/z_1)) + (1/(1 + z_1/z_3)) (z_1 z_4' / (z_3 z_4')). \end{aligned} \right\} \quad (19.27)$$

19.6. Волновые механизмы

При вращении генератора 1 волнового фрикционного механизма (рис. 19.11) гибкое колесо 2 диаметром d_w , обкатывается по жесткому колесу 3 диаметром d_w . Если обкатка осуществляется без скольжения, колесо 2 должно повернуться на угол, определяемый разностью длин окружностей гибкого и жесткого колеса. При разности диаметров жесткого и гибкого колес $d_w - d_w = W_0$ разность длин окружностей гибкого и жесткого колес будет πW_0 . При невращающемся гибком колесе жесткое колесо повернется в направлении вращения генератора на угол $\varphi_3 = 2\pi W_0/d_w$. Передаточное отношение в этих случаях будет:

при невращающемся гибком колесе

$$i_{13}^{(2)} = \omega_1/\omega_3 = \varphi_2/\varphi_3 = d_w/W_0 = d_w/(d_w - d_w); \quad (19.28)$$

при неподвижном жестком колесе

$$i_{12}^{(3)} = -d_w/W_0 = -d_w/(d_w - d_w). \quad (19.29)$$

В зубчатых волновых механизмах гибкие колеса имеют наружные, а жесткие — внутренние зубья. Так как отношение диаметров можно заменить отношением чисел зубьев, то передаточное отношение для рассматриваемых механизмов будет:

$$i_{13}^{(2)} = z_3/(z_3 - z_2); \quad (19.30)$$

$$i_{12}^{(3)} = -z_2/(z_3 - z_2). \quad (19.31)$$

19.7. Зубчато-рычажные механизмы

В зависимости от назначения зубчато-рычажного механизма (рис. 19.12) и с целью определения его кинематических параметров необходимо найти функцию $s_B = s(\varphi)$, если механизм *передаточный*, либо функцию положения точки шатуна M , если механизм *направляющий*. Для обоих случаев необходимо определить координаты точки M сателлита планетарного зубчатого механизма в функции от поворота водила 1, являющегося входным звеном механизма.

Радиус-вектор O_0M точки M определяется уравнением

$$\overline{O_2M} = \overline{O_0O_2} + \overline{O_2M}. \quad (19.32)$$

Уравнение траектории точки M в прямоугольных координатах

$$\begin{aligned} x_M &= (r_{w_0} + r_{w_2}) \sin \varphi - r_M \sin(\varphi + \psi); \\ y_M &= (r_{w_0} + r_{w_2}) \cos \varphi + r_M \cos(\varphi + \psi), \end{aligned} \quad (19.33)$$

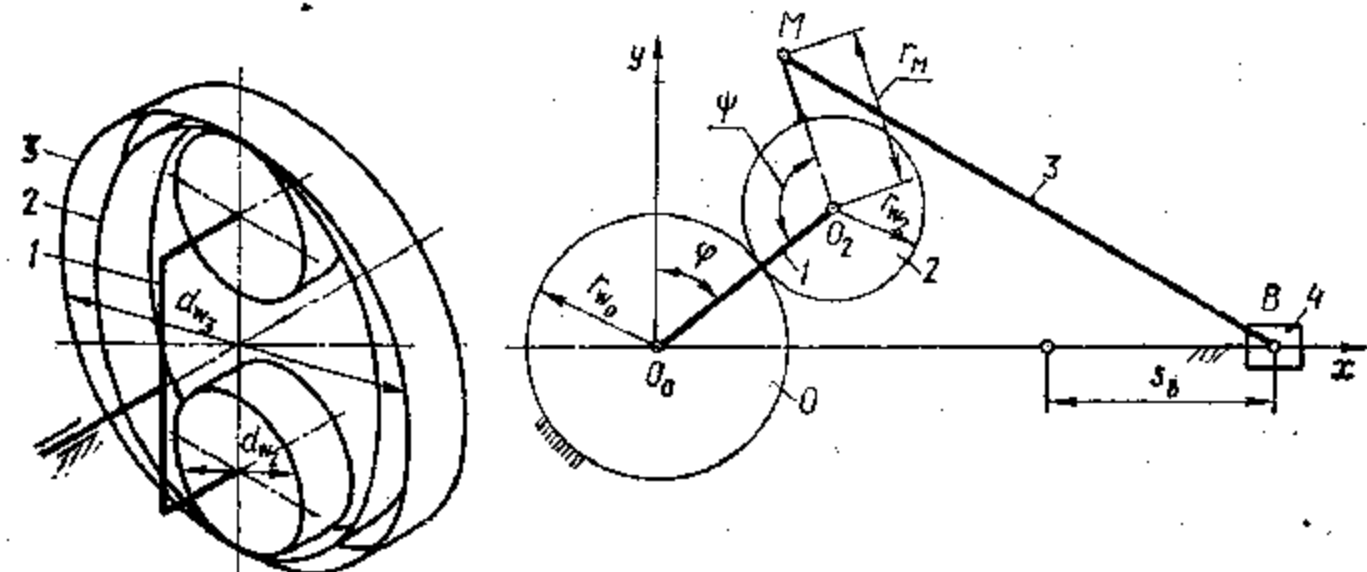


Рис. 19.11. Волновой механизм

Рис. 19.12. Зубчато-рычажный механизм

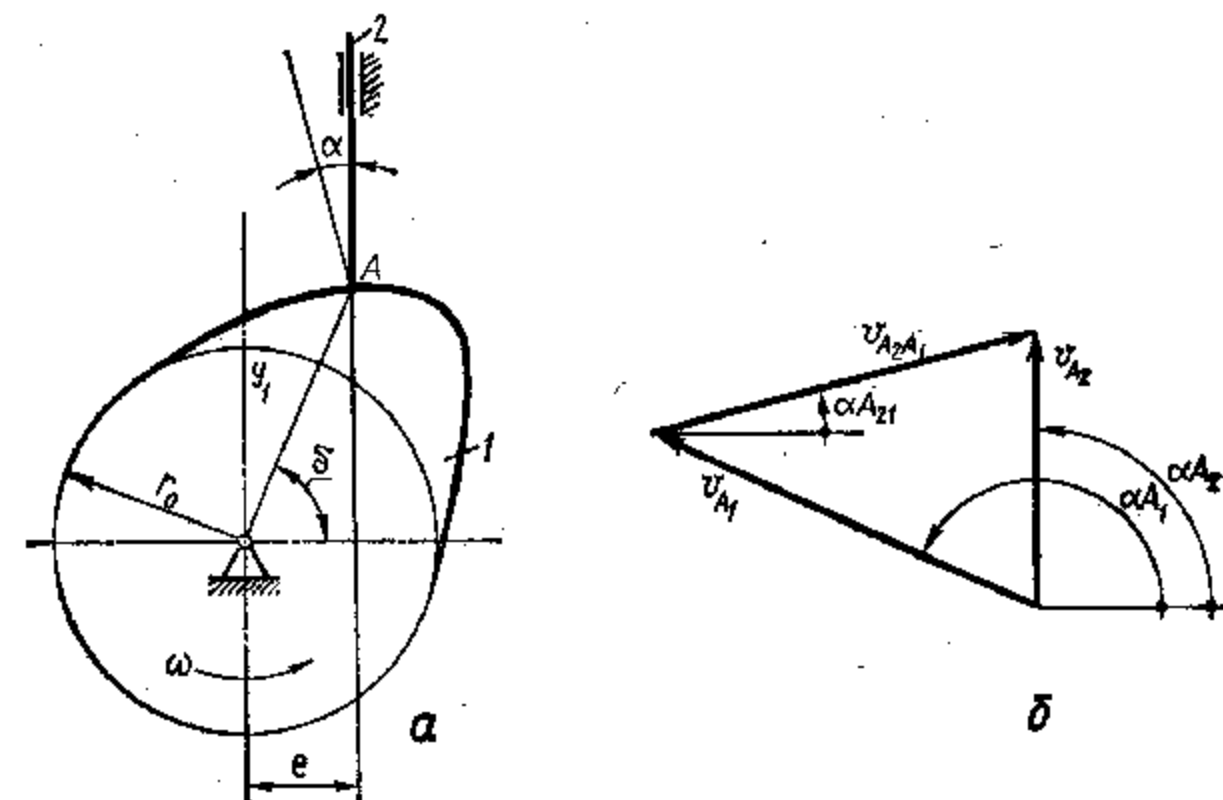


Рис. 19.13. Кулачковый механизм

где ψ — угол поворота сателлита 2 относительно водила 1 при повороте его на угол φ , $\psi = i_{20}^{(1)}\varphi = \varphi z_0/z_2$.

Дальнейшее исследование осуществляется так же, как для кривошипно-ползунного механизма с кривошипом O_2M (см. гл. 16).

19.8. Кулачковые механизмы

При известных профиле кулачка и основных размерах механизма необходимо определить функцию положения, скорости и ускорения выходного звена. Кинематический анализ кулачкового механизма рассмотрим на примере механизма с поступательно движущимся толкателем, минимальным радиусом r_0 и эксцентриситетом e (рис. 19.13, а). Запишем уравнение, связывающее скорости точек профиля кулачка и толкателя (рис. 19.12, б),

$$\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{A_2A_1}, \quad (19.34)$$

где \bar{v}_{A_1} и \bar{v}_{A_2} — векторы скоростей точки контакта A кулачка 1 и толкателя 2; $v_{A_2A_1}$ — вектор относительной скорости точки A_2 толкателя относительно точки A_1 кулачка.

Представим это векторное уравнение в виде системы

$$v_{A_2} \cos \alpha_{A_2} = v_{A_1} \cos \alpha_{A_1} + v_{A_2A_1} \cos \alpha_{A_{21}}$$

$$v_{A_2} \sin \alpha_{A_2} = v_{A_1} \sin \alpha_{A_1} + v_{A_2A_1} \sin \alpha_{A_{21}}$$

решение которой может быть выполнено посредством операторной функции СИСТЕМА ($v_{A_1}, \alpha_{A_1}, \alpha_{A_2}, \alpha_{A_{21}}; v_{A_2}, v_{A_2A_1}$).

Вектор $v_{A_2} = \omega_1 r_1$ известен по численному значению и направлению. Угол $\alpha_{A_1} = \delta + \pi/2$, если направление вращения кулачка совпадает с показанным на рис. 19.13, а, и $\alpha_{A_1} = \delta - \pi/2$ — при вращении кулачка в противоположную сторону. Угол α_{A_2} положителен, если он отсчитывается в направлении вращения кулачка (см. 19.13, б), и отрицателен, если отсчитывается в обратную сторону. Угол $\alpha_{A_{21}}$ равен углу давления α , если направление скорости вращения кулачка совпадает с показанным на схеме (см. рис. 19.3, а), и $\alpha_{A_{21}} = \alpha - \pi$ — при вращении кулачка в противоположную сторону.

Функция ускорения толкателя может быть получена из функции скоростей при использовании операторной функции дифференцирования.

20. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМОВ

20.1. Классификация сил

Силы, действующие при работе механизмов на их звенья, делятся на внутренние и внешние. Под внутренними силами понимают реакции связей, возникающих в кинематических парах. Все другие силы, не относящиеся к реакциям связей, образуют систему внешних сил. Нагружение звеньев механизма может иметь различный характер. При точечном контакте звеньев оно выражается в действии сосредоточенной силы, в других случаях — нагрузка распределяется по линии, поверхности либо объему звена. Например, сила тяжести представляет собой нагрузку, распределенную по всему объему звена, сила гидродинамического сопротивления, возникающая при движении звена в жидкой среде, представляет собой нагрузку, распределенную по поверхности звена.

Соблюдение соответствия расчетной схемы действительной системе действующих нагрузок необходимо при расчетах на прочность. При решении задач динамики (определение реактивных усилий и законов движения звеньев механизма под действием приложенных сил) распределенные нагрузки заменяют эквивалентными силовыми факторами. В частности, это относится к силам, которые характеризуют инерционность звеньев.

В зависимости от источника внешнего силового воздействия силы делятся на движущие и силы сопротивления движению. Движущие силы (моменты) появляются при преобразовании какого-либо вида энергии в механическую энергию движения звеньев механизма. Силы сопротивления движению появляются при преобразовании механической энергии движущегося звена в другие виды энергии, как результат взаимодействия его с другим звеном механизма (силы непроизводительного сопротивления) либо с другими механическими системами. Если сила сопротивления является результатом взаимодействия звена с другой механической системой, то она называется силой производственного сопротивления. Например, в компрессорных машинах кинетическая энергия движущихся звеньев преобразуется в потенциальную энергию сжатого газа, в металлорежущих станках — в механическую энергию разрушения обрабатываемого материала.

Одними из важнейших в категории сил непроизводительного сопротивления являются силы трения, местом приложения которых являются элементы кинематических пар. Вопрос о природе трения разбирается подробно в курсе физики: процесс трения представляется как совокупность сложных физических, химических и механических явлений, происходящих при относительном движении тел.

20.2. Движущие силы

Для приведения механизма в движение к ведущим звеньям необходимо приложить движущие моменты T_d или силы F_d , направленные в сторону движения звена или точек приложения сил. Движущие силы и моменты за время своего действия совершают положительную работу. В механизмах циклического действия они имеют периодический характер. Движущие силы создаются двигателями, которые осуществляют преобразование какого-либо вида энергии в механическую работу. В тепловых двигателях (внутреннего сгорания, паровые и газовые турбины) в механическую работу преобразуется тепловая энергия, в электродвигателях — электрическая энергия, в пружинных двигателях — потенциальная энергия деформированной пружины.

Тип двигателя определяет закон изменения движущей силы и момента. Они по-разному изменяются в зависимости от скорости рабочего звена. Разные двигатели имеют различные механические характеристики $T_d = T_d(\omega)$ (рис. 20.1). Данная механическая характеристика соответствует определенному уровню преобразуемой энергии. Например, при увеличении количества сжигаемого топлива двигатель внутреннего сгорания имеет механическую характеристику, расположенную выше, чем приведенная на рис. 20.1, е. Уравнения механических характеристик используют при описании воздействия двигателя на механизм.

20.3. Силы производственных и непроизводственных сопротивлений

Важной категорией внешних сил являются силы $F_{п.с}$ и моменты $T_{п.с}$ сил производственного сопротивления, которые приложены к исполнительным звеньям механизмов. Так как механизмы предназначены для преодоления сил производственного сопротивления, то значение и направление этих сил определяются технологическим процессом. Например, в металлорежущих станках силой производственного сопротивления является сила резания, приложенная к режущему инструменту; в компрессорных машинах — сила давления сжимаемого газа, в транспортирующих машинах — силы сопротивления перемещению груза. Работа сил производственного сопротивления по отношению к работе движущих сил является отрицательной. Силы производственного сопротивления, также как и движущие силы, зависят от кинематических параметров. Эти зависимости являются механическими характеристиками рабочих машин (рис. 20.2), представляющими функциональную зависимость $T_{п.с} = T_{п.с}(\omega)$.

К категории внешних сил относятся силы и моменты непроизводственного сопротивления, которые могут действовать на любые звенья механизма и на преодоление которых затрачивается дополнительная работа: силы трения в кинематических парах, сопротивления движению звеньев со стороны среды (воздух, жидкость и т. п.),

тяжести, инерции и т. д. Работа сил непроизводственного сопротивления на разных фазах движения бывает как положительной, так и отрицательной. Например, если при работе механизма его звенья поднимаются в вертикальной плоскости, то силы тяжести звеньев совершают отрицательную работу, если опускаются — положительную.

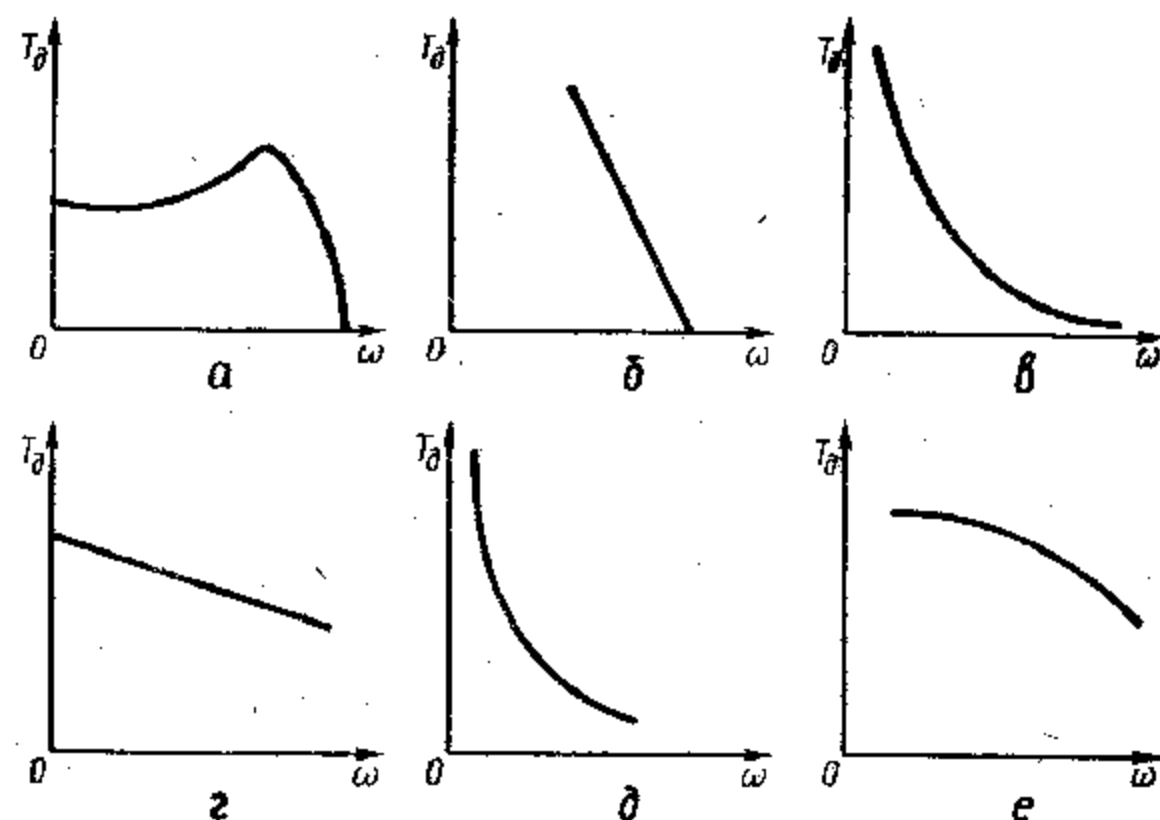


Рис. 20.1. Механические характеристики двигателей: электродвигатели асинхронные (а), постоянного тока с параллельным (б) и последовательным (в) возбуждением; механические пружинные (а), паровые (б), внутреннего сгорания (е)

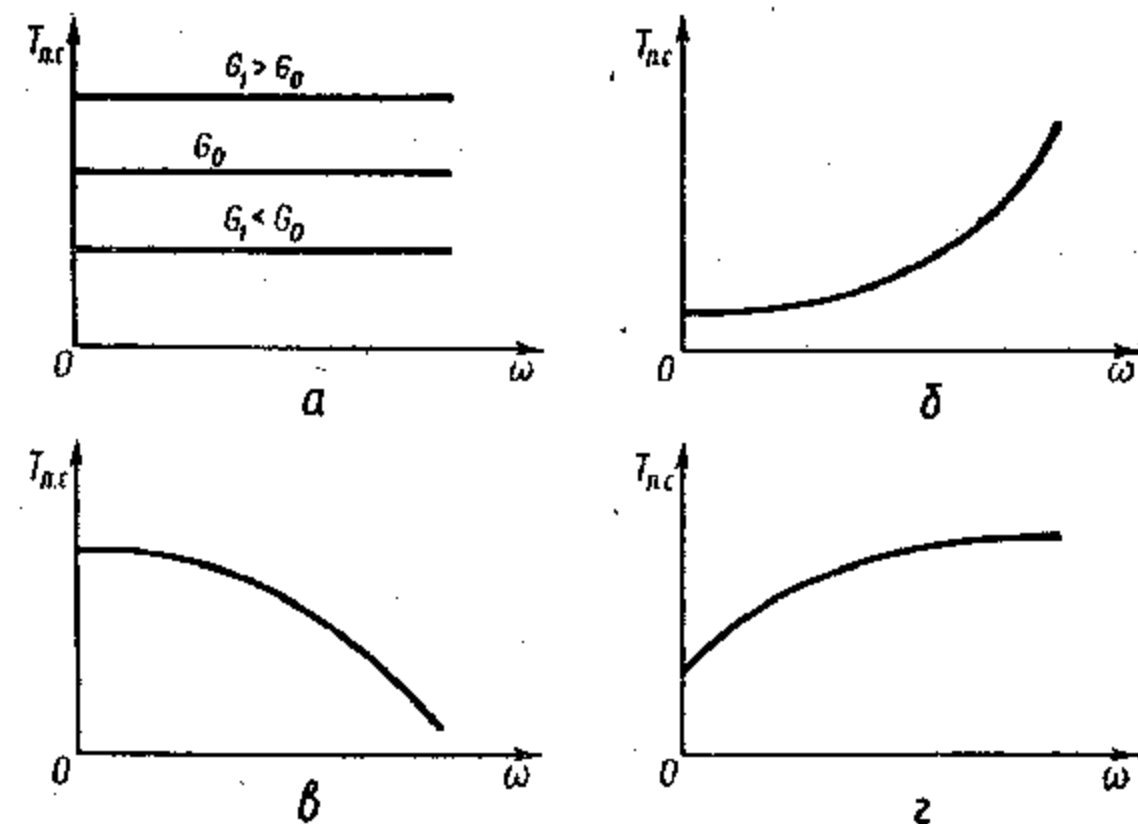


Рис. 20.2. Механические характеристики: грузоподъемной машины (а), центробежного насоса (б), лифта (в), бетономешалки (г)

Работа сил трения всегда отрицательна относительно работы движущих сил. В зависимости от типа кинематической пары, характера относительного движения образующих ее звеньев сопротивление движению оказывают силы трения скольжения и силы трения качения. Так как силы трения препятствуют относительному движению звеньев, то они действуют при рабочем и холостом ходе машин. Во многом эффективность конструкции механизма определяется затратами энергии на преодоление сил трения.

20.4. Силы инерции звеньев

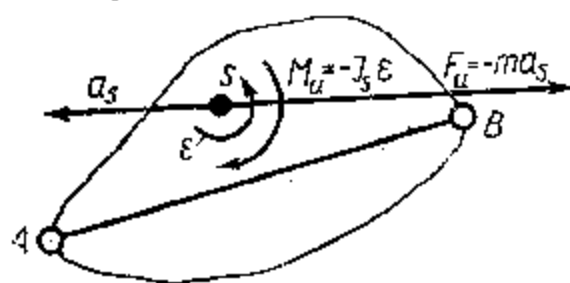
Инерционность звеньев способствует или препятствует движению рабочих органов механизмов. В соответствии с известными положениями динамики материального тела, рассматриваемого как системы материальных точек, силы инерции учитываются при решении дифференциальных уравнений движения звеньев, решение которых позволяет определить истинный закон движения. При инженерных расчетах часто вместо учета истинного закона изменения внешних сил при силовом расчете движущегося звена решением дифференциальных уравнений движения учитывают действие нагрузок на звено в конкретных его положениях, придавая уравнениям движения форму уравнений статики. Этот расчет проводится в соответствии с принципом Д'Аламбера (см. прил.): механическая система может считаться находящейся в равновесии, если ко всем действующим на нее силам добавлены силы инерции. Следовательно, для выполнения силового расчета механизма необходимо определить силы и моменты сил инерции его звеньев для рассматриваемых их положений.

При проведении динамических расчетов механизмов всегда следует помнить, что силы инерции и их моменты только условно считаются приложенными к рассматриваемому звену, чтобы сделать систему равновесной и получить возможность использовать уравнения статики. Поэтому уравнения равновесия с включением сил инерции лишены физической сущности и дают только математическое решение задачи.

Для звена, совершающего неравномерное движение, главный вектор внешних сил, действующих на рассматриваемое звено, равен и противоположно направлен главному вектору сил инерции звена. Если кроме сил звено испытывает воздействие пар сил, то главный момент сил, действующих на звено, равен и противоположно направлен главному моменту сил инерции звена.

Для звена, совершающего плоскопараллельное движение (рис. 20.3), элементарные силы инерции можно привести к главному вектору сил инерции и главному моменту сил инерции:

$$\bar{F}_u = -m\bar{a}_s \text{ и } \bar{M}_u = -J_s\bar{\epsilon}, \quad (20.1)$$



дифференциальных уравнений движения учитывают действие нагрузок на звено в конкретных его положениях, придавая уравнениям движения форму уравнений статики. Этот расчет проводится в соответствии с принципом Д'Аламбера (см. прил.): механическая система может считаться находящейся в равновесии, если ко всем действующим на нее силам добавлены силы инерции. Следовательно, для выполнения силового расчета механизма необходимо определить силы и моменты сил инерции его звеньев для рассматриваемых их положений.

Рис. 20.3. Приведение сил инерции

где m и J_s — соответственно масса и момент инерции звена; \bar{a}_s и $\bar{\epsilon}$ — векторы линейного ускорения центра масс и углового ускорения звена.

Если звено движется поступательно, то $\epsilon = 0$, а следовательно, $M_u = 0$, и силы инерции приводятся только к главному вектору сил инерции \bar{F}_u . Если звено совершает вращательное движение вокруг точки, совпадающей с центром масс S , то $\bar{a}_s = 0$, а следовательно, $\bar{F}_u = 0$, и силы инерции приводятся к главному моменту сил инерции M_u .

20.5. Силы трения скольжения

Трение представляет собой явление сопротивления относительному перемещению, возникающее между двумя звеньями на элементах кинематических пар. По характеру относительного движения различают трение скольжения и качения, по состоянию поверхностного слоя элементов пары и наличию смазочного материала — трение без смазывания, граничное и жидкостное. Эти факторы и многие другие влияют на силу трения, которая направлена в сторону, противоположную направлению относительной скорости. Сила трения \bar{F}_T согласно формуле Кулона (см. прил.) зависит от нормальной составляющей \bar{F}_n нагрузки, действующей на кинематическую пару, и определяется через коэффициент трения f :

$$F_T \leq F_n f. \quad (20.2)$$

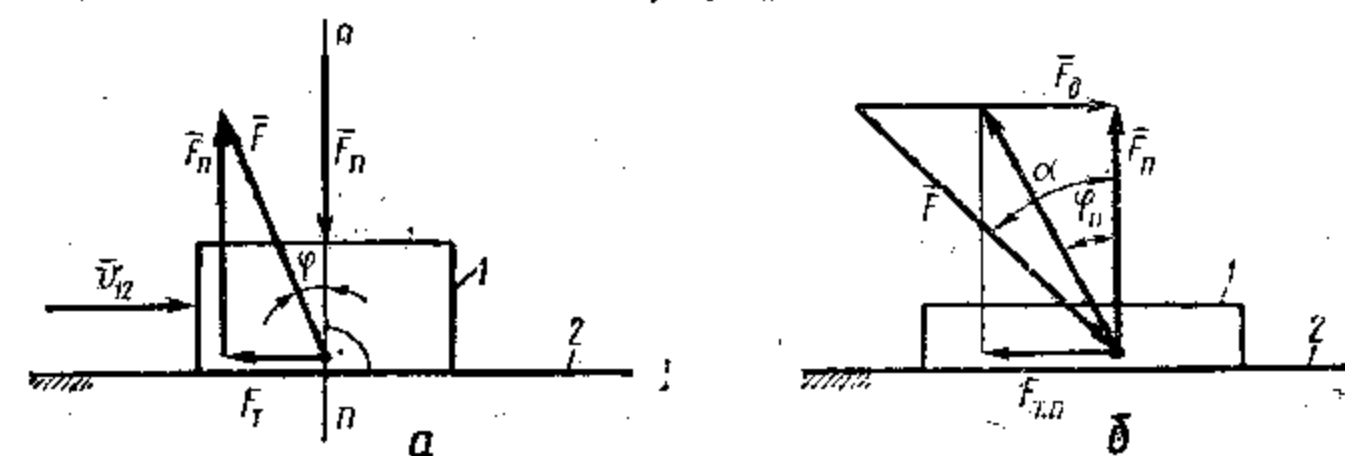


Рис. 20.4. Трение на плоскости

Из рис. 20.4, а следует, что $f = F_T/F_n = \text{tg } \varphi$. Угол φ называется *углом трения*. Коэффициенты трения определяются экспериментально для различных сочетаний трущихся материалов и условий трения и приводятся в справочниках. Различают *коэффициент трения покоя* $f_n = \text{tg } \varphi_n$, определяющий предельную силу трения $F_{T,n}$ в момент начала движения, и *коэффициент трения движения* $f_d < f_n$. Пределы изменения коэффициента трения для материалов общемашиностроительного применения широки: $f_n = 0,1 \dots 0,5$; $f = 0,05 \dots 0,2$.

Если на звено 1 действует сила \bar{F} (рис. 20.4, б), направленная под углом α относительно нормали к поверхности контакта его со

звеном 2, то составляющая этой силы \bar{F}_d , сдвигающая звено 1, до момента начала движения будет уравниваться силой трения $\bar{F}_{т.п.}$, зависящей от нормальной составляющей \bar{F}_n :

$$F_{т.п.} = f_n F_n = f_n F \cdot \cos \alpha = F \cdot \sin \alpha = F_d \quad (20.3)$$

Только когда движущая составляющая $F \sin \alpha$ силы \bar{F} будет больше предельной силы трения, т. е. когда $F_d = F \sin \alpha > F_{т.п.} = f_n F \cos \alpha$, наступит движение. Следовательно, условие движения будет

$$\sin \alpha / \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha > f_n = \operatorname{tg} \varphi_n.$$

Формула (20.2) устанавливает простейшую связь между силами нормальной и трения, удобную для инженерных расчетов, и используется в большинстве случаев конструктивных исполнений кинематических пар, если применять *приведенный коэффициент трения* f' :

$$F_t \leq f' F_n \text{ и } f' = \operatorname{tg} \varphi'. \quad (20.4)$$

Приведенный коэффициент трения определяют теоретически и экспериментально через коэффициент f для конкретных кинематических пар со сложными элементами.

20.6. Силы трения качения

В высшей кинематической паре, находящейся в покое, внешняя нагрузка и реакция расположены на одной линии (рис. 20.5, а). При относительном качении сопротивление движению обусловлено эффектом молекулярного сцепления и трением при относительном скольжении элементов в пределах упругих деформаций в зоне контакта. Благодаря этим явлениям при качении реакция \bar{F}_n звена 1 на звено 2 (б) смещается в направлении перекатывания на некоторое расстояние k относительно вектора нагружающей силы \bar{F} . Для осуществления равномерного качения движущий момент M_d должен быть равен моменту M_t сопротивления качению

$$M_d = M_t = k F_n \quad (20.5)$$

Коэффициент трения качения имеет размерность длины и в зависимости от сочетания материалов и качества контактирующих поверхностей изменяется в широких пределах (для стали ориентировочно $k = 0,001 \dots 0,005$ см).

При относительном качении под действием силы F_d (б), создающей движущий момент, возникает сила трения \bar{F}_t на элементах кинематической пары, направленная в сторону, противоположную движению. Предельное значение этой силы $\bar{F}_{т.п.}$ в соответствии с формулой (20.4) будет $F_{т.п.} = f_n F_n = F_d$, а движущий момент согласно формуле (20.5) $M_d = F_d h = f_n F_n h = k F_n$. В зависимости от соотношения $f_n \approx k/h$ возможны: равномерное качение ($f_n > k/h$), одновременное качение и скольжение ($f_n = k/h$) и только скольжение ($f_n < k/h$).

Пользуясь понятием приведенного коэффициента трения, можно сопротивление движению при качении выразить через силу трения. Из условия (20.5) при $F_d h = k F_n$ получим

$$F_t = F_d = (k/h) F_n = f' F_n \text{ и } f' = k/h. \quad (20.6)$$

20.7. Трение в низших кинематических парах

Для различных видов кинематических пар сила трения и момент от сил трения при одинаковой нормальной силе \bar{F}_n зависят от значения приведенного коэффициента трения. Его значение определяется формой и расположением элементов пары.

Рассмотрим определение приведенного коэффициента трения f' в поступательной кинематической паре, образованной звеньями 1 и 2 (рис. 20.6), контактирующими по произвольной цилиндрической поверхности. Радиус поверхности ρ (β) длиной l является функцией угла β , образованного радиусом ρ и вектором нормальной силы $d\bar{F}_n$. Эта сила, являющаяся реакцией в кинематической паре, создает на поверхности контакта давление $p(\beta)$. Тогда элементарная сила трения на элементе $ds = \rho(\beta) d\beta$, значение которой определяется по формуле (20.2), будет

$$dF_t = f dF_n = f p(\beta) l ds = f p(\beta) l \rho(\beta) d\beta, \quad (20.7)$$

а результирующая сила трения

$$F_t = f l \int_{-\beta_1}^{\beta_2} p(\beta) \rho(\beta) d\beta. \quad (20.8)$$

Для кинематической пары с элементами в виде поверхности круглого цилиндра (рис. 20.7, а) $\rho(\beta) = r = \text{const}$. Если пара неприрабатанная, то принимают равномерное распределение давления по поверхности контакта. Тогда из условия равновесия звена 1 (при

$2\beta = \pi$) $F = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p r l \cos \beta d\beta = p l d$ получим $p(\beta) = p = F/l d$. После подстановки значений $p(\beta)$ и $\rho(\beta)$ в формулу (20.8) получим

$$F_t = f F l \pi r / l d = f \pi F / 2 = f' F \text{ и } f' = (\pi/2) f. \quad (20.9)$$

Для приработанной пары принимают косинусональный закон $p(\beta) = p_0 \cos \beta$. Тогда получим

$$F_t = f r l p_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta d\beta = 2 f r l p_0, \quad (20.10)$$

где p_0 — максимальное давление на элементарном участке поверхности.

Из условия равновесия звена 1

$$-F + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p l \cos \beta ds = -F + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 l r \cos^2 \beta d\beta = 0;$$

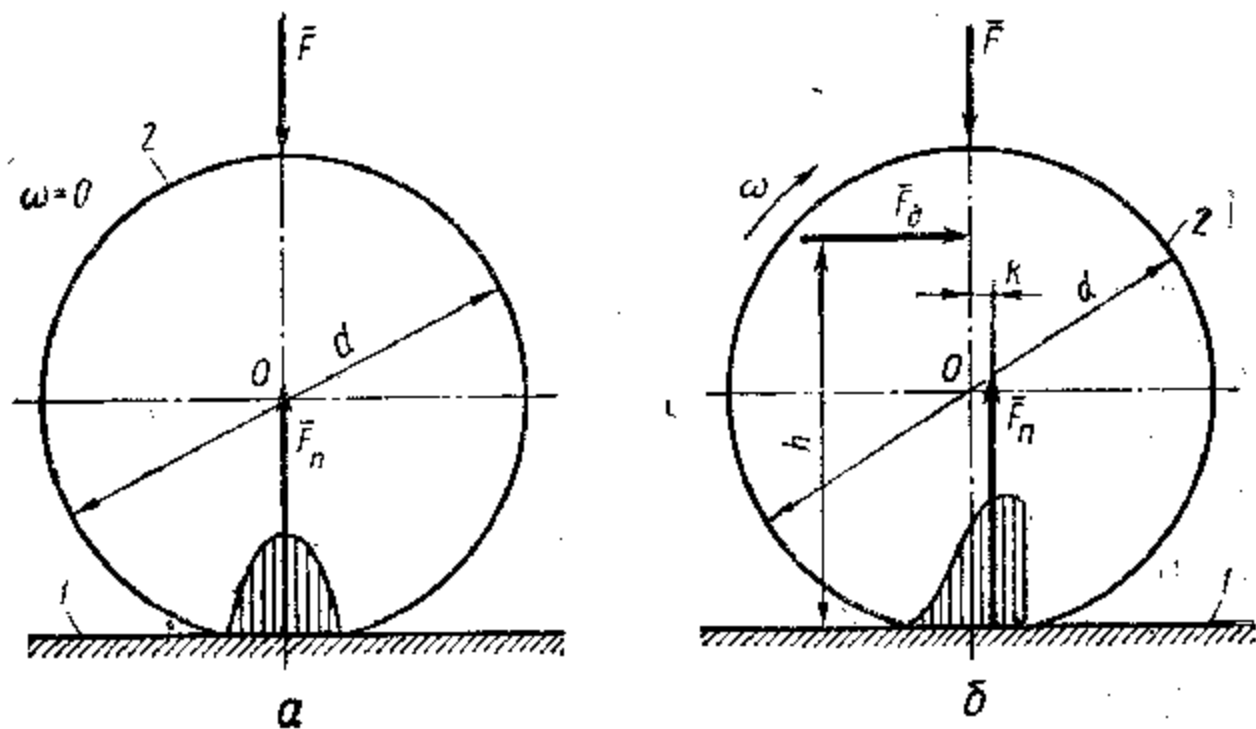


Рис. 20.5. Трение качения

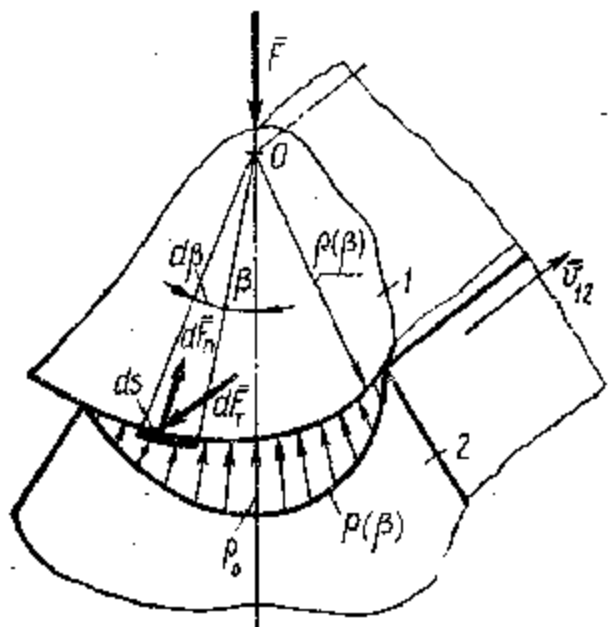
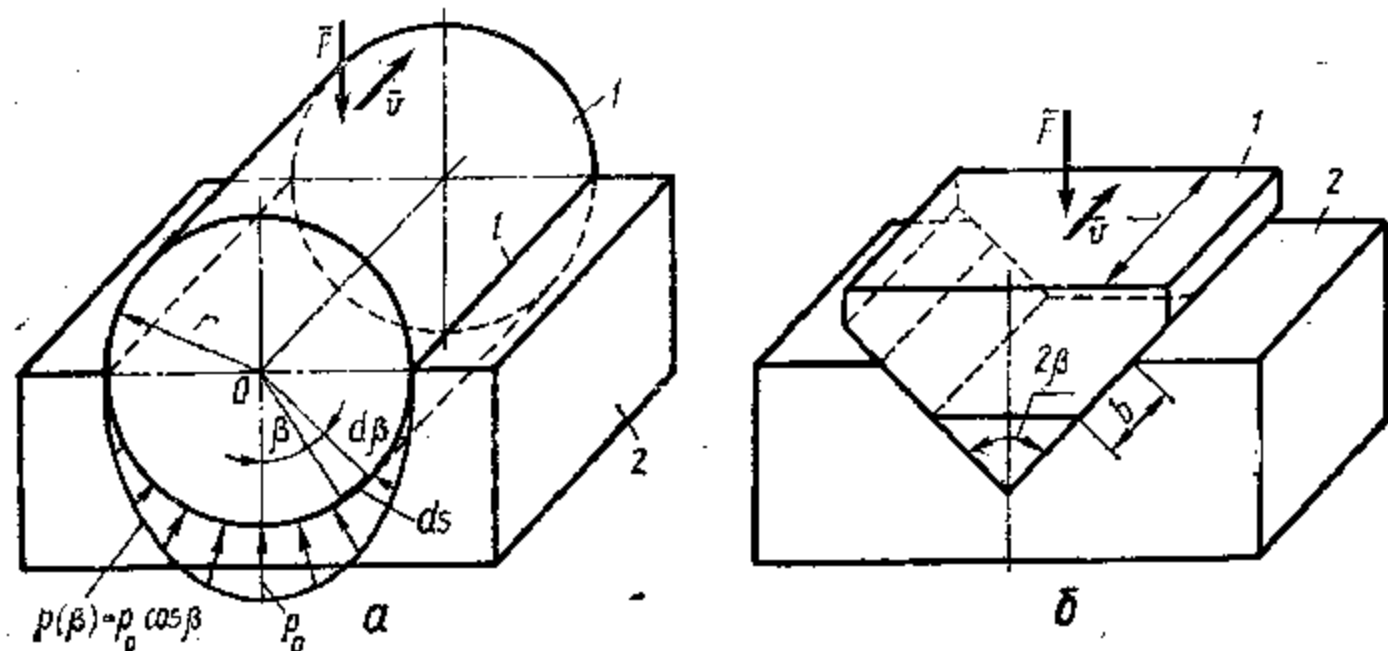


Рис. 20.6. Определение приведенного коэффициента трения

Рис. 20.7. Трение в поступательной паре



после интегрирования, учитывая, что $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = \pi/2$, найдем

$$\rho_0 = 2F/(\pi lr). \quad (20.11)$$

Подставляя значение ρ_0 в формулу (20.10), получим

$$F_T = (4/\pi) fF = f'F \text{ и } f' = (4/\pi) f. \quad (20.12)$$

Для пары с элементами в виде треугольных направляющих (б) имеем $\rho(\beta) = F/(2lb \sin \beta)$ и, принимая $\rho(\beta) = 2b$, согласно формуле (20.8)

$$F_T = 2fFbl/(2lb \sin \beta) \text{ и } f' = f/\sin \beta. \quad (20.13)$$

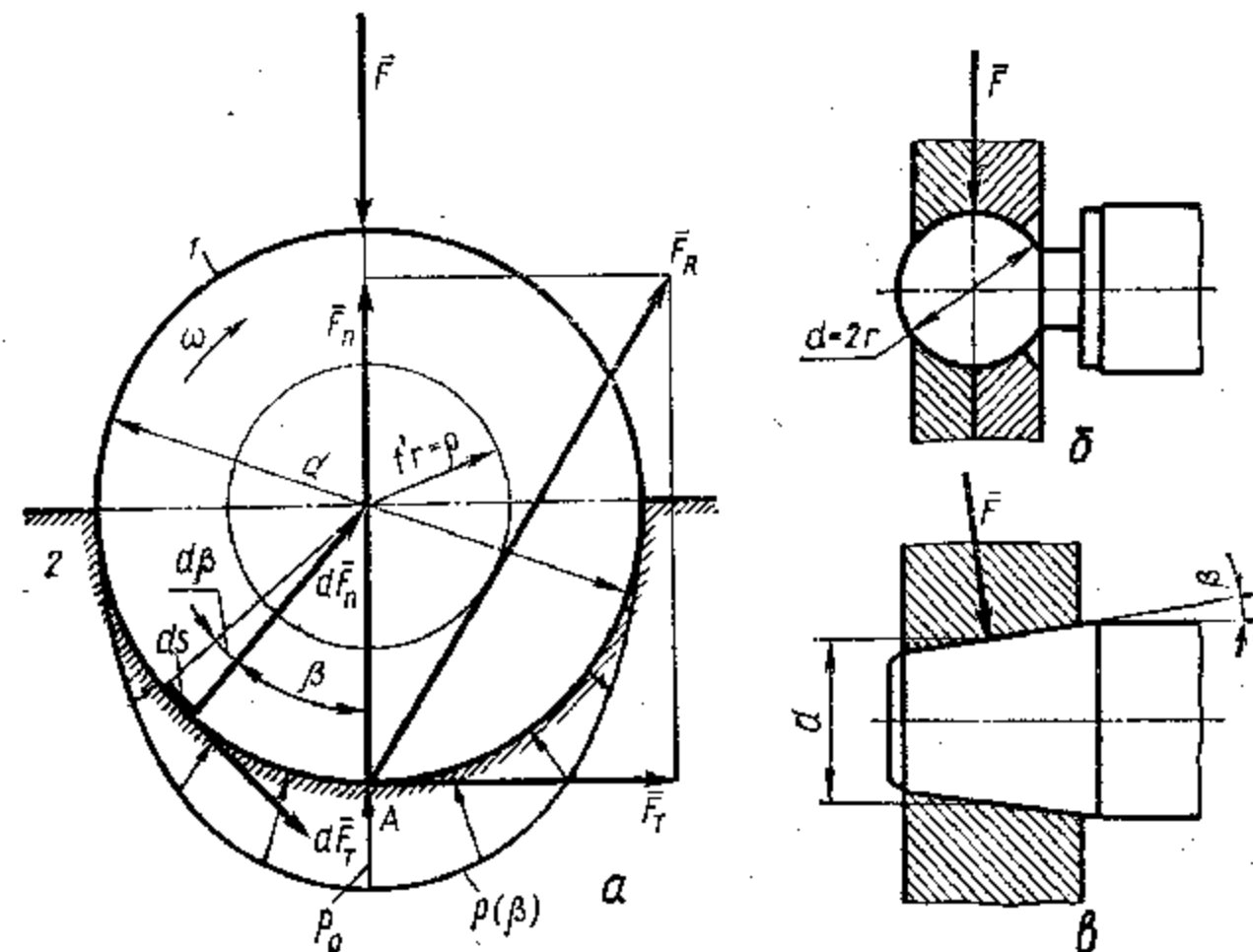


Рис. 20.8. Трение во вращательной паре при действии радиальной силы

Во вращательных кинематических парах элементами являются плоскости или цилиндрические поверхности с образующей произвольной формы. Для пары с элементами в виде поверхности круглого цилиндра (рис. 20.8, а), нагруженной радиальной силой \bar{F} , суммарная сила трения определяется так же, как и в случае поступательной пары с такими же элементами, по формулам (20.9) и (20.12). Наличие силы трения \bar{F}_T приводит к отклонению суммарной силы $\bar{F}_R = \bar{F}_n + \bar{F}_T$ от направления силы \bar{F} , действующей на соединение. Сила \bar{F}_R будет касаться окружности радиуса $\rho = f'r$, называемой *кругом трения*, и направлена так, что своим действием будет препятствовать вращению элементов кинематической пары относительно друг друга. Для кинематических пар с элементами в виде сферических (рис. 20.8, б) и конических поверхностей (рис. 20.8, в)

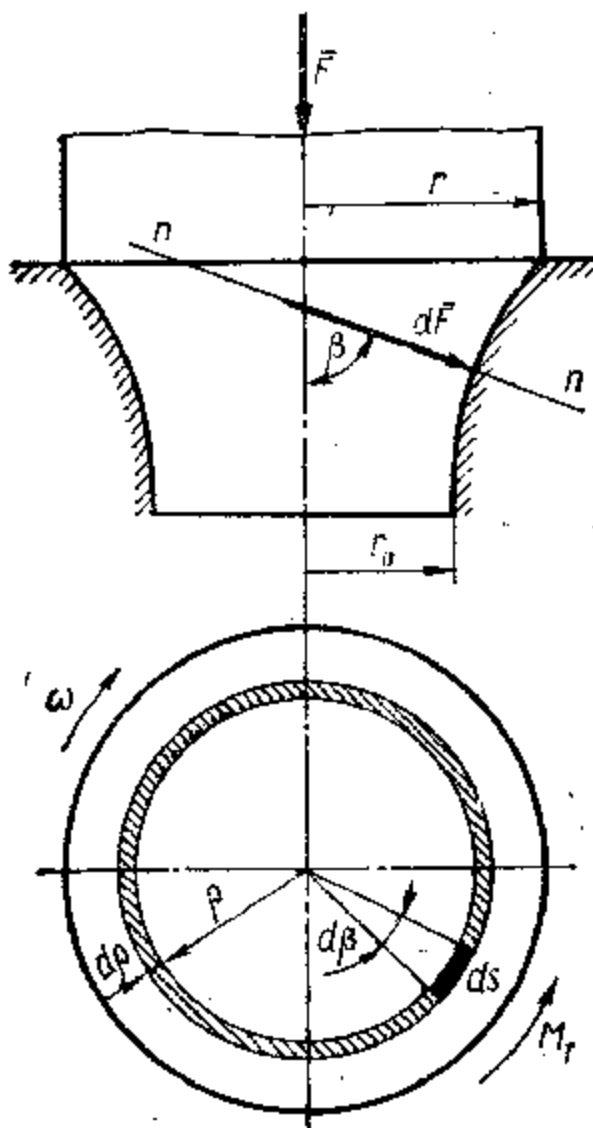


Рис. 20.9. Трение во вращательной паре при действии осевой силы

приведенные коэффициенты трения будут соответственно $f'_e = 1,27f$ и $f'_k = f'/\cos \beta$. Момент сил трения, который необходимо преодолеть при вращении кинематической пары, будет

$$M_\tau = 0,5F_r d = 0,5f'F_n d. \quad (20.14)$$

При нагружении кинематической пары осевой силой (рис. 20.9) на элементарную площадку ds будет действовать сила $dF = p(\beta) \times \rho(\beta) d\beta$, а элементарный момент трения составит $dM_\tau = f\rho dF = f\rho(\beta)\rho^2 d\rho d\beta$. Полный момент трения — $M_\tau = f \int_0^{2/\pi} d\beta \int_{r_0}^r \rho(\beta)\rho^2 \times d\rho = 2\pi f \int_{r_0}^r \rho(\beta)\rho^2 d\rho$. Для кинематической пары с элементом в виде плоского кольца $\rho = F/(\pi(r^2 - r_0^2))$, а момент трения

$$M_\tau = 2\pi f F / (\pi(r^2 - r_0^2)) \int_{r_0}^r \rho^2 d\rho = fF (2(r^3 - r_0^3) / (3(r^2 - r_0^2))) = f'F, \quad (20.15)$$

где $f' = f(2/3)(r^3 - r_0^3)/(r^2 - r_0^2)$.

Для пары с элементом в виде плоского круга (при $r_0 = 0$) получим

$$M_\tau = 2fFr/3 \text{ и } f' = 2f/3. \quad (20.16)$$

Для кинематической пары с элементами в виде конической поверхности

$$f'_k = f'/\sin \beta = 2f/(3 \sin \beta). \quad (20.17)$$

20.8. Трение в высших кинематических парах

Звенья, образующие высшие кинематические пары, совершают плоскопараллельное и пространственное движение. В этих случаях наряду с трением скольжения имеет место и трение качения. Сопротивление качению, как указывалось ранее, оценивают моментом пары сил трения качения по формуле (20.5) или силой по формуле (20.6). Для вращательных высших кинематических пар с многопарным контактом (рис. 20.10, а) взаимодействие поверхностей качения может быть описано следующим образом. При действии на звено 1 радиальной силы \bar{F} нагрузки на элементах пар, образован-

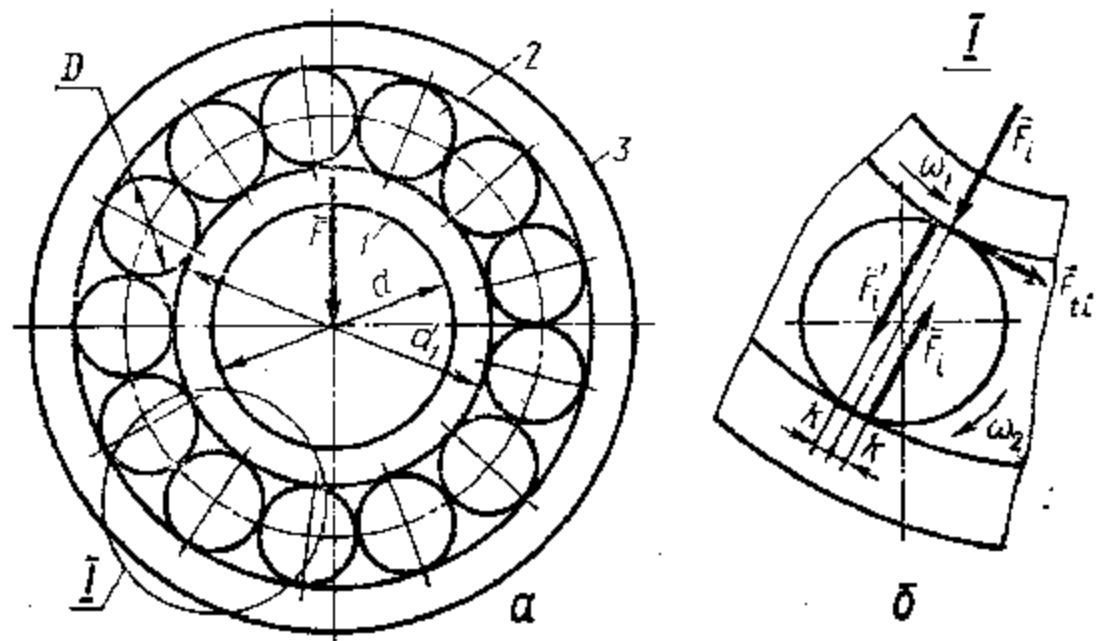


Рис. 20.10. Трение качения во вращательной паре с многопарным контактом при действии радиальной силы

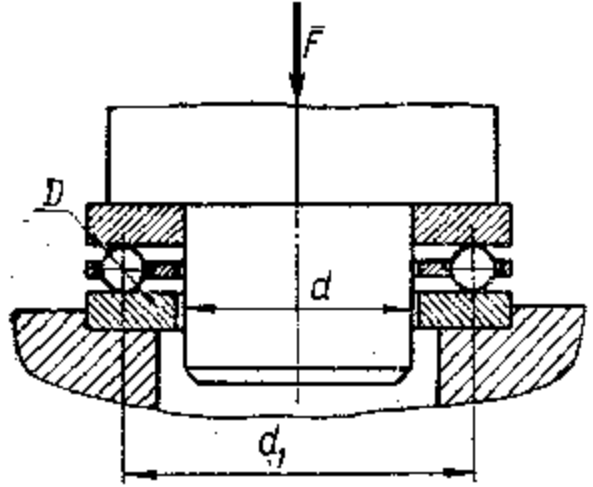


Рис. 20.11. Трение качения во вращательной паре с многопарным контактом при действии осевой силы

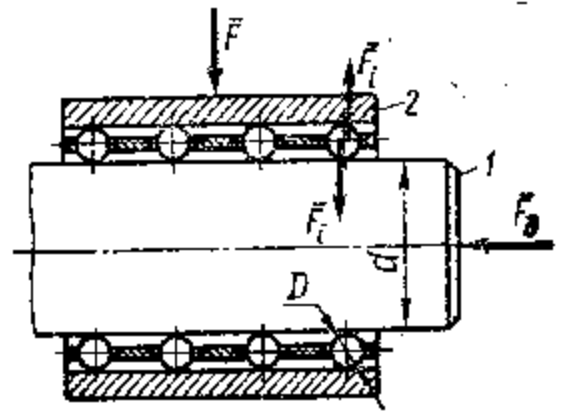


Рис. 20.12. Трение качения в поступательной кинематической паре

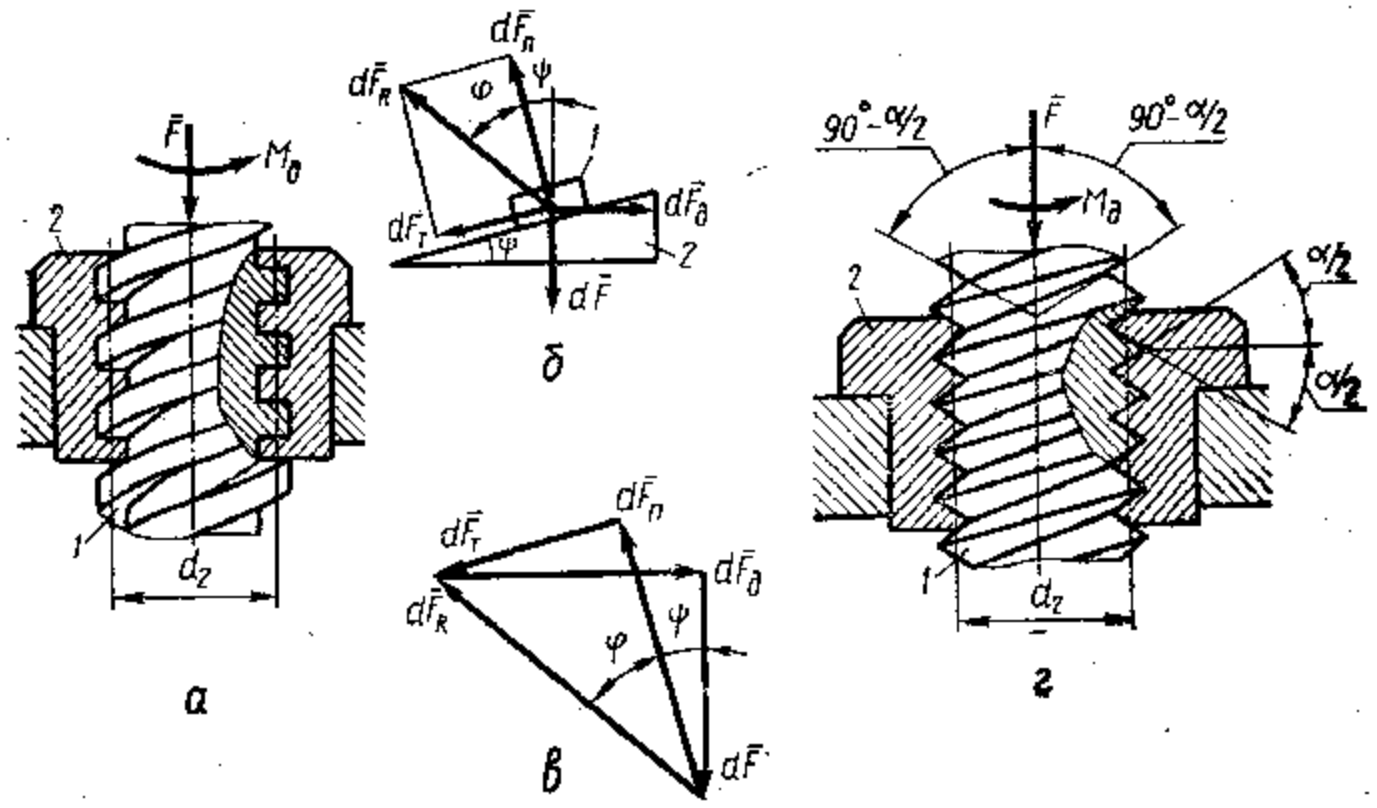


Рис. 20.13. Трение в винтовой кинематической паре

ных звеньями 1 и 2, будут смещены относительно теоретической точки контакта в сторону относительного движения на коэффициент трения качения k (б). Со стороны звена 3 к звену 2 будет приложена сила F_{ti} , момент которой равен моменту реакции F_i при качении $F_{ti}D = 2F_i k$, откуда $F_{ti} = 2F_i k/D$. Для преодоления моментов сил \bar{F}_{ti} и \bar{F}_i к звену 3 необходимо приложить момент $M_i = F_{ti}d_1/2 + F_i k = F_i k(1 + d_1/D)$. Полный момент трения складывается из суммы потерь в каждой нагруженной зоне звеньев 2:

$$M_\tau = \sum_{i=1}^n M_i = k(1 + d_1/D) \sum_{i=1}^n F_i = F\gamma k(1 + d_1/D), \quad (20.18)$$

где γ — коэффициент, учитывающий закон распределения сил F_i в нагруженной зоне.

Предполагая, что распределение сил F_i подчиняется косинусоидальному закону, получим $\gamma \approx 1,3$. Потери на трение качения можно представить в форме потерь на трение скольжения, воспользовавшись понятием о *приведенном коэффициенте трения*. Для этого трение качения в многопарном контакте следует условно заменить трением скольжения на поверхность радиуса $d/2$. В результате получим

$$M_\tau = (1,3Fk/0,5d)(1 + d_1/D)d/2 = f'Fd/2, \quad (20.19)$$

где $f' = (2,6k/d)(1 + d_1/D)$ — приведенный коэффициент трения к поверхности диаметром d .

Для пары, нагруженной осевой силой (рис. 20.11), полагая $\gamma = 1$,

$$M_\tau = Fk(1 + d_1/D). \quad (20.20)$$

Если использовать приведенный коэффициент трения, то при представлении потерь трения качения потерями на поверхности диаметром d по формуле (20.19), $M_\tau = Fk(1 + d_1/D) = f'Fd/2$, получим

$$f' = (2k/d)(1 + d_1/D). \quad (20.21)$$

В поступательной кинематической паре с многопарным контактом (рис. 20.12) возможное относительное перемещение звеньев 1 и 2 под действием силы F_d будет при условии

$$F_d D = 2k \sum_{i=1}^n F_i = 2kF. \quad (20.22)$$

Удобляя эту пару условной кинематической паре с трением скольжения, получим

$$F_d = F_\tau = f \sum_{i=1}^n F_i = 2kF/D = f'F, \quad (20.23)$$

где $f' = 2k/D$ — приведенный коэффициент трения.

20.9. Трение в винтовой кинематической паре

Для определения момента трения в винтовой паре (рис. 20.13, а) полагаем, что давление от внешней нагрузки F по поверхности витков распределяется равномерно и закон Кулона применим для эле-

ментарной площадки ds . Сведем пространственную систему сил, действующих на звенья 1 и 2 кинематической пары, к условной плоской, состоящей из развертки резьбы 2 в виде наклонной плоскости и призмы, представляющей звено 1. На элемент 1 (рис. 20.13, б) при движении будут действовать элементарные нагрузки $d\bar{F}$, реакция $d\bar{F}_n$, сила трения $d\bar{F}_\tau$ и движущая сила $d\bar{F}_d$, произведение которой на средний радиус резьбы $0,5d_2$ создает элементарный вращающий момент dM_d . При равномерном движении должно соблюдаться условие

$$d\bar{F} + d\bar{F}_n + d\bar{F}_\tau + d\bar{F}_d = 0.$$

Из условия равновесия многоугольника сил (рис. 20.13, в) найдем

$$dF_d = dF \cdot \operatorname{tg}(\psi + \varphi), \quad (20.24)$$

где ψ — угол подъема винтовой линии резьбы; φ — угол трения — угол между полной реакцией dF_R и нормальной силой $d\bar{F}_n$.

Полный момент трения будет

$$M_\tau = \int dF_d \cdot d_2/2 = (Fd_2/2) \operatorname{tg}(\psi + \varphi). \quad (20.25)$$

При движении звена 1 в направлении, совпадающем с направлением силы \bar{F} (рис. 20.13, в), момент сил трения будет

$$M_\tau = (Fd_2/2) \operatorname{tg}(\psi - \varphi). \quad (20.26)$$

В винтовых кинематических парах с $\psi > \varphi$ поступательное и одновременно вращательное движение звена 1 возможно. Винтовые пары, у которых $\psi < \varphi$, называются *самотормозящимися*: движение звена при любом значении силы \bar{F} невозможно.

Эти же зависимости пригодны для винтовой пары с треугольной резьбой (рис. 20.13, г), если вместо угла трения φ подставить приведенный угол трения $\varphi' = \operatorname{arctg} f'$. Величину его определяют, предполагая, что звено совершает движение в треугольных направляющих с углом при вершине $2(90^\circ - \alpha/2)$, образованных боковыми поверхностями витков резьбы. В соответствии с формулой (20.13) получим

$$f' = f/\sin(90^\circ - \alpha/2) = f/\cos(\alpha/2). \quad (20.27)$$

Поскольку $f' > f$ и, следовательно $\varphi' > \varphi$, то потери в винтовой паре с треугольной резьбой больше, чем в паре с прямоугольной резьбой (при $\alpha = 60^\circ$ примерно на 15 %).

20.10. Трение в кинематической паре с гибким звеном

В кинематической паре с гибким звеном 1 (рис. 20.14) сопротивление движению возникает на поверхности контакта его со звеном 2. Для движения гибкого звена при нагрузке \bar{F}_1 на одном конце его к другому нужно приложить силу $F_2 > F_1$. Выделим элементарный участок гибкого звена в пределах угла $d\alpha$. На него будут действовать силы натяжения \bar{F} и $\bar{F} + d\bar{F}$ и элементарные силы — нормальная

$d\bar{F}_n$ и трения $d\bar{F}_\tau$. Из условия равновесия в вертикальной плоскости $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$ получим

$$dF_n = (F + (F + dF)) \sin(\alpha/2) \approx Fd\alpha. \quad (20.28)$$

Из условия равновесия в горизонтальной плоскости при $\cos(\alpha/2) \approx 1$ получим

$$dF_\tau = ((F + dF) - F) \cos(\alpha/2) \approx dF. \quad (20.29)$$

По формуле (20.4) с учетом формул (20.28) и (20.29) найдем

$$dF_\tau = f' dF_n = f' F d\alpha,$$

откуда

$$dF_\tau/F = f' d\alpha. \quad (20.30)$$

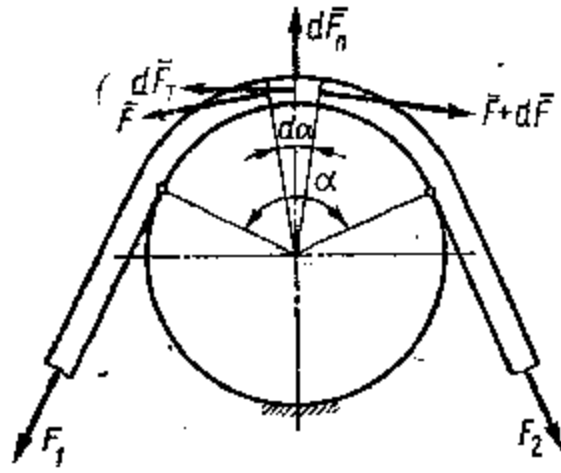


Рис. 20.14. Трение в кинематической паре с гибким звеном

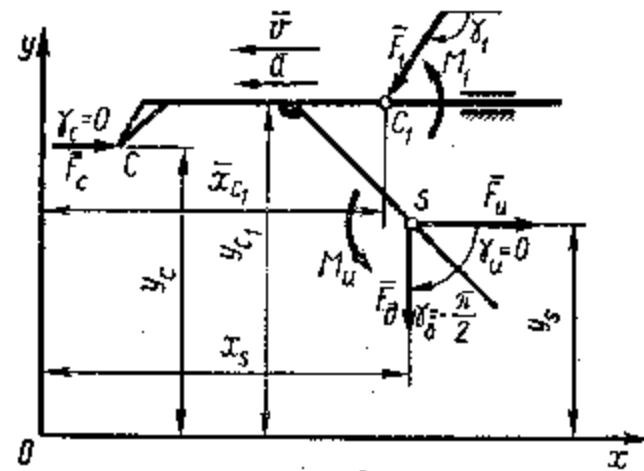


Рис. 20.15. Приведение сил и моментов, действующих на звено

Принтегрировав уравнение (20.30) в пределах дуги обхвата α — $\int_{F_1}^{F_2} dF/F = f' \int_0^\alpha d\alpha$, получим $\ln(F_2/F_1) = f'\alpha$ и $F_2/F_1 = e^{f'\alpha}$, следовательно,

$$F = F_\tau = F_2 - F_1 = F_1(e^{f'\alpha} - 1), \quad (20.31)$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Формула (20.31) получена Л. Эйлером (см. прил.) и носит его имя.

20.11. Приведение сил, действующих на звено, к эквивалентной системе сил

В силовых расчетах систему сил и моментов сил, действующих на звено, удобно сводить к эквивалентной системе — одной силе и одной паре сил. Для этого определяют главный вектор всех сил, действующих на звено, и прикладывают его в любой точке звена, называемой *точкой приведения*. Чтобы равновесие системы не нарушалось, при переносе каждой силы необходимо добавить пару сил, момент которых равен моменту переносимой силы относительно точки приведения. Главный момент системы сил определяется как сумма моментов внешних сил и моментов пар сил, добавленных при переносе сил в точку приведения.

Рассмотрим пример приведения к одной силе и паре сил заданной системы сил, действующих на звено механизма (рис. 20.15). За точку приведения примем центр масс S звена, который является точкой приложения силы тяжести \bar{F}_g звена и силы инерции \bar{F}_u . Главный вектор сил, действующих на звено, $\bar{F} = \bar{F}_c + \bar{F}_1 + \bar{F}_g + \bar{F}_u$. Значение и направление силы F можно получить аналитически, используя операторную функцию $SMVKT$ (см. гл. 5):

$$\left. \begin{aligned} SMVKT(F_c, 0, F_1, \gamma_1; F_\psi, \psi); \\ SMVKT(F_\psi, \psi, F_g, -\pi/2; F_\psi, \psi); \\ SMVKT(F_\psi, \psi, F_u, 0; F, \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (20.32)$$

где F_ψ и ψ — промежуточные значения вектора суммы двух векторов и его направляющего угла.

Определим моменты от сил \bar{F}_c и \bar{F}_1 , которые добавятся при переносе этих сил в точку S . Для этого воспользуемся общим выражением момента через векторное произведение силы \bar{F}_i и радиуса вектора \bar{r}_i до точки ее приложения $M(\bar{F}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i = r_x F_y - r_y F_x$ (индексы x и y определяют проекцию вектора на соответствующую координатную ось). Тогда получим

$$M_{F_c} = F_c(y_s - y_c); \quad (20.33)$$

$$M_{F_1} = F_1 y_s \cos \gamma_1 - F_1 (x_{c_1} - x_s) \sin \gamma_1. \quad (20.34)$$

Главный момент системы сил

$$M = M_1 + M_2 + M_{F_c} + M_{F_1}. \quad (20.35)$$

Сведение системы сил, действующих на звено, к одной силе и к паре сил позволяет в дальнейшем формализовать алгоритм расчета, что особенно важно при применении электронных вычислительных машин.

21. СИЛОВОЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЗМОВ

21.1. Реакции в кинематических парах

В элементах кинематических пар возникают реакции связей, являющиеся результатом силового взаимодействия звеньев. Во вращательной кинематической паре 1—2 (рис. 21.1) давления p (β) распределяются по поверхности цилиндра. Если потери на трение малы и ими можно пренебречь, то равнодействующая \bar{F}_{12} распределенной по поверхности силы пройдет через центр пары (рис. 21.1, а). При учете трения (см. гл. 20) равнодействующая будет касаться окружности радиуса $\rho = f'r$ (рис. 21.1, б).

В плоской поступательной кинематической паре 1—2 закон $p(x)$ распределения нагрузки зависит от вида элементов (рис. 21.2). Равнодействующая \bar{F}_{12} распределенной нагрузки будет направлена или по нормали к поверхности контакта (рис. 21.2, а), если трением пренебречь, или под углом трения φ к нормали (рис. 21.2, б), если

силы трения учитывают. Для каждого звена в плоской координатной системе могут быть составлены три уравнения равновесия; для n звеньев число уравнений равновесия будет $3n$. Сила, как мера физического взаимодействия двух тел, характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Для низших кинематических пар плоских механизмов всегда известно либо направление (в поступательной паре), либо точка приложения (во вращательной паре) и неизвестными остаются две характеристики. Тогда

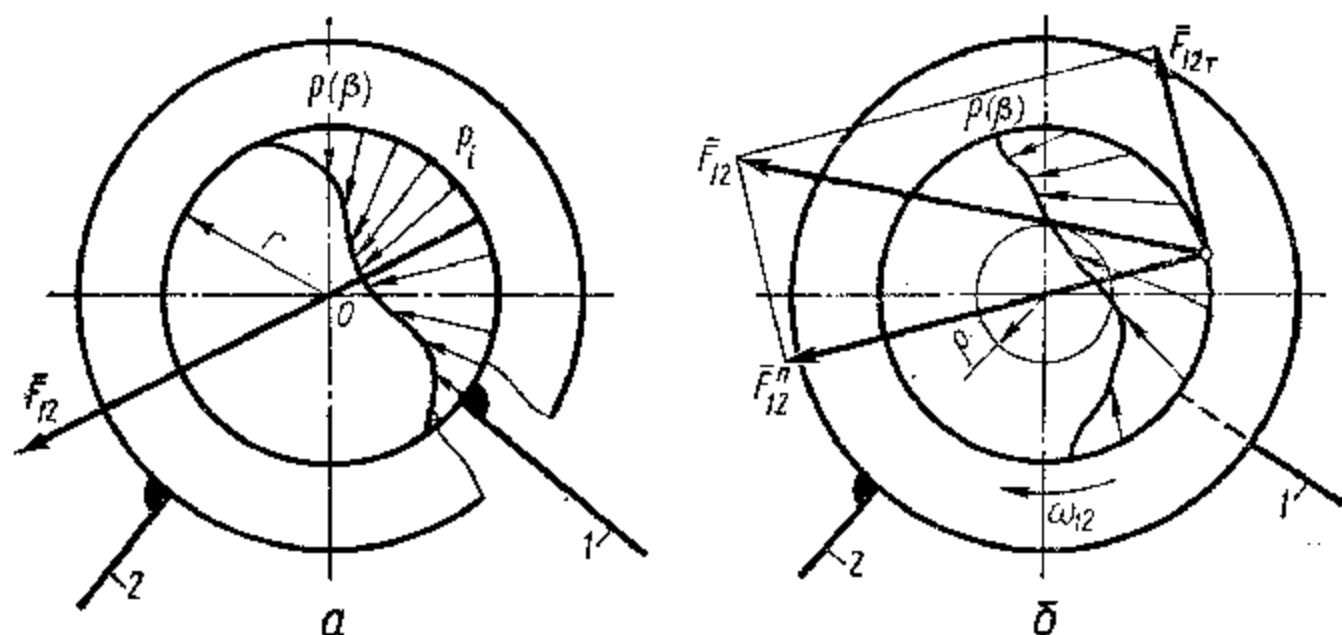


Рис. 21.1. Определение реакций во вращательной кинематической паре

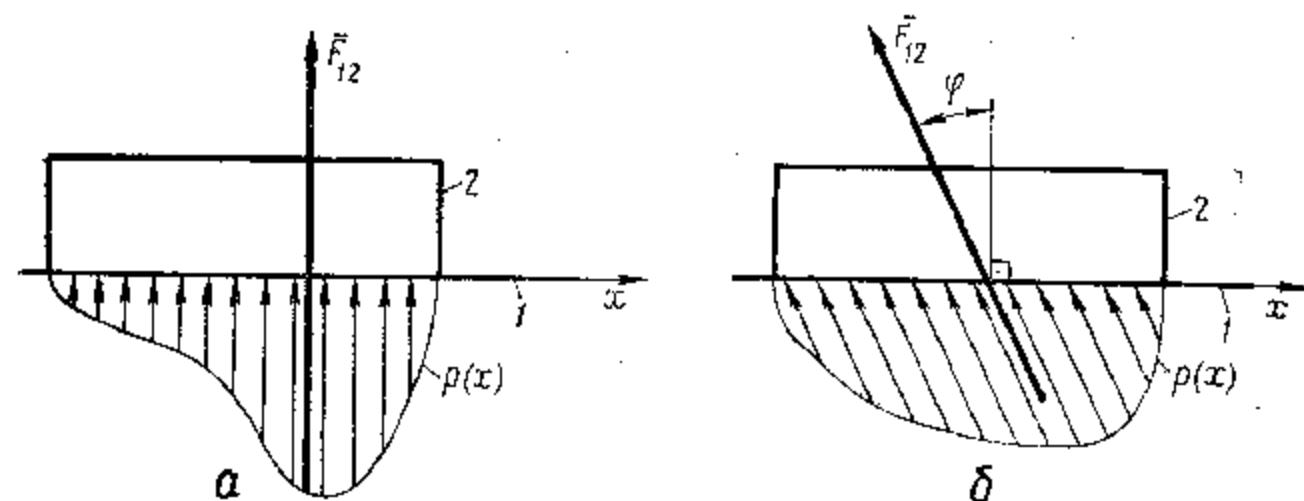


Рис. 21.2. Определение реакций в поступательной кинематической паре

при числе неизвестных, равном числу уравнений, условие статической определенности для кинематической цепи с низшими кинематическими парами будет иметь вид $3n - 2\rho_5 = 0$, откуда

$$\rho_5 = 3n/2. \quad (21.1)$$

Полученное условие совпадает со структурным соотношением, справедливым для структурных групп (см. гл. 3). Это позволяет сделать вывод, что шарнирно-рычажные механизмы без избыточных связей, образованные присоединением к ведущим звеньям структурных групп, являются статически определенными системами.

Для плоской высшей кинематической пары без учета трения (рис. 21.3, а) и с учетом трения (б) всегда известны направление

и точка приложения реакции, а неизвестно ее значение. Тогда для механизмов с высшими парами условие статической определенности будет $3n - 2\rho_5 - \rho_4 = 0$. Это соотношение в простейшем случае удовлетворяется при $n = 1, \rho_5 = 1, \rho_4 = 1$, откуда следует, что

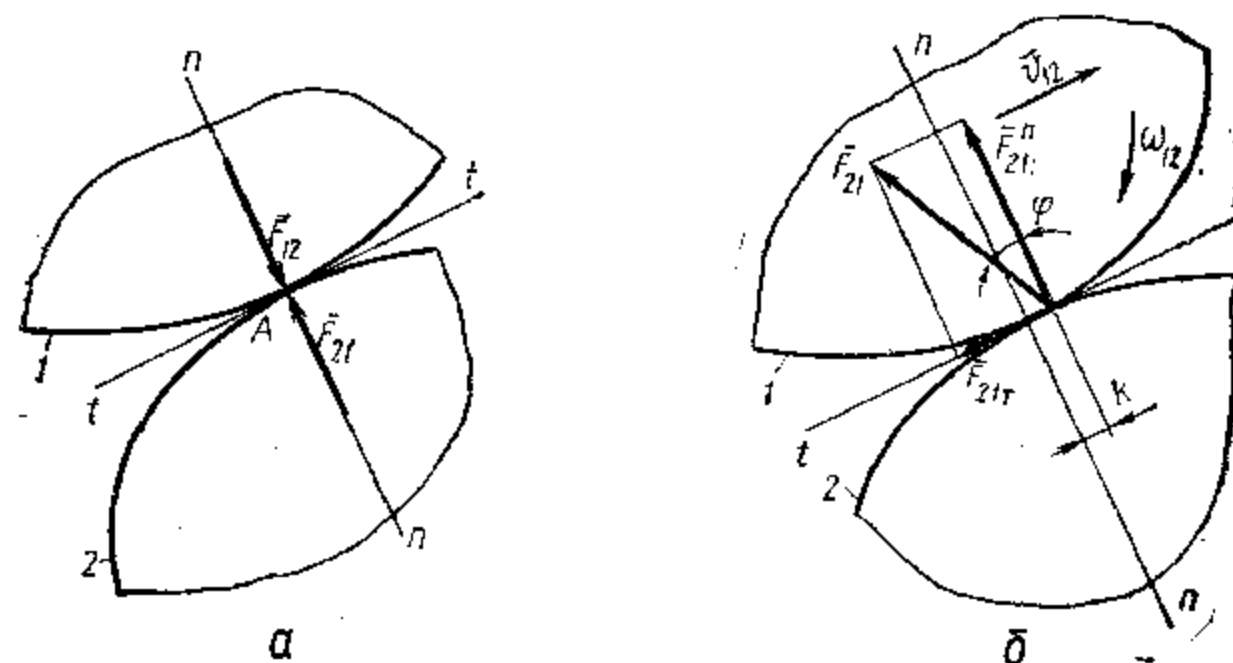


Рис. 21.3. Определение реакций в высшей кинематической паре

статически определенной системой является звено, входящее в высшую и низшую кинематические пары. Этому условию соответствуют звенья зубчатых, кулачковых, фрикционных и других подобных механизмов.

21.2. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с внутренней вращательной парой

Внутреннюю вращательную пару имеют группы первого, второго и четвертого видов (см. гл. 3). Так как способ определения реакций зависит от типа присоединительных кинематических пар (вращательной или поступательной), то типичной для этих групп является группа второго вида (рис. 21.4, а). Она содержит и поступательную, и вращательную присоединительные пары. Сведем внешние силы, действующие на звенья 2 и 3 группы, к главным векторам \bar{F}_2 и \bar{F}_3 и главным моментам M_2 и M_3 . В кинематических парах А и О приложим реакции \bar{F}_{12} и \bar{F}_{43} . Для реакции \bar{F}_{12} известна точка приложения, а для реакции \bar{F}_{43} — линии действия. Чтобы определить вектор \bar{F}_{43} и точку его приложения, а также вектор \bar{F}_{12} и его направление, рассмотрим равновесие звеньев группы. Уравнение равновесия для группы будет

$$\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0. \quad (21.2)$$

Разложим вектор \bar{F}_{12} по двум направлениям. Первый \bar{F}_{12n} направлен к центру внутренней вращательной пары, т. е. к точке В; второй — \bar{F}_{12t} направлен перпендикулярно. Тогда уравнение

(21.2) запишется в виде

$$\bar{F}_{12n} + \bar{F}_{12t} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0. \quad (21.3)$$

Значение вектора \bar{F}_{12t} можно определить, рассмотрев равновесие звена 2, воспользовавшись уравнением моментов относительно центра ближайшей вращательной пары B:

$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = M_B(\bar{F}_2) + F_{12t}l_{AB} + F_{12n} \cdot 0 + F_{32} \cdot 0 + M_2 = 0. \quad (21.4)$$

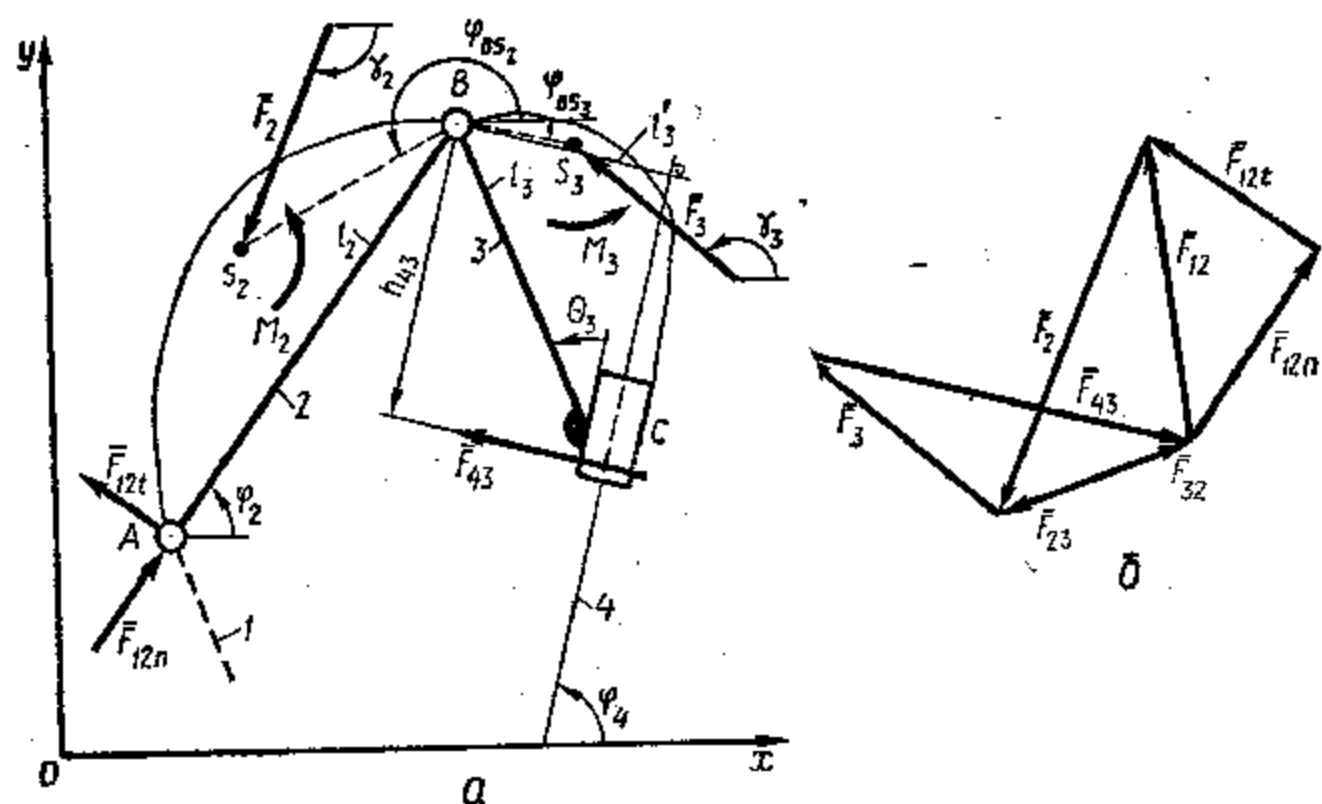


Рис. 21.4. Определение реакций в кинематических парах группы второго вида

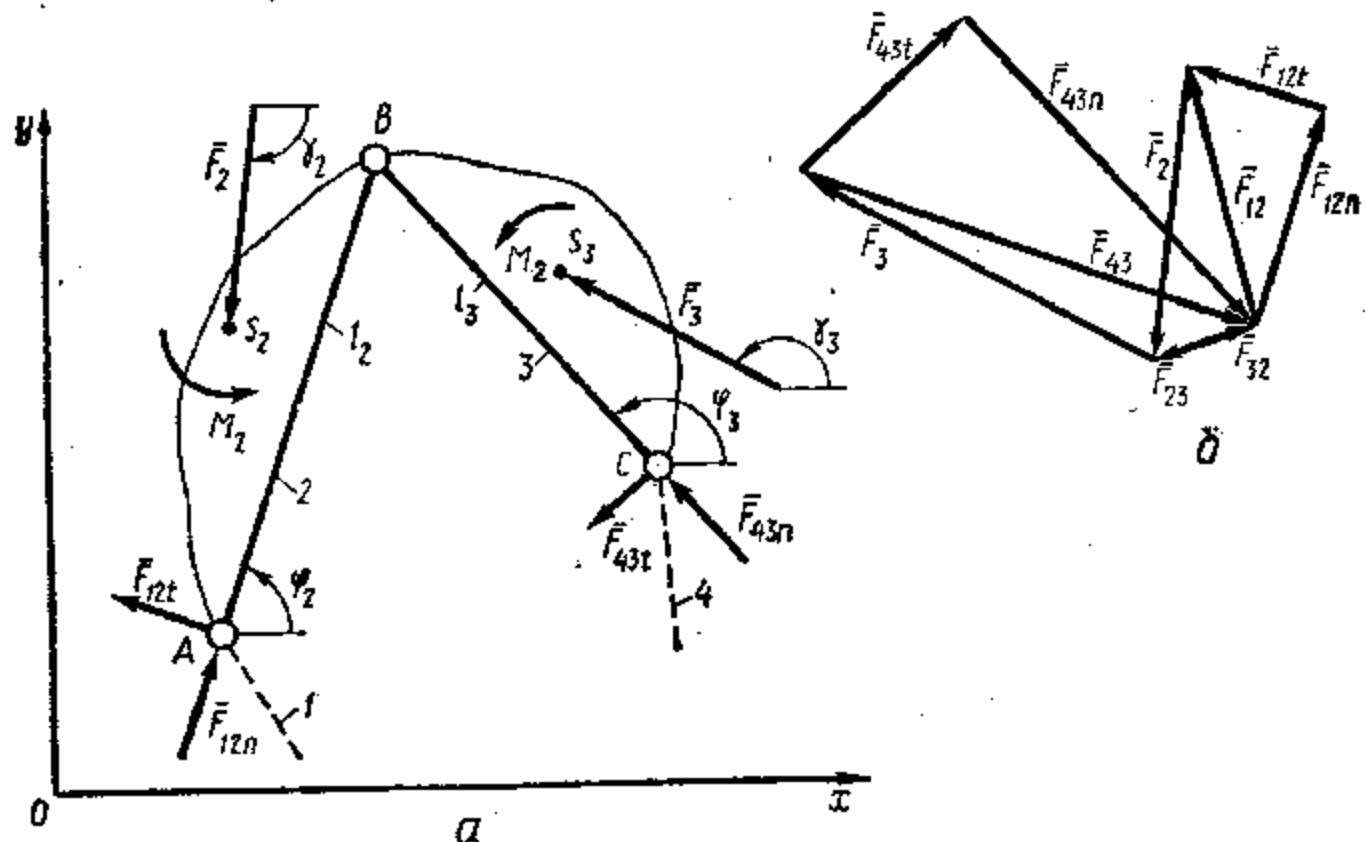


Рис. 21.5. Определение реакций в кинематических парах группы первого вида

В уравнении (21.4) момент M_2 подставляют со своим знаком, моменты сил \bar{F}_{12n} и \bar{F}_{32} равны нулю, так как линии их действия проходят через точку B, знак $M_B(\bar{F}_2) = \overline{BS}_2 \times \bar{F}_2$ определится после разложения векторного произведения. Тогда

$$F_{12t} = -(M_2 + M_B(\bar{F}_2))/l_{AB}. \quad (21.5)$$

Если после вычисления значение силы F_{12t} получим с отрицательным знаком, то перед решением уравнения (21.3) направление ее вектора необходимо изменить на обратное. Из решения этого

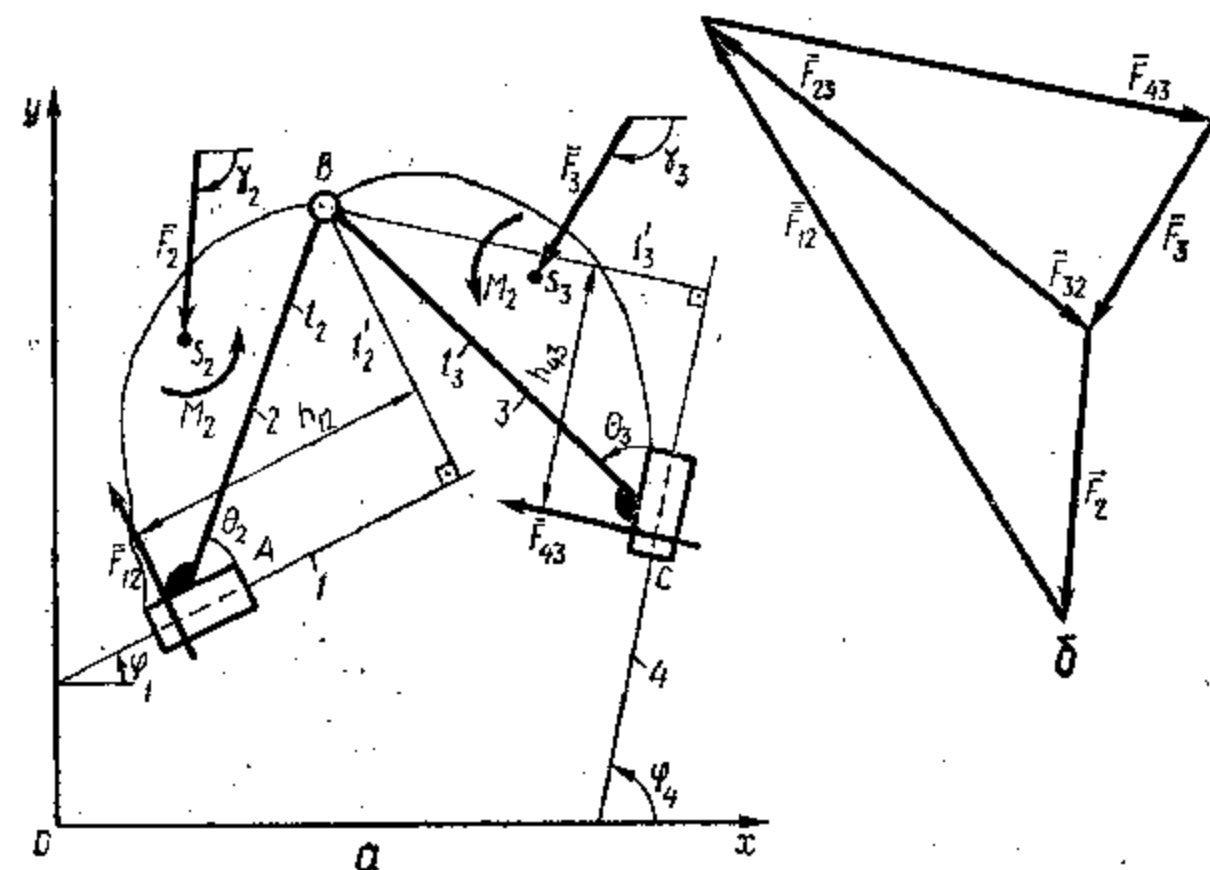


Рис. 21.6. Определение реакций в кинематических парах группы четвертого вида

уравнения (б) получаем значения и направления векторов \bar{F}_{12n} (значит, $\bar{F}_{12} = \bar{F}_{12t} + \bar{F}_{12n}$) и \bar{F}_{43} . Реакцию в кинематической паре B находим из условия равновесия одного из звеньев группы, например 2: $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32} = 0$. Вектор \bar{F}_{32} определится при замыкании векторного треугольника, в который входят силы \bar{F}_{12} и \bar{F}_2 . Точка приложения вектора \bar{F}_{43} определяется из рассмотрения равновесия звена 3 по уравнению моментов относительно точки B при

$$M_B(\bar{F}_{43}) = \bar{h}_{43} \times \bar{F}_{43}; \quad M_B(\bar{F}_{43}) + M_3 + M_B(\bar{F}_3) = 0 \quad \text{и} \\ h_{43} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3))/F_{43}. \quad (21.6)$$

Для группы первого вида (рис. 21.5, а) уравнение равновесия запишем, раскладывая реакции в присоединительных вращательных парах A и C на составляющие, как указано ранее:

$$\bar{F}_{12n} + \bar{F}_{12t} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43n} + \bar{F}_{43t} = 0. \quad (21.7)$$

Векторы \bar{F}_{12t} и \bar{F}_{43t} определим из рассмотрения равновесия соответственно звеньев 2 и 3, составив уравнения моментов для

каждого из них относительно точки B :

$$M_B(\bar{F}_{12}) = M_B(\bar{F}_2) + M_2 + F_{12l}l_{AB} + M_B(\bar{F}_{32}) = 0;$$

$$M_B(\bar{F}_{13}) = M_B(\bar{F}_3) + M_3 + M_B(\bar{F}_{23}) + F_{32l}l_{CB} = 0,$$

откуда при $M_B(\bar{F}_{32}) = 0$ и $M_B(\bar{F}_{23}) = 0$

$$F_{12l} = -(M_2 + M_B(\bar{F}_2))/l_{AB} \text{ и } F_{32l} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3))/l_{CB}. \quad (21.8)$$

Из решения уравнения (21.7) найдем неизвестные векторы \bar{F}_{12n} и \bar{F}_{12t} (рис. 21.5, б), а рассматривая равновесие звена 2 — вектор \bar{F}_{32} .

Для группы четвертого вида (рис. 21.6, а) линии действия векторов \bar{F}_{12} и \bar{F}_{43} известны. Они перпендикулярны направляющим кинематических пар A и C . Реакции \bar{F}_{12} и \bar{F}_{43} определим решением уравнения типа (21.3) $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0$ (б). Точки приложения этих реакций определяют из условий, аналогичных для поступательной кинематической пары C группы второго вида (21.6).

21.3. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с внутренней поступательной парой

При силовом взаимодействии звеньев 2 и 3 групп с внутренними поступательными парами неизвестна точка приложения внутренней реакции. Это не дает возможности использовать уравнение моментов при рассмотрении равновесия каждого звена в отдельности. Поэтому неизвестные составляющие векторов определяют из уравнения моментов, составленного для всей группы.

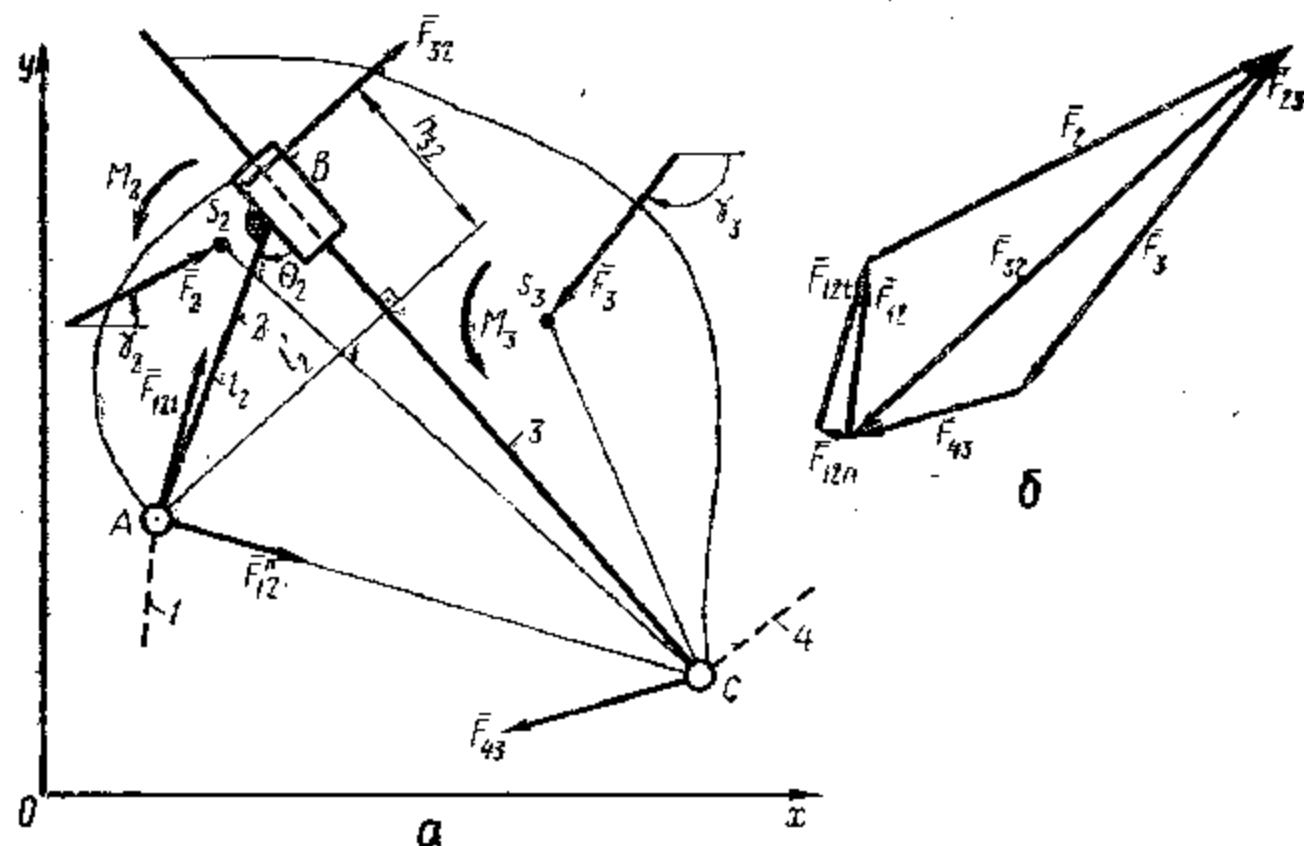


Рис. 21.7. Определение реакций в кинематических парах группы третьего вида

Условие равновесия звеньев группы третьего вида (рис. 21.7, а) будет аналогично уравнению (21.2) $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0$. Для определения направления вектора \bar{F}_{12} разложим его на составляющие по направлению к центру ближайшей вращательной пары C — \bar{F}_{12n} и перпендикулярному к нему — \bar{F}_{12t} . Значение вектора \bar{F}_{12t} определим из уравнения моментов вокруг центра вращательной пары C :

$$\sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = F_{12n} \cdot 0 + F_{12t}l_{AC} + M_C(\bar{F}_2) + M_C(\bar{F}_3) + M_2 + M_3 = 0. \quad (21.9)$$

откуда

$$F_{12t} = -(M_2 + M_3 + M_C(\bar{F}_2) + M_C(\bar{F}_3))/l_{AC}. \quad (21.10)$$

В этих уравнениях при S_2 и S_3 — точках приведения внешних сил — $M_C(\bar{F}_2) = \overline{CS}_2 \times \bar{F}_2$, $M_C(\bar{F}_3) = \overline{CS}_3 \times \bar{F}_3$. Направление вектора \bar{F}_{12t} корректируется в зависимости от знака, полученного после вычислений.

Так как направление реакции \bar{F}_{32} известно и перпендикулярно к направляющей поступательной пары B , то составляющая \bar{F}_{12n} реакции \bar{F}_{12} , а также значение реакции \bar{F}_{32} определяются из условия равновесия звена 2 (б):

$$\bar{F}_{12n} + \bar{F}_{12t} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32} = 0. \quad (21.11)$$

Вектор \bar{F}_{43} определится из условия $\bar{F}_{23} + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0$. Точка приложения реакции \bar{F}_{23} в поступательной кинематической паре B определится расстоянием h_{23} при рассмотрении равновесия звена 2 из решения уравнения моментов $\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = M_2 + F_{32}h_{32} + M_A(\bar{F}_2) = 0$ относительно центра вращательной пары A

$$h_{32} = -(M_2 + M_A(\bar{F}_2))/F_{32}.$$

При рассмотрении равновесия звеньев структурной группы пятого вида (рис. 21.8, а) следует иметь в виду, что внешняя кинематическая пара A — поступательная и точка приложения реакции \bar{F}_{12} неизвестна. Следовательно, составить уравнение моментов для определения составляющей реакции \bar{F}_{43} нельзя. Поэтому для определения реакций в кинематических парах рассмотрим равновесие каждого звена в отдельности, начиная со звена 2, образующего две поступательные кинематические пары со звеньями 1 и 3. Условие равновесия звена 2 имеет вид $\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32} = 0$, откуда найдем значения векторов \bar{F}_{32} и \bar{F}_{12} (б), так как их линии действия известны. Они перпендикулярны направляющим поступательных пар B и A . Затем из графического решения уравнения равновесия звена 3 $\bar{F}_{23} + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} = 0$ определяют направление и модуль вектора \bar{F}_{43} .

Точки приложения реакций \bar{F}_{12} и \bar{F}_{23} определяют из уравнений моментов относительно центра вращательной пары C по условию равновесия звеньев группы

$$h_{12} = -(M_2 + M_C(\bar{F}_2) + M_3 + M_C(\bar{F}_3))/F_{12}$$

и звена 3

$$h_{23} = -(M_3 + M_C(\bar{F}_3))/F_{23}$$

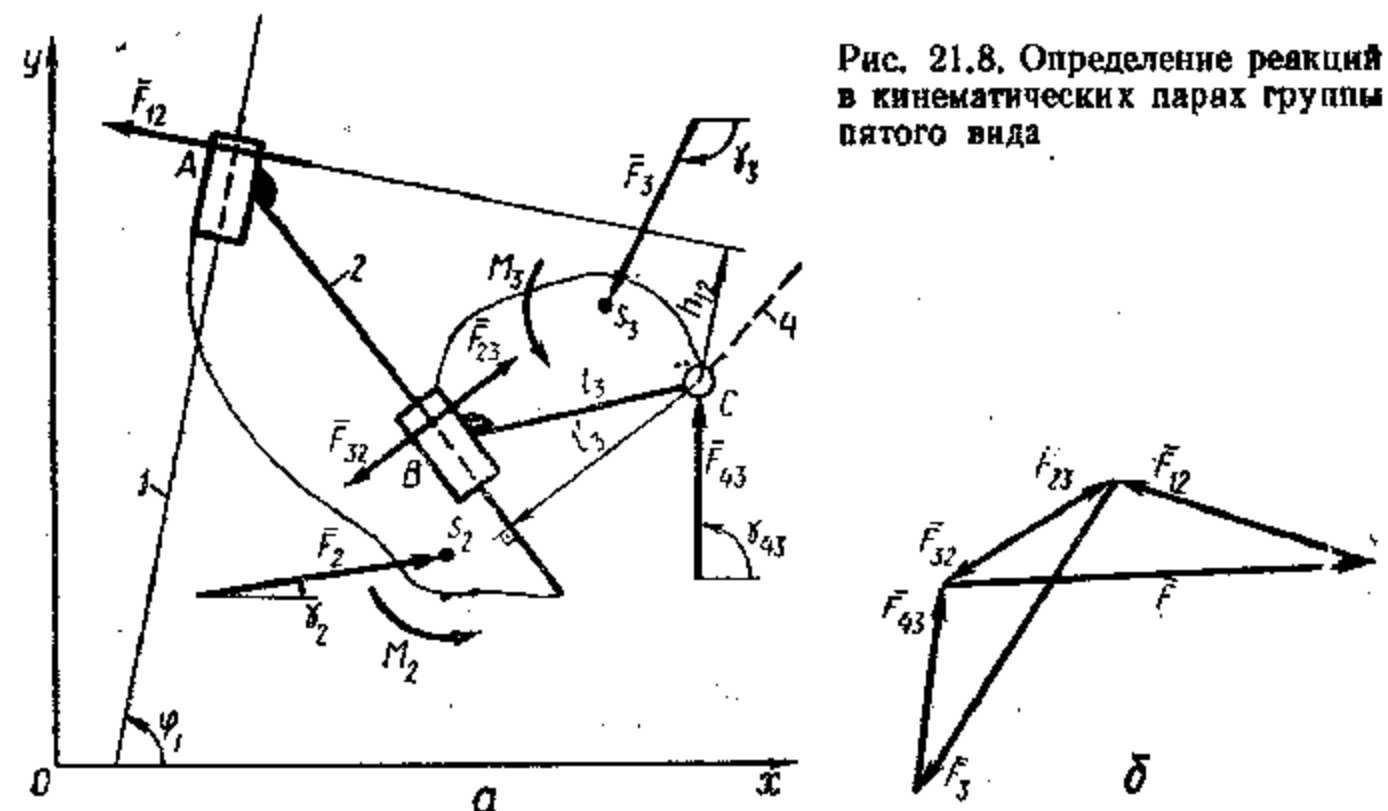


Рис. 21.8. Определение реакций в кинематических парах группы пятого вида

Если значения h_{12} и h_{23} получатся с отрицательным знаком, то точки приложения реакций располагаются на соответствующих направляющих по другую сторону относительно точки C .

21.4. Определение реакций в кинематических парах структурных групп с учетом трения

С учетом трения в поступательных кинематических парах, кроме нормальных к поверхностям направляющих реакций, будут действовать силы трения, направленные вдоль направляющих в сторону, противоположную относительной скорости элементов пары. Во вращательных кинематических парах появятся моменты сил трения, направления которых будут противоположны относительным угловым скоростям звеньев, образующих кинематическую пару. Следовательно, определению реакций в кинематических парах с учетом сил трения должен предшествовать кинематический расчет механизма. С учетом указанных обстоятельств в уравнениях равновесия должны быть учтены дополнительные факторы. Так, например, в структурной группе второго вида (рис. 21.9) появятся моменты сил трения M_{TA} во вращательной паре A и M_{TB} в паре B и сила трения \bar{F}_{TC} в поступательной паре C . Поэтому уравнение равновесия (21.2) приобретает вид

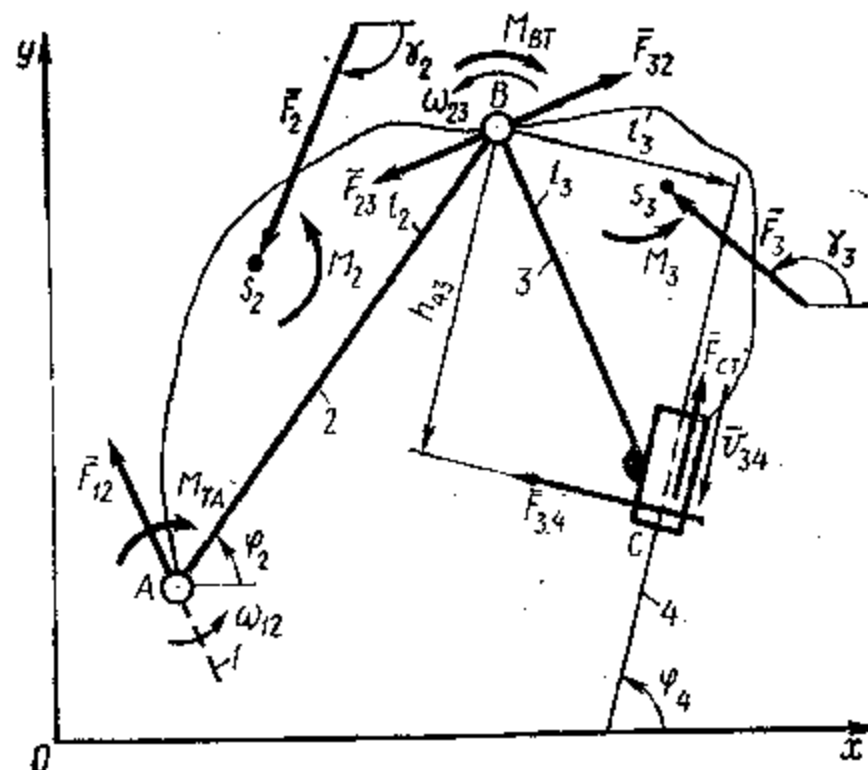
$$\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_{43} + \bar{F}_{TC} = 0, \quad (21.12)$$

а уравнение моментов относительно точки B при рассмотрении равновесия звена 2 вместо (21.4) будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = M_B(\bar{F}_{12}) + M_2 + M_B(\bar{F}_3) + M_{TA} + M_{TB} = 0,$$

где $M_{TA} = 0,5F_{12}f_A d_A$; $M_{TB} = 0,5F_{32}f_B d_B$; $0,5d_A$ и $0,5d_B$ — радиусы цилиндрических элементов вращательных пар A и B ; f_A , f_B — приведенные коэффициенты трения в этих кинематических парах.

Рис. 21.9. Учет трения в кинематических парах при определении реакций



Так как векторы \bar{F}_{12} и \bar{F}_{43} неизвестны, то уравнение (21.12) не решается. В этом случае неизвестные силы могут быть определены только из совместного решения шести уравнений для общего случая равновесия. Однако такое решение очень громоздко и неудобно на практике.

Достаточную для инженерных расчетов точность дает способ последовательных приближений. В первом приближении принимают, что силы трения равны нулю, и реакции в кинематических парах определяют так же, как указано выше. Используя полученные значения реакций, в кинематических парах вычисляют моменты сил трения M_{TA} и M_{TB} в силу трения \bar{F}_{TC} в поступательной паре C (см. гл. 20). Затем производят расчет в той же последовательности, как и без учета сил трения, но к внешним силам прибавляют силы трения в поступательных парах и моменты сил трения во вращательных, направляемые в сторону, противоположную относительному движению. Новые векторы \bar{F}_{T12} , \bar{F}_{T32} , \bar{F}_{T43} будут отличаться по значениям модулей и направлениям от векторов \bar{F}_{12} , \bar{F}_{32} , \bar{F}_{43} . Далее полученные в первом приближении новые значения \bar{F}_{T12} , \bar{F}_{T32} и \bar{F}_{T43} снова подставляют в зависимости для определения сил и моментов сил трения и повторяют все вычисления. В результате получают второе приближение значений реакций. Указанный

процесс может быть продолжен до достижения требуемой точности расчета. Он применяется только в случаях, когда каждое последующее приближение дает меньшее приращение силы или момента, чем предыдущее. Обычно второе приближение дает вполне приемлемые результаты.

21.5. Алгоритмизация силового расчета структурных групп

Для решения задач силового расчета структурных групп на ЭВМ составляют алгоритмы, реализуемые через операторные функции. Структура алгоритмов расчета групп всех видов одинакова, так как она основана на решении соответствующих векторных уравнений. Рассмотрим для примера алгоритм силового расчета структурной группы второго вида. Уравнение равновесия этой группы (см. рис. 21.4, а) имеет вид (21.3). Значение вектора \bar{F}_{12t} определится по формуле (21.5). Направление вектора уточняют в зависимости от знака \bar{F}_{12t} :

$$UGL3(\varphi_4, \pi/2, F_{12t}; \gamma_{12t}), \quad (21.13)$$

после чего принимают $F_{12t} = |F_{12t}|$.

Система линейных уравнений, соответствующая условию равновесия звеньев группы, приведенная к каноническому виду, будет

$$\left. \begin{aligned} F_{12n} \cos \varphi_2 + F_{43} \cos(\varphi_4 + \pi/2) &= -(F_{12t} \cos \gamma_{12t} + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3); \\ F_{12n} \sin \varphi_2 + F_{43} \sin(\varphi_4 + \pi/2) &= -(F_{12t} \sin \gamma_{12t} + F_2 \sin \gamma_2 + F_3 \sin \gamma_3). \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, получим:

$$SISTEMA(2, A(2,2), C(2); F_{12n}, F_{43}); \quad (21.14)$$

$$UGL4(\varphi_2, \pi, F_{12n}; \gamma_{12n}); \quad (21.15)$$

$$UGL3(\varphi_4, \pi/2, F_{43}; \gamma_{43}); \quad (21.16)$$

$$F_{12n} = |F_{12n}|, \quad F_{43} = |F_{43}|; \quad (21.17)$$

$$SMVKT(F_{12n}, \gamma_{12n}, F_{12t}, \gamma_{12t}; F_{12}, \gamma_{12}).$$

Точку приложения реакции \bar{F}_{43} определяют, рассмотрев равновесие звена 3. Из уравнения моментов относительно центра вращательной пары B (21.6) получим

$$h_{43} = -(M_B(\bar{F}_3) + M_3)/F_{43}. \quad (21.18)$$

Реакция во внутренней вращательной паре B определится из уравнения равновесия звена 2 ($\bar{F}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32} = 0$), решаемого операторной функцией

$$SMVKT(F_{12}, \gamma_{12}, F_2, \gamma_2; F_{32}, \gamma_{32}). \quad (21.19)$$

Если системы сил, действующие на звенья группы, предварительно приведены к одной силе и паре сил, то алгоритм силового расчета всегда будет представлять последовательность зависимостей (21.13) ... (21.19). Он может быть описан операторной функцией,

обозначенной DNMA2. Ее входными параметрами будут: $l_2, \varphi_2, l_3, \varphi_3, l_{BS_2}, \varphi_{BS_2}, l_{BS_3}, \varphi_{BS_3}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3$.

Операторные функции, описывающие эти алгоритмы для структурных групп (табл. 21.1...21.5), обозначаются цифрой, соответствующей виду группы. Порядок входных и выходных параметров, приведенный в каждой таблице, должен сохраняться в обращении к функциям.

21.6. Структура алгоритмов силового расчета плоских механизмов с низшими парами

При силовом расчете многозвенных механизмов с низшими парами, как и при кинематическом расчете, применяют метод последовательного обращения к операторным функциям, реализующим алгоритмы силового расчета отдельных групп. Расчет начинают с групп, наиболее отдаленных в структурном отношении от ведущего звена механизма, на звенья которых воздействуют системы внеш-

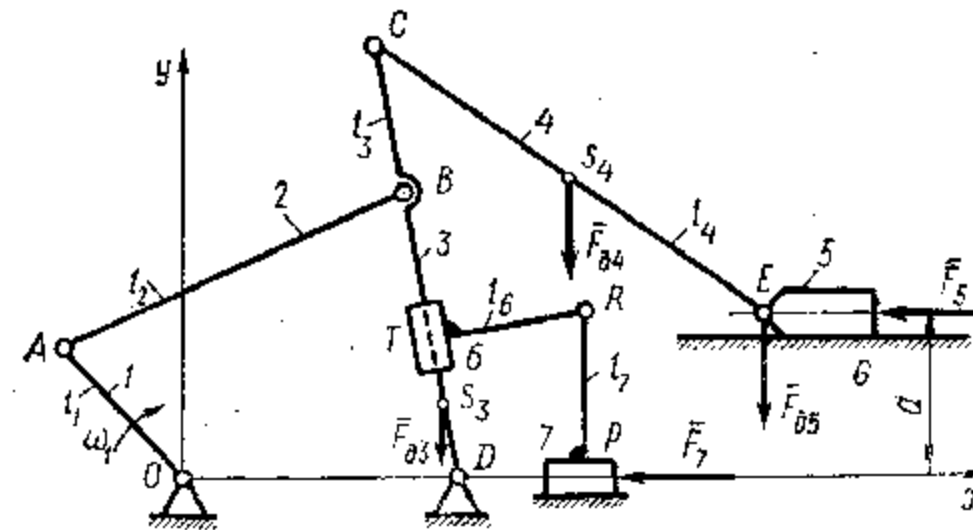


Рис. 21.10. Определение реакций в кинематических парах восьмизвенного механизма

них сил. В качестве примера рассмотрим алгоритм силового расчета восьмизвенного механизма (рис. 21.10). Примем, что силы тяжести звеньев приложены в центрах их масс S. Центр масс звена 5 находится в центре шарнира E, а звена 4 — посередине CE. Расчет начинают с группы звеньев 4—5. На звено 5 во время рабочего хода действует сила

$$F_5 = \begin{cases} \bar{F}_{п.с5}, & \alpha_{E_5} = 0; \\ 0, & \alpha_{E_5} = \pi. \end{cases}$$

где $F_{п.с5}$ — модуль вектора силы производственного сопротивления, действующей на звено 5; α_{E_5} — направляющий угол вектора скорости точки E_5 .

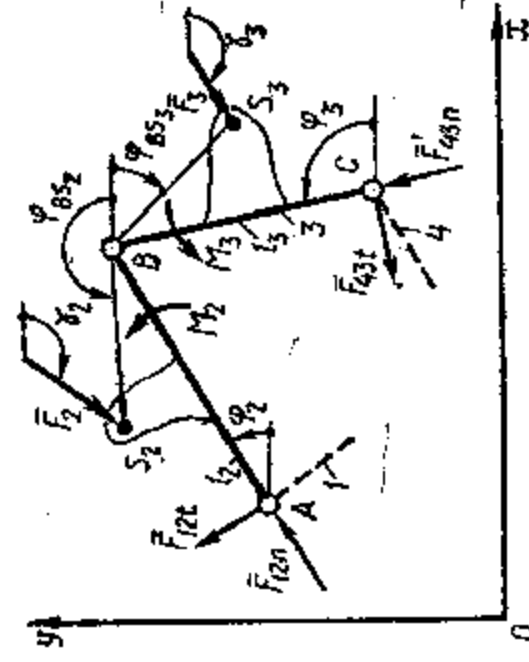
Сведем силы \bar{F}_5 и \bar{F}_{g5} к одной силе $F_{\Sigma 5}$:

$$SMVKT(F_5, \pi, F_{g5}, -\pi/2; F_{\Sigma 5}, \gamma_5).$$

Определим реакции $\bar{F}_{34}, \bar{F}_{45}, \bar{F}_{05}$, обратившись к операторной функции

$$DNMA2(l_4, \varphi_4, 0, 0, 0, (0,5l_4), 0, 0, F_{g4}, -\pi/2, 0, F_{\Sigma 5}, \gamma_5; F_{34}, \gamma_{34}, F_{45}, \gamma_{45}, F_{05}, \gamma_{05}, h_{05}).$$

Таблица 21.1. Алгоритм силового расчета структурной группы 2-го класса первого вида



5. $F_{43t} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3))/l_3$.
6. $UGL3(\varphi_3, \pi/2, F_{43t}; \gamma_{43t})$.
7. $A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_2 & \sin \varphi_3 \end{vmatrix}$.
8. $C(2) =$

$$= \begin{vmatrix} -(|F_{12t}| \cos \gamma_{12t} + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3 + |F_{43t}| \cos \gamma_{43t}) \\ -(|F_{12t}| \sin \gamma_{12t} + F_2 \sin \gamma_2 + F_3 \sin \gamma_3 + |F_{43t}| \sin \gamma_{43t}) \end{vmatrix}$$
9. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2)); $F_{12n}; F_{43n}$.
10. $UGL4(\varphi_2, \pi, F_{12n}; \gamma_{12n})$.
11. $UGL4(\varphi_3, \pi, F_{43n}; \gamma_{43n})$.
12. $SMVKT(|F_{12t}|, \gamma_{12t}; |F_{12n}|, \gamma_{12n}; F_{1e}, \gamma_{1e})$.
13. $SMVKT(|F_{43t}|, \gamma_{43t}; |F_{43n}|, \gamma_{43n}; F_{4e}, \gamma_{4e})$.
14. $SMVKT(F_{1a}, \gamma_{1a}, F_2, \gamma_2; F_{3a}, \gamma_{3a}, F_{4a}, \gamma_{4a})$.

$$1. M_B(\bar{F}_2) = l_{BS_2} \cos \varphi_{BS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{BS_1} \sin \varphi_{BS_1} F_2 \cos \gamma_2$$

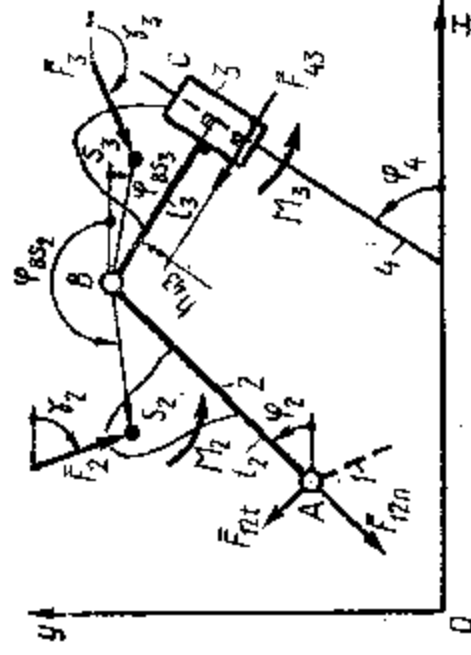
$$2. M_B(\bar{F}_3) = l_{BS_2} \cos \varphi_{BS_2} F_3 \sin \gamma_3 - l_{BS_1} \sin \varphi_{BS_1} F_3 \cos \gamma_3$$

$$3. F_{12t} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_2))/l_2$$

$$4. UGL3(\varphi_2, \pi/2, F_{12t}; \gamma_{12t})$$

$$DNMA1(l_2, \varphi_2, l_3, \varphi_3, l_{BS_1}, \varphi_{BS_1}, l_{BS_2}, \varphi_{BS_2}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3, F_{1a}, \gamma_{1a}, F_{2a}, \gamma_{2a}, F_{3a}, \gamma_{3a}, F_{4a}, \gamma_{4a})$$

Таблица 21.2. Алгоритм силового расчета структурной группы 2-го класса второго вида



$$4. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \cos(\varphi_4 + \pi/2) \\ \sin \varphi_2 & \sin(\varphi_4 + \pi/2) \end{vmatrix}$$

$$5. C(2) = \begin{vmatrix} -(|F_{12t}| \cos \gamma_{12t} + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3) \\ -(|F_{12t}| \sin \gamma_{12t} + F_2 \sin \gamma_2 + F_3 \sin \gamma_3) \end{vmatrix}$$

$$6. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2)); F_{12n}, F_{4a}$$

$$7. UGL4(\varphi_2, \pi, F_{12n}; \gamma_{12n})$$

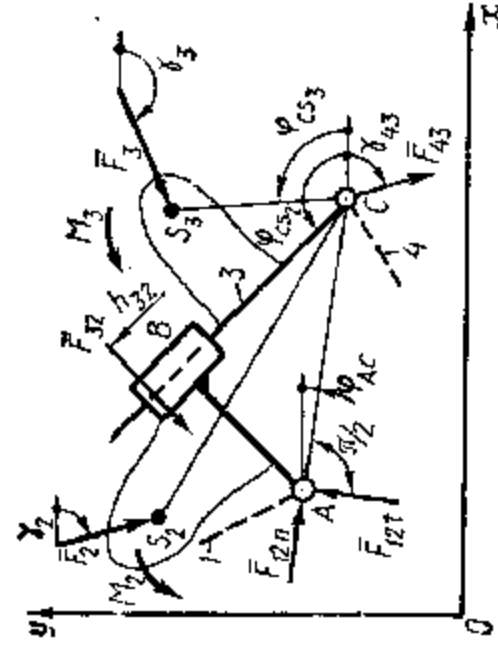
$$8. UGL3(\varphi_4, \pi/2, F_{4a}; \gamma_{4a})$$

$$1. M_B(\bar{F}_2) = l_{BS_2} \cos \varphi_{BS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{BS_1} \sin \varphi_{BS_1} F_2 \cos \gamma_2$$

$$2. F_{12t} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_2))/l_2$$

$$3. UGL3(\varphi_2, \pi/2, F_{12t}; \gamma_{12t})$$

$$DNMA2(l_2, \varphi_2, l_3, \varphi_3, l_{BS_1}, \varphi_{BS_1}, l_{BS_2}, \varphi_{BS_2}, M_2, F_2, \gamma_2, M_3, F_3, \gamma_3, F_{1a}, \gamma_{1a}, F_{2a}, \gamma_{2a}, F_{3a}, \gamma_{3a}, F_{4a}, \gamma_{4a}, h_{4a})$$

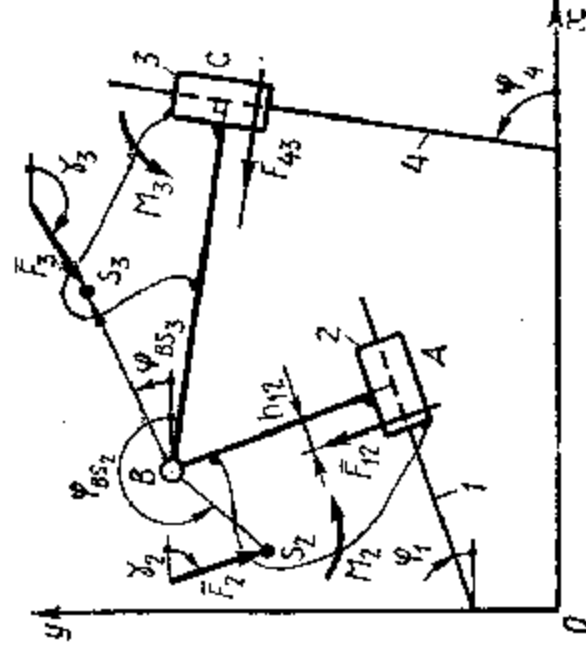


1. $M_C(\bar{F}_2) = l_{CS_2} \cos \varphi_{CS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{CS_2} \sin \varphi_{CS_2} F_2 \cos \gamma_2$.
2. $M_C(\bar{F}_3) = l_{CS_3} \cos \varphi_{CS_3} F_3 \sin \gamma_3 - l_{CS_3} \sin \varphi_{CS_3} F_3 \cos \gamma_3$.
3. $F_{12t} = -(M_2 + M_C(\bar{F}_2) + M_3 + M_C(\bar{F}_3)) / l_{AC}$.

$DNMA3$ (l_{CS_2} , φ_{CS_2} , l_{CS_3} , φ_{CS_3} , l_{AC} , φ_{AC} , M_2 , F_2 , γ_2 , M_3 , F_3 , γ_3 , F_{12t} , F_{12n} , F_{2t} , F_{2n} , F_{3t} , F_{3n} , F_{43} , F_{43t} , F_{43n}).

4. $UGL3$ ($\varphi_{AC} + \pi$, $\pi/2$, F_{12t} , γ_{12t}).
5. $A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{AC} & \cos(\varphi_3 + \pi/2) \\ \sin \varphi_{AC} & \sin(\varphi_3 + \pi/2) \end{vmatrix}$.
6. $C(2) = \begin{vmatrix} -(F_{12t} \cos \gamma_{12t} + F_2 \cos \gamma_2) \\ -(F_{12t} \sin \gamma_{12t} + F_3 \sin \gamma_3) \end{vmatrix}$.
7. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2); F_{12n} , F_{3n}).
8. $UGL4$ (φ_{AC} , π , F_{12n} , γ_{12n}).
9. $SMVKT$ (F_{12n} , γ_{12n} , F_{12t} , γ_{12t} ; F_{1n} , γ_{1n}).
10. $UGL3$ (φ_3 , $\pi/2$, F_{3n} ; γ_{3n}).
11. $SMVKT$ ($|F_{3n}|$, $\gamma_{3n} + \pi$, F_3 , γ_3 ; F_{3n} , γ_{3n}).
12. $\gamma_{43} = \gamma_{3n} + \pi$.
13. $F_{3n} = |F_{3n}|$.
14. $h_{3n} = (M_3 + M_C(\bar{F}_3)) / F_{3n}$.

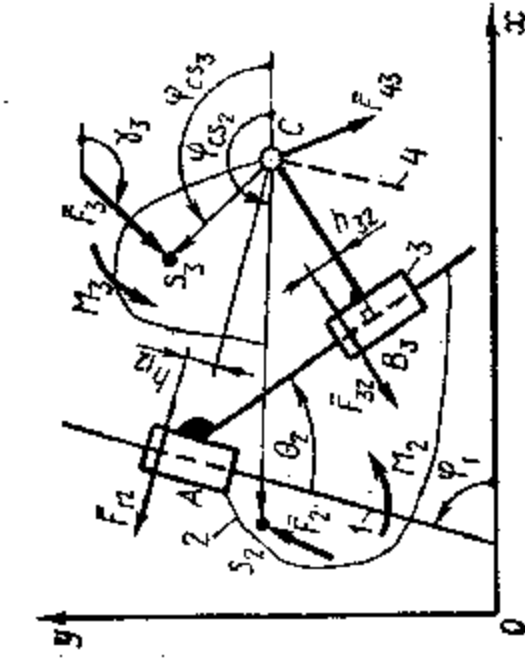
Таблица 21.4. Алгоритм силового расчета звеньев структурной группы 2-го класса четвертого вида



1. $M_B(\bar{F}_2) = l_{BS_2} \cos \varphi_{BS_2} F_2 \sin \gamma_2 - l_{BS_2} \sin \varphi_{BS_2} F_2 \cos \gamma_2$.
2. $M_B(\bar{F}_3) = l_{BS_3} \cos \varphi_{BS_3} F_3 \sin \gamma_3 - l_{BS_3} \sin \varphi_{BS_3} F_3 \cos \gamma_3$.

$DNMA4$ (l_{BS_2} , φ_{BS_2} , l_{BS_3} , φ_{BS_3} , M_2 , F_2 , γ_2 , M_3 , F_3 , γ_3 , F_{12t} , F_{12n} , F_{2t} , F_{2n} , F_{3t} , F_{3n} , F_{43} , F_{43t} , F_{43n}).

3. $A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \pi/2) & \cos(\varphi_4 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_1 + \pi/2) & \sin(\varphi_4 + \pi/2) \end{vmatrix}$.
4. $C(2) = \begin{vmatrix} -(F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3) \\ -(F_2 \sin \gamma_2 + F_3 \sin \gamma_3) \end{vmatrix}$.
5. СИСТЕМА (2, A(2, 2), C(2); F_{1n} , F_{4n}).
6. $UGL3$ (φ_1 , $\pi/2$, F_{1n} ; γ_{1n}).
7. $UGL3$ (φ_4 , $\pi/2$, F_{4n} ; γ_{4n}).
8. $F_{1n} = |F_{1n}|$; $F_{4n} = |F_{4n}|$.
9. $h_{1n} = -(M_2 + M_B(\bar{F}_2)) / F_{1n}$.
10. $h_{4n} = -(M_3 + M_B(\bar{F}_3)) / F_{4n}$.
11. $SMVKT$ (F_{1n} , γ_{1n} , F_2 , γ_2 ; F_{2n} , γ_{2n}).
12. $F_{2n} = |F_{2n}|$.



$$1. A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \pi/2) \cos(\varphi_1 + \theta_2 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_1 + \pi/2) \sin(\varphi_1 + \theta_2 + \pi/2) \end{vmatrix}$$

$$2. C(2) = \begin{vmatrix} -F_2 \cos \gamma_2 \\ -F_2 \sin \gamma_2 \end{vmatrix}$$

9. СИСТЕМА(2, A(2, 2), C(2); F₁₂, F₃₂).

10. UGL3(φ₁, π/2, F₁₂; γ₁₂).

11. UGL3(φ₁ + θ₂, π/2, F₃₂; γ₃₂).

12. F₁₂ = |F₁₂|; F₃₂ = |F₃₂|.

13. SMVKT(F₃₂, γ₃₂ + π, F₃; γ₃; F₄₃, γ₄₃).

14. γ₄₃ = γ₃₄ + π.

15. M_C(F₂) = l_{CS₂} cos φ_{CS₂} F₂ sin γ₂ - l_{CS₂} sin φ_{CS₂} F₂ cos γ₂.

16. M_C(F₃) = l_{CS₃} cos φ_{CS₃} F₃ sin γ₃ - l_{CS₃} sin φ_{CS₃} F₃ cos γ₃.

17. h₁₂ = -(M₂ + M_C(F₂) + M₃ + M_C(F₃))/F₁₂.

18. h₃₂ = -(M₂ + M_C(F₂))/F₃₂.

DNMA5(φ₁, θ₂, l_{CS₂}, φ_{CS₂}, l_{CS₃}, φ_{CS₃}, M₂, F₂, γ₂, M₃, F₃, γ₃; F₁₂, γ₁₂, F₃₂, γ₃₂, F₄₃, γ₄₃, h₁₂).

Перейдем к расчету группы, состоящей из звеньев 6—7

$$F_7 = \begin{cases} F_{п.с7}, & \alpha_{S7} = 0; \\ 0, & \alpha_{S7} = \pi. \end{cases}$$

Определим реакции F₃₆, F₆₇, F₀₇, обратившись к операторной функции

DNMA4(φ₃, π/2, 0, π/2, 0, l₇, 0, 0, 0, 0, F₇, π; F₃₆, γ₃₆, h₃₆, F₆₇, γ₆₇, F₀₇, γ₀₇, h₀₇).

При расчете структурной группы из звеньев 2—3 необходимо силы F₄₃, F₆₃, F₆₃ свести к одной силе и паре сил, действующих на звено 3. За точку приведения примем центр масс — точку S₃. Тогда

SMVKT(F₃₄, γ₃₄ + π, F₆₃, -π/2; F, γ);

SMVKT(F, γ, F₃₆, γ₃₆ + π; F₂₃, γ₃).

Моменты от переноса сил параллельно линиям действия

$$M_{S_3}(\bar{F}_{43}) = \bar{l}_{S_3C} \times \bar{F}_{43} = l_{S_3C} \cos \varphi_3 \cdot F_{43} \cdot \sin(\gamma_{34} + \pi) - l_{S_3C} \sin \varphi_3 \cdot F_{43} \cos(\gamma_{34} + \pi);$$

$$l_{S_3T} = l_{S_3D} - (y_S \cos(\pi/2 - \varphi_3) + (x_S - x_D) \cos \varphi_3);$$

$$M_{S_3}(\bar{F}_{63}) = \bar{l}_{S_3T} \times \bar{F}_{63} = l_{S_3T} \cos(\varphi_3 + \pi) \cdot F_{63} \cdot \sin(\gamma_{36} + \pi) - l_{S_3T} \sin(\varphi_3 + \pi) \cdot F_{63} \cos(\gamma_{36} + \pi);$$

$$M_3 = M_{S_3}(\bar{F}_{43}) + M_{S_3}(\bar{F}_{63}).$$

Определим реакции F₁₂, F₂₃, F₀₃:

DNMA1(l₂, φ₂, l_{BD}, φ₃, (0,5l₂), φ₂ - π, l_{BS₂}, φ₃ - π, 0, 0, 0,

M₃, F₂₃, γ₃; F₁₂, γ₁₂, F₂₃, γ₂₃, F₀₃, γ₀₃).

Так как сила тяжести звена 2 не учтена, то за точку приведения можно принять любую точку звена 2, например при l_{BS₂} = 0,5l₂.

21.7. Силовой расчет пространственных механизмов с нижними парами

При силовом расчете пространственных механизмов векторные уравнения равновесия представляют пространственными многоугольниками векторов сил. Векторы сил удобно выразить через их проекции на координатные оси, моменты сил — через векторные произведения радиусов-векторов точек приложения и векторов сил. Рассмотрим на примерах расчета простейших пространственных шарнирно-рычажных механизмов последовательность определения реакций в кинематических парах.

Пусть к шатуну 2 кривошипно-коромыслового механизма (рис. 21.11) приложены сила F₂ (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}) в точке S₂, момент M₂ (M_{2x}, M_{2y}, M_{2z}), являющиеся главным вектором и главным моментом системы сил звена 2. Аналогично примем, что к звену 3 — коромыслу — приложены сила F₃ (F_{3x}, F_{3y}, F_{3z}) в точке S₃, момент M₃ (M_{3x}, M_{3y}, M_{3z}). Поместим в точки C и B начала координатных систем с осями, параллельными осям основной системы.

Для определения реакции в кинематической паре D рассмотрим равновесие звена 3. Составим векторное уравнение моментов сил, действующих на коромысло, относительно точки C :

$$(-\bar{l}_{CS}) \times \bar{F}_3 + \bar{M}_3 + (-\bar{l}_3) \times \bar{F}_D + \bar{M}_D = 0, \quad (21.20)$$

где $\bar{F}_D (F_{Dx}, F_{Dy}, F_{Dz})$ и $\bar{M}_D (0, M_{Dy}, M_{Dz})$ — векторы реакции и реактивного момента в кинематической паре D .

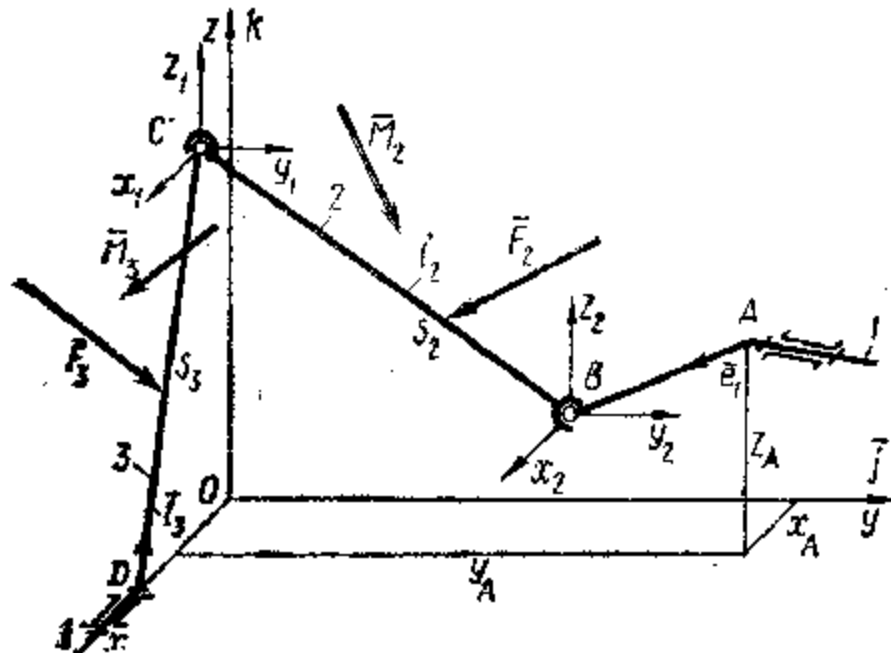


Рис. 21.11. Пространственный кривошипно-коромысловый механизм

Представим уравнение (21.20) в виде

$$-l_{CS} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l_{3x} & l_{3y} & l_{3z} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} + \bar{M}_3 - l_3 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l_{3x} & l_{3y} & l_{3z} \\ F_{Dx} & F_{Dy} & F_{Dz} \end{vmatrix} + \bar{M}_D = 0. \quad (21.21)$$

Проекция орта \bar{l}_3 определяются по формуле (8.3). Развернем определители по элементам первых строк:

$$\left. \begin{aligned} l_{CS} (F_{3z} \cos \varphi_3 - F_{3y} \sin \varphi_3) - M_{3x} &= l_3 (F_{Dz} \cos \varphi_3 - F_{Dy} \sin \varphi_3); \\ F_{Dx} \sin \varphi_3 + M_{Dy} &= l_{CS} F_{3x} \sin \varphi_3 - M_{3y}; \\ F_{Dx} \cos \varphi_3 + M_{Dz} &= l_{CS} (F_{3z} \cos \varphi_3 - F_{3y} \sin \varphi_3) - M_{3z}. \end{aligned} \right\} \quad (21.22)$$

Уравнения системы (21.22) содержат пять неизвестных, для отыскания которых необходимо иметь дополнительно еще два уравнения. Составим векторное уравнение моментов равновесия звеньев 3 и 2 относительно точки B :

$$(-\bar{l}_{DB}) \times \bar{F}_D + \bar{M}_3 + (l_{BC}\bar{e}_2 - l_{CS}\bar{e}_3) \times \bar{F}_3 + \bar{M}_2 + \bar{l}_{BS} \times \bar{F}_2 + M_D = 0, \quad (21.23)$$

и проецируя векторы на ось Bx_3 , получим

$$(\bar{l}_{DB} \times \bar{F}_D) \bar{i} = M_{3x} + ((l_{BC}\bar{e}_2 - l_{CS}\bar{e}_3) \times \bar{F}_3) \bar{i} + M_{2x} + (l_{BS}\bar{e}_3 \times \bar{F}_2) \bar{i}, \quad (21.24)$$

где $(\bar{l}_{DB} \times \bar{F}_D) \bar{i} = l_{DBy}F_{Dz} - l_{DBz}F_{Dy}$.

Проецируя векторы на ось Bz_2 , получим

$$(\bar{l}_{DB} \times \bar{F}_D) \bar{k} = M_{3z} + ((l_{BC}\bar{e}_2 - l_{CS}\bar{e}_3) \times \bar{F}_3) \bar{k} + M_{2z} + (l_{BS}\bar{e}_2 \times \bar{F}_2) \bar{k} + M_{Dz}, \quad (21.25)$$

где $(\bar{l}_{DB} \times \bar{F}_D) \bar{k} = l_{DBx}F_{Dy} - l_{DBz}F_{Dx}$.

В уравнениях (21.24) и (21.25) проекции вектора \bar{l}_{DB} определяются по формуле (17.7), а проекции ортов \bar{e}_2 и \bar{e}_3 — как указано

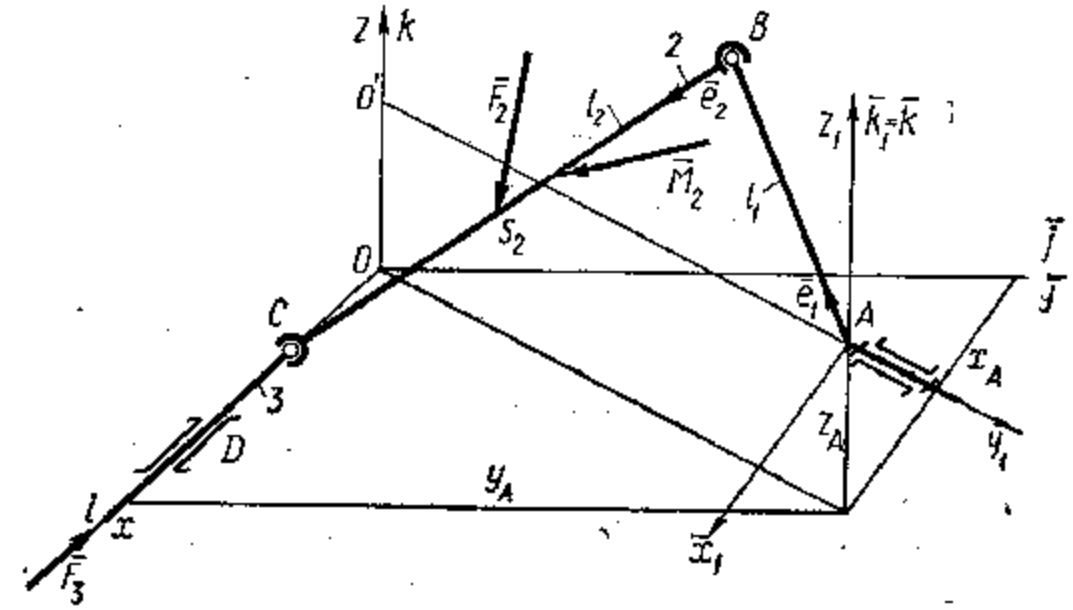


Рис. 21.12. Пространственный кривошипно-ползунный механизм

в гл. 8. Из совместного решения уравнений (21.22), (21.24), (21.25) определим проекции векторов \bar{F}_D и \bar{M}_D . Рассматривая равновесие звена 3, получим уравнение $\bar{F}_D + \bar{F}_3 + \bar{F}_{23} = 0$, в котором векторы \bar{F}_D и \bar{F}_{23} полностью определены, а проекции вектора \bar{F}_{23} определяются при представлении векторного уравнения уравнениями проекций на координатные оси. Аналогично решается уравнение равновесия звена 2: $\bar{F}_{32} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{12} = 0$.

В той же последовательности определим реакции в кинематических парах кривошипно-ползунного механизма (рис. 21.12). Из условия равновесия звеньев 2 и 3 получим уравнение моментов относительно центра вращательной пары B :

$$\bar{l}_{BS} \times \bar{F}_2 + \bar{M}_2 + \bar{l}_2 \times \bar{F}_3 + \bar{l}_2 \times \bar{F}_D + \bar{M}_D = 0, \quad (21.26)$$

или в другой форме

$$l_{BS} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} + \bar{M}_2 + l_2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} + l_2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ F_{Dx} & F_{Dy} & F_{Dz} \end{vmatrix} + \bar{M}_D = 0. \quad (21.27)$$

В условиях (21.26) и (21.27) $\bar{F}_D(0, F_{Dy}, F_{Dz}), M_D(M_{Dx}, 0, 0)$ — векторы опорной реакции и опорного момента. Развернув уравнение (21.27) по элементам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, получим необходимое число уравнений для определения F_{Dz}, F_{Dy} и M_{Dx} . Реакции \bar{F}_C и \bar{F}_B определим, составляя уравнения равновесия для звеньев 3 и 2.

21.8. Силовой расчет механизмов с высшими кинематическими парами

Исходя из того, что звено, входящее в высшую кинематическую пару, является статически определимой системой, силовой расчет механизмов с высшими парами заключается в последовательном рассмотрении равновесия звеньев, начиная от тех, на которые действуют силы производственного сопротивления. Так, например, при расчете кулачкового механизма (рис. 21.13), на толкатель которого действует сила производственного сопротивления \bar{F}_{nc} , из рассмотрения равновесия толкателя получим

$$\bar{F}_{12} + \bar{F}_{nc} + \bar{F}'_{02} + \bar{F}''_{02} = 0, \quad (21.28)$$

где \bar{F}_{12} — сила воздействия кулачка на толкатель; \bar{F}'_{02} и \bar{F}''_{02} — реакции стойки на толкатель, отклоняющиеся от нормали к направляющей в сторону, противоположную движению толкателя.

Заменим условие (21.28) уравнениями проекций на координатные оси xOy :

$$\left. \begin{aligned} -F_{12} \sin \alpha + F'_{02} \cos \varphi - F''_{02} \cos \varphi &= 0; \\ F_{12} \cos \alpha - F'_{02} \sin \alpha - F''_{02} \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21.29)$$

Уравнение моментов относительно точки B_1

$$\sum_{i=1}^n M_{B_1}(\bar{F}_i) = F'_{02} h \cos \varphi - F_{12}(a - (r_0 + s_2(\varphi_1))) \sin \alpha = 0. \quad (21.30)$$

Решив совместно уравнения (21.29) и (21.30), получим значение векторов $\bar{F}_{12}, \bar{F}'_{02}$ и \bar{F}''_{02} .

В зацеплении зубчатых колес 1 и 2 (рис. 21.14), находящихся под действием вращающих моментов T_1 и T_2 , направление полной реакции (с учетом сил трения) зависит от фазы зацепления. Когда точка касания рабочих профилей K находится между точками b_1 и b_2 , ограничивающими активный участок линии зацепления, реакция \bar{F}_{12} будет отклоняться от нормали к профилям в сторону, пре-

пятствующую скольжению зубьев, и пересекать линию O_1O_2 не в полюсе W , а в точке C . Для $b_2K < b_2W$ (а) получим

$$F_{12} = T_2 / ((r_w - h') \cos(\alpha_w + \varphi)), \quad (21.31)$$

где α_w — угол зацепления зубчатых колес; φ — угол трения в зацеплении.

Из ΔKWC расстояние, определяющее положение точки C относительно полюса $h' = KW \sin \varphi / \cos(\alpha_w + \varphi)$, достигает наи-

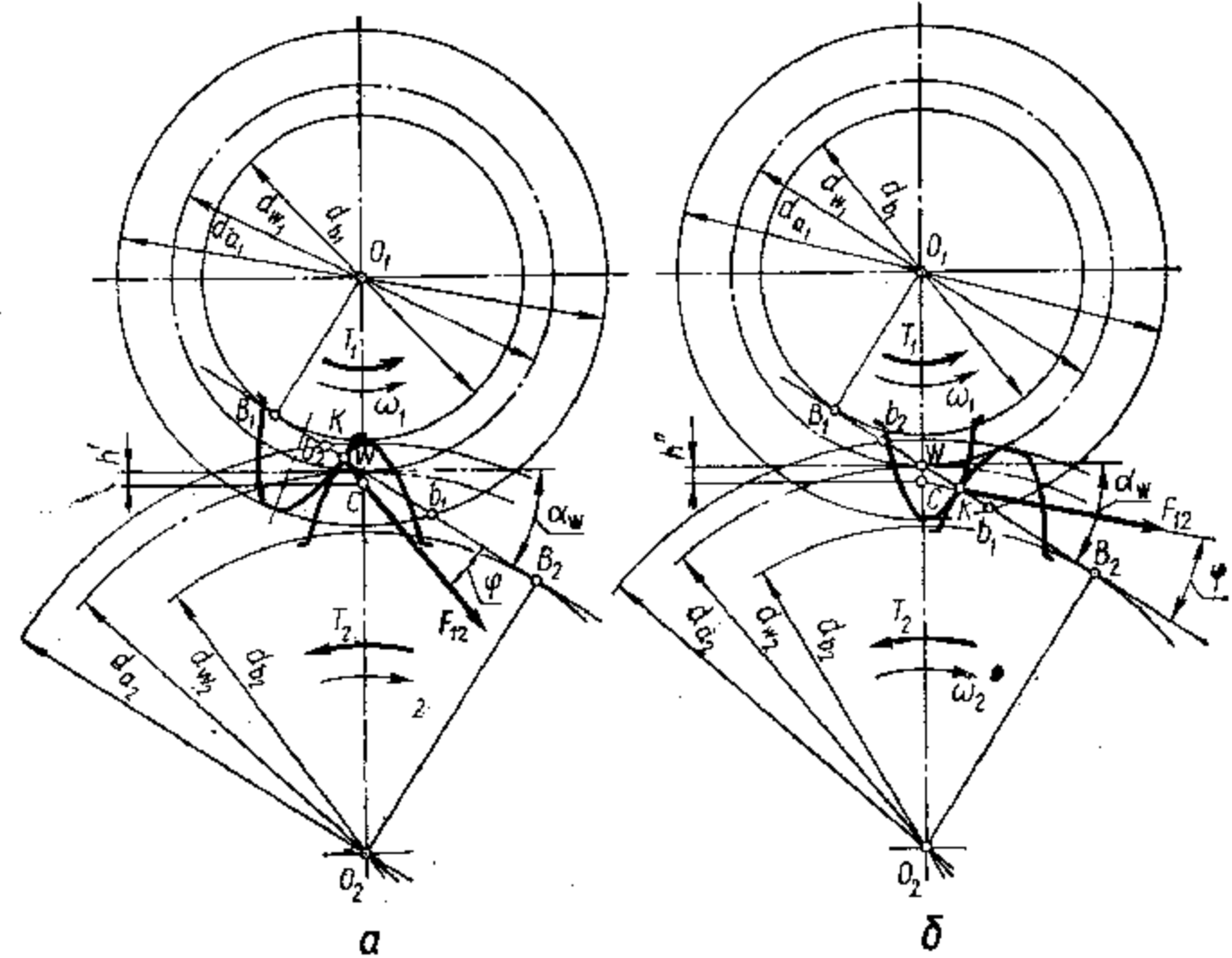


Рис. 21.14. Определение реакций в прямоугольном зубчатом зацеплении

большого значения в начале зацепления при $KW = b_2W$, а при прохождении точки контакта через полюс $h' = 0$. Для $b_2K > b_2W$ получим (б)

$$F_{12} = T_2 / ((r_w - h'') \cos(\alpha_w - \varphi)). \quad (21.32)$$

Расстояние $h' = WK \sin \varphi / \cos(\alpha_w - \varphi)$ достигает наибольшего значения в конце зацепления при $WK = Wb_1$. Из формул (21.31) и (21.32) следует, что сила \bar{F}_{12} в процессе зацепления не остается постоянной даже при постоянном значении момента T_2 . Но так как эти колебания невелики, можно приближенно принять $h' = h'' = h = 1 \dots 1,6m \operatorname{tg} \varphi$ и тогда

$$F_{12} = T_2 / ((r_w - h) \cos \alpha_w). \quad (21.33)$$

Зависимости (21.31), (21.32) и (21.33) используются при расчетах усилий в парах зубчатых механизмов различных видов с учетом трения. Пренебрегая трением для прямозубой передачи,

получим

$$F_{12} = F_n = T_1 / (r_w \cos \alpha_w) = 2T_1 / (mz_1 \cos \alpha), \quad (21.34)$$

где z_1 — число зубьев колеса; α — профильный угол.

В расчетах оперируют составляющими нормальной силы F_n — окружной

$$F_t = 2T_1 \cos \alpha_w / (mz_1 \cos \alpha) \quad (21.35)$$

и радиальной

$$F_r = 2T_1 \sin \alpha_w / (mz_1 \cos \alpha). \quad (21.36)$$

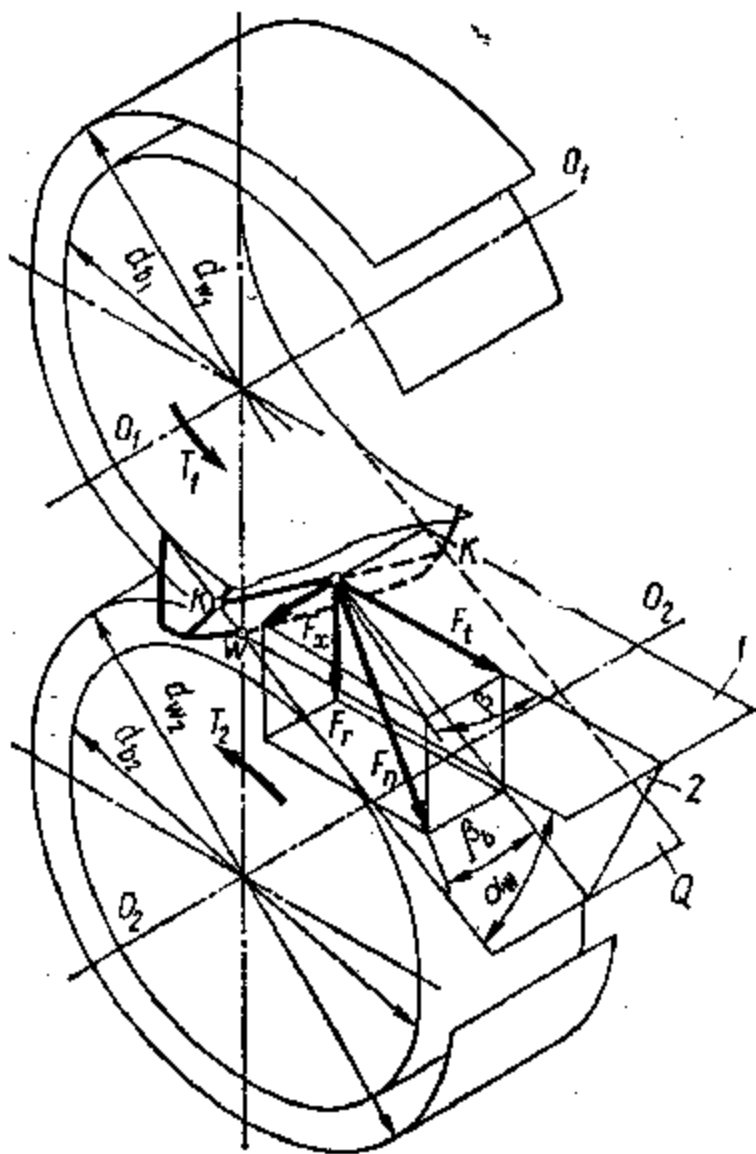
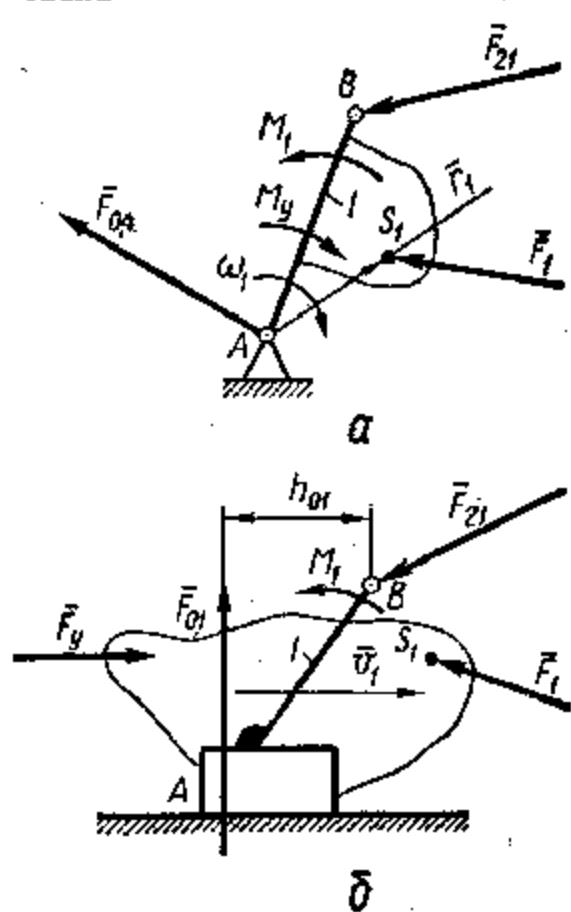


Рис. 21.15. Определение реакций в косозубом зубчатом зацеплении

Рис. 21.16. Силовой расчет входного звена



В косозубом зацеплении (рис. 21.15) вектор \bar{F}_{12} реакции, равный нормальной силе \bar{F}_n , находится в плоскости зацепления Q под углом β , относительно плоскости 2, перпендикулярной осям O_1O_1 и O_2O_2 , в которой лежит окружная сила \bar{F}_t , расположенная на линии пересечения плоскости 2 с плоскостью 1, касательной к начальным поверхностям. Силу \bar{F}_n , как и ее составляющие, выражают через окружную силу $F_t = 2T_1/mz_1$:
нормальная сила

$$F_n = F_t / (\cos \alpha_w \cos \beta);$$

радиальная

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_w / \cos \beta;$$

осевая

$$F_z = F_t \operatorname{tg} \beta.$$

21.9. Силовой расчет входного звена

Последовательным переходом от группы к группе рассматриваемого механизма в конечном счете определяется система сил, действующих на входное звено, образующее со стойкой механизм 1-го класса (рис. 21.16). При рассмотрении его равновесия в плоском механизме составляют три уравнения статики, где определению подлежат два неизвестных; значение и направление реакции \bar{F}_{01} во вращательной паре (рис. 21.16, а) и значение и точка приложения

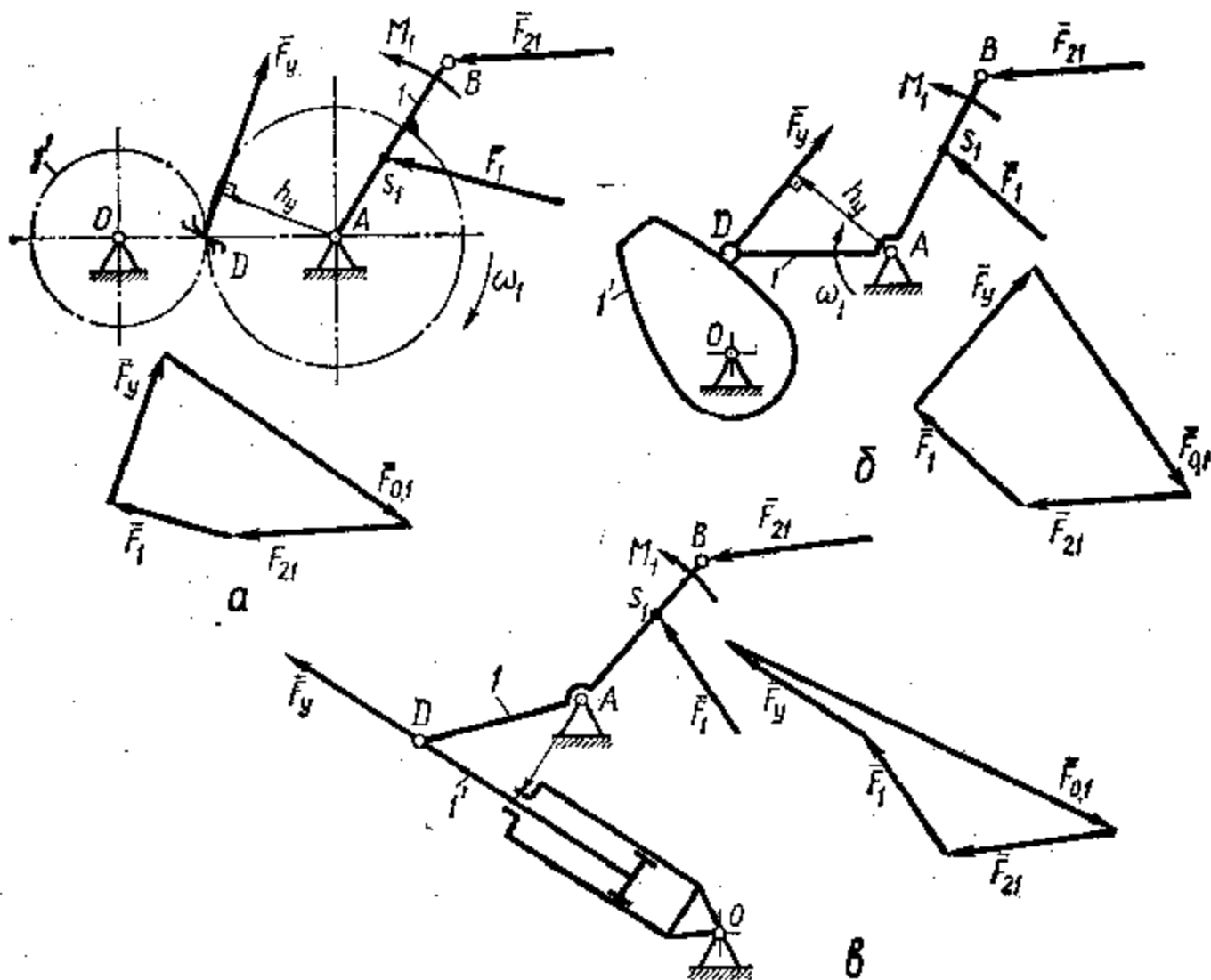


Рис. 21.17. Определение уравновешивающей силы

силы \bar{F}_{01} в поступательной паре (рис. 21.16, б), которые могут образовываться входным звеном 1 со стойкой 0. Это несоответствие указывает на наличие множества математических решений задачи. Однако система сил, действующих на входное звено со стороны всех остальных звеньев механизма, преодолевается движущими силами и моментами, действующими на это звено со стороны двигателя или передаточного механизма. Следовательно, с учетом инерционности звеньев можно считать, что входное звено механизма уравновешивается движущими силами. Поэтому указанная неопределенность устраняется при приложении к входному звену уравновешивающего момента или уравновешивающей силы. В основу определения этих силовых факторов положен метод, разработанный Н. Е. Жуковским (см. прил.), основанный на принципе возможных перемещений применительно к механизмам.

Уравновешивающий момент M_y , действующий на звено I , определяется из рассмотрения уравнения его равновесия

$$M_1 + M_y + M_A(\bar{F}_1) + M_A(\bar{F}_{21}) = 0, \quad (21.37)$$

где $M_A(\bar{F}_1) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1$; $M_A(\bar{F}_{21}) = \bar{l}_{AB} \times \bar{F}_{21}$.

Уравновешивающий момент на звене создается непосредственно двигателем, если звено I соединено с ротором электродвигателя, или уравновешивающей силой, точка приложения которой определяется структурой передаточного механизма.

Уравновешивающая сила определится через уравновешивающий момент $F_y = M_y/h_y$ при известном плече h_y ее приложения. Реакция в кинематической паре входное звено I — стойка O определяется решением одного из двух соответствующих условий:

а) при действии уравновешивающего момента

$$\bar{F}_{21} + \bar{F}_1 + \bar{F}_{01} = 0;$$

б) при действии уравновешивающей силы

$$\bar{F}_{21} + \bar{F}_1 + \bar{F}_y + \bar{F}_{01} = 0.$$

Решение этих уравнений для разных схем передаточного механизма показано на рис. 21.17 для привода от зубчатого (рис. 21.17, а) и кулачкового механизмов (рис. 21.17, б), гидравлического цилиндра (рис. 21.17, в). Из сказанного следует, что силовой расчет входного звена механизма выполняется только тогда, когда известен способ уравновешивания (моментом или силой с определенной точкой приложения).

22. ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ СИЛ

22.1. Основные задачи исследования

Движение звеньев механизма происходит под влиянием действующих на них сил. Их величины, характер воздействия и точки приложения циклически изменяются по трем основным причинам: изменение нагрузок сопротивления как на рабочем органе, так и в самом механизме; изменение движущих сил, обусловленных процессами, происходящими в двигателе машины; изменение положения звеньев за цикл работы механизма. Совокупное изменение условий нагружения приводит к ускорениям или замедлениям движения звеньев, что вызывает инерционные воздействия на них и, как следствие, — изменение скоростей. Следовательно, кинематические параметры звеньев — функции внешних сил. Они зависят от масс звеньев и их распределения по ним с учетом конкретной формы и размеров. **Задача определения закона движения звеньев с определенной геометрической формой, размерами и массой при известных внешних силах и моментах сил и законов их изменения во времени решается на основе общих принципов теоретической механики и называется динамическим расчетом.**

При динамическом расчете конкретных механизмов необходимо учитывать специфические факторы, присущие им. Например, механизмы с электрическим, гидравлическим, пневматическим приводами обладают различными свойствами, учет которых при расчете требует применения специальных математических методов. Имеются особенности в динамических расчетах механизмов, применяющихся в машинах различного назначения — станках, подъемно-транспортных устройствах, компрессорах и насосах и т. п. Поэтому в теории механизмов принято рассматривать задачи динамического расчета механизмов разных типов как самостоятельные.

Роль динамического расчета очень велика при проектировании или исследовании механизма. Только динамический расчет выявляет истинную картину взаимодействия звеньев механизма и законов их движения. Почти всегда, особенно в скоростных машинах, картина силового взаимодействия звеньев механизмов резко различается при оценке схемы статическими и динамическими методами. Если механизм, входящий в какой-либо агрегат, спроектирован без учета динамических факторов, то его надежность будет низкой, снизится точность и производительность работы агрегата, так как при проектировании не учитывалась реальная картина силового взаимодействия звеньев.

22.2. Пути решения задачи о движении механизма

Исходным условием, из которого определяют закон движения механизма, является равенство работы внешних сил и кинетической энергии механизма, равной сумме кинетических энергий всех движущихся звеньев:

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{s_{i0}}^{s_i} F_i \cos(\bar{F}_i, \bar{ds}_i) ds_i + \int_{\varphi_{i0}}^{\varphi_i} M_i d\varphi_i \right) = \sum_{i=1}^n (0,5m_i v_{si}^2 + 0,5J_{si} \omega_i^2) - E_0, \quad (22.1)$$

где F_i , M_i — силы и моменты сил, действующие на звено i ; m_i , J_{si} — массы и моменты инерции этих звеньев; ω_i , v_{si} — угловые и линейные скорости звеньев и соответствующих точек на них; ds_i и $d\varphi_i$ — элементарные перемещения точек приложения сил и звеньев из начальных положений s_{i0} и φ_{i0} в рассматриваемые s_i и φ_i ; E_0 — кинетическая энергия механизма в начальном положении входного звена.

Используя это уравнение для каждого положения входного звена, можно определить действительные скорости звеньев. Если известен закон движения одного из звеньев механизма с одним входным звеном, то методами кинетики находят закон движения любого другого звена. Поэтому вместо исследования движения всего механизма под действием общей системы сил исследуют движение лишь одного из звеньев механизма, называемого звеном приведения. При этом обязательно соблюдение условия эквивалентности приведенного звена всей системе звеньев механизма. В качестве

звена приведения принимают звено, совершающее поступательное или вращательное движение, обычно входное. На это звено должны действовать такие условные нагрузки, оно должно иметь такую условную массу, чтобы в каждом положении механизма соблюдалось указанное условие эквивалентности. Силы или моменты, прикладываемые к звену приведения, называются приведенной силой или моментом приведенной силы; масса или момент инерции его — приведенной массой или приведенным моментом инерции. Условие эквивалентности будет соблюдаться, если работа приведенной силы \bar{F}_n будет равна работе всех сил, действующих на звенья механизма, а кинетическая энергия приведенной массы m_n будет равна кинетической энергии всего механизма:

$$F_n v_n \cos(\bar{F}_n, \bar{v}_n) = 0,5 m_n v_n^2 - E_0, \quad (22.2)$$

где v_n — скорость точки приложения приведенной силы, в которой сосредоточена приведенная масса m_n ; \bar{F}_n, \bar{v}_n — угол, образованный соответствующими векторами.

22.3. Приведенные сила и момент

Работа является мерой действия силы, поэтому приведенная сила — это такая сила, которая, будучи приложенной к какой-либо точке звена приведения, совершает в единицу времени работу, численно равную сумме работ всех сил и моментов сил, действующих на звенья механизма. При направлении приведенной силы \bar{F}_n , совпадающим с вектором \bar{v}_n скорости точки приведения, для поступательно движущегося звена работа приведенной силы равна

$$F_n ds_n = \int_{s_{i0}}^{s_i} \bar{F}_i \cos(\bar{F}_i, \bar{ds}_i) ds_i + \int_{\varphi_{i0}}^{\varphi_i} M_i d\varphi_i.$$

Поделив обе части уравнения на dt , получим

$$F_n v_n = \sum_{i=1}^n (F_i v_i \cos(\bar{F}_i, \bar{v}_i) + M_i \omega_i),$$

откуда

$$F_n = \sum_{i=1}^n (F_i v_i \cos(\bar{F}_i, \bar{v}_i) + M_i \omega_i) / v_n, \quad (22.3)$$

где \bar{v}_i — скорости точек приложения сил \bar{F}_i ; ω_i — угловые скорости звеньев; M_i — моменты сил, действующих на звенья; (\bar{F}_i, \bar{v}_i) — угол между векторами \bar{F}_i и \bar{v}_i .

Для звена приведения, совершающего вращательное движение с угловой скоростью ω_n , приведенный момент сил получим из условия

$$M_n \omega_n = \sum_{i=1}^n (F_i v_i \cos(\bar{F}_i, \bar{v}_i) + M_i \omega_i),$$

откуда

$$M_n = \sum_{i=1}^n (F_i v_i \cos(\bar{F}_i, \bar{v}_i) + M_i \omega_i) / \omega_n. \quad (22.4)$$

Так, например, если в механизме, представленном на рис. 22.1, а, за точку приведения принять S_1 , то по формуле (22.3) приведенная сила

$$F_n = F_5 v_C \cos(\bar{F}_5, \bar{v}_C) / v_{S_1} + F_3 v_B \cos(\bar{F}_3, \bar{v}_B) / v_{S_1} + M_7 \omega_7 / v_{S_1}.$$

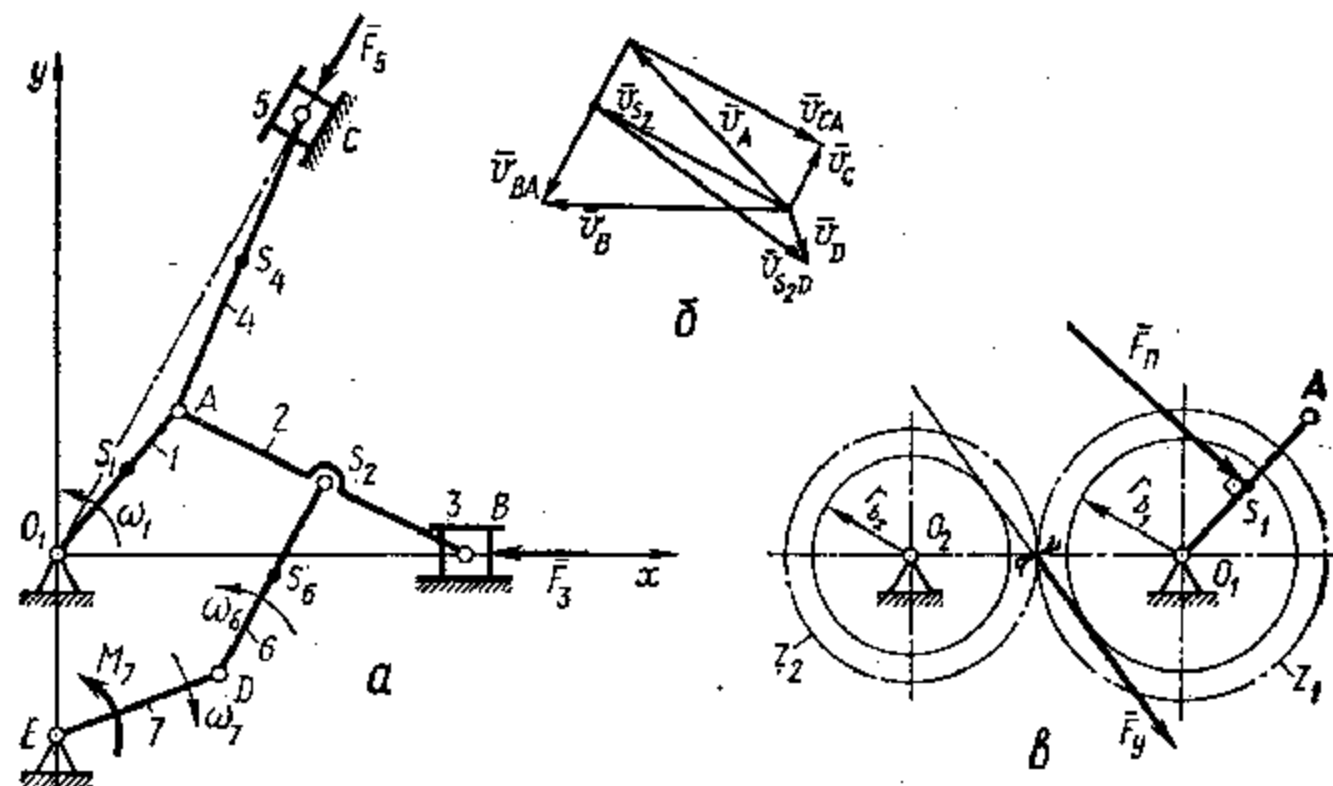


Рис. 22.1. Определение приведенной силы

Из плана скоростей (рис. 21.1, б) следует, что $\cos(\bar{F}_5, \bar{v}_C) = -1$; $\cos(\bar{F}_3, \bar{v}_B) = 1$; $\omega_7 < 0$; $v_{S_1} = \omega_1 l_{O_1 S_1}$, тогда

$$F_n = (-F_5 v_C + F_3 v_B - M_7 \omega_7) / (\omega_1 l_{O_1 S_1}).$$

Задача определения приведенной силы или приведенного момента связана с расчетом уравновешивающей силы и уравновешивающего момента. Из рассмотрения равновесия звена 1 зубчатого механизма, использованного для приведения звена 1 во вращение (рис. 22.1, в), получим:

$$F_n l_{O_1 S_1} = F_y r_{b_2}, \text{ т. е. } M_n = M_y,$$

откуда

$$F_y = F_n l_{O_1 S_1} / r_{b_2}.$$

Если приведенную силу приложить по линии действия уравновешивающей силы, то $F_n = -F_y$.

Выбор точки приведения связан с конкретной структурой механизма и способом приведения его в движение. В зависимости от способа передачи движения звену приведения выбирается приведенная сила или приведенный момент. Если $F_n = -F_y$, то точкой приведения должна быть точка приложения уравновешивающей силы.

22.4. Приведенная масса и приведенный момент инерции

Звено приведения должно обладать такой же кинетической энергией, какой обладают звенья всего механизма, что обеспечивается размещением в какой-либо его точке условной приведенной массы. **Приведенная масса** — это такая масса, которая, будучи сосредоточена в какой-либо точке звена приведения, обладает кинетической энергией, равной сумме кинетических энергий всех звеньев механизма. Для звена приведения, совершающего поступательное движение со скоростью \bar{v}_n , приведенная масса m_n определится из условия

$$m_n \bar{v}_n^2 / 2 = \sum_{i=1}^n (m_i v_{Si}^2 / 2 + J_{Si} \omega_i^2 / 2);$$

откуда

$$m_n = \sum_{i=1}^n ((m_i v_{Si}^2 + J_{Si} \omega_i^2) / \bar{v}_n^2), \quad (22.5)$$

где v_{Si} — скорость центра масс звеньев; J_{Si} — момент инерции звеньев относительно центра масс.

Для звена, совершающего вращательное движение с угловой скоростью ω_n , приведенный момент инерции масс получим из условия

$$J_n \omega_n^2 / 2 = \sum_{i=1}^n (m_i v_{Si}^2 + J_{Si} \omega_i^2 / 2),$$

откуда

$$J_n = \sum_{i=1}^n (m_i v_{Si}^2 + J_{Si} \omega_i^2) / \omega_n^2. \quad (22.6)$$

Из зависимостей (22.3) ... (22.6) следует, что приведенные значения F_n , M_n , m_n , J_n не зависят от скоростей точек и звеньев, а лишь от их отношения, т. е. определяются передаточной функцией звеньев. Так как передаточная функция меняет значения только при изменении относительного положения звеньев, то значения указанных величин — функция положения звена приведения.

22.5. Исходное уравнение движения механизма

Для поступательно движущегося звена приведения (рис. 22.2, а) приведенная масса зависит от координаты x , т. е. $m_n = m(x)$. В зависимости от типа механизма приведенная сила зависит не только от координаты x , но и от скорости звена и времени, т. е. в общем случае $F_n = F(x, v, t)$. Из теоретической механики известно, что приращение кинетической энергии массы равно элементарной работе силы, тогда $d(m_n v^2 / 2) = F_n dx$ и, следовательно,

$$d(m_n v^2 / 2) / dx = F_n. \quad (22.7)$$

Дифференцируя выражение (22.7) по формулам для производных произведения, получим

$$(v^2 / 2) dm_n / dx + m_n v dv / dx = F_n.$$

Заменяя $v = dx/dt$, получим

$$0,5 (dx/dt)^2 dm_n / dx + m_n (dx/dt) (d(dx/dt) / dx) = F_n,$$

откуда

$$m(x) (d^2 x / dt^2) + 0,5 dm(x) / dx (dx/dt)^2 = F_n. \quad (22.8)$$

Аналогично получим уравнение движения звена приведения для случая вращательного движения (рис. 22.2, б). В этом случае

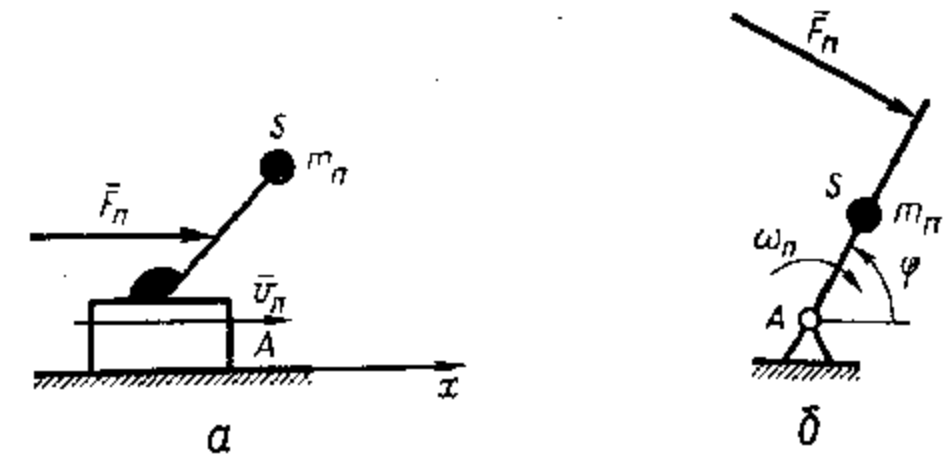


Рис. 22.2. Вывод уравнения движения звена приведения

$J_n = J(\varphi)$, $M_n = M(\varphi, \omega, t)$, тогда $d(J_n \omega^2 / 2) = M_n d\varphi$ и, следовательно,

$$d(J_n \omega^2 / 2) / d\varphi = M_n.$$

Заменяя $\omega = d\varphi/dt$, получим

$$0,5 (d\varphi/dt)^2 dJ_n / d\varphi + J_n (d\varphi/dt) d(d\varphi/dt) / d\varphi = M_n,$$

откуда

$$J(\varphi) d^2 \varphi / dt^2 + 0,5 dJ(\varphi) / d\varphi (d\varphi/dt)^2 = M_n. \quad (22.9)$$

Если масса и момент инерции постоянны, то выражения (22.8) и (22.9), как известно из теоретической механики, являются дифференциальными уравнениями Лагранжа (см. прил.) второго рода. Записанные в приведенном виде, они называются *уравнениями движения механизма в дифференциальной форме*. Приведенная сила или момент в правой части этих уравнений может быть представлена алгебраической суммой двух слагаемых, одно из которых определено для движущих сил, а другое — для сил сопротивления. Для машин различного технологического назначения силы движущие и силы сопротивления зависят от одного или нескольких параметров — перемещения, скорости и времени, что определяется механическими характеристиками двигателя и механизма исполнительного органа.

Для каждого механизма существует зависимость момента на ведущем валу механизма и двигателя от скорости его вращения — *механические характеристики* (см. гл. 20). Когда конкретный механизм приводится в движение двигателем определенного типа, то установившееся движение возможно только в случае пересечения их механических характеристик: в точке А (рис. 22.3, а) приведенные моменты сил движущих и сил сопротивления одинако-

вы: $M_d = M_c$, поэтому имеет место установившееся движение с угловой скоростью ω_y .

Если под влиянием какого-либо возмущающего фактора увеличивается скорость механизма, то при указанных характеристиках возникает неравенство $M_c > M_d$, и установившееся движение в данное мгновение (правее точки A) окажется невозможным. В этом случае произойдет уменьшение кинетической энергии механизма за счет большей работы сил сопротивления и снижение угловой скорости до ω_y . Если угловая скорость станет меньше ω_y , то равнове-

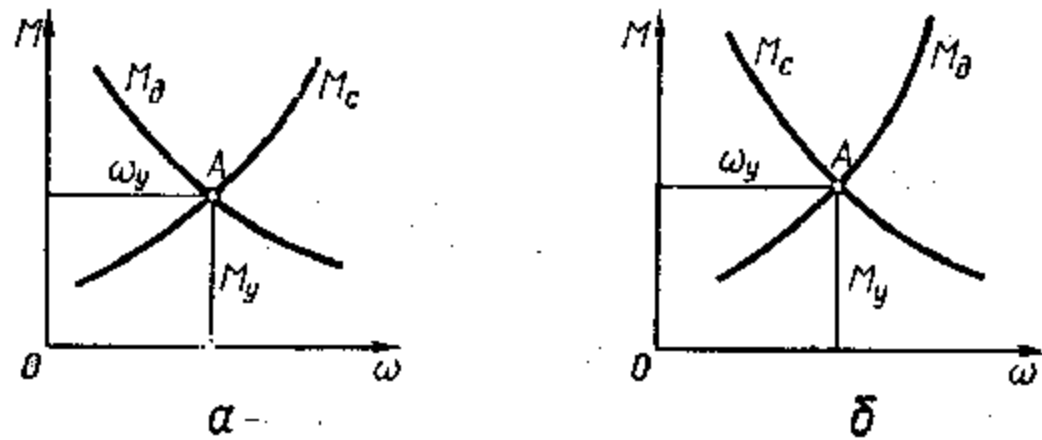


Рис. 22.3. Графики приведенных моментов сил движущих и сопротивления

ние также невозможно, так как в этом случае $M_d > M_c$ и увеличение кинетической энергии машины пойдет на увеличение скорости до ω_y . Если механическая характеристика двигателя имеет восходящую форму, а исполнительного механизма — нисходящую (рис. 22.3, б), то работа такой машины возможна только при скорости ω_y , которая должна поддерживаться специальными устройствами — регуляторами скорости (см. гл. 28). Следовательно, для устойчивой работы машины необходимо, чтобы ее двигатель имел нисходящую, а исполнительный механизм — восходящую формы механической характеристики. Такая машина обладает *свойством саморегулирования*. В противном случае машина свойством саморегулирования не обладает.

В общем случае уравнение движения механизма не решается точно в виде конечной функции. Обычно применяют приближенные либо численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, а уравнениям движения механизма придают вид, наиболее удобный для исследования в данных конкретных условиях характеристик нагружения.

22.6. Движение механизма при условии, что моменты сил и моменты инерции — функции положений звеньев

Для случая вращательного движения звена привода при условии, что $M_n = M(\varphi)$ и $J_n = J(\varphi)$, рассмотрим метод численного решения дифференциального уравнения движения механизма. Перепишем уравнение (22.9) в виде

$$J_n v + 0,5\omega^2 dJ_n/d\varphi = M_n.$$

Разобьем угол поворота φ звена привода на n достаточно малых интервалов при условии $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \dots = \varphi_{j+1} - \varphi_j$.

На интервале $(\varphi_j \dots \varphi_{j+1})$

$$d\omega/d\varphi = (\omega_{j+1} - \omega_j) \Delta\varphi;$$

$$dJ_n/d\varphi = (J_{n,j+1} - J_{n,j}) \Delta\varphi$$

и при $v = (d\omega/dt) \cdot (d\varphi/d\varphi) = (d\omega/d\varphi) \omega$ получим

$$J_{n,j} \omega_j (\omega_{j+1} - \omega_j) / \Delta\varphi + 0,5\omega_j^2 (J_{n,j+1} - J_{n,j}) / \Delta\varphi = M_{n,j}. \quad (22.10)$$

Решим уравнение (22.10) относительно ω_{j+1} :

$$2J_{n,j} \omega_j (\omega_{j+1} - \omega_j) + (J_{n,j+1} - J_{n,j}) \omega_j^2 = 2M_{n,j} \Delta\varphi,$$

откуда

$$\omega_{j+1} = \omega_j (3J_{n,j} - J_{n,j+1}) / 2J_{n,j} + M_{n,j} \Delta\varphi / (\omega_j J_{n,j}). \quad (22.11)$$

Принимая в уравнении (22.11) $j = 1, 2, \dots, n-1$ и используя соответствующие значения приведенных величин, последовательно определяют закон изменения угловой скорости звена привода $\omega(\varphi)$.

Если для механизма справедливы условия, что $M_c = M_c(\varphi)$, $M_d = M_d(\varphi)$, то исходное уравнение для вращательного движения звена привода запишется в виде

$$d(\omega^2 J_n / 2) = (M_d - M_c) / d\varphi.$$

Так как в этом уравнении переменные разделены, то его можно проинтегрировать:

$$\int_{E_0}^{E_j} dE = \int_{E_0}^{E_j} d(\omega^2 J_n / 2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} (M_d - M_c) d\varphi,$$

и, следовательно,

$$J_{n,j} \omega_j^2 / 2 - J_{n,0} \omega_0^2 / 2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} (M_d - M_c) d\varphi, \quad (22.12)$$

где dE — приращение кинетической энергии звеньев механизма при переходе из начального положения с кинетической энергией E_0 в j -е положение с кинетической энергией E_j .

Полученное уравнение для рассматриваемого частного случая называют *уравнением движения механизма в форме кинетической энергии*. Преобразуя его, получим угловую скорость звена привода в j -м положении:

$$\omega_j = \sqrt{(2/J_{n,j}) \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} (M_d - M_c) d\varphi + \omega_0^2 (J_{n,0}/J_{n,j})}. \quad (22.13)$$

Аналогично получим выражение для определения скорости звена привода при поступательном его движении:

$$v_j = \sqrt{(2/m_{n,j}) \int_{x_0}^{x_j} (F_d - F_c) dx + v_0^2 (m_{n,0}/m_{n,j})}. \quad (22.14)$$

Зависимости (22.13) и (22.14) позволяют вынести только качественные суждения о характере изменения скорости звена приведения, так как для реальных механизмов задается средняя скорость, а не начальная. Поэтому на практике уравнение движения механизма в форме кинетической энергии может быть решено приближенно. Рассмотрим алгоритм одного из приближенных методов решения этого уравнения.

Перепишем уравнение (22.12) для произвольного положения в виде

$$E_c + E_v - E_0 = \Sigma A, \quad (22.15)$$

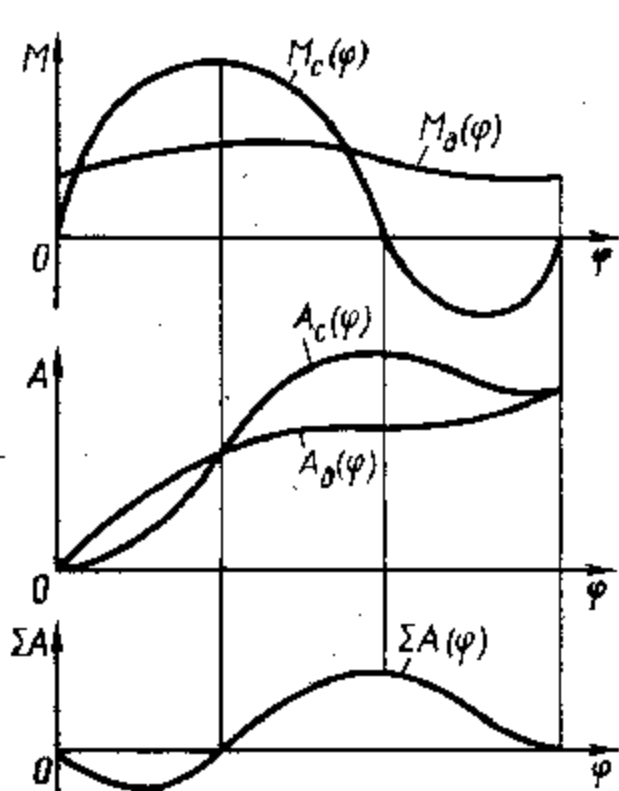


Рис. 22.4. Графики работ в зависимости от угла поворота ведущего звена

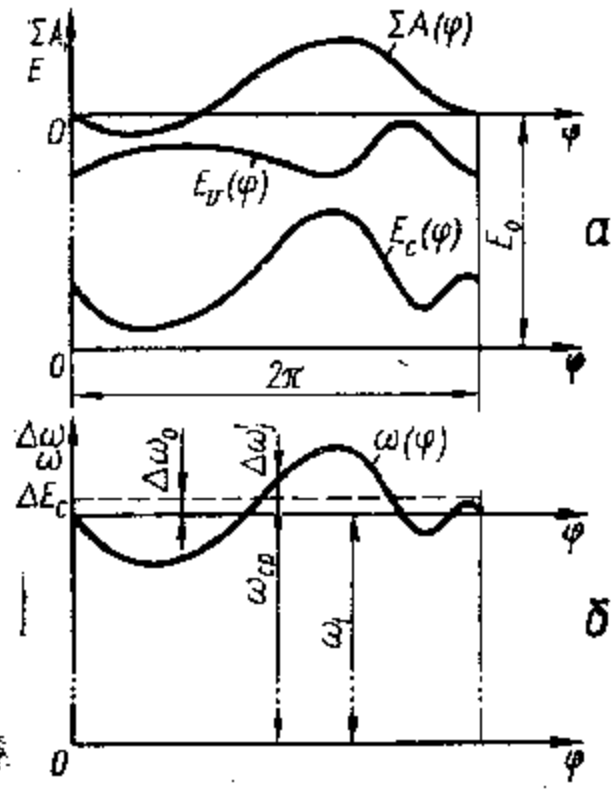


Рис. 22.5. Графики изменения кинетической энергии и угловой скорости звена приведения

где $E_c = 0,5J_c\omega^2$ — кинетическая энергия звеньев с постоянным приведенным моментом инерции J_c ; $E_v = 0,5J_v\omega^2$ — кинетическая энергия звеньев с переменным приведенным моментом инерции J_v ; E_0 — кинетическая энергия механизма при скорости звена приведения ω_0 ; ΣA — суммарная работа сил движущих и сопротивления, приведенных к звену приведения, при перемещении его из положения φ_0 в положение φ_1 .

Значение суммарной работы для любого положения находится интегрированием функции $M_d(\varphi)$ и $M_c(\varphi)$ и их алгебраическим суммированием (рис. 22.4). Закон изменения кинетической энергии получают, если известны кинетические характеристики звеньев с переменным приведенным моментом инерции. Тогда

$$E_c - E_0 = \Sigma A - E_v \text{ и } E_c = \Sigma A - E_v + E_0. \quad (22.16)$$

Графически значение $E_c - E_0$ получается алгебраическим суммированием функций ΣA и E_v (рис. 22.5, а). Так как E_0 — величина постоянная, то график для E_c соответствует графику для $E_c - E_0$, только ось абсцисс для него сдвигается на E_0 (в общем случае неизвестную).

Так как J_c постоянен, то кинетическая энергия E_c меняется только за счет изменения скорости звена приведения, а следовательно, E_c и ω пропорциональны. Поэтому изменения E_c полностью определяют колебания скорости звена приведения относительно начального значения. Определим изменение E_c относительно ее начального значения E_{c1} .

Графически это равносильно определению ординат графика $E_c(\varphi)$ относительно оси абсцисс, приведенной через начальную его точку E_{c1} :

$$\Delta E'_{c1} = E_{c1} - E_{c1} = 0,5J_c\omega_j^2 - 0,5J_c\omega_1^2 = 0,5J_c(\omega_j + \omega_1)(\omega_j - \omega_1). \quad (22.17)$$

При установившемся движении угловая скорость колеблется в определенном диапазоне. Если эти колебания невелики, то $(\omega_j + \omega_1)/2 \approx \omega_{cp}$, и, обозначив $\omega_j - \omega_1 = \Delta\omega_j$, получим

$$\Delta E'_{c1} = J_c\omega_{cp}\Delta\omega_j. \quad (22.18)$$

Так как J_c и ω_{cp} — величины постоянные, то график $\Delta E'_{c1}$ определяет в другом масштабе и график изменения $\Delta\omega_j$ (рис. 22.5, б). Средняя угловая скорость будет

$$\omega_{cp} = (\omega_{max} + \omega_{min})/2$$

и на графике отобразится соответствующей линией, лежащей от оси абсцисс на расстоянии

$$\Delta\omega_0 = (|\Delta\omega'_{max}| - |\Delta\omega'_{min}|)/2, \quad (22.19)$$

где $\Delta\omega'_{max}$ и $\Delta\omega'_{min}$ — максимальное и минимальное отклонения приращения угловой скорости относительно ω_1 .

Отклонения угловой скорости ω_j от ее среднего значения в этом случае

$$\Delta\omega_j = \Delta\omega'_j - \Delta\omega_0.$$

Для произвольного положения звена приведения, определяемого углом φ_j , получим

$$\omega_j = \omega_{cp} + \Delta E'_{c1}/(J_c\omega_{cp}) - (|\Delta\omega'_{max}| - |\Delta\omega'_{min}|)/2. \quad (22.20)$$

Алгоритм определения угловой скорости и углового ускорения звена приведения описывается операторной функцией, которая последовательно реализует зависимости (22.16), (22.17), (22.18), (22.20):

$$ZKNDV(N, z, \omega_{cp}, M_c(N), M_d(N), J_v(N); \Delta E'_c(N), \omega(N), v(N)), \quad (22.21)$$

где N и z — целая и действительная переменные, соответствующие количеству значений φ_j , для которых определяется закон движения звена приведения; $M_c(N)$, $M_d(N)$, $J_v(N)$ — массивы чисел, соответствующие значениям переменных M_c , M_d , J_v для разных φ_j .

Угловые ускорения v_j массива $v(N)$ определяются численным дифференцированием.

22.7. Движение механизма при условии, что движущие силы зависят от скорости звеньев, а силы сопротивления — от времени

Зависимость движущих сил от скорости звеньев, а сопротивлений — от времени типична для машин, приводимых в действие электродвигателями. Для электродвигателей разных типов характерны различные формы их механических характеристик (см. гл. 20), различные интегрирующие их аналитические зависимости и способы решения уравнения движения механизма.

Рассмотрим механическую характеристику механизма, приводимого в движение асинхронным электродвигателем (рис. 22.6).

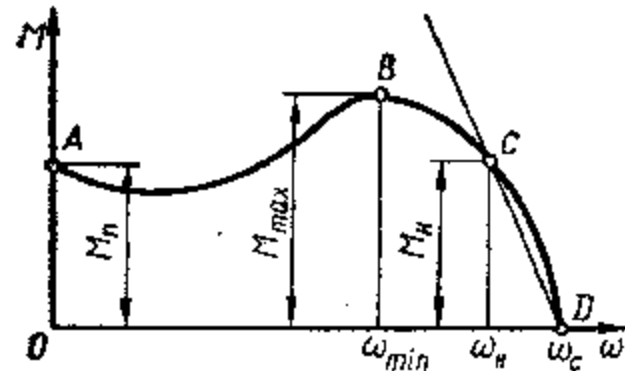


Рис. 22.6. Механическая характеристика механизма с приводом от электродвигателя

Левая нерабочая ее часть заключена между точками A и B с ординатой M_{max} , рабочая часть ветви — справа от точки B. На этой кривой можно отметить характерные точки: A — с координатами 0, M_n (M_n — начальный пусковой момент двигателя при угловой скорости, равной нулю); B — с координатами ω_{min} , M_{max} (ω_{min} — минимальная угловая скорость ротора двигателя, при которой допустима его устойчивая работа при нагрузке M_{max}); C — с координатами ω_n и M_n (ω_n — номинальная угловая скорость при работе с номинальным моментом M_n); D — с координатами ω_c , 0 (ω_c — синхронная угловая скорость, т. е. скорость вращения электромагнитного поля, при которой момент $M_d = 0$).

Так как устойчивая работа агрегата и саморегулирование его возможны только при нисходящей характеристике двигателя, то устойчивая работа механизма с асинхронным двигателем возможна только на правой ветви характеристики. Для большинства двигателей данного типа с достаточной для практики точностью истинная характеристика заменяется на рабочем участке отрезком прямой линии, проходящей через точки C и D. Из уравнения этой прямой

$$(M - M_n)/M_n = (\omega - \omega_n)/(\omega_c - \omega_n)$$

получим

$$M = M_n \omega_c / (\omega_c - \omega_n) - \omega M_n / (\omega_c - \omega_n). \quad (22.22)$$

Принимая зависимость для момента движущей силы по этому условию, запишем уравнение движения механизма с асинхронным двигателем в виде зависимости (22.9)

$$J(\varphi) \cdot d^2\varphi/dt^2 + 0,5(d\varphi/dt)^2 dJ(\varphi)/d\varphi = a - b\omega - M_c(t) \quad (22.23)$$

или

$$J(\varphi) d\omega/dt + 0,5\omega^2 dJ(\varphi)/d\varphi = a - b\omega - M_c(t), \quad (22.24)$$

где $a = M_n \omega_c / (\omega_c - \omega_n)$; $b = M_n / (\omega_c - \omega_n)$; $M_c(t)$ — функция приведенного момента сил сопротивления.

В общем случае уравнение (22.24) не решается. Приближенно оно может быть решено по выражению (22.11). Для случаев, когда приведенный момент инерции постоянен либо мало изменяется (этот случай типичен для механизмов приводов разного рода роторных машин, лебедок, насосов и т. п.) $dJ(\varphi)/d\varphi = 0$ и тогда

$$J d\omega/dt = a - b\omega - M_c(t),$$

откуда

$$d\omega/dt + \omega b/J = (a - M_c(t))/J. \quad (22.25)$$

Если в уравнении (22.25) функция $M_c(t)$ задается аналитически, то его можно решить. Так как приведенный момент сил сопротивления является периодической функцией, то можно принять $M_c = M_c(t) = c + d \sin kt$. Если обозначить $\lambda = b/J = M_n / (J(\omega_c - \omega_n))$ и $\alpha = (a - c)/J = (M_n \omega_c / (\omega_c - \omega_n) - c)/J$, $\beta = d/J$, то из уравнения (22.25) получим

$$d\omega/dt + \lambda\omega = \alpha - \beta \sin kt. \quad (22.26)$$

Умножим обе части последнего уравнения на интегрирующий множитель $e^{\lambda t}$. Тогда

$$e^{\lambda t} d\omega/dt + \lambda \omega e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (\alpha - \beta \sin kt)$$

или

$$d(\omega e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} (\alpha - \beta \sin kt) dt. \quad (22.27)$$

Интегрируя выражение (22.27), получим

$$\omega e^{\lambda t} = \int_0^t e^{\lambda t} (\alpha - \beta \sin kt) dt = \int_0^t \alpha e^{\lambda t} dt - \int_0^t e^{\lambda t} \beta \sin kt dt. \quad (22.28)$$

Интегралы в правой части выражения (22.28) — табличные. После интегрирования получим

$$\omega e^{\lambda t} = \alpha (e^{\lambda t} - 1)/\lambda - (e^{\lambda t} (\lambda \sin kt - k \cos kt) - k) \beta / (\lambda^2 + k^2),$$

откуда закон движения звена приведения в функции времени

$$\omega(t) = \alpha/\lambda - \alpha/(\lambda e^{\lambda t}) - (\lambda \sin kt - k \cos kt - k/e^{\lambda t}) \beta / (\lambda^2 + k^2). \quad (22.29)$$

Так как интегрирование выражения (22.27) выполнено в пределах от 0 до t, то выражение (22.29) описывает закон движения звена приведения со времени пуска (рис. 22.7). Движение становится установившимся при $t \rightarrow \infty$. Однако уже через некоторое малое время t величина $e^{-\lambda t}$ быстро убывает, и движение считается установившимся с достаточной степенью точности. Поэтому для периода установившегося движения записывают

$$\omega(t) = \alpha/\lambda - (\lambda \sin kt - k \cos kt) \beta / (\lambda^2 + k^2). \quad (22.30)$$

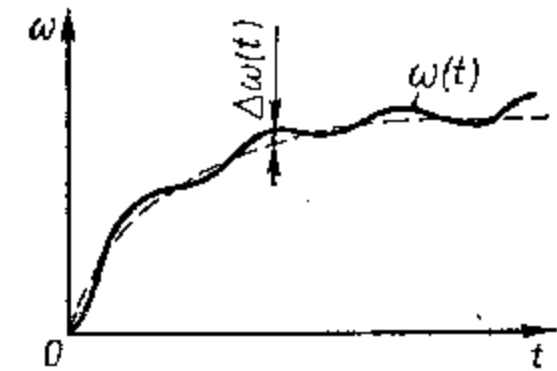


Рис. 22.7. Закон движения звена приведения с момента пуска

Экстремальные значения угловой скорости определяют, продифференцировав уравнение (22.30) по t :

$$d\omega(t)/dt = \beta k (\lambda \cos kt + k \sin kt) / (\lambda^2 + k^2). \quad (22.31)$$

Приравняв выражение (22.31) нулю, получим значения t , при которых функция $\omega(t)$ имеет экстремум. Если $\lambda \cos kt + k \sin kt = 0$, то $\lambda + k \operatorname{tg} kt = 0$ и $\operatorname{tg} kt = -\lambda/k$, откуда

$$kt = \operatorname{arctg}(-\lambda/k). \quad (22.32)$$

Функция (22.29) имеет период 2π , равный периоду изменения синуса и косинуса. Значения тангенса одинаковы для углов, разность между которыми равна π . Следовательно, за время периода колебания угловой скорости $T = 2\pi/k$ экстремальные значения функции $\omega(t)$ примет при времени от начала периода $t_1 = (1/k) \operatorname{arctg}(-\lambda/k)$ и $t_2 = (1/k) (\pi + \operatorname{arctg}(-\lambda/k))$. Тогда

$$\omega_{\min} = \alpha/\lambda - \beta (\lambda \sin(\operatorname{arctg}(-\lambda/k)) - k \cos(\operatorname{arctg}(-\lambda/k))) / (\lambda^2 + k^2),$$

$$\omega_{\max} = \alpha/\lambda - \beta (\lambda \sin(\operatorname{arctg}(-\lambda/k) + \pi) - k \cos(\operatorname{arctg}(-\lambda/k) + \pi)) / (\lambda^2 + k^2).$$

После того, как получен закон движения звена приведения, находят истинный закон изменения движущих сил $M_d(t)$, для чего необходимо выражение (22.30) подставить в формулу (22.22).

22.8. Движение механизма при нелинейной характеристике двигателя

Если механизм приводится в движение двигателем, механическая характеристика которого нелинейна, то для получения аналитического решения уравнения движения эту характеристику можно аппроксимировать кривой второго или более высокого порядка. Подобные случаи характерны для двигателей постоянного тока с последовательным возбуждением, крановых асинхронных электродвигателей, а также для гидро- и тепловых двигателей. Большое значение для точности решения имеет характер изменения моментов сопротивления. Если движущий момент аппроксимировать отрезком параболы, то при $J = \text{const}$ уравнение движения будет

$$a + b\omega + c\omega^2 - M_c = J \cdot d\omega/dt, \quad (22.33)$$

где a, b, c — числовые коэффициенты, полученные при аппроксимации механической характеристики.

Принимая $a - M_c = A$, получим

$$A + b\omega + c\omega^2 = J d\omega/dt. \quad (22.34)$$

Если $M_c = M_c(t)$, то, разделяя переменные и интегрируя, получим табличный интеграл

$$t - t_1 = J \int_{\omega_1}^{\omega} d\omega / (A + b\omega + c\omega^2),$$

вид решения которого зависит от знака выражения $(4Ac - b^2)$. При $4Ac - b^2 > 0$ имеем

$$t - t_1 = 2J / \sqrt{4Ac - b^2} \left| \operatorname{arctg}((2c\omega + b) / \sqrt{4Ac - b^2}) \right|_{\omega_1}^{\omega}; \quad (22.35)$$

при $4Ac - b^2 < 0$ имеем

$$t - t_1 = J \left| \ln((2c\omega + b - \sqrt{b^2 - 4Ac})(2c\omega + b + \sqrt{b^2 - 4Ac})) \right|_{\omega_1}^{\omega} / \sqrt{b^2 - 4Ac}. \quad (22.36)$$

Зная ω_i при t_i , получают закон движения звена приведения при установленном движении механизма. Если $M_c = M_c(\varphi)$, то уравнение (22.34) переписывают в виде

$$A + b\omega + c\omega^2 = J\omega \cdot d\omega/d\varphi,$$

после интегрирования получим

$$\varphi - \varphi_1 = J \int_{\omega_1}^{\omega} \omega d\omega / (A + b\omega + c\omega^2), \quad (22.37)$$

где φ_1 и ω_1 — начальные значения угла поворота и угловой скорости звена приведения.

Вид решения уравнения (22.37) зависит от знака выражения $4Ac - b^2$, а само решение, как и в предыдущем случае, получается с помощью таблиц интегралов. Особенность решения заключается в том, что из-за громоздкости полученных выражений практически нельзя перейти от зависимости $\varphi = \varphi(\omega)$ к зависимости $\omega = \omega(\varphi)$, что делает предпочтительным численные методы решения.

22.9. Коэффициенты неравномерности движения и динамичности механизма

Из зависимости (22.13) следует, что угловая скорость звена приведения за полный оборот не остается постоянной, а меняется, периодически принимая одинаковые значения, если не меняются законы изменения $J_n(\varphi)$ и $M_n(\varphi)$. Постоянный характер функций приведенных величин возможен только в случае установившегося движения механизма. Такое движение имеет место, если при работе машины приведенный момент сил движущих постоянно равен приведенному моменту сил сопротивления. В этом случае кинетическая энергия машины $E = 0,5 J_n \omega_n^2$ не должна изменяться. Так как

$$dE = J_n \omega_n d\omega_n, \quad (22.38)$$

то установившееся движение возможно только при отсутствии приращения скорости $d\omega_n$ звена приведения.

Выше уже говорилось, что так как приведенные величины периодически меняют свои значения, то при установившемся движении

истинная угловая скорость звена привода принимает периодические значения, величина которых колеблется относительно ω_y (рис. 22.8). Из этого следует, что скорость установившегося движения является интегральной характеристикой движения звена привода. В теории механизмов ее называют *средней скоростью звена привода* ω_{cp} . Для характеристики отклонений мгновенных значений угловой скорости за цикл от среднего значения используют *коэффициент неравномерности движения механизма*

$$\delta = (\omega_{max} - \omega_{min}) / \omega_{cp} \quad (22.39)$$

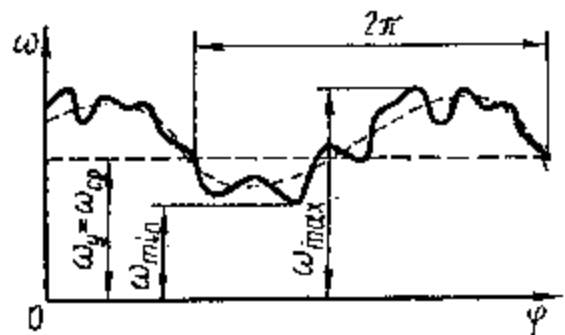


Рис. 22.8. График истинной скорости звена привода

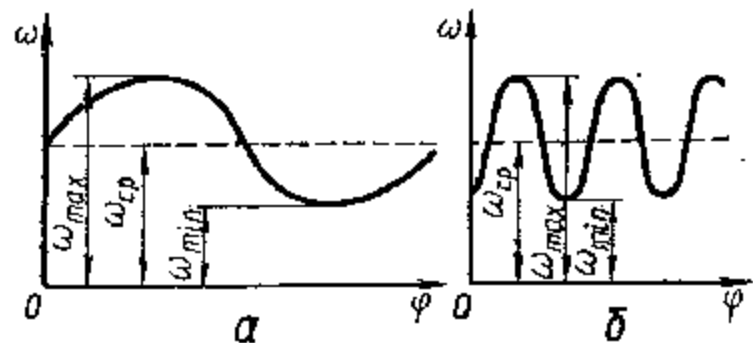


Рис. 22.9. Оценка динамичности механизма

где ω_{max} и ω_{min} — соответственно максимальное и минимальное мгновенные значения угловой скорости звена привода.

Обычно принимают

$$\omega_{cp} = (\omega_{max} + \omega_{min}) / 2. \quad (22.40)$$

Решая совместно уравнения (22.39) и (22.40), получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{max} &= \omega_{cp} (1 + \delta/2); \\ \omega_{min} &= \omega_{cp} (1 - \delta/2). \end{aligned} \right\} \quad (22.41)$$

При большой разнице между угловыми скоростями ω_{max} и ω_{min} возникают динамические нагрузки, снижающие надежность и долговечность машин. Кроме того, ухудшаются и эксплуатационные показатели механизмов. Из-за колебаний нагрузки снижается точность изготовления деталей в металлорежущих станках, точность установки магнитной ленты в лентопротяжных механизмах ЭВМ, ухудшается звукозапись и звуковоспроизведение в магнитофонах.

Практикой установлены оптимальные значения амплитуды колебаний скорости звена привода, например, $\delta = 0,04$ — для сельскохозяйственных машин, $\delta = 0,01$ — для металлообрабатывающих станков общего назначения, $\delta = 0,005$ — для роторных двигателей. При динамическом расчете механизма ставится задача обеспечения требуемого коэффициента неравномерности движения механизма. Чем меньше δ , тем более равномерно вращается входное звено механизма, следовательно, меньше колебания скоростей его звеньев.

Коэффициент неравномерности движения не характеризует динамику движения звена привода внутри одного цикла периода установившегося движения. На рис. 22.9, а, б показаны графики зависимости $\omega = \omega(\varphi)$ для механизмов, у которых одинакова вели-

чина δ , но резко различны динамические свойства. Динамические свойства механизмов, как это известно из теоретической механики, характеризуются *коэффициентом динамичности*

$$k_d = \varepsilon_{max} / \omega_{cp}^2, \quad (22.42)$$

где ε_{max} — максимальное значение углового ускорения звена.

23. ВЛИЯНИЕ УПРУГОСТИ ЗВЕНЬЕВ НА ТОЧНОСТЬ ИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАГРУЗКИ В МЕХАНИЗМАХ

23.1. Проявление упругого взаимодействия звеньев

В реальных механизмах звенья и их соединения упруги. Это приводит к отклонению фактических характеристик движения звеньев механизма от полученных в предположении их недеформируемости. Упругость проявляется в возникновении погрешностей положения звеньев при их относительном движении, перераспределении сил, действующих на звенья, и давлений в кинематических парах, в возникновении динамических нагрузок на звенья и элементы кинематических пар.

Погрешности положения звеньев из-за их деформаций нарушают точность движения, что особенно важно для механизмов приборов. Перераспределение нагрузок между звеньями и в элементах кинематических пар особенно важно учитывать при проектировании высокоскоростных машин. Динамические нагрузки, обусловленные упругостью звеньев, достигают величин, соизмеримых с нагрузками от действия сил технологического сопротивления. Необходимость их учета приводит к росту материалоемкости конструкции. В некоторых случаях упругость звеньев такова, что при их деформировании потенциальная энергия упругой деформации становится соизмеримой с кинетической энергией звеньев механизма, с работой сил технологического сопротивления и движущих сил. В этих случаях пренебрежение упругостью звеньев при описании динамических процессов приводит к неправильным представлениям о движениях звеньев и их взаимодействии и, как следствие, к выбору неработоспособной конструкции механизма.

Следовательно, необходимость учета упругих свойств материалов звеньев полностью определяется назначением механизма и, как следствие, требуемой точностью инженерного расчета его.

23.2. Характеристики упругих свойств звеньев и механизмов

Наиболее важной характеристикой, отражающей влияние упругости звена на его динамику, является жесткость. Под жесткостью звена в данном направлении понимают силу или момент силы, вызывающие в этом направлении единичное упругое перемещение, определяемое одной координатой. Так, если связи звена допускают только поступательное движение (рис. 23.1, а), то жесткость C упругого звена l равна силе F , вызывающей удлинение его на единицу

длины. Для звена, подвергающегося действию крутящего момента M (рис. 23.1, б), жесткость будет равна моменту, вызвавшему закручивание звена на единичный угол.

Характер зависимостей для определения жесткости звена определяется его конструкцией и системой действующих нагрузок. При осевом действии силы на звено (рис. 23.1, а)

$$C = EA/l; \quad (23.1)$$

при кручении звена (рис. 23.1, б)

$$C = GJ_p/l. \quad (23.2)$$

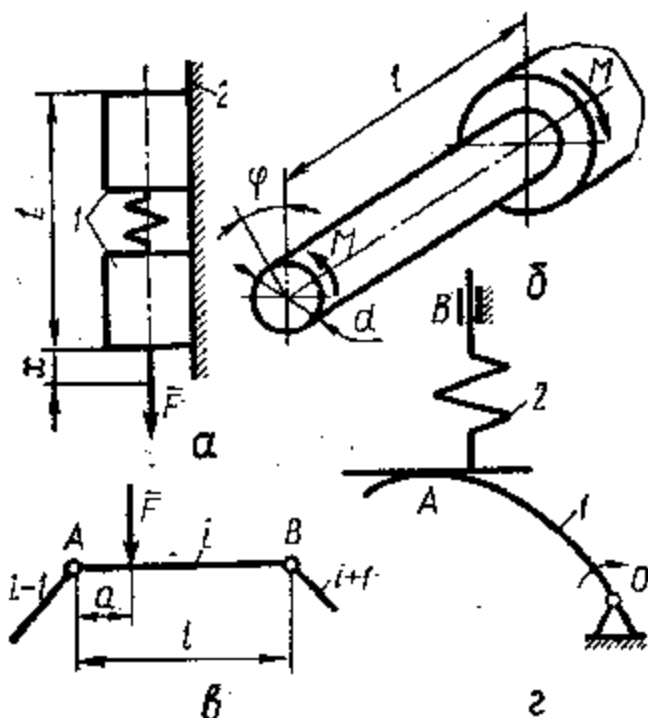
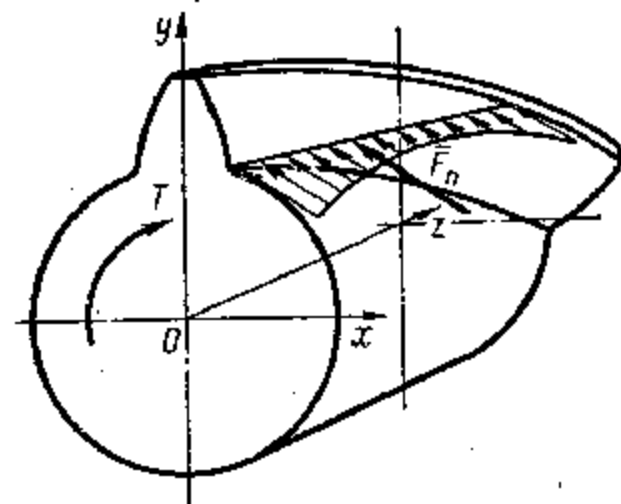


Рис. 23.1. Определение жесткостей звеньев

Рис. 23.2. Жесткость высшей кинематической пары



Если на звено действует перпендикулярно его оси сила F (рис. 23.1, а), то жесткость в направлении действия силы получим из рассмотрения деформации изгиба

$$C = 3EJl/(a^2(l-a)^2). \quad (23.3)$$

В формулах (23.1) ... (23.3) E и G — модули продольной упругости и сдвига материала; l — длина звена; A — площадь его поперечного сечения; J_p — полярный момент инерции сечения; J — момент инерции сечения.

Если для замыкания кинематической пары применяются звенья специальной конструкции, обладающие малой жесткостью, например, витая пружина 2 (г), то ее жесткость

$$C = 8D^3n/(Gd^4), \quad (23.4)$$

где n — число витков; D — диаметр пружины; d — диаметр проволоки пружины.

Для пространственных механизмов понятие жесткости звена связывается с направлением деформации при любом направлении силы. Звенья таких механизмов имеют в общем случае неодинаковые жесткости в разных направлениях. Так, зубчатое колесо с косыми зубьями (рис. 23.2) имеет различную жесткость в направлениях координатных осей Ox , Oy , Oz , так как зуб по-разному деформируется в

этих направлениях. Тело колеса изгибается в двух плоскостях и скручивается вокруг оси Ox .

В некоторых случаях удобно оперировать обратной жесткостью звена — податливостью $\lambda = 1/C$. Под податливостью звена в данном направлении понимают упругое перемещение, вызванное действием единичной силы.

Упругие звенья соединяются кинематическими парами в кинематическую цепь, обладающую упругими свойствами. Поэтому вводят понятие жесткости механизма, под которым подразумевают силу или момент силы, приложенные к входному звену и вызывающие его единичное линейное или угловое перемещение. Жесткость механизма зависит от структурной и конструктивной схемы, жесткостей его звеньев, от вида кинематических пар, соединяющих звенья, и упругих свойств их элементов. Податливость механизма, состоящего из n звеньев, последовательно соединенных p кинематическими парами, равна сумме податливостей его звеньев λ_{zi} и кинематических пар λ_{pi} :

$$\lambda_M = \sum_{i=1}^n \lambda_{zi} + \sum_{i=1}^p \lambda_{pi} \quad (23.5)$$

жесткость механизма $C_M = 1/\lambda_M$.

В разветвленных кинематических цепях звено входит в несколько кинематических пар и образует параллельные структурные цепи. В этих случаях перемещение входного звена, вызванное податливостью всей кинематической цепи, определяется в основном деформациями наиболее жестких соединений. Жесткость механизма при параллельном соединении упругих звеньев равна сумме жесткостей его звеньев C_{zi} и кинематических пар C_{pi} :

$$C_M = \sum_{i=1}^n C_{zi} + \sum_{i=1}^p C_{pi}. \quad (23.6)$$

Рассмотрим определение жесткости зубчатого передаточного механизма (рис. 23.3). При зафиксированном положении звена 4 и приложении к колесу 1 момента M из-за деформации всех звеньев и пар этой кинематической цепи оно повернется на угол φ . Тогда жесткость механизма составит $C_M = M/\varphi$. Определяя угловые деформации (податливости) каждого из упругих соединений и приводя их к колесу 1, получим

$$\varphi = M/C_M = M/C_1 + M/C_{12} + Mi_{12}^2/C_{23} + Mi_{12}^2/C_{34} + Mi_{14}^2/C_4,$$

откуда

$$\lambda_M = 1/C_M = 1/C_1 + 1/C_{12} + i_{12}^2/C_{23} + i_{12}^2/C_{34} + i_{14}^2/C_4. \quad (23.7)$$

Зная значения жесткостей соединений C_1 ; C_{12} , ..., C_4 , из формулы (23.7) определяют жесткость механизма C_M .

23.3. Перераспределение нагрузки в кинематических парах

Так как элементы кинематических пар обладают определенными упругими свойствами, то из-за деформаций поверхностей их контакта происходит перераспределение нагрузки. Деформации поверх-

ностей, по которым взаимодействуют звенья, включают не только контактные, но и другие виды деформаций: изгиба, кручения, сжатия и т. п. В общем случае определение функций жесткости или податливости элементов кинематических пар представляет собой трудную задачу, так как требует учета сложной геометрической формы элементов, непропорциональности контактных деформаций приложенным силам, физико-механических свойств материалов.

В зависимости от типа кинематической пары закон распределения нагрузки по поверхности элементов определяется разными методами.

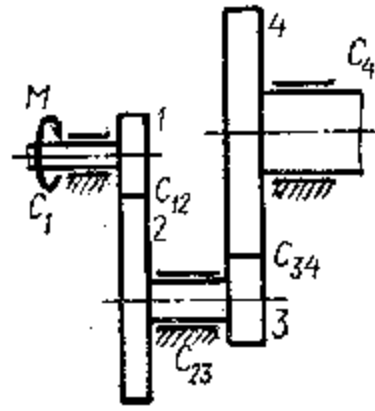


Рис. 23.3. Определение жесткости зубчатого механизма

Рис. 23.4. Распределение удельной нагрузки в нижней кинематической паре

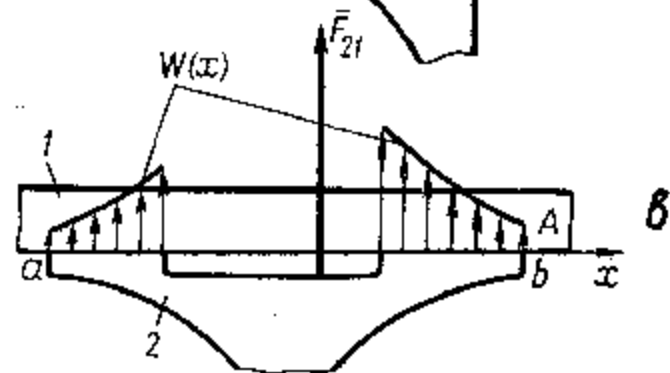
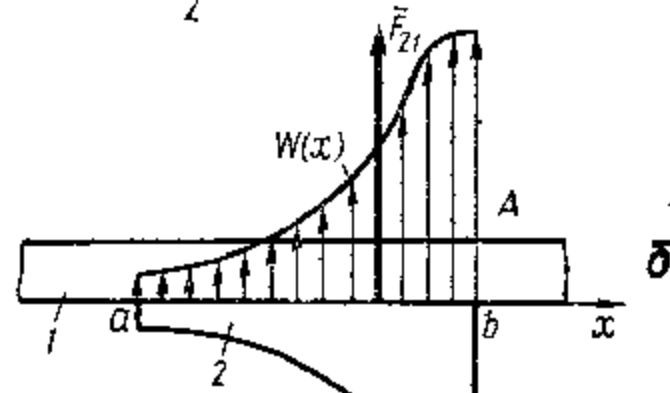
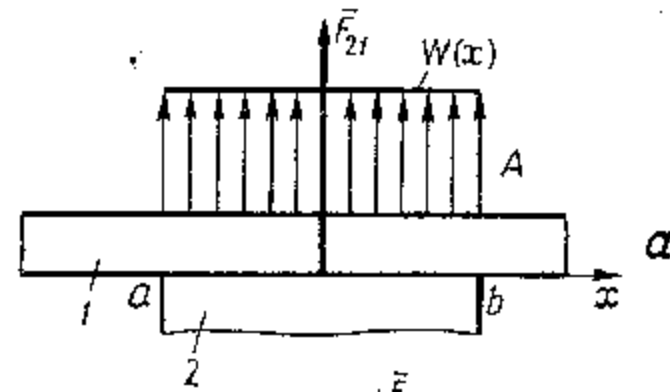
Однако в определенных границах точности инженерных расчетов в первом приближении можно принять функцию распределенной нагрузки в виде

$$W(x) = W/\lambda(x), \quad (23.8)$$

где $\lambda(x)$ — функция изменения податливости; W — средняя распределенная нагрузка, полученная в предположении равномерного распределения реакции по элементам кинематической пары.

Для поступательной кинематической пары с контактом звеньев по плоскости (рис. 23.4) определение контактной деформации сводится к расчету деформации изгиба стержня 1 на упругом основании 2, рассматриваемой в курсе сопротивления материалов. При сплошной массивной конструкции элемента звена 2 распределение нагрузки определяется контактной жесткостью поверхностей и может быть принято равномерным на участке ab (рис. 23.4, а). Если конструкция элементов позволяет им деформироваться, то изгибная деформация элемента 2 приведет к перераспределению нагрузки и смещению равнодействующей \bar{F}_{21} (рис. 23.4, б, в).

Во вращательной кинематической паре перераспределение нагрузки возможно из-за контактных и изгибных деформаций элемен-



тов, что приводит к незначительному изменению направления реакции и смещению точки ее приложения.

В высшей кинематической паре нагрузка между звеньями передается в точке или по линии, поэтому контактные деформации имеют значительно большее влияние на распределение нагрузки. Из курса теории упругости известно, что упругие контактные перемещения в этих случаях зависят от модуля упругости материала и радиусов кривизны контактирующих поверхностей. Зависимости, оп-

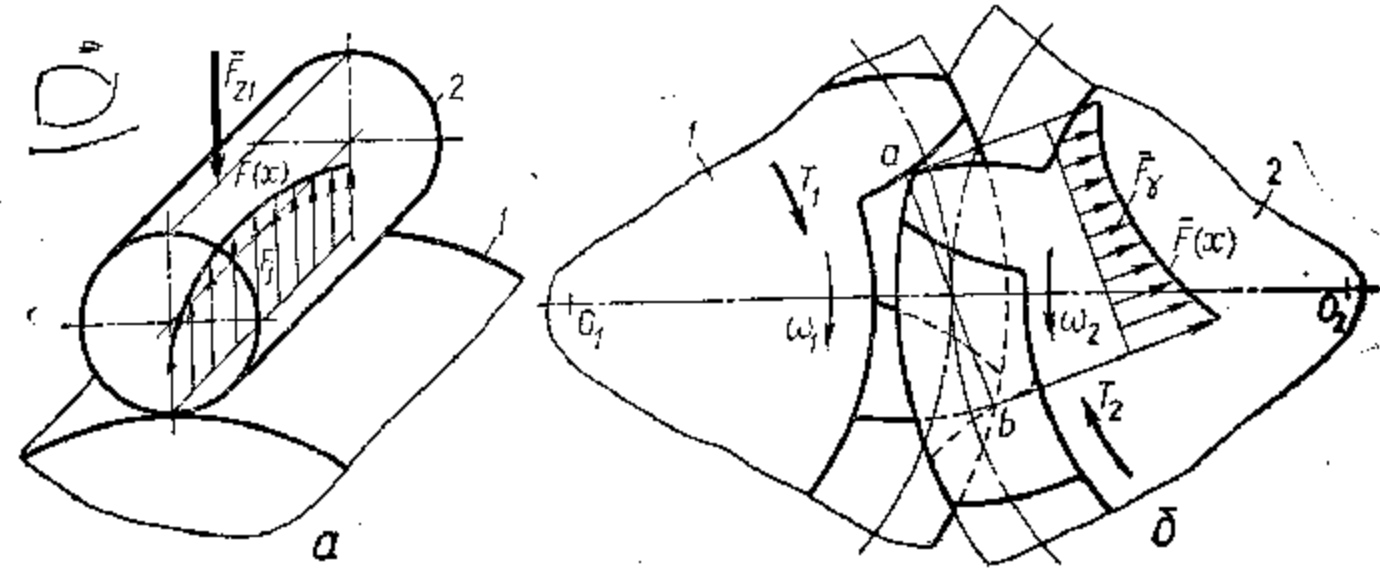


Рис. 23.5. Распределение удельной нагрузки в высшей кинематической паре

ределяющие сближение звеньев, не учитывают реального состояния поверхности контакта в начале работы машины. В подвижном контакте на сближение оказывает влияние шероховатость поверхности, меняющаяся со временем. В результате износа и деформации микронеровностей со временем контактная жесткость растет, поэтому теоретические зависимости лучше описывают податливость соединения после приработки.

Задача распределения нагрузки вдоль контактных линий в высшей кинематической паре решается с учетом не только контактной жесткости, но и с учетом других деформаций, зависящих от конкретной формы звеньев. Предположим, что нагрузка в кинематической паре с линейным контактом передается от звена 1 к звену 2 (рис. 23.5, а). Внешняя нагрузка может быть в виде вращающего момента (как, например, в зубчатом механизме, рис. 23.5, б) или силы (как в паре кулачок — толкатель). Из-за деформации элементов кинематической пары нагрузка по контактным линиям распределяется неравномерно. Задача определения закона распределения нагрузки в контакте имеет точное решение, сущность которого заключается в следующем. Контактная линия разбивается на участки, а полная реакция \bar{F}_{21} заменяется сосредоточенными силами F_j , приложенными посередине каждого участка по условию $F_{21} = \sum_{j=1}^n F_j$.

С помощью математического аппарата метода сил рассматривается условие равновесия звена под действием внешних силовых

факторов и сил реакции в элементе кинематической пары:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n F_j \delta_{1j} - \delta_0 - \delta_1 &= 0; \\ \sum_{j=1}^n F_j \delta_{2j} - \delta_0 - \delta_2 &= 0; \\ \sum_{j=1}^n F_j \delta_{nj} - \delta_0 - \delta_n &= 0; \\ \sum_{j=1}^n F_j - F_{12} &= 0, \end{aligned} \right\} (23.9)$$

где F_j — сила на j -м участке контактной линии при условии разбиения контактных линий на n участков; $\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj}$ — перемещения участков контактных линий от всех видов деформации звеньев или их элементов под действием сил F_j , приложенных на j -х участках; $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ — перемещения участка контактной линии под действием внешних сил и моментов сил; δ_0 — перемещение под действием внешней нагрузки участка контактных линий, относительно которого ведется отсчет перемещений.

В системе (23.9) каждое уравнение описывает равенство перемещений от внешних и внутренних сил на участке контактной линии, последнее уравнение — условие равновесия кинематической пары под действием внешних и внутренних сил.

Решения системы уравнений (23.9) позволяют определить функцию $F(x)$, т. е. картину распределения реакции вдоль контактных линий. Это позволяет рационально конструировать звенья механизмов и элементы кинематических пар, стремясь к выравниванию нагрузки вдоль контактных линий, например, в зубчатых механизмах зубьям придавать бочкообразную форму, что, кроме того, повышает класс кинематической пары в зацеплении, в фрикционных механизмах делать криволинейные образующие колес и т. п. Использование реального закона распределения нагрузки позволяет избежать ошибок при конструировании звеньев механизма. Учет действия различных факторов проводится добавлением в уравнения системы (23.9) соответствующих перемещений участков контактных линий.

23.4. Изменение сил, действующих на звенья

Упругость звеньев в шарнирно-рычажных механизмах при наличии избыточных связей приводит к перераспределению нагрузок, действующих на звенья (рис. 23.6, а). Из-за разной формы звеньев, параллельно работающих в силовых потоках, деформации могут быть неодинаковыми как по величине, так и по направлению. Вследствие этого звенья более жесткие (рис. 23.6, б, в) воспримут большие усилия, что учитывается в дальнейших расчетах на прочность, либо вынудят изменить структурную схему механизма.

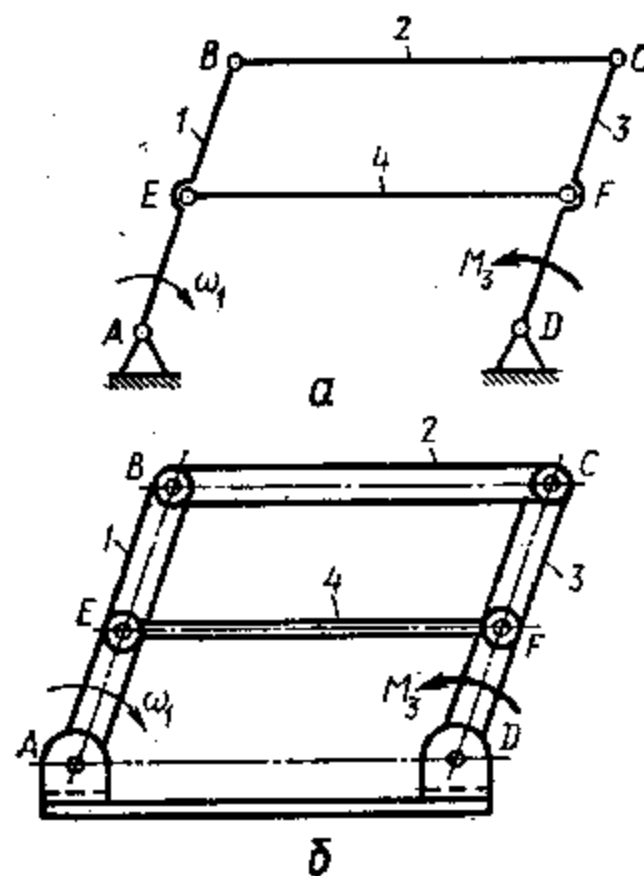


Рис. 23.6. Распределение сил между звеньями механизма

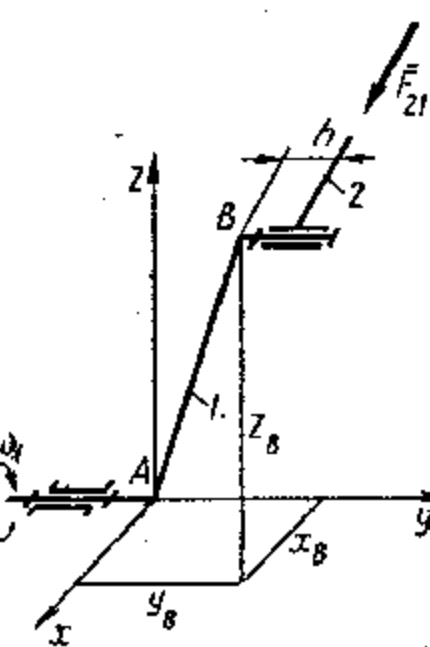
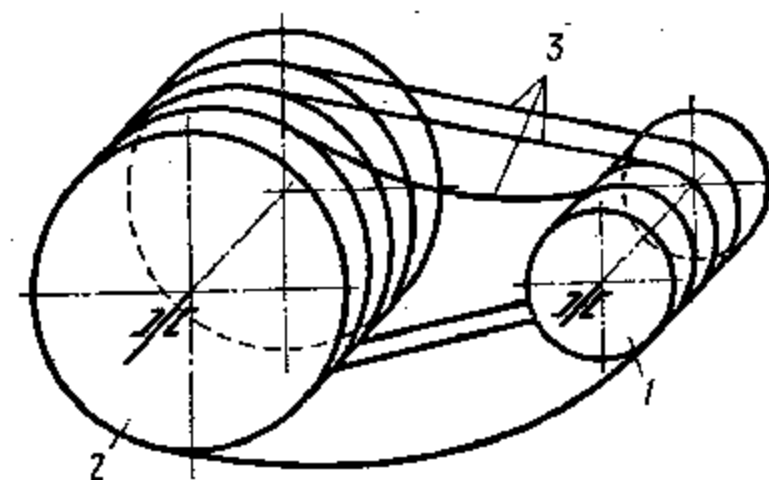


Рис. 23.7. Схема реального нагружения звеньев
Рис. 23.8. Неравномерное распределение нагрузки из-за деформации гибких звеньев



При работе механизма изменяются направления и нагрузки на звенья (см. гл. 22). Это приводит к переменным значениям деформаций, что, в свою очередь, вызывает изменение нагрузок на звенья. Периодические колебания нагрузок, связанные с непостоянной жесткостью звеньев, могут привести к их вибрации. При кинематических расчетах механизмов (см. гл. 21) исходили из того нереального положения, что все звенья находятся в одной плоскости, в то время как в плоских механизмах звенья расположены в параллельных плоскостях (рис. 23.7). При перераспределении нагрузки между элементами кинематических пар происходит внецентренное приложение ее к звеньям, а следовательно, возникает продольный изгиб, кручение, что, в свою очередь, влияет на реакции в кинематических парах. В быстроходных механизмах вследствие этого возможно возникновение дополнительных динамических нагрузок.

В механизмах с высшими кинематическими парами перераспределение нагрузки по элементам пар в процессе работы может привести к периодически изменяющейся системе сил, действующих на стойку механизма (например, в зубчатом зацеплении, кулачковых механизмах и т. п.). В механизмах с гибкими связями (рис. 23.8) деформации гибких звеньев 3 нарушают распределение нагрузки между ними (в клиноременных механизмах), способствуют усилению износа (в цепных механизмах), приводят к колебаниям скорости и вибрации.

23.5. Ошибка положения звеньев механизма из-за их упругости

Для определения погрешностей положения из-за упругих деформаций звеньев механизма обычно используют *дифференциальный метод*, который рассматривает функции положения механизма $s = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$ в зависимости от переменных q_i , ее определяющих. Приращения переменных q_i в первом приближении

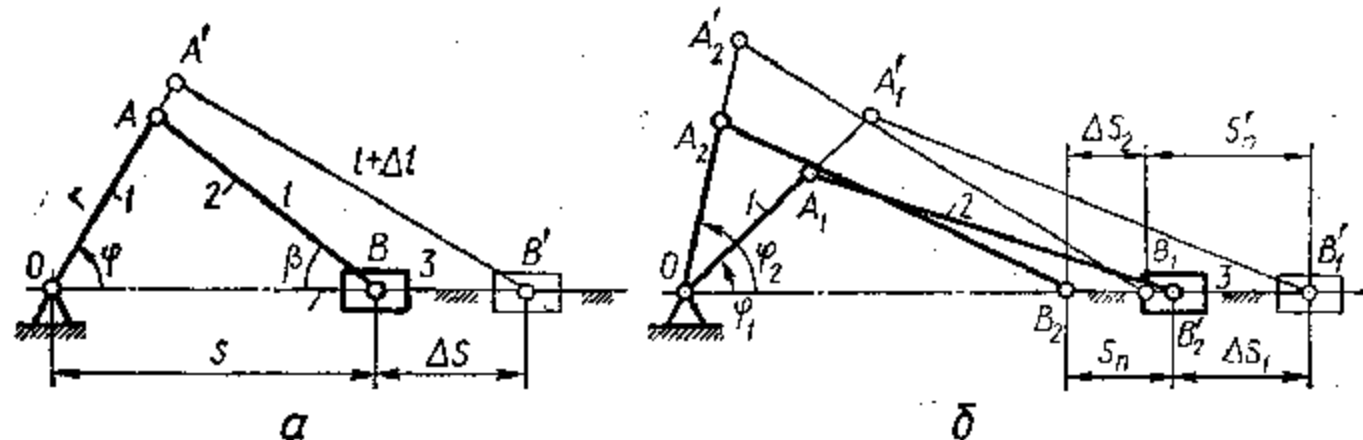


Рис. 23.9. Влияние упругости звеньев на ошибку их положения

рассматриваются как погрешности (см. гл. 27). Тогда ошибка положения механизма определится полным дифференциалом функции переменных

$$ds = (\partial f / \partial q_1) dq_1 + (\partial f / \partial q_2) dq_2 + \dots + (\partial f / \partial q_n) dq_n$$

или

$$\Delta s = (\partial f / \partial q_1) \Delta q_1 + (\partial f / \partial q_2) \Delta q_2 + \dots + (\partial f / \partial q_n) \Delta q_n, \quad (23.10)$$

где $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n$ — упругие деформации звеньев.

Рассмотрим применение дифференциального метода для шарнирно-рычажного механизма, например — кривошипно-ползунного (рис. 23.9, а). Из-за деформаций растяжения (сжатия) Δl_1 кривошипа и Δl_2 шатуна возникнет ошибка положения Δs ползуна 3. При повороте кривошипа из положения 1 в положение 2 на угол $(\varphi_2 - \varphi_1)$ ошибка перемещения ползуна будет $\Delta s = \Delta s_1 - \Delta s_2$. Функция положения механизма определится из условия (см. гл. 7)

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \beta &= s; \\ l_1 \sin \varphi &= l_2 \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (23.11)$$

Продифференцируем уравнения (23.11) по l_1, l_2, s, β и, переходя к конечным приращениям этих параметров, получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi \Delta l_1 + \cos \beta \Delta l_2 - l_2 \sin \beta \Delta \beta &= \Delta s; \\ \sin \varphi \Delta l_1 &= \sin \beta \Delta l_2 + l_2 \cos \beta \Delta \beta. \end{aligned} \right\} \quad (23.12)$$

Найдя из условий (23.12) значение

$$\Delta \beta = (\sin \varphi \Delta l_1 - \sin \beta \Delta l_2) / (l_2 \cos \beta), \quad (23.13)$$

получим

$$\Delta s = \Delta l_1 \cos(\varphi - \beta) / \cos \beta + \Delta l_2 / \cos \beta. \quad (23.14)$$

В формуле (23.13)

$$\Delta l_1 = F_{21} l_1 / (E_1 A_1); \quad \Delta l_2 = F_{32} l_2 / (E_2 A_2),$$

где F_{21}, F_{32} — усилия, сжимающие звенья 1 и 2.

В более точном решении дополнительно учитывается влияние изгибных деформаций звеньев на перемещение ползуна 3. Например, для зубчатого механизма (рис. 23.3) функция положения будет иметь вид $\varphi_1 = \varphi_4 i_{12} \cdot i_{34}$. Тогда $\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_2 \cdot i_{12} \cdot i_{34}$, и ошибка положения звена 1 из-за упругости звеньев механизма составит

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_{01} + \Delta_{12} + \Delta \varphi_{23} i_{12} + \Delta_{34} i_{12} + \Delta \varphi_{45} i_{12} \cdot i_{34},$$

где $\Delta \varphi_{01} = M / C_{01}$, $\Delta \varphi_{23} = M_{t_{12}} / C_{23}$, $\Delta \varphi_{45} = M_{t_{12}} \cdot i_{34} / C_{45}$ — упругие деформации кручения соответствующих звеньев, жесткость которых определяется по формуле (22.2); $\Delta_{12} = (2M / (m_1 z_1 \cos \alpha_w)) / C_{12}$, $\Delta_{34} = ((2M_{t_{12}} / (m_3 z_3 \cos \alpha_w)) / C_{34}$ — упругие деформации контактирующих зубьев в плоскостях действия окружных усилий колес 1, 2 и 3, 4.

24. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕХАНИЗМАХ

24.1. Виды колебаний звеньев механизмов

Так как при работе механизма нагрузки на звенья непрерывно меняются даже при постоянных силах производственного сопротивления, то из-за упругости материала звенья испытывают изменяющиеся деформации, вызывающие их колебания. Эти колебания необходимо учитывать при динамических расчетах, так как они оказывают вредное влияние на работоспособность машин. **Колебания звеньев** в зависимости от причин, их вызывающих, разделяют на четыре группы: *свободные, вынужденные, параметрические и автоколебания*.

К свободным относятся колебания, возникающие в механизме из-за импульсного внешнего силового воздействия. Особенностью этих колебаний является то, что энергия для возбуждения колебаний вводится в систему извне, а их характер после воздействия импульса силы определяется силами упругости. Для свободных (гармонических) колебаний характерно постоянство их амплитуды через определенный период времени T (рис. 24.1, а),

для затухающих — уменьшение амплитуды с течением времени (рис. 24.1, б).

К вынужденным относятся колебания, вызываемые действием внешних сил, изменяющихся по определенному закону. Для вынужденных колебаний характерно протекание свободных колебаний одновременно с колебаниями периодического характера от внешнего возбудителя (рис. 24.2). При таких колебаниях амплитуда меняется во времени и при определенных условиях имеет тенденцию к неограниченному росту (резонансные колебания).

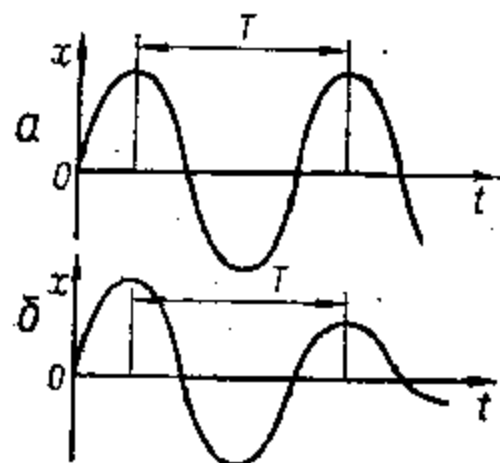


Рис. 24.1. Графики свободных и затухающих колебаний

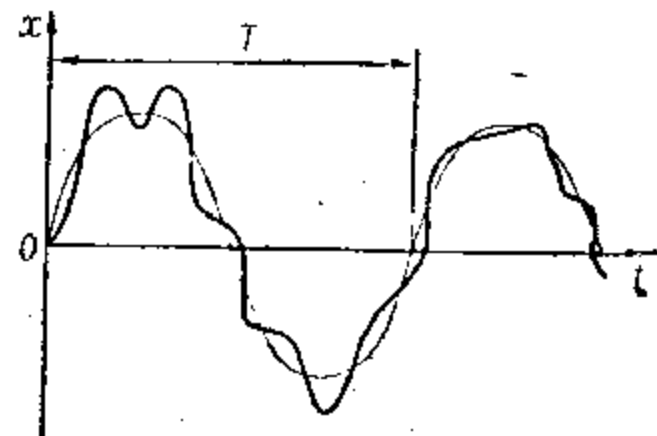


Рис. 24.2. Вынужденные колебания

Параметрические колебания вызываются изменением параметров механизма — масс, моментов инерции и т. п. Автоколебания возникают в машине, находящейся под действием сил, не обладающих колебательными свойствами, в которой режим колебаний поддерживается силой, вызываемой движением и исчезающей при остановке движения. Например, в фрикционных передачах скорость скольжения колеблется около среднего значения, автоколебаниям подвержен груз на движущемся конвейере и т. п.

Механические колебания в технике часто называют *вибрациями*. Вибрации оказывают как полезное, так и вредное действие на работу механизмов. В машинах и приборах, где механические колебания используют для выполнения основных функций (виброконвейеры, вибробункеры и т. п.) вибрации полезны. В противном случае они вызывают нагружение деталей механизмов и приборов дополнительными инерционными силами, а при больших амплитудах приводят в конечном счете к разрушению деталей.

24.2. Свободные колебания

Свободным колебаниям подвержены звенья, совершающие поступательное или вращательное движения, соединенные с другими звеньями упругой связью. Таким колебаниям подвержены толкатели кулачковых механизмов, диски и колеса на упругих валах, буферные системы и т. п.

Определим закон движения звена (рис. 24.3), колеблющегося под действием сил упругости после деформирования упругой свя-

зи (пружины) силой тяжести звена \bar{F}_g . Для произвольного положения вертикально перемещающегося звена на него действует сила тяжести \bar{F}_g и сила F_n , растягивающая пружину

$$F_n = F_g + Cx, \quad (24.1)$$

где C — жесткость пружины; x — перемещение звена от положения равновесия (x положительно при перемещении звена вниз).

В рассматриваемом случае звено находится в равновесии под действием сил \bar{F}_n , \bar{F}_g и силы инерции $\bar{F}_a = (F_g/g) d^2x/dt^2$. Тогда

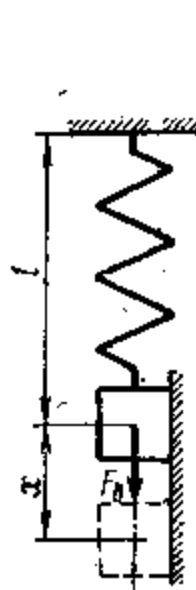


Рис. 24.3. Схема колеблющегося звена

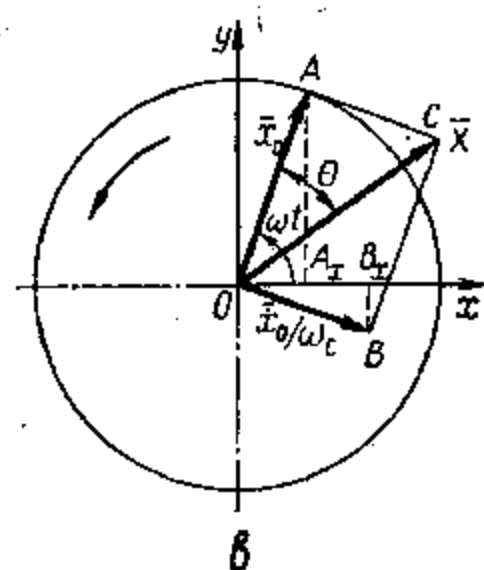
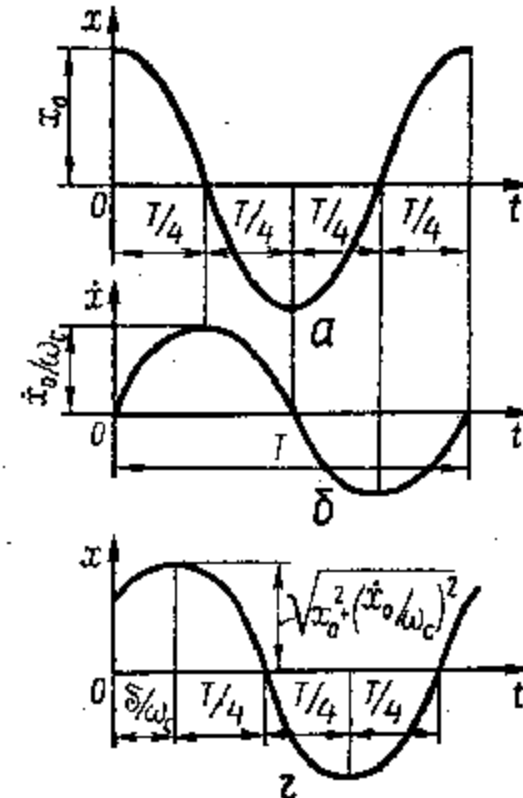


Рис. 24.4. Определение закона колебательного движения

закон движения звена описывается дифференциальным уравнением, справедливым для любого положения звена относительно состояния равновесия:

$$(F_g/g) d^2x/dt^2 = F_g - (F_g + Cx) = -Cx, \quad (24.2)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Из уравнения (24.2) получим $d^2x/dt^2 = -(Cg/F_g)x$, откуда, обозначив $Cg/F_g = \omega_c^2$, найдем

$$d^2x/dt^2 + \omega_c^2 x = 0. \quad (24.3)$$

Как известно из математики, уравнению (24.3) удовлетворяют решения $x = C_1 \cos \omega_c t$ и $x = C_2 \sin \omega_c t$ (C_1 и C_2 — произвольные постоянные). Общее решение получим как сумму этих решений:

$$x = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t. \quad (24.4)$$

Так как функции $\cos \omega_c t$ и $\sin \omega_c t$ являются периодическими, повторяющими свои значения после некоторого интервала T — периода колебаний, так, что $\omega_c(t + T) - \omega_c(t) = 2\pi$, то $T = 2\pi/\omega_c$, или

$$T = 2\pi \sqrt{F_g/Cg} = 2\pi \sqrt{\delta/g}, \quad (24.5)$$

где $\delta = F_g/C$ — статическая деформация пружины под действием силы \bar{F}_g .

Величина, обратная периоду T , называется частотой колебаний:

$$f = 1/T = (1/2\pi) \sqrt{g/\delta}. \quad (24.6)$$

Для определения закона колебательного движения определим постоянные C_1 и C_2 . Пусть в момент, когда $t = 0$, положение звена характеризуется перемещением x_0 . Тогда начальная скорость будет dx_0/dt , и, следовательно, из уравнения (24.4) следует, что $x_0 = C_1$. Дифференцируя это же уравнение и подставляя в него $t = 0$, получим $C_2 = (dx_0/dt)/\omega_c$. Тогда закон колебательного движения описывается выражением

$$x = x_0 \cos \omega_c t + ((dx_0/dt)/\omega_c) \sin \omega_c t. \quad (24.7)$$

Из выражения (24.7) видно, что колебания состоят из двух частей — колебаний, пропорциональных $\cos \omega_c t$ и зависящих от x_0 (рис. 24.4, а), и колебаний, пропорциональных $\sin \omega_c t$ и зависящих от $(dx_0/dt)/\omega_c$ (б). Так как обе кривые смещены друг относительно друга на фазу $T/4 = \pi/2$, то геометрической интерпретацией выражения (24.7) служат два взаимно перпендикулярных вектора \bar{x}_0 и \bar{x}_0/ω_c , вращающихся с угловой скоростью ω_c вокруг точки O (в). При этом перемещение x найдем как сумму проекций векторов на ось абсцисс. То же самое получим, используя вектор \bar{X} , который равен

$$x = \sqrt{x_0^2 + (x_0/\omega_c)^2}. \quad (24.8)$$

Тогда из рис. 24.4, в

$$x = X \cos(\omega_c t - \theta). \quad (24.9)$$

В этой формуле сдвиг фаз колебаний

$$\theta = \text{arctg}((x_0/\omega_c)/x_0). \quad (24.10)$$

График закона (24.7) или (24.9) представлен на рис. 24.4, г. Максимальная ордината этого графика вычисляется по формуле (24.8) и называется максимальной амплитудой колебаний.

Для звена, подверженного крутильным колебаниям (рис. 24.5), после аналогичных рассуждений получим дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс:

$$d^2\varphi/dt^2 = -(C/J)\varphi, \quad (24.11)$$

где C — крутильная жесткость звена; J — момент инерции звена.

Решение уравнения (24.11) найдем в виде

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_c t + ((d\varphi_0/dt)/\omega_c) \sin \omega_c t. \quad (24.12)$$

Период и частота колебаний соответственно будут

$$T = 2\pi \sqrt{J/C}; \quad f = (1/2\pi) \sqrt{C/J}. \quad (24.13)$$

24.3. Вынужденные колебания

В реальных механизмах на звенья действуют периодически изменяющиеся силы, поэтому, кроме свободных колебаний, звенья подвержены вынужденным колебаниям. В простейшем случае полагают, что возмущающая сила действует по периодическому закону $F(t) = F \sin \omega_B t$, период изменения силы равен $T_F = 2\pi/\omega_B$, а частота $f_F = \omega_B/2\pi$. Дифференциальное уравнение, описывающее колебательное движение звена в этих условиях, будет

$$(F_g/q) d^2x/dt^2 = F_g - (F_g + Cx) + F \sin \omega_B t$$

или при $q = F_g/F_g$

$$d^2x/dt^2 + \omega_c^2 x = q \sin \omega_B t. \quad (24.14)$$

Если предположить, что перемещение x пропорционально $\sin \omega_B t$, то $x = k \sin \omega_B t$ и $d^2x/dt^2 = -k\omega_B^2 \sin \omega_B t$. После подстановки x и d^2x/dt^2 в уравнение (24.14) получим $k = q/(\omega_c^2 - \omega_B^2)$ и

$$-k\omega_B^2 \sin \omega_B t + k\omega_c^2 \sin \omega_B t = q \sin \omega_B t. \quad (24.15)$$

Частное решение уравнения (24.14) получим в виде

$$x = q \sin \omega_B t / (\omega_c^2 - \omega_B^2). \quad (24.16)$$

Общее решение уравнения (24.14) выразим как сумму двух решений (24.16) и (24.14):

$$x = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t + q/(\omega_c^2 - \omega_B^2) \sin \omega_B t. \quad (24.17)$$

В этом выражении первые два слагаемые характеризуют рассмотренные выше собственные колебания, а третье — вынужденные, зависящие от возбуждающей силы. Если собственные колебания малы по сравнению с вынужденными или отсутствуют, что имеет место при наличии сопротивления движению, то колебательный процесс будет описываться уравнением (24.16).

Используя выражения для q и ω_c^2 , получим после преобразования

$$x = (F/C) \sin \omega_B t / (1 - \omega_B^2/\omega_c^2), \quad (24.18)$$

где F/C — деформация звена при статическом действии силы \bar{F} .

Выражение $k_d = 1/(1 - \omega_B^2/\omega_c^2)$ называется динамическим коэффициентом. Как видно, динамический коэффициент зависит только от соотношения частот возмущающей силы и собственных колебаний (рис. 24.6). При малых значениях ω_B/ω_c амплитуда колебаний близка к статической деформации. При приближении отношения ω_B/ω_c к единице динамический коэффициент и амплитуда быстро возрастают и при $\omega_B = \omega_c$ (условие резонанса) теоретически обращаются в бесконечность.

В реальных механизмах значения k_d и x не достигают бесконечности, потому что на звенья всегда налагаются и неупругие связи. Однако нормальная работа механизмов в зоне резонанса

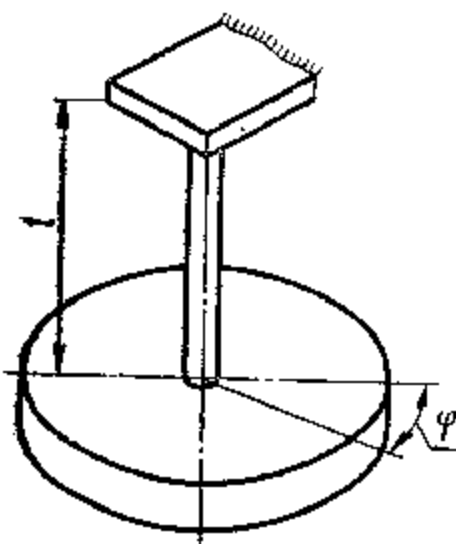


Рис. 24.5. Схема крутильных колебаний

метрической интерпретацией выражения (24.7) служат два взаимно перпендикулярных вектора \bar{x}_0 и \bar{x}_0/ω_c , вращающихся с угловой скоростью ω_c вокруг точки O (в). При этом перемещение x найдем как сумму проекций векторов на ось абсцисс. То же самое получим, используя вектор \bar{X} , который равен

недопустима, так как в конечном счете это приводит либо к поломкам деталей механизмов, либо к выходу из строя установленных на них приборов и устройств. Машины специального назначения работают в условиях резонанса.

Если собственные колебания соизмеримы с вынужденными и не гасятся, то функция, описывающая закон колебательного движения, получится из выражения (24.17) определением постоянных C_1 и C_2 при рассмотрении начальных условий. Если в начальный

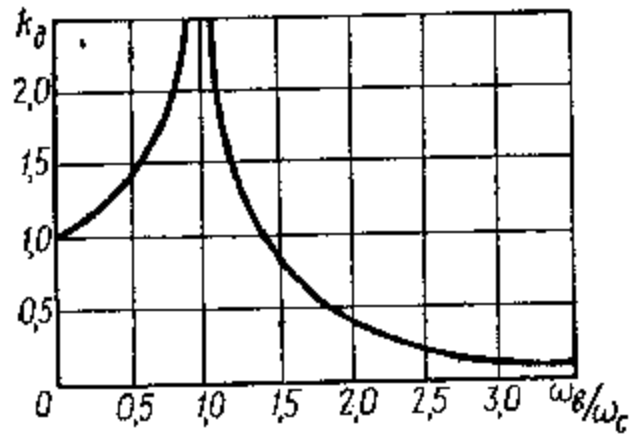


Рис. 24.6. График динамического коэффициента

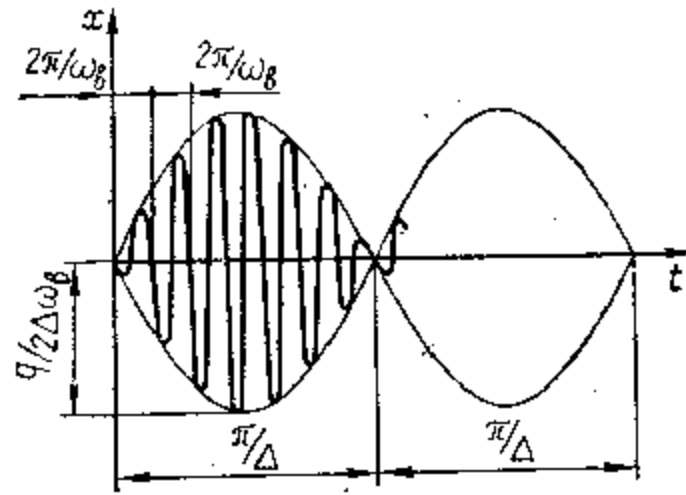


Рис. 24.7. Совместный график собственных и вынужденных колебаний

момент ($t = 0$) перемещение и скорость колеблющейся детали равны нулю, т. е. $x = 0$ и $dx/dt = 0$, то из зависимости (24.17) найдем

$$C_1 = 0; \quad C_2 = - (q\omega_B/\omega_c)/(\omega_c^2 - \omega_B^2).$$

Подстановкой C_1 и C_2 в уравнение (24.17) после преобразования получим (рис. 24.7)

$$x = q (\sin \omega_B t - (\omega_B/\omega_c) \sin \omega_c t) / (\omega_c^2 - \omega_B^2). \quad (24.19)$$

При работе в резонансной зоне, когда разность $\omega_c - \omega_B = 2\Delta$ весьма мала, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$x = (\sin \omega_B t - ((\omega_c + 2\Delta)/\omega_c) \sin \omega_c t) q / (\omega_c^2 - \omega_B^2) = (\sin \omega_B t - \sin \omega_c t) q / (\omega_c^2 - \omega_B^2).$$

Используя известные тригонометрические соотношения, найдем

$$x = (2q/(\omega_c^2 - \omega_B^2)) \cos(0,5t(\omega_B + \omega_c)) \sin(0,5t(\omega_B - \omega_c)) =$$

$$= - (2q/\sin t\Delta) \cos(0,5t(\omega_B + \omega_c)) / (\omega_c^2 - \omega_B^2).$$

После преобразований, пренебрегая $2\Delta^2$ и считая $\cos(\omega_B t + t\Delta) \approx \cos \omega_B t$, определим

$$x = - q \sin t\Delta \cos \omega_B t / (2\omega_B \Delta). \quad (24.20)$$

Так как величина Δ мала, то $\sin t\Delta \approx t\Delta$ меняется медленно с периодом $T = 2\pi/\Delta$. При $\omega_B = \omega_c$, т. е. при наступлении условия резонанса, получим

$$x = - (qt/2\omega_B) \cos \omega_B t. \quad (24.21)$$

Анализ этого выражения показывает, что амплитуда колебаний растет со временем (рис. 24.8). Это означает, что хотя k_d , как это видно из уравнения (24.15), стремится к бесконечности, для получения больших амплитуд колебаний необходимо время. Следовательно, в реальном механизме разрушения деталей не возникнут, если переход через резонансную зону осуществить достаточно быстро.

24.4. Особенности колебаний вращающихся звеньев

В быстроходных машинах вращающиеся звенья устанавливаются таким образом, чтобы центр масс звена находился на оси его вращения. Однако точно выполнить это условие не всегда удается из-за сложности геометрической формы звеньев и неоднородности материала, и при вращении их возникает неуравновешенная центробежная сила, вызывающая колебания. Движение при наличии поперечных колебаний становится неустойчивым, что меняет условия взаимодействия звеньев механизма.

Рассмотрим звено с диском, центр масс которого смещен относительно оси вращения на e (рис. 24.9). Силы тяжести звена будем считать малыми, следовательно, не влияющими на его деформацию. При вращении появится центробежная сила

$$F_u = m\omega^2 |y + e|,$$

где m — масса вращающегося звена; ω — угловая скорость вращения; y — прогиб звена под действием центробежной силы.

Как известно из курса «Сопротивление материалов», прогиб

$$y = F_u/C = F_u l^3/48EJ,$$

где l — расстояние между опорами; C — жесткость звена при изгибе; E и J — соответственно модуль продольной упругости материала и момент инерции звена.

Центробежная сила F_u уравновешивается силой упругости звена. Тогда из условия равновесия следует

$$m\omega^2 (y + e) = Cy, \quad (24.22)$$

откуда после преобразований получим

$$y = e/(C/m\omega^2 - 1). \quad (24.23)$$

Из анализа этой зависимости следует, что прогиб звена возрастает при приближении ω к $\sqrt{C/m}$. Если частота вращения

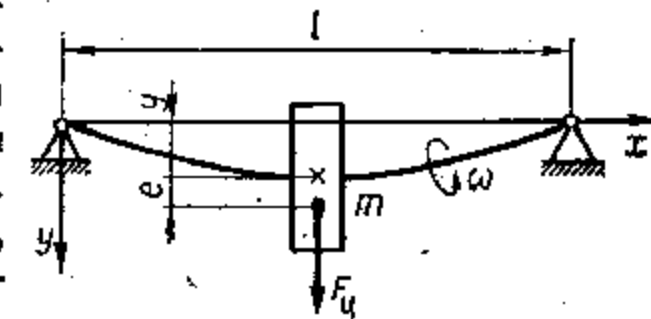


Рис. 24.9. Колебания вращающихся звеньев

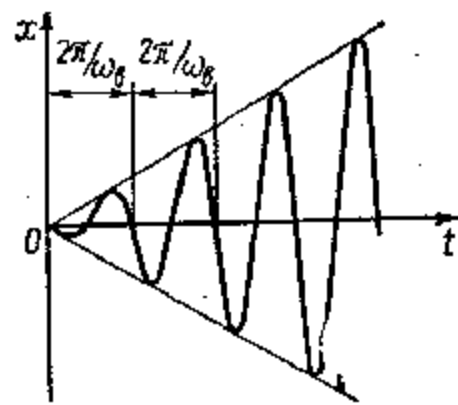


Рис. 24.8. График колебаний при наступлении резонанса

звена ω становится равной частоте собственных колебаний, то прогиб теоретически становится равным бесконечности. Следовательно, критическое значение угловой скорости равно

$$\omega_{кр} = \sqrt{C/m}. \quad (24.24)$$

Из формулы (24.24) следует, что вращение звена не будет сопровождаться поперечными колебаниями, если оно будет вращаться с частотой, как меньшей критической, так и большей. Если связать ось ординат y с вращающимся диском так, чтобы она проходила через его центр масс, то получим

$$y = |1/((\omega_{кр}/\omega)^2 - 1)| e. \quad (24.25)$$

Из формулы (24.25) следует, что с увеличением скорости вращения прогиб звена начинает уменьшаться и стремится к смещению e , т. е. центр масс диска устанавливается на геометрической оси вращения.

24.5. Особенности колебаний поступательно движущихся звеньев

При определении закона движения поступательно движущегося звена необходимо обращать внимание на соотношение частот собственных и вынужденных колебаний. При определенном их сочетании возможны существенные погрешности в законах движения звеньев. Учет упругости звеньев позволяет подобрать массы и размеры их такими, чтобы удовлетворить частотным характеристикам. Рассмотрим влияние упругости звена на закон его движения на примере толкателя кулачкового механизма.

При изучении законов движения толкателей кулачковых механизмов (см. гл. 15) звенья их принимали абсолютно жесткими. В реальных механизмах жесткость кулачка намного больше жесткости толкателя, а для обеспечения замыкания кинематической пары кулачок — толкатель в конструкции узла толкателя предусматривается пружина (рис. 24.10). Поэтому под действием сил технологического сопротивления и давления кулачка толкатель деформируется. Дифференциальное уравнение движения упругого толкателя будет иметь вид

$$d^2y/dt^2 + (C/m)y = Cs/m, \quad (24.26)$$

где C — коэффициент жесткости толкателя; m — масса толкателя; y — перемещение толкателя; s — перемещение точки контакта упругого толкателя, взаимодействующего с профилем кулачка (в общем случае из-за упругости системы толкателя $s \neq y$).

Для косинусоидального закона изменения ускорений толкателя функцию ускорения получим в виде $a(t) = a \cos(\pi t/t_y)$, а функцию перемещения толкателя

$$s(t) = (at_y^2/\pi^2)(1 - \cos(\pi t/t_y)),$$

где t_y — время прохождения фазы удаления толкателя.

Учтя, что $\omega_c^2 = C/m$, уравнение (24.26) запишем в виде

$$d^2y/dt^2 + \omega_c^2 y = (a\omega_c^2 t_y/\pi)(1 - \cos(\pi t/t_y)). \quad (24.27)$$

Уравнение (24.27) есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью. Его решение получим суммированием решения однородного уравнения и частного решения:

$$y = A \sin \omega_c t + B \cos \omega_c t + (at_y^2/\pi^2)(1 - \cos(\pi t/t_y)/(1 - (\pi/\omega_c t_y)^2)). \quad (24.28)$$

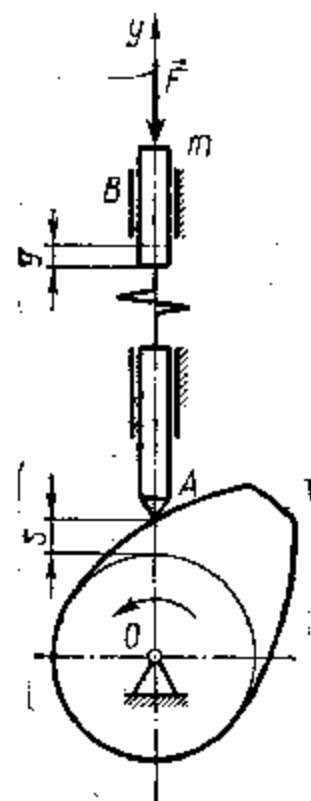


Рис. 24.10. Колебания толкателя кулачкового механизма

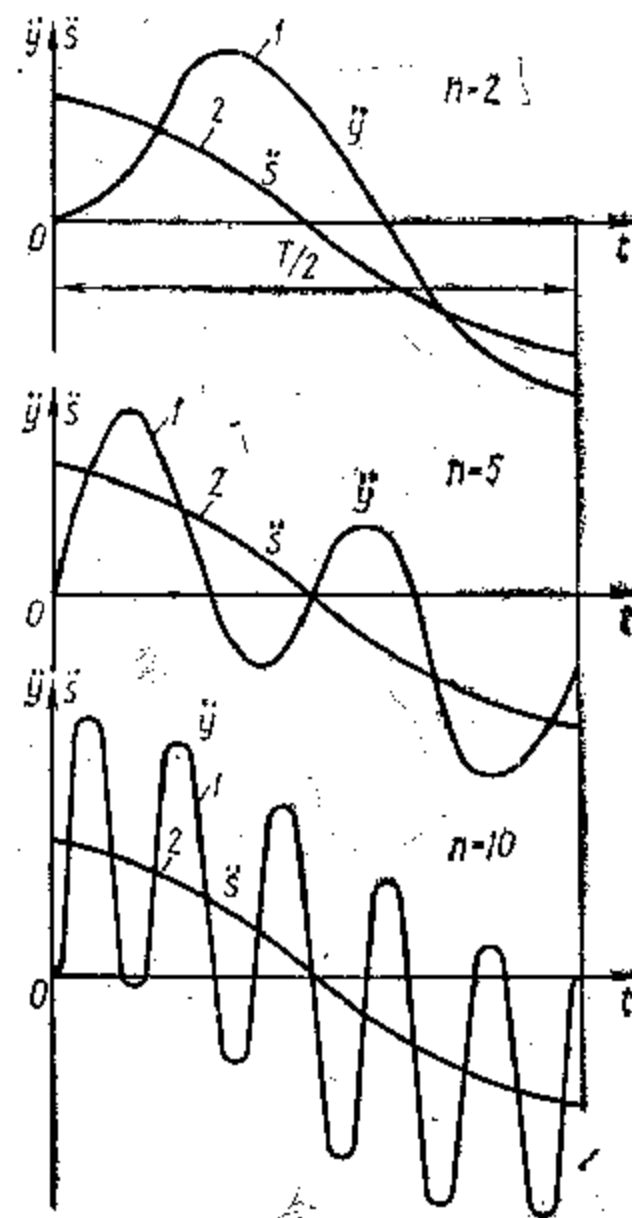


Рис. 24.11. Законы движения толкателя в зависимости от параметра n

В уравнении (24.28) круговая собственная частота ω_c связана с периодом собственных колебаний соотношением $\omega_c = 2\pi/T_c$. Принимая $\omega_c t_y/\pi = n = 2t_y/T_c$, определяя коэффициенты A и B из условий при $t = 0$, $y = 0$, $dy/dt = 0$, после преобразований получим

$$y = (at_y^2/\pi^2)(1 - (n^2 \cos(\pi t/t_y) - \cos(\pi n t/t_y))/(n^2 - 1)). \quad (24.29)$$

Дважды продифференцировав выражение (24.29), получим закон изменения ускорений толкателя

$$d^2y/dt^2 = (\cos(\pi t/t_y) - \cos(\pi n t/t_y)) an^2/(n^2 - 1). \quad (24.30)$$

На рис. 24.11 показаны законы движения 1 толкателя для разных значений n и их сравнение с законом движения 2 жесткого

толкателя. Как видно, уменьшение периода T_c собственных колебаний по сравнению с t_y ведет к существенным искажениям закона движения толкателя.

24.6. Демпфирование свободных колебаний

В реальных механизмах относительное движение звеньев всегда сопровождается действием сил сопротивления движению: сил трения в кинематических парах, электромагнитного сопротивления в электромашин, гидродинамического сопротивления в гидромашин и т. п. Поэтому колебательные движения звеньев сопровождаются действием сил неупругого сопротивления. Эти силы демпфируют колебания, т. е. способствуют гашению вибраций механизмов. Обычно силы демпфирования (гашения) в первом приближении принимают пропорциональными скорости движения. Тогда для схемы на рис. 24.3 вместо уравнения (24.2) будем иметь

$$(F_g g) d^2x/dt^2 = -Cx + kdx/dt, \quad (24.31)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Обозначая $kg/F_g = 2n$, получим дифференциальное уравнение

$$d^2x/dt^2 + 2ndx/dt + \omega_c^2 x = 0, \quad (24.32)$$

решение которого может быть принято в виде

$$x = e^{\alpha t}. \quad (24.33)$$

Постоянная α определяется из условия, что решение удовлетворяет уравнению (24.32). Определяя из формулы (24.33) dx/dt , d^2x/dt^2 и подставляя их значения в уравнение (24.32), получим

$$\alpha^2 + 2n\alpha + \omega_c^2 = 0,$$

откуда

$$\alpha = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_c^2}. \quad (24.34)$$

В решении (24.34) возможны два случая: $n^2 < \omega_c^2$ и $n^2 > \omega_c^2$. Случай $n^2 < \omega_c^2$ соответствует условиям, когда силы демпфирования малы. Тогда получим два комплексных корня $\alpha_1 = -n + \beta i$ и $\alpha_2 = -n - \beta i$ (при $\beta = \sqrt{\omega_c^2 - n^2}$ и $i = \sqrt{-1}$ — мнимое число).

Подставляя α_1 и α_2 в выражение (24.33), найдем частные решения уравнения (24.33). Общее решение получится как их сумма:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t). \quad (24.35)$$

Выражение в скобках имеет тот же характер, что и выражение (24.4), и представляет периодическую функцию с периодом

$$T = 2\pi/\beta = (2\pi/\omega_c) \sqrt{1 - n^2/\omega_c^2}. \quad (24.36)$$

Из сравнения выражений (24.36) и (24.5) следует, что при действии демпфирующей силы период колебаний возрастает. Если $n \ll \omega_c$, то это возрастание незначительно и демпфирование не

учитывается. Множитель e^{-nt} в формуле (24.35) убывает с ростом t , следовательно, колебания затухают со временем.

Постоянные C_1 и C_2 определим как и для выражения (24.4). После преобразований получим (рис. 24.12)

$$x = e^{-nt} (x_0 \cos \beta t + ((dx/dt + nx_0) \sin \beta t)/\beta). \quad (24.37)$$

Если в выражении (24.34) $n^2 \gg \omega_c^2$, то оба корня уравнения — действительные числа. Тогда получим решение

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (24.38)$$

которое не содержит периодических членов, следовательно, в этом случае колебательное движение не происходит. Этот случай соответствует большим значениям демпфирующих сил.

24.7. Демпфирование вынужденных колебаний

Колебания сложных конструкций опасны тем, что трудно выделить источник силы, вызывающей колебания. Примером таких колебаний являются колебания железнодорожных вагонов, крыла самолета, лопастей роторов вертолетов и т. п. Особенно опасны автоколебания, вызывающие в некоторых случаях неограниченный рост амплитуды,

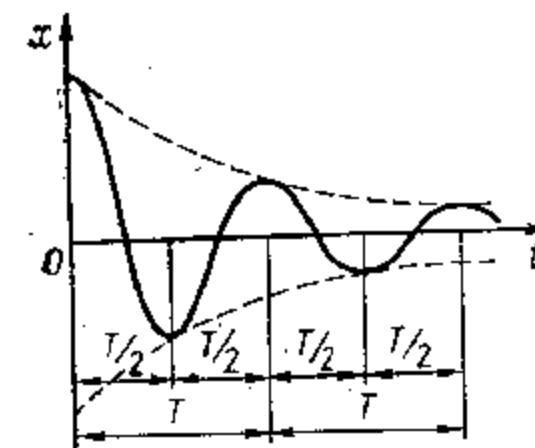


Рис. 24.12. График затухающих колебаний

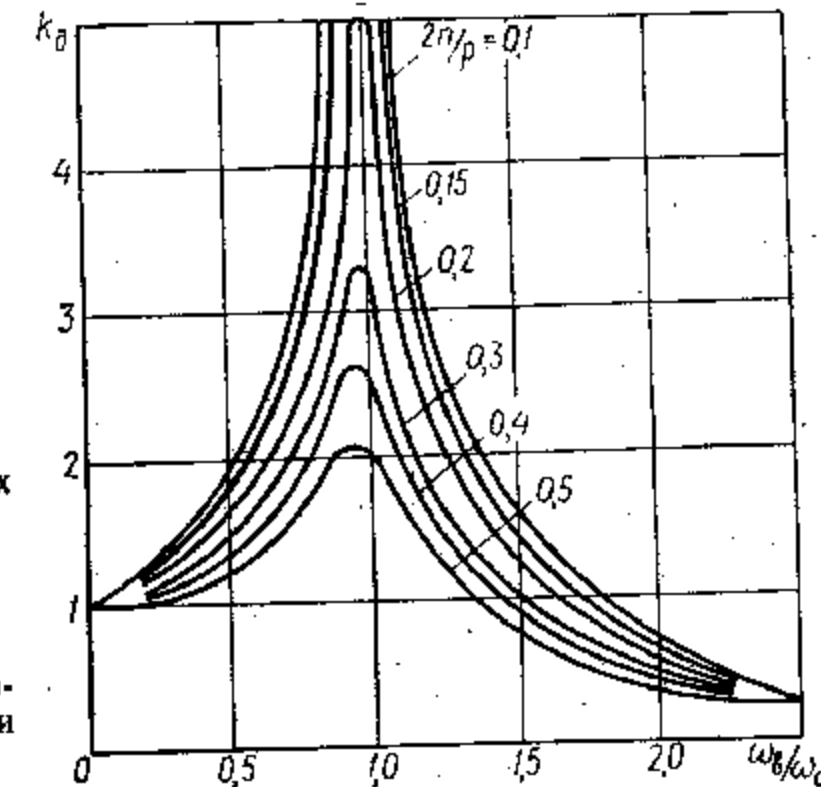


Рис. 24.13. График динамического коэффициента при наличии демпфирования

что приводит к быстрому разрушению машин. В этих случаях ограничение амплитуды автоколебаний достигается за счет демпфирования, обеспечивая этим рассеяние энергии, направленной на возбуждение колебаний. Для этой цели применяют специальные устройства — демпферы (гасители).

Если демпфирующие силы имеют место при вынужденном характере колебаний (рис. 24.3), то дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс при $q = F_q/F_g$, примет вид

$$d^2x/dt^2 + 2ndx/dt + \omega_c^2 x = q \sin \omega_b t, \quad (24.39)$$

где $q \sin \omega_b t$ — возмущающая сила.

Общим решением уравнения (24.39) будет выражение

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + M \sin \omega_B t + N \cos \omega_B t. \quad (24.40)$$

Последние два слагаемых соответствуют вынужденным колебаниям, описываемым частным решением

$$x = M \sin \omega_B t + N \cos \omega_B t. \quad (24.41)$$

Подставляя значение x из формулы (24.41) в уравнение (24.39), после преобразований найдем

$$M = q(\omega_c^2 - \omega_B^2) / ((\omega_c^2 - \omega_B^2) + 4n^2\omega_B^2) \quad (24.42)$$

$$N = -2qn\omega_B / ((\omega_c^2 - \omega_B^2) + 4n^2\omega_B^2). \quad (24.43)$$

С учетом проведенных преобразований получим выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$x = (F/C) / \sqrt{(1 - \omega_B^2/\omega_c^2)^2 + 4n^2\omega_B^2/\omega_c^4} \sin(\omega_B t - \theta), \quad (24.44)$$

где $\theta = \text{arctg}(2n\omega_B/(\omega_c^2 - \omega_B^2))$ — сдвиг фаз; F/C — статическая деформация; $k_d = 1/\sqrt{(1 - \omega_B^2/\omega_c^2)^2 + 4n^2\omega_B^2/\omega_c^4}$ — динамический коэффициент при наличии демпфирования (рис. 24.13).

Если частота возмущающей силы по сравнению с собственной частотой колебаний системы мала, то $k_d \approx 1$. При $\omega_B \gg \omega_c$, $k_d \rightarrow 0$. В этих диапазонах отношений частот силы демпфирования не оказывают влияния на амплитуды колебаний. При $\omega_B = \omega_c$ величина k_d становится весьма чувствительной к изменению демпфирования, особенно если оно мало. Дифференцируя k_d по (ω_B/ω_c) и приравнявая нулю $dk_d/d(\omega_B/\omega_c)$, получим $k_d = k_{d\text{max}}$ при $\omega_B^2/\omega_c^2 = 1 - 2n^2/\omega_c^2$.

Раздел пятый.

КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАБОТЫ МЕХАНИЗМОВ

25. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЗМОВ

25.1. Постановка задач оптимизации при синтезе механизмов

Процесс проектирования машины начинается с формулировки задачи и определения принципиального направления поиска ее решения. На первом этапе исследуются и прогнозируются условия функционирования машин, являющиеся выходными параметрами, к которым относятся скорости, ускорения и усилия на выходных звеньях. Кроме этого, определяются число, вид, передаточные функции и характеристики механизмов, входящих в состав маши-

ны, и их место в общем энергетическом потоке, преобразуемом проектируемой машиной. Этим обеспечиваются показатели, определяющие технологическое назначение машины: производительность, надежность, энергоемкость, материалоемкость и габаритные размеры. Так, выходными параметрами механизма являются законы движения его звеньев, определяемые их размерами — внутренними параметрами (например, для механизма, представленного на рис. 16.14, $l_1, l_2, l_{DB}, l_{DC}, l_4, l_6, l_7, a, l_{OD}$) и внешними параметрами — перемещением, скоростью и ускорением входного звена. Каждому из перечисленных выходных параметров соответствует свой критерий оптимальности (точность воспроизведения заданной траектории, КПД, масса и т. д.).

Связь между критериями оптимальности и параметрами проектируемого механизма (внутренними параметрами) формализуется математической моделью (ММ), которая может быть представлена либо в виде алгоритма расчета на ЭВМ или матричного выражения, как, например для промышленного робота (см. гл. 18), либо в виде передаточной функции для кривошипно-ползунного механизма (см. гл. 17). При разработке таких ММ используются методы кинематического и динамического анализа, представленные в разд. 3 и 4.

Синтез механизма заключается в поиске оптимальной совокупности значений его внутренних параметров. С этой целью критерии оптимальности выражаются целевыми функциями, в основе которых лежат математические модели механизмов, представленные таким образом, что при оптимальной совокупности внутренних параметров механизмов, соответствующей наилучшему значению выходных параметров, целевые функции имеют экстремальное значение. Примерами подобных функций являются зависимости, применяемые при подборе чисел зубьев рядовых и планетарных зубчатых передач (см. гл. 14). Если среди всех показателей качества выделить один критерий, наиболее полно отражающий эффективность проектируемой машины или механизма, то выбор оптимальной совокупности внутренних параметров механизма производится по целевой функции, формализующей этот частный критерий. Такая операция называется оптимизацией по доминирующему критерию. Остальные критерии при этом лишь ограничивают область допускаемых решений. Оптимизация по доминирующему критерию при всей простоте постановки задачи обладает тем недостатком, что остальные выходные параметры находятся обычно в области предельных значений.

В случаях, когда трудно выделить один показатель из многих, применяется многокритериальная оптимизация, при которой число выходных параметров больше единицы. Обычно бывает трудно найти вариант решения, который был бы лучше других по всем выходным параметрам. Чаще всего одно решение лучше других по одним параметрам, но в то же время хуже по остальным. Так, при проектировании кулачкового механизма (см. гл. 15) стоит задача обеспечения его минимальных габаритных размеров

и минимальных потерь на трение. Такие выходные параметры называются *противоречивыми*, потому что с уменьшением радиуса основной шайбы кулачка, приводящим к уменьшению габаритных размеров, увеличиваются углы давления и потери на трение, что снижает КПД механизма.

Примером непротиворечивых выходных параметров являются изгибная и контактная прочность зубьев цилиндрических зубчатых колес (см. гл. 12). При увеличении внутренних параметров — коэффициентов смещений x_1 и x_2 , определяющих геометрические характеристики торцевых сечений зубьев, увеличивается толщина основания зуба и радиус кривизны боковой поверхности, что способствует увеличению как изгибной, так и контактной прочности зубьев. Однако при увеличении коэффициентов смещения снижается коэффициент перекрытия передачи, определяющий плавность пересопрыжения. В подобных разобранных случаях проектируемые машина или механизм имеют векторный характер противоречивых выходных параметров синтеза.

25.2. Построение комплексных целевых функций

Предположим, что при проектировании машины рассматриваются два противоречивых выходных параметра, формализуемые целевыми функциями Φ_1 и Φ_2 от оптимизируемых параметров механизма. В общем случае оптимальной совокупности определяемых внутренних параметров механизма соответствует максимум одной функции и минимум другой. Кроме того, эти целевые функции

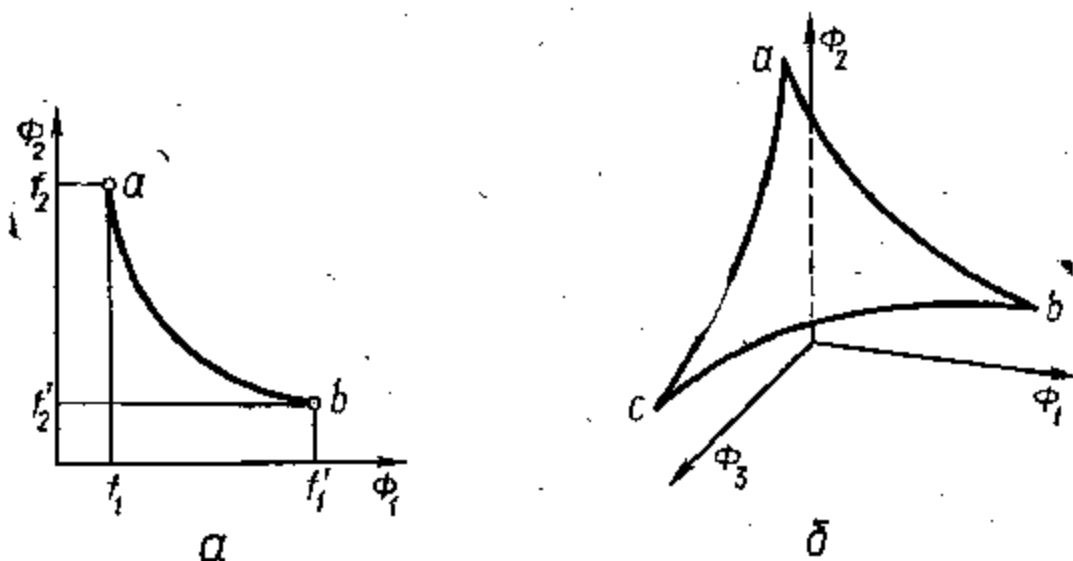


Рис. 25.1. Схема образования равнозначных решений в многокритериальных задачах

могут иметь различную физическую размерность. Пока примем, что значения этих функций безразмерны и оптимальная совокупность внутренних параметров соответствует минимуму целевых функций.

Отложим значения этих функций, соответствующих определенному рассматриваемому варианту механизма, на двух взаимно перпендикулярных осях Φ_1 и Φ_2 (рис. 25.1, а). Пусть минимальное значение целевой функции Φ_1 определится точкой f_1 на оси Φ_1 .

Совокупности внутренних параметров проектируемого механизма, при которой целевая функция Φ_1 принимает минимальное значение f_1 , соответствует определенное значение f_2 целевой функции Φ_2 . В системе координат $\Phi_1\Phi_2$ эти два значения f_1 и f_2 определяют точку a , характеризующую вектор \bar{x}_1 внутренних параметров механизма. Аналогично, если определить минимальное значение f_2 целевой функции Φ_2 , то можно найти соответствующее ему значение f_1' целевой функции Φ_1 . В системе координат $\Phi_1\Phi_2$ эти два значения f_2 и f_1' определяют точку b , характеризующую другой вектор \bar{x}_2 внутренних параметров механизма. Эти два решения при двух критериях Φ_1 и Φ_2 равнозначны. Аналогично можно получить бесконечное количество решений, лежащих на кривой ab , называемой *линией безразличия*. При трех критериях Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 равнозначные решения будут находиться на поверхности безразличия abc (рис. 25.1, б). Для однозначного решения задачи синтеза многокритериальную задачу следует свести к однокритериальной, определив комплексную целевую функцию. Этот процесс носит название *свертки векторного критерия*.

Известно множество способов построения комплексных целевых функций. Среди них наиболее часто при синтезе механизмов используют метод взвешенных сумм, при котором все выходные параметры объединяют в две группы. В первую группу входят параметры, значения которых нужно повышать: КПД, производительность, точность воспроизведения заданной функции или траектории, а в частном случае — изгибная и контактная прочность зубьев, коэффициент перекрытия и т. п. Целевые функции, соответствующие этим выходным параметрам, обозначим Φ_j^+ . Во вторую группу входят параметры, значения которых нужно снижать, например, габаритные размеры, скорости скольжения, углы давления, силы, действующие на звенья и кинематические пары, виброактивность, неравномерность движения, силовое воздействие на стойку вследствие проявления инерционности. Целевые функции, соответствующие этим параметрам, будем обозначать Φ_j^- . Тогда для случая минимизации комплексной целевой функции свертка векторного критерия будет иметь вид

$$\Phi = \sum_{j=1}^n q_j \Phi_j^- - \sum_{j=n+1}^m q_j \Phi_j^+, \quad (25.1)$$

где n и m — количество показателей первой и второй группы при $m > n$.

Степень важности j -го критерия в выражении (25.1) определяется весовым коэффициентом q_j , который сводит значения всех целевых функций к одной размерности или к безразмерным величинам. Коэффициенты $q_j > 0$ устанавливаются в зависимости от назначения машины с учетом опыта эксплуатации и в процессе оптимизации обычно остаются постоянными. Примерами таких комплексных целевых функций являются зависимости, рассмот-

ренные при синтезе механизмов со ступенчато изменяющимся передаточным отношением (см. гл. 14).

Сущность оптимизации при выбранной комплексной целевой функции сводится к отысканию при наложенных ограничениях таких значений параметров механизма, которые дают максимум (минимум) целевой функции, характеризующей комплексную эффективность проектируемой машины. При этом используются математические методы оптимизации, позволяющие осуществить непрерывный поиск направления улучшения внутренних параметров механизма за счет количественного изменения их значений. Так как комплексная целевая функция, получаемая сверткой векторных критериев, определяется неявным образом от внутренних параметров синтеза, что не позволяет оценить ее свойства (выпуклость, вогнутость и т. д.), то решение задач оптимизации ведется с помощью поисковых методов, получивших название *методов математического программирования*. В настоящее время нет экономичного, универсального метода, дающего высокую гарантию получения наилучшей совокупности внутренних параметров машины и механизма, пригодного для решения любой задачи оптимизации. В зависимости от класса решаемых задач из имеющихся в наличии программ, входящих в программное обеспечение методов оптимизации, выбирают такую, которая дает наиболее высокую вероятность отыскания оптимальной совокупности определяемых параметров с наименьшими затратами машинного времени.

При описании комплексной целевой функции нелинейными зависимостями от внутренних параметров задача оптимизации решается методами линейного программирования; если же целевая функция является линейной функцией от внутренних параметров, то имеет место задача линейного программирования. В общем случае целевая функция может иметь несколько экстремумов, отличающихся по абсолютной величине. В зависимости от типа экстремума, в котором заканчивается поиск оптимального решения, различают методы поиска локального и глобального экстремума. Если на значение определяемых параметров наложены некоторые ограничения, то решение задачи синтеза механизмов осуществляется методами условной оптимизации. В противном случае (при отсутствии ограничений) при синтезе механизмов для поиска значений определяемых параметров используют методы безусловной оптимизации.

25.3. Методы безусловной оптимизации

Среди методов поиска локального экстремума **методы безусловной оптимизации** составляют наиболее многочисленную группу. Сущность этих методов заключается в том, что строится такая последовательность значений вектора внутренних параметров $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$, при которой в случае поиска минимума целевой функции в

процессе оптимизации обеспечивается последовательность

$$\Phi(\bar{x}_0) > \Phi(\bar{x}_1) > \Phi(\bar{x}_2) \dots, \quad (25.2)$$

где \bar{x}_0 — вектор исходной совокупности внутренних параметров, выбор которого во многом определяет успех решения задачи синтеза.

Схема алгоритма поиска для общего случая представлена на рис. 25.2. Выбор вектора исходной совокупности внутренних параметров производится в блоке 1. Эта совокупность должна принадлежать области определения целевой функции, и чем ближе к экстремуму она выбрана, тем быстрее он может быть найден. В блоке 2 производится вычисление целевой функции, значение которой попадает в блок 3, определяющий условия прекращения поиска. Если эти условия позволяют сделать вывод, что поиск следует продолжить, то в блоке 4 определяются направление и шаг поиска в достигнутой точке, а в блоке 5 — удовлетворительность нахождения новой совокупности в области определения целевой функции. Процесс вычислений повторяется до тех пор пока удовлетворяются условия прекращения поиска. Таким условием для большинства методов является значение шага поиска, которое в конце вычислений обычно соизмеримо с требуемой точностью определения внутренних параметров механизма.

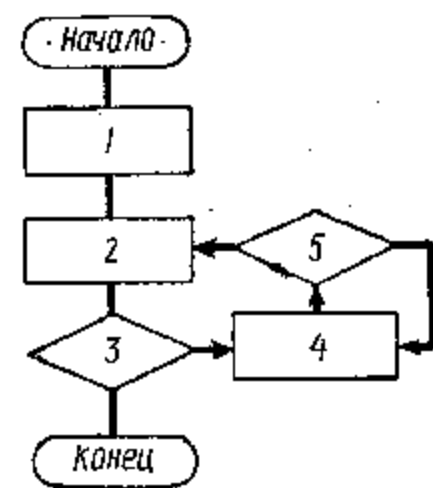


Рис. 25.2. Обобщенный алгоритм методов безусловной оптимизации

В зависимости от количества внутренних параметров в целевой функции различают **методы одномерного** (если аргументом целевой функции является один внутренний параметр) и **многомерного поиска** при числе внутренних параметров больше единицы. Так, например, выбор коэффициентов смещения x_1 и x_2 колес зубчатой передачи является задачей двумерного поиска. Алгоритмы одномерного поиска применяются внутри алгоритмов многомерного. При выборе направлений и шагов в многомерном поиске внутренние параметры необходимо привести к одной размерности или к безразмерному виду. При этом i -й внутренний параметр синтеза a_i преобразуется в безразмерный

$$x_i = \ln(a_i/\varepsilon_i), \quad (25.3)$$

где ε_i — коэффициент, численно равный единице измерения внутреннего параметра.

Методы безусловной оптимизации по способу определения направления поиска делятся на методы нулевого, первого и второго порядков. Для методов *нулевого порядка* типичен выбор направления поиска по результатам последовательных вычислений целевой функции. По способу выбора совокупности оптимизируемых параметров эти методы делятся на *детерминированные* и *случайного поиска*. В детерминированных методах процесс перехода от вектора внутренних параметров \bar{x}_i к вектору \bar{x}_{i+1} происходит в

соответствии с некоторым алгоритмом, определяющим тот или иной метод. В методах случайного поиска в этот процесс вносится элемент случайности. В методах *первого порядка* переход от вектора \bar{x}_i к вектору \bar{x}_{i+1} производится с использованием первой производной от целевой функции в точке, определяемой вектором внутренних параметров x_i , а в методах *второго порядка* с этой же целью вычисляют вторую производную в этой же точке. В задачах многомерного поиска с целевыми функциями сложного вида применение методов безусловной оптимизации первого и второго порядков нецелесообразно. Методы нулевого порядка проще программируются и требуют меньших затрат машинного времени.

25.4. Методы условной оптимизации

Наиболее типичен синтез механизмов методами условной оптимизации, когда на внутренние параметры синтеза наложены определенные ограничения. Различают параметрические, дискретизирующие и функциональные ограничения. *Параметрические ограничения*, примером которых могут служить ограничения на длины звеньев, представляют собой систему неравенств

$$x_{\min i} \leq x_i \leq x_{\max i} \text{ при } i \in \{1; n\}, \quad (25.4)$$

где $x_{\min i}$ и $x_{\max i}$ — минимальные и максимальные значения i -го определяемого параметра механизма; n — число параметрических ограничений.

Дискретизирующие ограничения налагаются на значения параметров в связи с их физической сущностью либо в связи с требованиями ГОСТ. Так, параметр «число зубьев» зубчатой передачи принимает только целые положительные значения, а параметр «модуль зубьев» — только значения из стандартного ряда модулей. Эти ограничения имеют вид

$$x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}) \text{ при } k \in \{1; m\}, \quad (25.5)$$

где x_j — j -й параметр проектируемого механизма; x_{jk} — допустимые дискретные значения j -го параметра; m — число дискретных значений j -го параметра.

Функциональные ограничения представляют собой условия работоспособности механизма, не отражаемые целевой функцией: условия проворачиваемости звеньев механизмов (см. гл. 6), предотвращающие подреза зубьев, ограничения по коэффициенту перекрытия (см. гл. 10) и т. д. и имеют вид

$$f_l(x) \leq 0; \quad f_j(x) = 0; \quad f_k(x) < 0, \quad (25.6)$$

где $f(x)$ — функция от вектора внутренних параметров.

Указанные ограничения формируют допустимую область поиска оптимальной совокупности параметров механизма. Если эти ограничения совпадают с условиями работоспособности, то допустимую область называют также областью работоспособности. Назначение ограничений является ответственным этапом в процессе постановки и решения задач оптимального проектирования

механизмов. Неучет каких-либо ограничений приводит к снижению технико-экономических показателей и других выходных характеристик механизма. Вместе с тем избыточные ограничения (особенно функциональные) повышают сложность алгоритмов и методов решения задач, а также увеличивают затраты машинного времени. Важное значение при постановке задачи оптимального проектирования имеет анализ совместимости принятых ограничений, так как может оказаться, что допустимая область поиска не содержит ни одного решения, т. е. является пустым множеством.

При решении задач условной оптимизации целесообразно использовать методы безусловной оптимизации, учитывая большое количество разработанных по этим методам программ. С этой целью задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации устранением ограничений путем преобразования параметра x_i , на значения которого наложены ограничения, в неограничиваемый.

Вообще задачи условной оптимизации более сложны, чем задачи безусловной оптимизации. Для их решения используют специально разработанные методы программирования с ограничениями. Одним из таких методов, которые относятся к методам поиска глобального экстремума, является *метод сканирования*, состоящий в том, что допустимая область поиска, определяемая системой ограничений, разбивается на k подобластей, в центре каждой из которых определяется значение целевой функции. Если целевая функция зависит от n параметров, необходимо выполнить k^n вариантов расчета. Для надежного определения глобального минимума необходимо увеличивать число k подобластей, что приводит к большим затратам машинного времени.

Методы математического программирования применяются на всех этапах синтеза машин и механизмов, в частности, когда рассматриваются вопросы прочности деталей, из которых состоят звенья механизмов, долговечности, надежности, технологичности и др. Чем больше частных характеристик использовано в формировании комплексного критерия и функциональных ограничений, тем более оптимальным с точки зрения функционирования будет выбор внутренних параметров проектируемой машины и механизма.

25.5. Управляемые внутренние параметры синтеза

При решении задач оптимизации необходимо организовать целенаправленный поиск оптимальной совокупности внутренних параметров так, чтобы, с одной стороны, получить наилучшие значения выходных параметров механизмов, а с другой — максимально сократить машинное время поиска этих значений. Внутренние параметры, значения которых могут меняться в процессе синтеза, называются управляемыми. При уменьшении числа управляемых параметров снижается размерность области допустимых решений, упрощается ее анализ и, следовательно, уменьшаются вычислительные трудности, связанные с поиском экстремума целевой функции.

Значения некоторых внутренних унифицированных параметров синтеза назначаются и не подлежат изменению. Некоторые внутренние параметры нежелательно изменять из конструктивных и технологических соображений. Так, внутренними параметрами синтеза эвольвентного зацепления будут параметры *исходного контура* и значения коэффициентов его смещения. Однако изменение параметров исходного контура (например, угла профиля α) вызывает увеличение номенклатуры режущего инструмента, что неэкономично. Поэтому в качестве управляемых параметров обычно выбирают коэффициенты смещения исходного контура x_1 и x_2 . Из остальных внутренних параметров для формирования вектора управляемых параметров выбирают такие, изменение которых наибольшим образом изменяет выходные параметры.

Степень влияния внутренних параметров на выходные оценивается абсолютным b_{ij} и относительным c_{ij} коэффициентами чувствительности, определяемыми по зависимостям

$$b_{ij} = dy_i/dx_j \text{ и } c_{ij} = b_{ij}x_j / y_i \text{ ном} \quad (25.7)$$

где y_i — i -й выходной параметр; x_j — j -й внутренний параметр; $x_j \text{ ном}$ и $y_i \text{ ном}$ — номинальные значения этих параметров.

Из всех внутренних параметров в качестве управляемых выбирают такие, у которых эти коэффициенты имеют наибольшее значение. В результате из всех внутренних параметров определяют наиболее влияющие и формируют из них вектор управляемых параметров синтеза. Кроме этого, появляется возможность оценки стабильности выходных характеристик проектируемых машин и механизмов при учете погрешностей изготовления и деформации звеньев, что способствует правильному назначению допусков на параметры синтеза.

При оптимальном синтезе механизмов сравнение вариантов решения на любой стадии проектирования производится при помощи показателей качества (выходных параметров синтеза). К показателям, учитываемым на первом этапе проектирования, относятся: коэффициент полезного действия, точность воспроизведения заданной функции или заданной траектории, равномерность движения исполнительного звена, силы, возникающие в звеньях и кинематических парах, динамические нагрузки, уровень механических колебаний, виброакустическая активность.

26. ПУТИ ОПТИМИЗАЦИИ МЕХАНИЗМОВ ПО МИНИМУМУ ПОТЕРЬ МОЩНОСТИ

26.1. Механический коэффициент полезного действия и коэффициент потерь

Механический коэффициент полезного действия (КПД) — один из важнейших качественных показателей работы машины. Чем он выше, тем выгоднее в эксплуатации машина. При выборе структуры механизмов, образующих машину, необходимо ориентироваться

на такие параметры звеньев и кинематических пар, которые обеспечат наибольший коэффициент полезного действия не только в отдельные моменты работы или за цикл, но и за весь срок службы машины.

Мгновенный КПД — это отношение полезной мощности P_2 , отводимой с ведомого звена, к мощности P_1 внешних сил (сил движущих), затраченной на ведущем звене. Так как для преодоления потерь в силовом потоке механизма от ведущего звена к ведомому затрачивают определенную мощность $P_{в.с}$, а мощность, которую необходимо подвести к ведущему звену, $P_1 = P_2 + P_{в.с}$, то коэффициент полезного действия будет

$$\eta = P_2/P_1 = P_2/(P_2 + P_{в.с}) \quad (26.1)$$

Цикловый КПД — это отношение затрат полезной работы к затратам работы движущих сил за цикл установившегося движения. По аналогии с предыдущим

$$\eta = A_2/A_1 = A_2/(A_2 + A_{в.с}), \quad (26.2)$$

где A_1 — работа сил движущих; A_2 — работа сил полезного сопротивления; $A_{в.с}$ — работа, затраченная на преодоление сил вредного сопротивления.

Если один цикл соответствует одному обороту входного звена, то работа

$$A_1 = \int_0^{2\pi} T_1(\varphi) d\varphi \text{ и } A_{в.с} = \int_0^{2\pi} M_{в.с}(\varphi) d\varphi, \quad (26.3)$$

где T_1 — момент движущих сил; $M_{в.с}$ — момент сил вредных сопротивлений.

По значению КПД сравнивают достоинства однотипных машин, например, двигателей внутреннего сгорания, турбин. Чем больше КПД, тем эффективнее машина при прочих равных условиях. Эксплуатационные качества механизмов одинакового назначения, например шарнирно-рычажных, отдельных кинематических соединений и кинематических пар (например, пар 5-го класса скольжения и качения) также сравнивают по величине их КПД.

Причины, вызывающие необходимость затраты дополнительной энергии, отличаются большим разнообразием. Наиболее существенны потери на преодоление сопротивления относительно движению контактирующих твердых звеньев. Затраты мощности необходимы также для преодоления сопротивления движению звеньев окружающей среды — воздуха (особенно при больших скоростях), жидкостей, в частности смазочных материалов, для звеньев, полностью или частично погруженных в них (например, зубчатых колес, шарнирных соединений и т. п.). В процессе работы звенья испытывают деформации под воздействием передаваемых нагрузок, в результате чего потенциальная энергия упругих деформаций переходит в тепловую. Такие потери имеют место в упругом контакте колес фрикционных механизмов, в гибких звеньях соответствующих механизмов (например, ременных). Относительные

значения этих потерь зависят от упругих свойств материалов звеньев и их нагруженности. Ниже рассматриваются лишь потери в кинематических парах.

Сравнение эффективности механизмов, кинематических соединений и пар в ряде случаев более наглядно не по КПД, а по значению потерь, оцениваемому коэффициентом потерь (КП), который представляет отношение работы $A_{в.с}$ за некоторый интервал времени при преодолении сил вредного сопротивления, к работе A_1 сил движущих:

$$\psi = A_{в.с}/A_1. \quad (26.4)$$

С учетом формулы (26.2) получим

$$\eta = 1 - \psi. \quad (26.5)$$

Коэффициент потерь дает представление о дополнительных затратах энергии в машине при получении полезной работы. При сравнении коэффициентов потерь становятся более очевидными недостатки отдельных механизмов или кинематических пар. Так, например, для рядового зубчатого механизма $\eta_3 = 0,97$, а для червячного $\eta_3 = 0,80$ и отношение этих КПД составляет $\eta_3/\eta_3 = 0,97/0,80 = 1,21$. Вместе с тем отношение коэффициентов потерь в этом случае будет $\psi_3/\psi_3 = 0,20/0,03 \approx 6,7$, что более убедительно показывает преимущества зубчатого механизма перед червячным по энергетическим затратам. При непрерывной работе стоимость излишних затрат энергии на преодоление потерь в червячном механизме в течение года эксплуатации оказывается выше стоимости зубчатого механизма. Чаще всего определение КПД производят по формуле (26.5), так как во многих случаях отыскание коэффициента потерь оказывается более удобным.

26.2. Влияние на КПД места расположения механизмов в энергетическом потоке

Машины представляют собой последовательное, параллельное или смешанное соединение механизмов. В свою очередь, в цепи механизмов от входного к выходному звену кинематические пары располагают подобным же образом. Расположение механизмов в силовом потоке машины от ведущего к ведомому звену влияет на КПД. Потери в каждом механизме, в свою очередь, зависят от расположения кинематических пар в этом потоке.

Если КПД и коэффициент потерь каждой кинематической пары находят по формулам (26.1) и (26.4), то из рассмотрения потерь в силовом потоке получают зависимости для определения коэффициентов η и ψ для всего механизма. Также, полагая известным КПД и КП каждого механизма, определяют полный КПД машины. На рис. 26.1, а показано последовательное соединение n механизмов с коэффициентами полезного действия $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Первый механизм затрачивает работу движущих сил A_1 и совершает полезную работу $A_2 = A_1\eta_1$. Второй механизм затрачивает работу дви-

жущих сил A_2 и совершает полезную работу $A_3 = A_2\eta_2 = A_1\eta_1\eta_2$. Продолжая подобные рассуждения, получим выражение для полезной работы n -го механизма

$$A_n = A_1 \prod_{i=1}^n \eta_i. \quad (26.6)$$

Общий КПД цепи механизмов с последовательным соединением относительно энергетического потока определится по формуле

$$\eta = A_n/A_1 = \prod_{i=1}^n \eta_i. \quad (26.7)$$

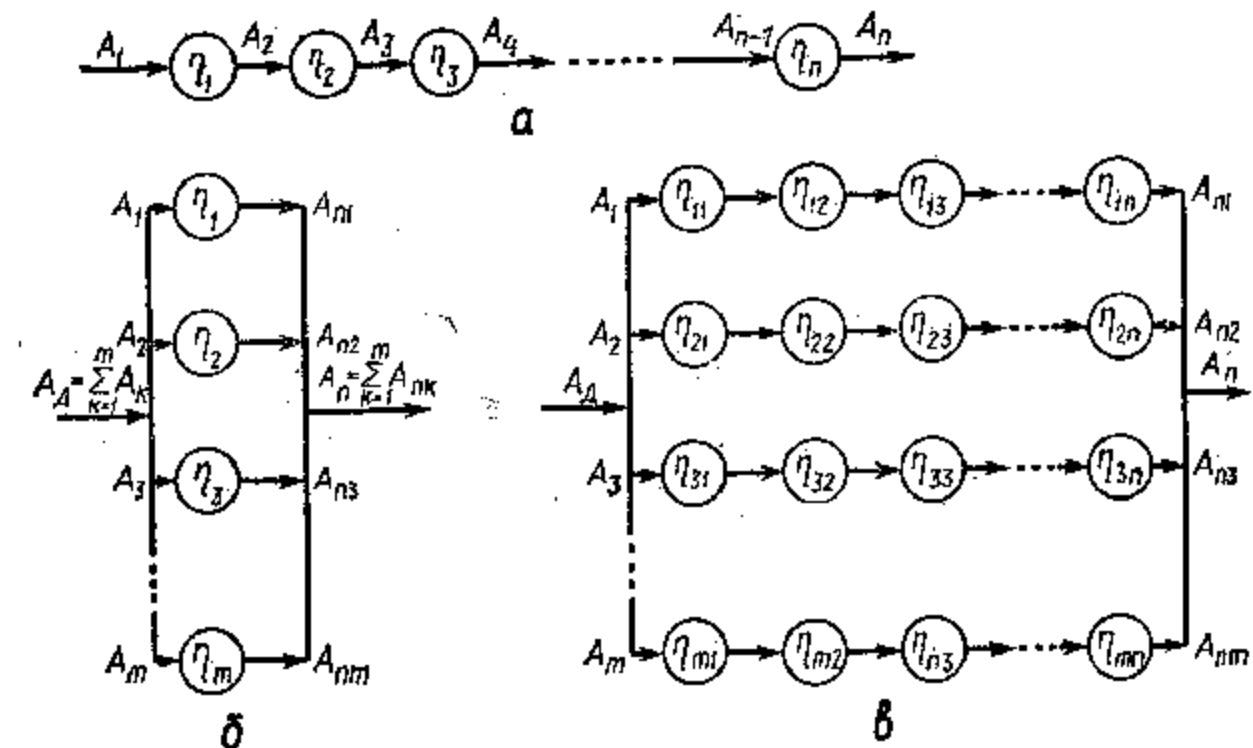


Рис. 26.1. Схемы расположения механизмов в машине относительно энергетического потока

При параллельном соединении m механизмов (рис. 26.1, б) каждый k -й механизм затрачивает работу A_k и производит полезную работу $A_{nk} = A_k\eta_k$. Общая работа движущих сил, затраченная

всеми механизмами, $A = \sum_{k=1}^m A_k$, а полезная работа всех механиз-

мов $A_n = \sum_{k=1}^m A_k\eta_k$. В этом случае КПД зависит от того, как распределяется работа движущих сил A_d между отдельными потоками, что учитывается соответствующими коэффициентами распределения нагрузки Ω_k при условии, что $\sum_{k=1}^m \Omega_k = 1$. Тогда

$$\eta = \frac{\sum_{k=1}^m A_k\eta_k}{\sum_{k=1}^m A_k} = \left(\sum_{k=1}^m A_d\Omega_k\eta_k \right) / A_d = \sum_{k=1}^m \Omega_k\eta_k. \quad (26.8)$$

При смешанном соединении механизмов (рис. 26.1, в) рассматривают отдельные участки цепей, имеющих последовательный или параллельный характер соединения, КПД которых рассчитыва-

ется по формулам (26.7) и (26.8). После этого, в зависимости от структуры смешанного соединения, определяется общий КПД. Для схемы, представленной на рис. 26.1, в, записывают

$$\eta = \sum_{k=1}^m A_{nk} / \sum_{k=1}^m A_k = \sum_{k=1}^m A_k \prod_{i=1}^n \eta_{ki} / \sum_{k=1}^m A_k = \sum_{k=1}^m \left(\Omega_k \prod_{i=1}^n \eta_{ki} \right), \quad (26.9)$$

где n — число механизмов, соединенных последовательно в параллельных ветвях; m — число параллельных ветвей.

Так как каждый отдельный механизм рассматривают как последовательное, параллельное или смешанное по отношению к энергетическому потоку расположение кинематических пар, то формулы (26.7), (26.8) и (26.9) используют для определения КПД отдельных механизмов, если известны КПД кинематических пар, входящих в их состав. Такой же подход целесообразен при нахождении потерь в составной кинематической паре, если элементы, ее образующие, совершают сложное движение. Для этого относительное движение звеньев (как, например, в червячном зацеплении, см. гл. 13) представляют состоящим из простых движений, и потери определяют для каждого из них отдельно.

26.3. Коэффициент полезного действия низших кинематических пар

Рассмотрим определение КПД наиболее распространенных кинематических пар — поступательной и вращательной, используя зависимости сил трения от параметров кинематических пар (см. гл. 20). Пусть в поступательной кинематической паре с силовым замыканием (рис. 26.2, а) звено 1 движется относительно звена 2 со скоростью v_{12}

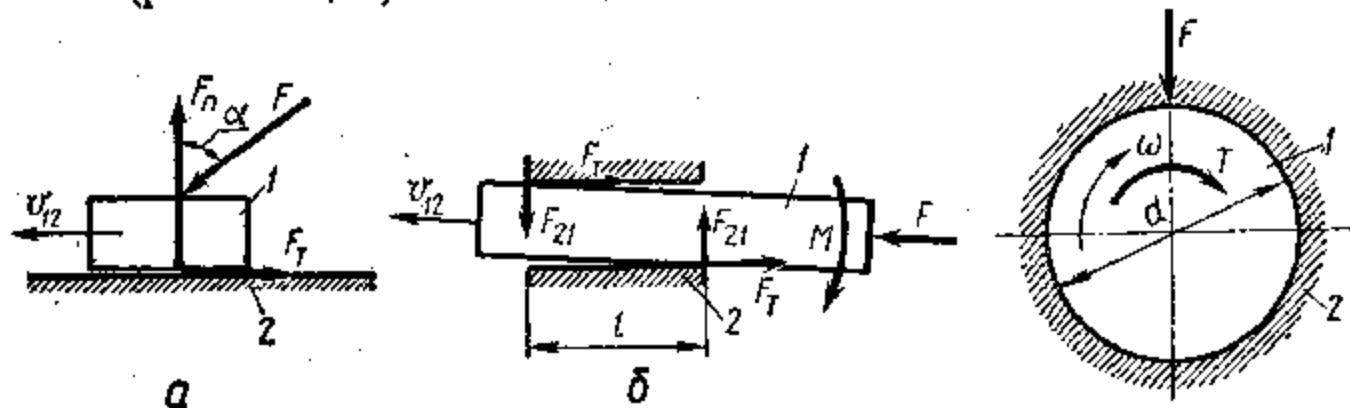


Рис. 26.2. Определение КПД в поступательной кинематической паре

Рис. 26.3. Схема определения КПД во вращательной кинематической паре

ростью v_{12} под действием силы F , приложенной под углом $(\pi/2 - \alpha)$ к направляющей. Сопротивление этому движению оказывает сила трения, пропорциональная нормальной составляющей силы F , а работа, затраченная на преодоление сил вредного сопротивления — сил трения, будет

$$A_{вс} = F_T \cdot v_{12}t = F_n f' v_{12}t = F f' v_{12}t \cos \alpha, \quad (26.10)$$

где F_n — нормальная составляющая силы F ; f' — приведенный коэффициент трения.

Если обозначить проекцию силы F на направление относительной скорости $F_x = F \sin \alpha$, то работа сил движущих $A_1 = F_x v_{12}t = F v_{12}t \sin \alpha$. Тогда в соответствии с зависимостью (26.5) КПД

$$\eta = 1 - \psi = 1 - A_{вс}/A_1 = 1 - f' \operatorname{tg} \alpha. \quad (26.11)$$

В поступательной кинематической паре с геометрическим замыканием при перекосе звена l под действием эксцентрично приложенных сил или момента M (рис. 26.2, б) возникают силы реакции F_{21} , расположенные друг от друга на расстоянии, равном длине l направляющей. В этом случае работа, затрачиваемая на преодоление сил трения,

$$A_{вс} = 2F_T v_{12}t = 2F_{21} f' v_{12}t = M f' v_{12}t/l. \quad (26.12)$$

Работа сил движущих, как и в первом случае, $A_1 = F v_{12}t$. Тогда КПД поступательной пары при перекосе поступательно движущегося ползуна

$$\eta = 1 - \psi = 1 - M f' v_{12}t / (F l v_{12}t) = 1 - M f' / (F l). \quad (26.13)$$

Из этой формулы следует, что для повышения КПД поступательных кинематических пар с геометрическим замыканием необходимо увеличивать длину направляющей.

Во вращательной кинематической паре (рис. 26.3), нагруженной радиальной силой F , работа, затрачиваемая на преодоление потерь на трение (см. гл. 20), $A_{вс} = 0,5 \omega d f' F t$. Если вращающий момент будет T , то работа сил движущих $A_1 = \omega T t$. На основании этого КПД вращательной кинематической пары определится по формуле

$$\eta = 1 - A_{вс}/A_1 = 1 - 0,5 \omega d f' F t / (\omega T t) = 1 - 0,5 f' F d / T. \quad (26.14)$$

Потери в винтовой паре зависят от двух параметров — угла γ подъема винтовой линии и приведенного коэффициента трения f' , которые определяются элементами пары (см. гл. 20). При повороте звена 1 (рис. 26.4) на угол θ необходимо затратить работу $A_1 = T \theta$. При этом получим полезную работу силы F , равную $A_2 = 0,5 F \theta d_2 \operatorname{tg} \gamma$. Учтя (см. гл. 20), что $T = 0,5 d_2 F \operatorname{tg} (\gamma + \varphi')$, получим

$$\eta = A_2/A_1 = 0,5 d_2 F \theta \operatorname{tg} \gamma / (0,5 d_2 F \theta \operatorname{tg} (\gamma + \varphi')) = \operatorname{tg} \gamma / \operatorname{tg} (\gamma + \varphi'). \quad (26.15)$$

При движении звена 1 под действием силы F получим

$$\eta = \operatorname{tg} (\gamma - \varphi') / \operatorname{tg} \gamma. \quad (26.16)$$

Приведенный угол трения φ' (а по φ' и приведенный коэффициент трения f') принимают в зависимости от типа резьбы и вида трения в винтовой паре — скольжения или качения.

Для определения потерь и коэффициента полезного действия кинематических пар 5-го класса, содержащих тела качения — шарики или ролики, также используют приведенные выше формулы.

Значения приведенных коэффициентов трения в этих случаях определяют через коэффициенты трения качения k и диаметры d тел качения (см. гл. 20).

26.4. Коэффициент полезного действия высших кинематических пар

Звенья, входящие в высшие кинематические пары, совершают плоскопараллельное или пространственное относительное движение. В последнем случае наряду с трением скольжения имеет место и трение качения. Пусть звенья 1 и 2 высшей кинематической пары (рис. 26.5), контактирующие по линии, перпендикулярной плоскости их относительного вращения и проходящей через точку

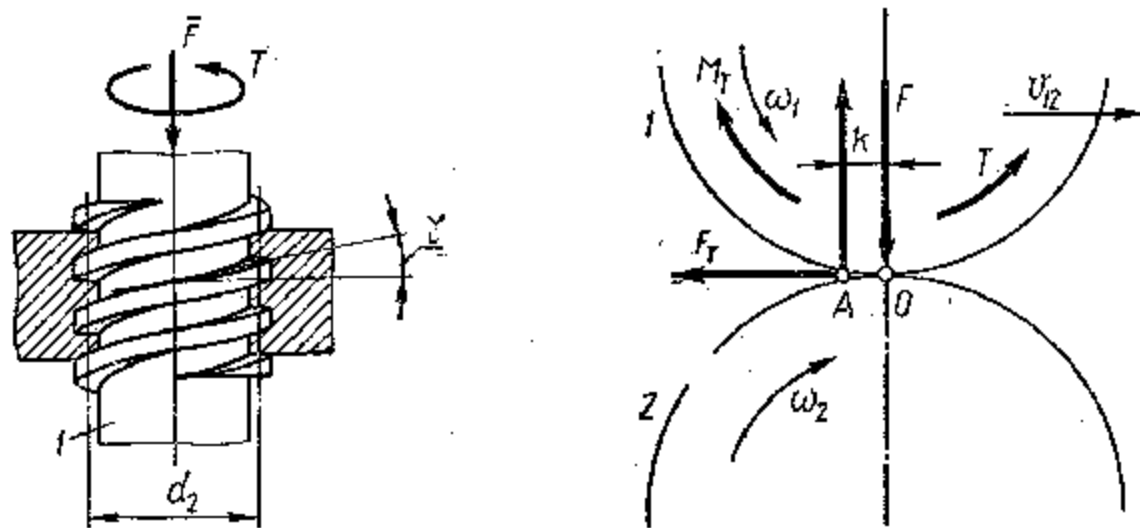


Рис. 26.4. Потери в винтовой кинематической паре

Рис. 26.5. Взаимодействие звеньев в высшей кинематической паре

O , нагружены нормальной силой F . При вращении звеньев с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 в зоне контакта кроме качения возможно относительное скольжение со скоростью $v_{12} = v_1 - v_2$, если в зоне контакта (точка A) окружные скорости звеньев не будут равными. Мгновенные потери мощности в этом случае складываются из мощности на преодоление потерь на трение качения и на трение скольжения:

$$P_{\Pi} = P_{\Pi.k} + P_{\Pi.c} = M_T \omega_{12} + F_T v_{12}, \quad (26.17)$$

где M_T — момент потерь на трение качения; F_T — сила трения в контакте; ω_{12} — относительная угловая скорость качения; v_{12} — относительная скорость скольжения в контакте.

Подставляя в формулу (26.17) значения M_T и F_T (см. гл. 20) и ω_{12} и v_{12} (см. гл. 9.10), получим

$$P_{\Pi} = Fk(\omega_1 + \omega_2) + Ff'(\omega_1 + \omega_2)OA = F(\omega_1 + \omega_2)(k + f'OA), \quad (26.18)$$

где OA — расстояние от мгновенного центра вращения O до точки контакта A .

Обычно в высших кинематических парах с переменными радиусами кривизны расстояние OA периодически изменяется. В этом

случае для приближенного определения потерь мощности за цикл часто используют усредненное значение расстояния — $(OA)_m$. Тогда коэффициент полезного действия при ведущем звене 1

$$\eta = 1 - \psi = 1 - P_{\Pi}/P_1 = 1 - F(\omega_1 + \omega_2)(k + f'(OA)_m)/(T\omega_1). \quad (26.19)$$

Если нормальная сила F является результатом действия вращающего момента T , т. е. $F = T/r$, то

$$\eta = 1 - (k + f'(OA)_m)(1 + \omega_2/\omega_1)/r, \quad (26.20)$$

где r — радиус, на котором действует сила F .

26.5. Определение КПД механизмов с последовательным расположением кинематических пар

Простейшим механизмом с последовательным расположением кинематических пар в энергетическом потоке является кривошипно-ползунный механизм (рис. 26.6, а). При действии движущего момента T_1 на звено 1 и силы сопротивления F_3 на звено 3 расположение кинематических пар по отношению к энергетическому по-

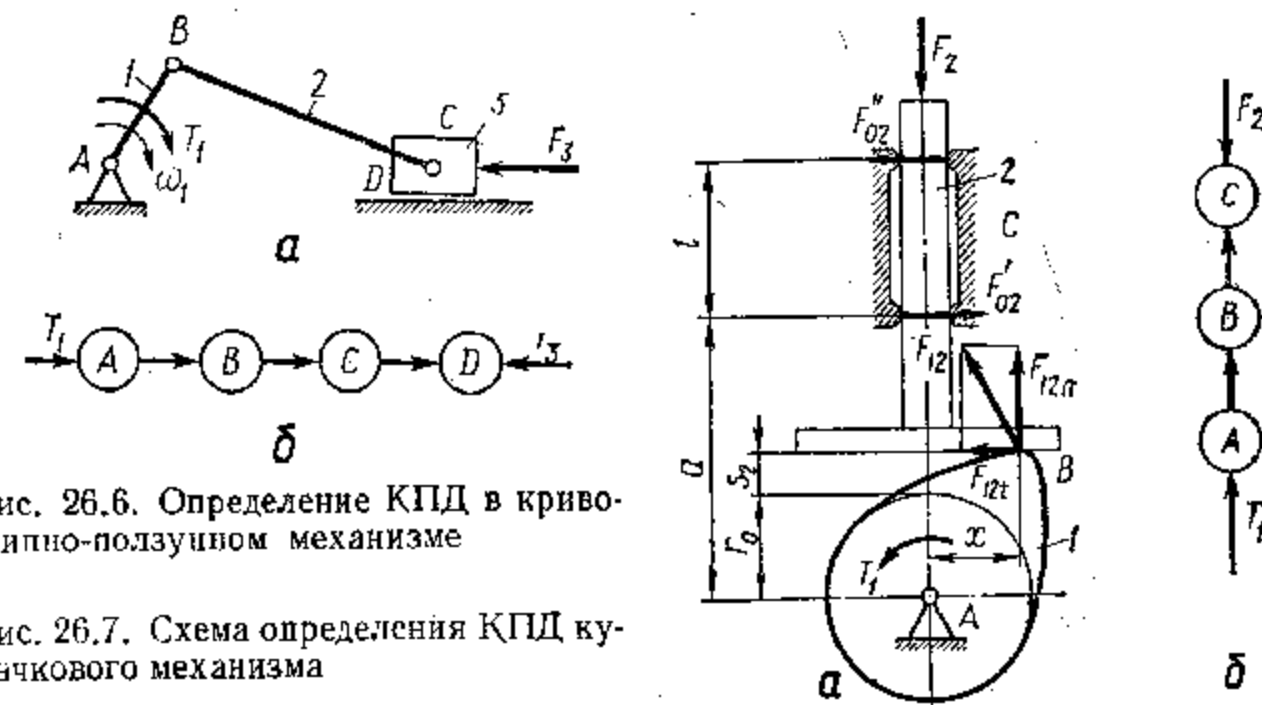


Рис. 26.6. Определение КПД в кривошипно-ползунном механизме

Рис. 26.7. Схема определения КПД кулачкового механизма

току соответствует схеме (рис. 26.6, б), и при учете потерь только в кинематических парах КПД механизма согласно выражению (26.7) будет:

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i = \eta_A \eta_B \eta_C \eta_D. \quad (26.21)$$

Для вращательных кинематических пар A , B и C КПД определяется по формуле (26.14) с учетом соответствующих значений диаметров d кинематических пар, приведенных коэффициентов трения f' (см. гл. 20) и реакций в кинематических парах F_i (см. гл. 21). КПД поступательной кинематической пары D определится из выражений (26.11) или (26.13).

Такой метод определения КПД будет приближенным, если реакции в кинематических парах определены без учета влияния сил трения. Более точное решение получают, если реакции найдены *методом последовательного приближения* (см. гл. 21). Однако в каждой машине имеются дополнительные потери (сопротивление окружающей среды — воздуха, смазочного материала и др.), не зависящие от реакций в кинематических парах. Кроме этого, коэффициент трения, который является функцией скорости скольжения или качения, давление, температура и сорта смазочного материала не точны. Поэтому расчетное значение КПД всегда будет приближенным.

Если в зависимость (26.21) подставить выражения для η_A , η_B , η_C и η_D из формул (26.11) и (26.13), в которых в качестве α и F подставляются их средние значения за один цикл движения механизма, то эта зависимость может быть использована в качестве целевой функции, формализующей частный критерий, который при заданной структуре механизма выражает требование наиболее высокого его КПД. В качестве управляемых параметров в этой целевой функции принимаются длины звеньев, соотношение которых влияет на средние значения α и F , диаметры вращательных кинематических пар и параметры, влияющие на значение коэффициентов трения.

При наличии в механизме высших кинематических пар, как, например, в кулачковом механизме (рис. 26.7, а), способ определения КПД остается таким же. Пусть к кулачку 1 подведен движущий вращающий момент T_1 . На толкатель 2 действует сила полезного сопротивления F_2 . Так как расположение кинематических пар по отношению к силовому потоку последовательное (рис. 26.7, б), то КПД механизма определяется также по формуле (26.21) — $\eta = \eta_A \cdot \eta_B \cdot \eta_C$. КПД вращательной кинематической пары А определяется формулой (26.14). КПД поступательной кинематической пары С определится формулой (26.13), в которую необходимо подставить момент $M = F_{12r} (a - r_0 - s_2) - F_{12n}x$, а вместо F подставить F_2 . КПД высшей кинематической пары В определяют по формуле (26.19), если подставить в нее F_{12n} , движущий момент T_1 , вместо $(OA)_m$ — расстояние АВ. Пренебрегая потерями на трение качения ввиду незначительности по сравнению с потерями на трение скольжения, получим

$$\eta = 1 - F_{12n}f' \omega_1 (AB) / (T_1 \omega_1), \quad (26.22)$$

где F_{12n} — нормальная составляющая силы F_{12} в точке контакта В, равная T_1/x .

После подстановки в формулу (26.22) соответствующих значений, получим

$$\eta = 1 - T_1 f' \omega_1 (r_0 + s_2) / (T_1 \omega_1 x) = f' (r_0 + s_2) / x, \quad (26.23)$$

где r_0 — радиус основной шайбы кулачка; s_2 — перемещение толкателя.

Так как значения s_2 и x переменны, то переменным будет и коэффициент полезного действия, т. е., как и для механизма шар-

нирного четырехзвенника, КПД кулачкового механизма является функцией положения кулачка. Поэтому в качестве целевой функции при оптимизации параметров кулачкового механизма используется зависимость (26.21), в которой оценивается средний КПД механизма за один оборот кулачковой шайбы. Управляемыми параметрами при этом являются $r_{01}x$ и режимы движения толкателя на участках подъема и опускания.

При определении КПД зубчатого механизма (рис. 26.8) необходимо учесть потери мощности в опорах, зубчатом зацеплении и на перемешивание смазочного материала. КПД опор определяется по формулам для вращательных кинематических пар. Мгновенные потери мощности в кинематической паре В, если пренебречь потерями на трение качения и учесть только потери на трение скольжения, определяются из выражения (26.18) (знак «—» — для внутреннего зацепления)

$$P_n = F_{12} f' (WK) (\omega_1 \pm \omega_2). \quad (26.24)$$

Так как расстояние от точки контакта К до полюса зацепления W изменяется от b_1W до Wb_2 , то потери на трение в зацеплении переменны. Поэтому при определении среднего значения КПД зубчатого зацепления следует учитывать средние потери мощности за время нахождения в зацеплении пары зубьев, используя среднее значение расстояния точки контакта зубьев от полюса зацепления W, выраженное через основной шаг P_b и торцовый коэффициент перекрытия ϵ_α (см. гл. 10):

$$(WK)_m = 0,5 (b_1W/2 + Wb_2/2) = l/4 = \epsilon_\alpha P_b / 4.$$

Тогда усредненные потери мощности на трение в зацеплении будут

$$P_n = F_{12} f' \epsilon_\alpha P_b (\omega_1 \pm \omega_2) / 4, \quad (26.25)$$

а КПД зубчатого зацепления

$$\eta = 1 - P_n / P_1 = 1 - F_{12} f' \epsilon_\alpha P_b (\omega_1 \pm \omega_2) / (4 F_{12} r_{b1} \omega_1). \quad (26.26)$$

Подставляя в эту формулу $r_{b1} = mz_1 (\cos \alpha) / 2$, $P_b = \pi m \cos \alpha$ и $\omega_2 / \omega_1 = z_1 / z_2$, после преобразований получим

$$\eta = 1 - \pi f' \epsilon_\alpha (1/z_1 \pm 1/z_2) / 2. \quad (26.27)$$

26.6. Определение КПД механизмов с разветвленным энергетическим потоком

Механизмы с разветвленным энергетическим потоком отличаются сложностью, поэтому требуется четко разделить последовательное и параллельное расположение источников потерь — кинемати-

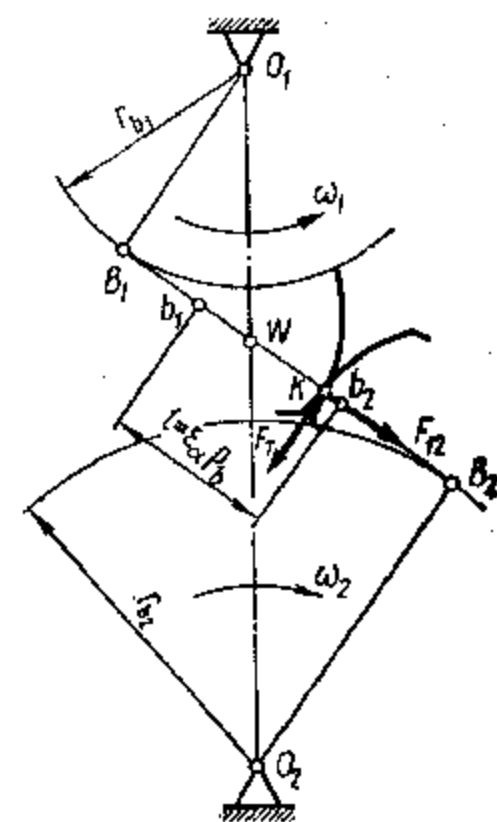


Рис. 26.8. Взаимодействие звеньев зубчатого механизма

ческих пар. Рассмотрим сателлитный зубчатый механизм (рис. 26.9, а). Входными в механизме являются звенья 1 и 3, к которым подводятся движущие моменты T_1 и T_3 , а выходным — водило h , к которому приложен момент сопротивления T_h . В соответствии с энергетическим потоком последовательность расположения кинематических пар изображена на рис. 26.9, б. По формуле (26.9) для смешанных соединений, заменив работу A на мощность P , для рассматриваемого механизма записывают

$$\eta = [(P_1 \eta_A \eta_B + P_3 \eta_E \eta_K) / (P_1 + P_3)] \eta_C \eta_D, \quad (26.28)$$

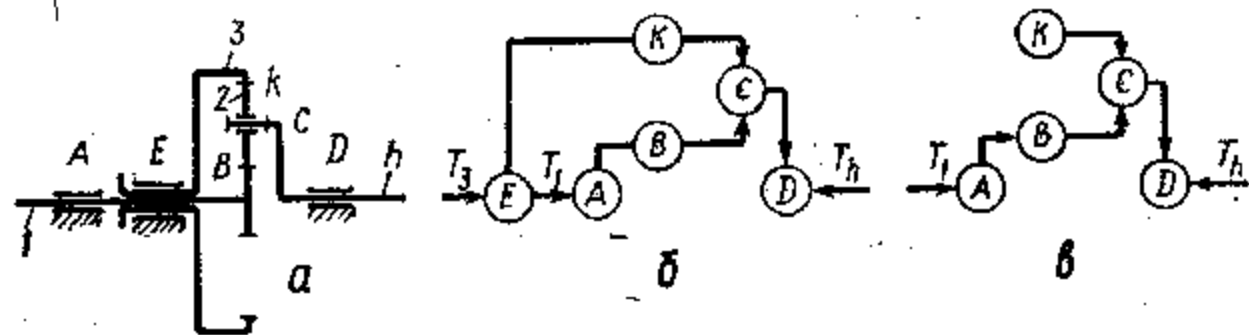


Рис. 26.9. Схема расположения кинематических пар по отношению к энергетическому потоку в механизмах с одним сателлитом

где $P_1 = T_1 \omega_1$ и $P_3 = T_3 \omega_3$ — мощности движущих моментов на звеньях 1 и 3; η_A, η_C, η_E и η_D — КПД соответствующих вращательных кинематических пар; η_B и η_K — КПД зубчатых зацеплений — соответственно внешнего и внутреннего.

При закреплении одного из звеньев, например звена 3, дифференциальный механизм превращается в планетарный с энергетическим потоком, соответствующим схеме (рис. 26.9, в). Формула (26.28) КПД для этого механизма преобразуется к виду

$$\eta = [(P_1 \eta_A \eta_B + P_K \eta_K) / (P_1 + P_K)] \eta_C \eta_D. \quad (26.29)$$

Здесь P_K — мощность, затрачиваемая на трение в кинематической паре K — зубчатом зацеплении.

Зависимости (26.28) и (26.29) справедливы для механизма с одним сателлитом. Для дифференциального механизма с двумя сателлитами (рис. 26.10, а) и входными звеньями 1 и 3, к которым подводятся вращающие моменты T_1 и T_3 , последовательность расположения кинематических пар в соответствии с энергетическим потоком существенно изменяется (рис. 26.10, б). По формуле (26.9) для смешанных соединений, заменив работу A на мощность P , в этом случае можно записать

$$\eta = [P_1 (\Omega_1 \eta_B \eta_C + \Omega_2 \eta_B' \eta_C') \eta_A + P_3 (\Omega_1 \eta_K \eta_C + \Omega_2 \eta_K' \eta_C') \eta_E] / (P_1 + P_3) \eta_D, \quad (26.30)$$

где Ω_1 и Ω_2 — коэффициенты распределения нагрузки по двум потокам ($\Omega_1 + \Omega_2 = 1$; при равенстве передаваемых мощностей $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,5$).

При закреплении одного из звеньев, например звена 3, дифференциальный механизм превращается в планетарный с энергетическим потоком, соответствующим схеме (рис. 26.10, в), для ко-

торой формула (26.30) преобразуется к виду

$$\eta = (\Omega_1 \eta_B \eta_C + \Omega_2 \eta_B' \eta_C') \eta_A / \eta_D + \Omega_K (\Omega_1 \eta_K \eta_C + \Omega_2 \eta_K' \eta_C') / \eta_D, \quad (26.31)$$

где $\Omega_K = P_K / P_1$.

При сравнительном анализе источников потерь мощности в механизмах со сложными силовыми потоками учитывается наличие кинематических пар с повторяющимися элементами. В качестве таких выступают низшие вращательные и поступательные

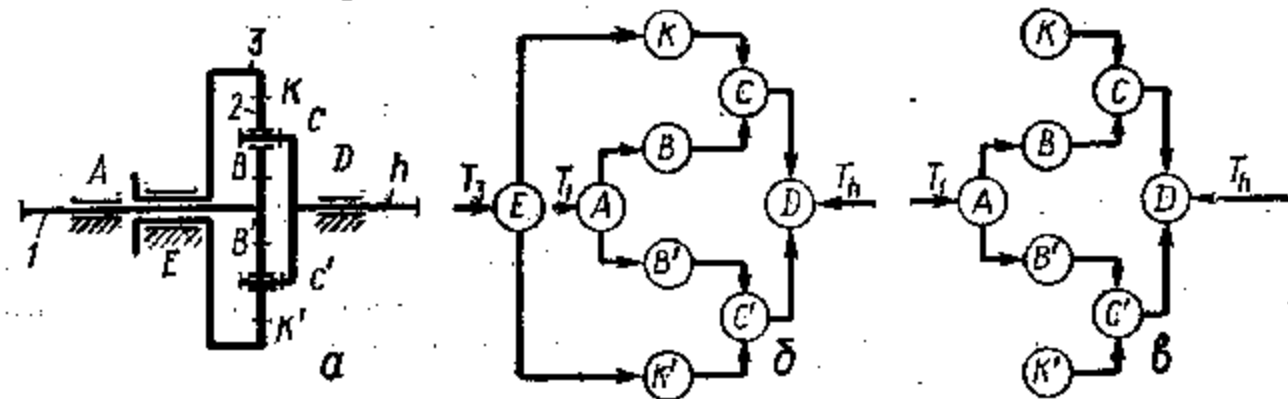


Рис. 26.10. Схема расположения кинематических пар по отношению к энергетическому потоку в механизмах с двумя сателлитами

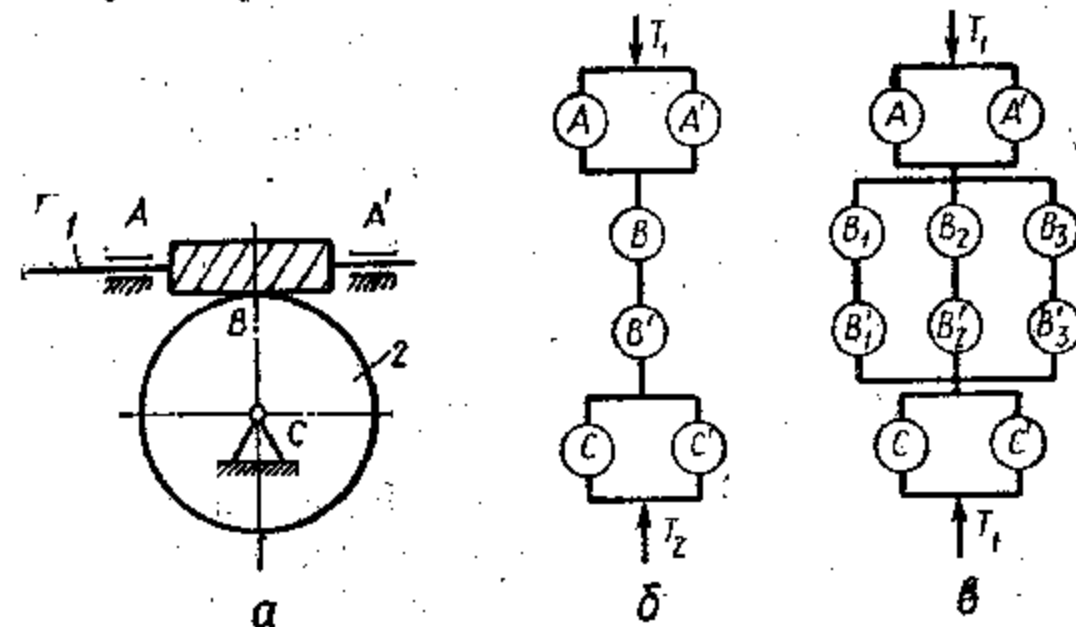


Рис. 26.11. Определение КПД механизмов с повторяющимися элементами кинематических пар

пары скольжения или качения, высшие — в виде зацеплений параллельно работающих зубчатых колес, зубчатых зацеплений с несколькими одновременно контактирующими зубьями, высших кинематических пар с несколькими контактными точками и линиями (см. гл. 10, 11) и т. п. Так, например, в червячном механизме (рис. 26.11, а) червяк 1 составляет со стойкой вращательную кинематическую пару с повторяющимися элементами A и A' и с червячным колесом 2 зацепление B . Червячное зацепление (см. гл. 13) рассматривают как зубчато-реечное зацепление и пару винт — гайка, т. е. кинематическую пару с повторяющимися элементами B и B' . Червячное колесо со стойкой составляет вращательную кинематическую пару с повторяющимися элементами C и C' . В соответствии с последовательностью расположения кинематических пар в силовом потоке (рис. 26.11, б) по формуле (26.9) для смешан-

ных соединений записывают

$$\eta = (\Omega_A \eta_A + \Omega_{A'} \eta_{A'}) \eta_B \eta_{B'} (\Omega_C \eta_C + \Omega_{C'} \eta_{C'}). \quad (26.32)$$

В этой формуле $\eta_A, \eta_{A'}, \eta_C$ и $\eta_{C'}$ — КПД вращательных кинематических пар, определяется по формуле (26.14); η_B — КПД зубчато-реечного зацепления — по формуле (26.27) при $z_2 = \infty$; $\eta_{B'}$ — КПД винтовой пары — по формуле (26.16). Сумма коэффициентов неравномерности передачи мощности по повторяющимся элементам кинематических пар попарно равна единице, а именно:

$$\Omega_A + \Omega_{A'} = 1; \quad \Omega_C + \Omega_{C'} = 1.$$

В механизме с цилиндрическим червяком в зацеплении находятся попеременно один-два зуба колеса. Поэтому дальнейшее уточнение потерь в силовом потоке получают при рассмотрении обоих случаев зацепления. В механизме с глобоидным червяком в зацеплении одновременно находятся три-четыре зуба, чему соответствует схема (рис. 26.11, в).

Приведенные аналитические зависимости служат в качестве целевых функций для сравнительной характеристики различных механизмов, однако они не дают точного значения КПД, так как не учитывают действительных условий трения в кинематических парах. Только экспериментальные исследования дают надежные значения КПД механизмов и кинематических пар.

27. ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ НА РАБОТУ МЕХАНИЗМОВ

27.1. Ошибки в реальных механизмах

При решении задач анализа (см. гл. 16...19) и синтеза механизмов (см. гл. 7...15) были приняты допущения, идеализирующие условия их изготовления и работы; звенья — абсолютно жесткие, кинематические пары — без зазоров, законы движения входных звеньев — совпадающие с принятыми в исходных данных и т. д. При этих допущениях получены зависимости, определяющие перемещения, скорости, ускорения, силы и т. п. для различных типов механизмов. Но в реальных механизмах эти закономерности точно не выполняются, так как всегда имеют место отклонения действительных параметров звеньев и кинематических пар от принятых при расчете. Это объясняется неизбежными погрешностями при изготовлении звеньев и сборке механизма, изнашивании элементов кинематических пар и т. п., что приводит к отклонению положения звеньев от предусмотренных на схеме механизма. Чем больше значения отклонений соизмеримы с линейными размерами звеньев, тем сильнее их влияние на работу механизма. Это проявляется в отклонении законов движения реального механизма от предусмотренных при проектировании.

Указанные отклонения особенно существенны в быстроходных механизмах, где они — причина добавочных сил инерции, дина-

мических нагрузок в кинематических парах, вибраций и др. Для роботов, машин-автоматов, измерительных и управляющих механизмов точность работы — основная качественная характеристика.

Отклонения в законах движения механизма являются его ошибками: чем больше ошибка, тем менее точен механизм. Для оценки ошибок реальный механизм сравнивают с теоретическим, который не содержит никаких неточностей в размерах и форме звеньев и

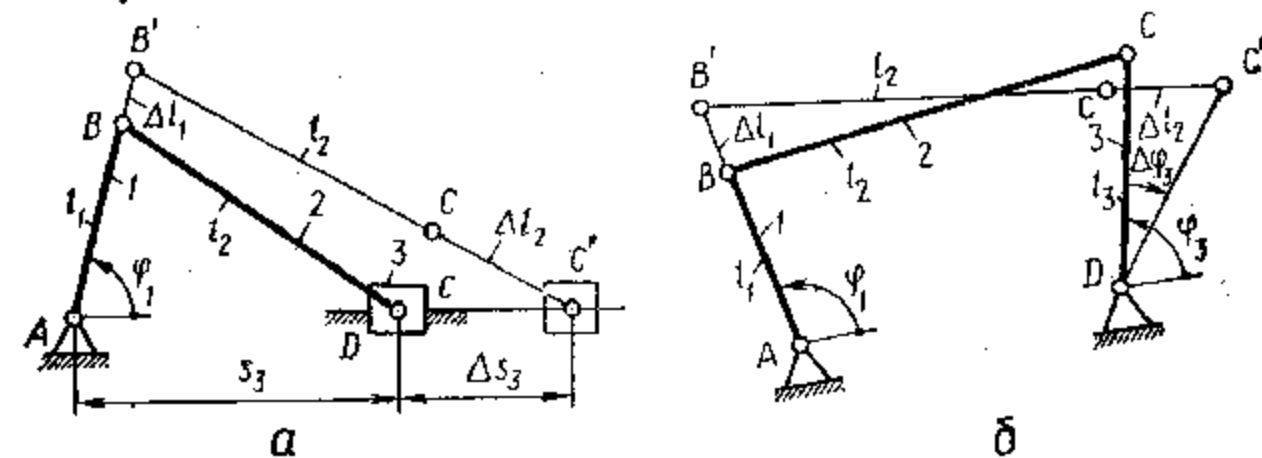


Рис. 27.1. Ошибка положения в шарнирно-рычажных механизмах

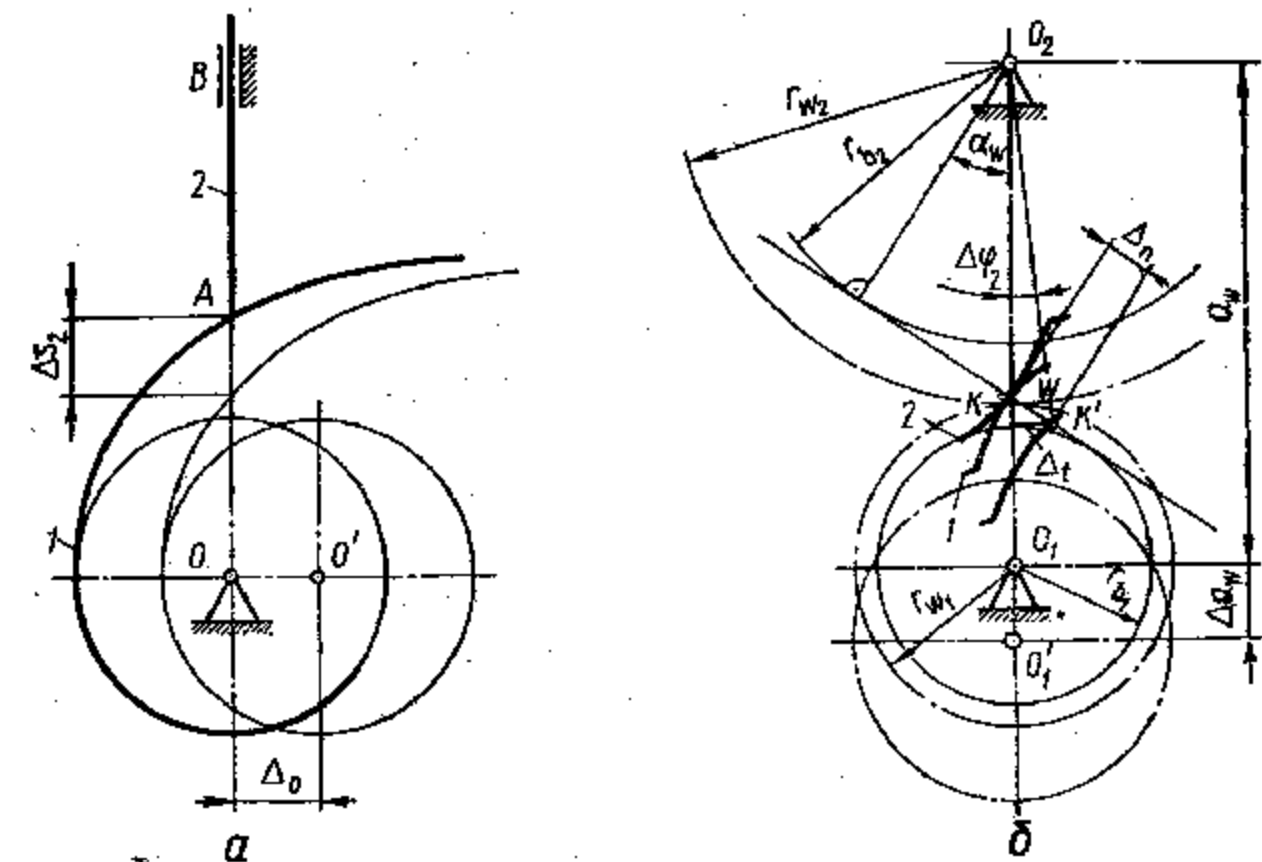


Рис. 27.2. Ошибка положения в механизмах с высшими парами

точно воспроизводит заданный закон движения. Разность в положении выходных звеньев при одинаковых положениях входных звеньев реального и теоретического механизмов называют *ошибкой положения механизма*. На рис. 27.1 для простейших рычажных механизмов показаны линейная (а) ошибка положения Δs_3 ползуна 3 и угловая (б) ошибка положения $\Delta \varphi_3$ коромысла 3, возникшие из-за погрешностей Δl_1 и Δl_2 длин кривошипов 1 и шатунов 2. Ошибка положения возникает и при погрешности $\Delta a_0, \Delta a_w$ относительного расположения центров вращательных

пар и направляющих, как например, в кулачковом (рис. 27.2, а) или зубчатом (б) механизмах.

Разница перемещений выходных звеньев реального и теоретического механизмов при одинаковых перемещениях их входных звеньев называют *ошибкой перемещения механизма*. Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 27.3, а) при перемещении входного звена из положения 1 в положение 2 ошибка перемещения $\Delta s_{3п} = s_3 - s'_3$, для кривошипно-коромыслового (б) — $\Delta \varphi_{3п} =$

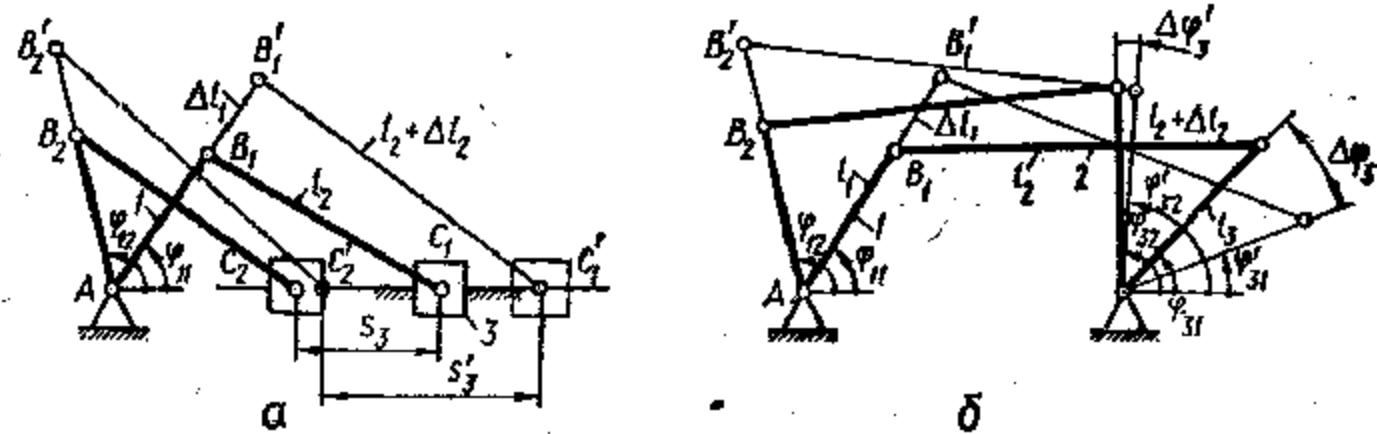


Рис. 27.3. Ошибка перемещения в шарнирно-рычажных механизмах

$= \Delta \varphi_3 - \Delta \varphi'_3$. Ошибка перемещения, заключающаяся в отставании перемещения выходного звена при изменении направления движения входного, называется «*мертвым ходом*». Он появляется в основном из-за зазоров в кинематических парах и изменения деформаций звеньев механизмов.

Ошибки положения и перемещения при движении звеньев изменяются, а при неизменных погрешностях — $\Delta s = \Delta s(t)$, $\Delta \varphi_3 = \Delta \varphi_3(t)$,

$$\Delta s_{п} = \Delta s_{п}(t), \Delta \varphi_{3п} = \Delta \varphi_{3п}(t).$$

Продифференцировав функцию ошибки положения по времени, получим последовательно *ошибки скорости и ускорения механизма*. Продифференцировав функции ошибки перемещения по обобщенной координате, характеризующей положения входного звена, получим *ошибку передаточного отношения* $\Delta i(\varphi_3)$.

27.2. Причины появления ошибок механизмов

Ошибки механизмов можно условно разделить на три группы:

1. Ошибки *систематические для данного типа механизма*. Это ошибки, которые одинаковы по величине или закону их изменения в функции того или иного параметра не только для рассматриваемого механизма, но и для всех механизмов этого типа.

2. Ошибки *систематические для единичного механизма*, но случайные для множества механизмов данного типа. Значения и законы изменения таких ошибок повторяются при многократных действиях данного механизма, но они различны для каждого отдельного механизма.

3. Ошибки *случайные* и для типа и для отдельного механизма. Они не повторяются не только в разных механизмах, но и при повторных действиях рассматриваемого механизма.

Ошибки первой группы появляются, когда в механизме вместо схемы, точно воспроизводящей заданный закон движения, применяют простую кинематическую схему, воспроизводящую этот закон приближенно. Такая упрощенная конструкция является экономически более выгодной, а требуемая точность работы механизма достигается его последующей регулировкой. Ошибка механизма в этом случае называется *ошибкой схемы* $\Delta s_{сх}$ и определяется как разность перемещений выходных звеньев действительного механизма с упрощенной схемой s_y и теоретического механизма s_t . Например, для преобразования вращательного движения в поступательное применяется зубчатый реечный механизм (рис. 27.4, а) или более простой рычажный механизм (б). В первом механизме поступательное перемещение выходного звена 2 будет $s_t = r\omega\varphi_1$, во втором — по упрощенной схеме $s_y = r \sin \varphi_1$. Ошибка схемы механизма составит при $r = r_{ш}$: $\Delta s_{сх} = s_y - s_t$.

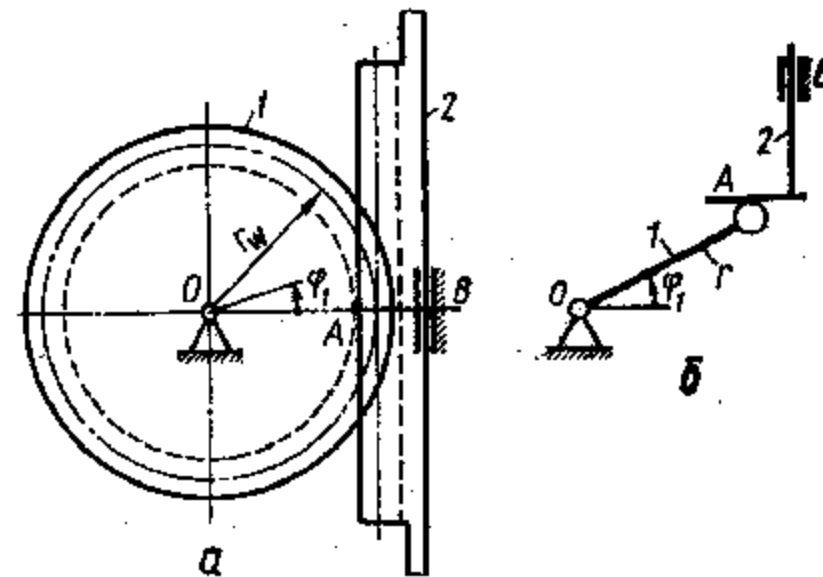


Рис. 27.4. К вопросу об ошибке схемы механизма

При малом угле φ_1 поворота входного звена 1 ошибка $\Delta s_{сх} \approx 0$, но при увеличении φ_1 она становится существенной.

Ошибки второй группы возникают из-за неизбежных отклонений размеров и форм звеньев и их деталей при изготовлении и сборке механизмов. Они определяются технологией производства. Их источниками являются неточности станков и инструмента, деформации деталей при их обработке на станке и монтаже, неоднородность материала деталей и т. п. Они проявляются в перекосах и непараллельностях осей кинематических пар, изменении взаимного расположения их элементов.

Ошибки третьей группы возникают при эксплуатации механизмов. Они обусловлены местными искажениями профиля контактирующих поверхностей, изменением упругих деформаций, колебательными процессами и т. п., вызванными действующими силами (см. гл. 23, 24). К этой группе относятся и температурные ошибки, возникающие при изменении линейных размеров звеньев и механических свойств их материалов, а также вязкости смазывающих материалов при изменении температуры в механизме. Весьма существенны ошибки, связанные с изнашиванием элементов кинематических пар.

27.3. Дифференциальный метод определения ошибок механизмов

Наиболее общий метод определения ошибок механизма — это *дифференциальный метод*, в котором ошибка положения механизма определяется как полный дифференциал функции положения, а приращения переменных этой функции рассматриваются как погрешности. Функция положения при этом может задаваться как в явном, так и в неявном виде (системой уравнений, тригонометрическими соотношениями и т. п.).

Неявный способ задания функции при оценке ошибок более удобен в случаях, когда функция положения представляет громоздкое выражение, например в механизмах с низшими кинематическими парами.

Рассмотрим применение дифференциального метода для определения ошибки положения $\Delta\varphi_3$ коромысла 3 механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 27.5), звенья 1, 2 и 3 которого имеют погрешности линейных размеров соответственно Δl_1 , Δl_2 и Δl_3 . Спроецируем векторный контур, образованный осями звеньев на координатные оси (см. гл. 7):

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_0 + l_3 \cos \varphi_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (27.1)$$

Продифференцируем выражения (27.1) по переменным l_1 , l_2 , l_3 , φ_1 , φ_2 , φ_3 , заменяя знак дифференциала на знак ошибки:

$$\cos \varphi_1 \Delta l_1 + \cos \varphi_2 \Delta l_2 - l_2 \sin \varphi_2 \Delta \varphi_2 = \cos \varphi_3 \Delta l_3 - l_3 \sin \varphi_3 \Delta \varphi_3; \quad (27.2)$$

$$\sin \varphi_1 \Delta l_1 + \sin \varphi_2 \Delta l_2 + l_2 \cos \varphi_2 \Delta \varphi_2 = \sin \varphi_3 \Delta l_3 + l_3 \cos \varphi_3 \Delta \varphi_3. \quad (27.3)$$

Представляя $\Delta\varphi_2$ в выражении (27.3) через другие переменные и подставляя его значения в условия (27.2), после преобразований получим для ошибки положения $\Delta\varphi_3$ звена 3:

$$\Delta\varphi_3 = (1/l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)) (\cos(\varphi_2 + \varphi_3) \Delta l_3 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \Delta l_1 - \Delta l_2). \quad (27.4)$$

В выражении (27.4) значения φ_2 и φ_3 определяются из зависимостей для функций положения звеньев 2 и 3 (см. гл. 7). Множители перед погрешностями Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 называются *коэффициентами влияния*. На рис. 27.5 графически проиллюстрировано влияние каждой из погрешностей на $\Delta\varphi_3$.

Дифференциальный метод позволяет найти ошибку механизма независимо от причины ее появления. С помощью этого метода

легко определить ошибки положения простых механизмов, входящих в сложные кинематические схемы. Недостатком его является то, что в нем не учитываются погрешности параметров, не входящих в выражение для функции положения, например ошибки взаимного расположения элементов кинематических пар, определяющих зазоры в них.

Для определения влияния погрешностей звеньев на ошибку механизмов, имеющих сложные функции положения звеньев, удобно применять *метод преобразованного механизма*, вытекающий из дифференциального. В нем используется свойство незави-

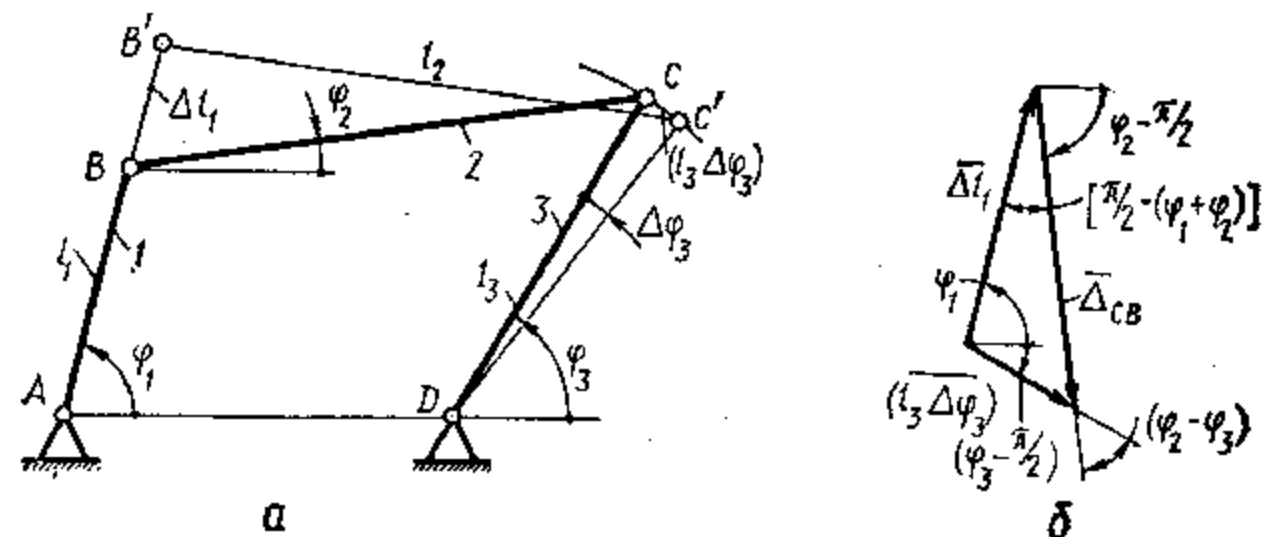


Рис. 27.6. Определение ошибки положения методом преобразованного механизма

симости частных производных функции от дифференциала переменной, по которой вычисляется производная. Так, например в выражении (27.4) коэффициенты влияния перед погрешностями от них не зависят. Это дает возможность, представляя погрешность как возможное перемещение точек звена, на котором она возникла, определить погрешности положения других звеньев как их соответствующие перемещения.

Рассмотрим определение этим методом ошибки положения $\Delta\varphi_3$ звена 3 шарнирного четырехзвенника (рис. 27.6, а) от погрешности Δl_1 длины кривошипа 1. Пусть точка В звена 1 получит перемещение Δl_1 в направлении увеличения длины кривошипа. Тогда перемещение точки С по дуге радиуса DC составит $l_3 \Delta\varphi_3$. Его можно определить как сумму двух перемещений: $\overline{\Delta l_1}$ и $\overline{\Delta_{CB}}$ — перемещение точки С относительно точки В по дуге окружности СВ радиуса $(l_3 \Delta\varphi_3) = \overline{\Delta l_1} + \overline{\Delta_{CB}}$. Из векторного многоугольника (б) получим

$$\Delta l / (l_3 \Delta\varphi_3) = \sin(\varphi_2 - \varphi_3) / \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \pi/2) = \sin(\varphi_2 - \varphi_3) / (-\cos(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

откуда получим зависимость, соответствующую выражению (27.4):

$$\Delta\varphi_3 = -(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) / (l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3))) \Delta l_1.$$

27.4. Метод малых перемещений

Для многосвязных механизмов ошибку положения определяют построением векторного многоугольника малых перемещений. При его построении относительное перемещение представляется состоящим из нормального, учитывающего изменение размера по оси звена, и тангенциального перемещения, являющегося следствием его

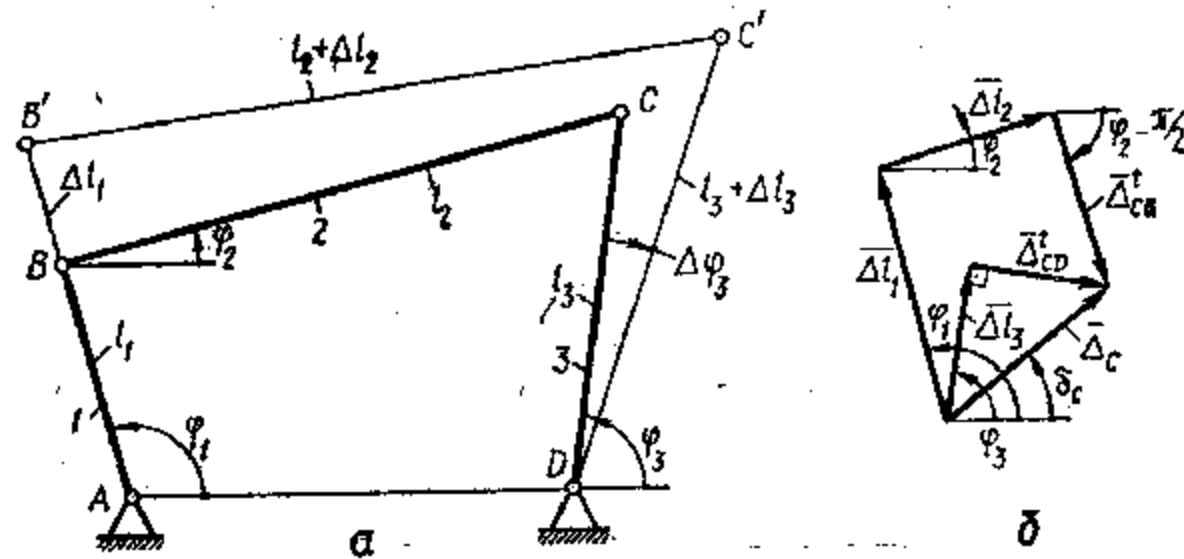


Рис. 27.7. Определение ошибки положения методом малых перемещений

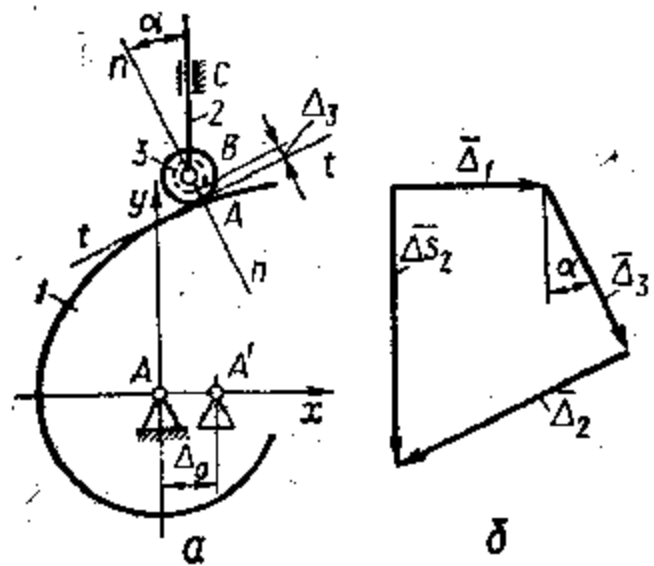


Рис. 27.8. Определение ошибки положения кулачкового механизма

углового перемещения. Построение многоугольника перемещений по методике аналогично построению многоугольника ускорений. Так, для механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 27.7, а) многоугольник перемещений (рис. 27.7, б) строится реализацией векторных уравнений

$$\bar{\Delta}_C = \bar{\Delta}_B + \bar{\Delta}_{CB}^n + \bar{\Delta}_{CB}^t \text{ и } \Delta_C = \bar{\Delta}_{CD}^n + \bar{\Delta}_{CD}^t, \quad (27.5)$$

где $\Delta_B = \Delta l_1$ — перемещение центра шарнира B при изменении длины звена 1 ; $\Delta_{CB}^n = \Delta l_2$; $\Delta_{CD}^n = \Delta l_3$ — нормальные составляющие перемещений центра шарнира C относительно центров B и D ; Δ_{CB}^t и Δ_{CD}^t — тангенциальные составляющие перемещений, направленные по линии векторов относительных скоростей; Δ_C — перемещение центра шарнира C от действия погрешностей $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$.

Имея многоугольник малых перемещений, проводят любые расчеты, связанные с точностью, например, определяют ошибки положения звеньев 2 и 3 соответственно по перемещениям $\bar{\Delta}_{CB}^t$ и $\bar{\Delta}_{CD}^t$. Уравнения (27.5) решают с помощью операторных функций, представляя векторное уравнение $\bar{\Delta}_B + \bar{\Delta}_{CB}^n + \bar{\Delta}_{CB}^t = \bar{\Delta}_{CD}^n + \bar{\Delta}_{CD}^t$ системой линейных уравнений, и задаваясь направлениями векторов погрешностей на линиях их действия так, как это выполнялось

при расчетах кинематики структурных групп (см. гл. 16):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{CB}^t \cos(\varphi_2 + \pi/2) - \Delta_{CD}^t \cos(\varphi_3 + \pi/2) &= \Delta l_3 \cos \varphi_3 - \Delta l_1 \cos \varphi_1 - \\ &\quad - \Delta l_2 \cos \varphi_2; \\ \Delta_{CB}^t \sin(\varphi_2 + \pi/2) - \Delta_{CD}^t \sin(\varphi_3 + \pi/2) &= \Delta l_3 \sin \varphi_3 - \Delta l_1 \sin \varphi_1 - \\ &\quad - \Delta l_2 \sin \varphi_2; \end{aligned} \right\}$$

$$A(2, 2) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_2 + \pi/2) & -\cos(\varphi_3 + \pi/2) \\ \sin(\varphi_2 + \pi/2) & -\sin(\varphi_3 + \pi/2) \end{vmatrix};$$

$$C(2) = (\Delta l_3 \cos \varphi_3 - \Delta l_1 \cos \varphi_1 - \Delta l_2 \cos \varphi_2); \quad \Delta l_3 \sin \varphi_3 - \Delta l_1 \sin \varphi_1 - \Delta l_2 \sin \varphi_2);$$

СИСТЕМА (2, $A(2, 2)$, $C(2)$; Δ_{CB}^t , Δ_{CD}^t).

Направления тангенциальных составляющих погрешностей определяют, используя операторную функцию $UGL3$:

$$UGL3(\varphi_2, \pi/2, \Delta_{CB}^t; \delta_{CBt});$$

$$UGL3(\varphi_3, \pi/2, \Delta_{CD}^t; \delta_{CDt}),$$

где δ_{CBt} и δ_{CDt} — направляющие углы векторов $\bar{\Delta}_{CB}^t$ и $\bar{\Delta}_{CD}^t$.

Тогда, принимая $\Delta_{CB}^t = |\Delta_{CB}^t|$, $\Delta_{CD}^t = |\Delta_{CD}^t|$, вектор погрешности перемещения центра шарнира C получим, применяя операторную функцию

$$SMVKT(\Delta l_3, \varphi_3, \Delta_{CD}^t, \delta_{CDt}; \Delta_C, \delta_C).$$

Ошибки положения звеньев 2 и 3 будут вычисляться по зависимостям:

$$\Delta \varphi_2 = \Delta_{CB}^t / l_2, \quad \Delta \varphi_3 = \Delta_{CD}^t / l_3.$$

При наличии в цепи высшей кинематической пары нахождение ошибки положения требует рассмотрения функции положения как векторного уравнения, описывающего условия существования высшей кинематической пары. Для плоских механизмов задача сводится к построению многоугольника перемещений. При этом следует иметь в виду, что вектор перемещения точки контакта представляется как сумма векторов нормального и тангенциального к поверхности элемента перемещений.

Ошибку положения Δs_2 кулачкового механизма (рис. 27.8) из-за смещения $\Delta_1 = \Delta_0$ центра O кулачкового механизма и погрешности Δ_3 изменения радиуса ролика толкателя определяют из уравнения $\bar{\Delta} s_2 = \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_3 + \bar{\Delta}_2$. Вектор тангенциального перемещения $\bar{\Delta}_2$ направлен по касательной к профилю кулачка, а вектор $\bar{\Delta} s_2$ — по линии скорости толкателя 2 . Тогда из рассмотрения многоугольника перемещений, проецируя векторы на направление нормали $n - n$, получим

$$\Delta s_2 = \Delta_3 / \cos \alpha + \Delta_1 \operatorname{tg} \alpha, \quad (27.6)$$

где α — угол давления.

Из выражения (27.6) следует, что ошибка положения кулачкового механизма зависит от угла давления. С уменьшением угла давления уменьшается и ошибка положения механизма.

27.5. Учет влияния зазоров в кинематических парах на ошибку механизмов

Для обеспечения подвижности размеры элементов кинематических пар охватывающих поверхностей звеньев выполняют несколько большими, чем охватываемых. Из-за этого появляется возможность относительного перемещения звеньев по линии действия реакции на величину образующегося зазора: во вращательной паре (рис. 27.9, а) это разность диаметров охватываемого d_1 и охватывающего d_2 элементов $\Delta = d_2 - d_1$. Аналогично находят зазор

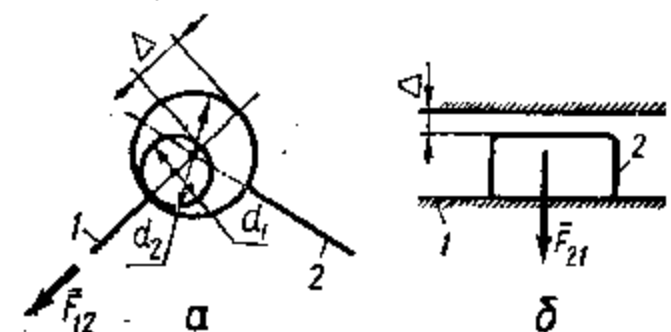


Рис. 27.9. Влияние зазоров на ошибку механизма

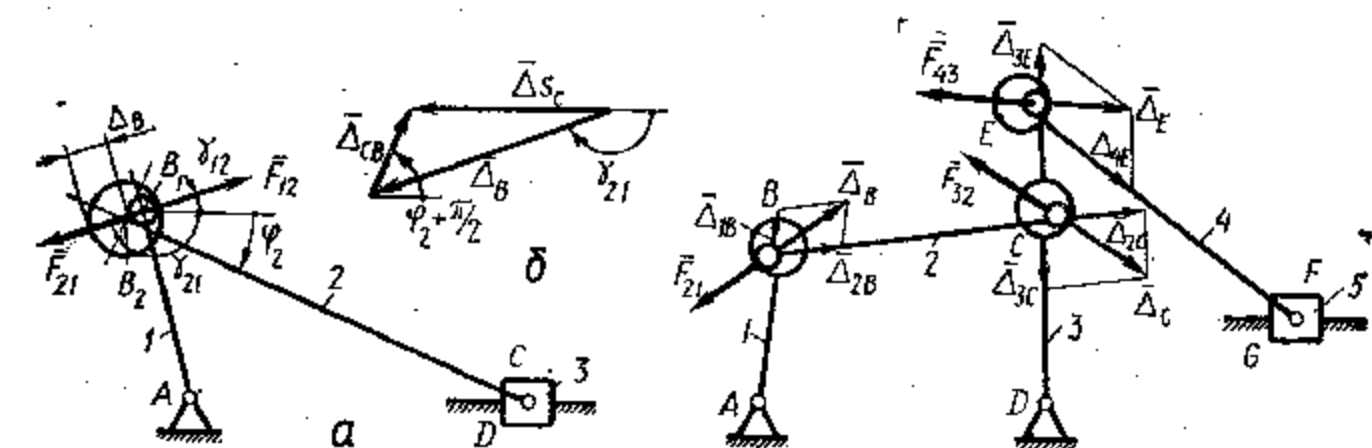


Рис. 27.10. Определение ошибки положения ползуна из-за зазора во вращательной кинематической паре

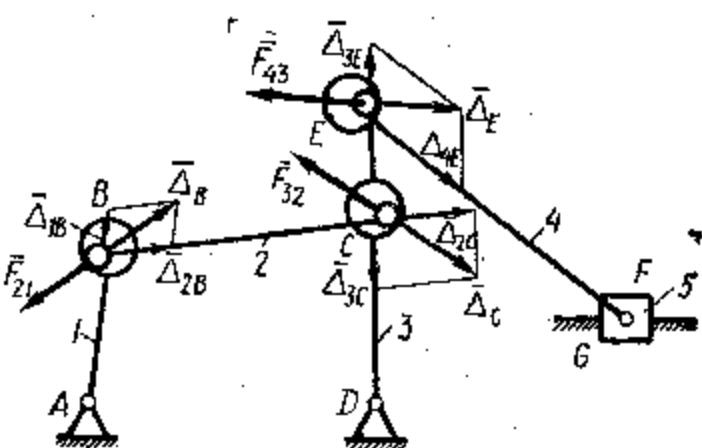


Рис. 27.11. Использование многоугольника перемещений для учета зазоров при определении ошибки положения механизма

в поступательной паре (б). Из-за действия сил трения поверхности элементов кинематических пар изнашиваются и со временем зазор Δ увеличивается, в результате чего растет ошибка механизма. Зная направления реакций в каждой кинематической паре, можно, используя метод преобразованного механизма, определить влияние зазора в каждой кинематической паре на ошибку положения. Например, погрешность Δ_{sc} положения ползуна 3 из-за зазора в кинематической паре В (рис. 27.10, а) определится из векторного треугольника перемещений (рис. 27.10, б), образованного вектором перемещения $\bar{\Delta}_B$ центра B_2 элемента кинематической пары звена 2 в направлении действия силы \bar{F}_{21} , вектора $\bar{\Delta}_{CB}$ перемещения центра пары С относительно точки B_2 и замыкающего искомого вектора Δ_{sc} .

В более сложных механизмах ошибка положения из-за зазоров в кинематических парах определяется также построением многоугольника перемещений, но зазоры по линиям действия реакций раскладываются на составляющие по осям звеньев, образующих кинематические пары (рис. 27.11). Эти составляющие как бы удлиняют или укорачивают размеры звеньев по оси. Если при определении ошибки положения необходимо учесть и погрешности осевых размеров, то они алгебраически суммируются с погрешностями от зазоров.

При изменении направления вращения входного звена появляется ошибка мертвого хода $\Delta_{м.х.}$. Она определяется суммированием ошибок положений от зазоров в кинематических парах с учетом изменения направлений реакций при изменении направления вращения. Ошибка мертвого хода возникает и из-за погрешностей звеньев. Так, например, в эвольвентном зацеплении цилиндрических колес (рис. 27.2, б) из-за погрешности Δa_w межосевого расстояния возникает нормальный зазор Δ_n между зубьями колес и, следовательно, мертвый ход $\Delta_{м.х.}$. Для компенсации его колесо 2 поворачивается на угол $\Delta\varphi_2 = \Delta a_w \operatorname{tg} \alpha_w$. Так как $\Delta_t = \Delta a_w \operatorname{tg} \alpha_w$, то $\Delta\varphi_2 = (\Delta a_w / r_{w_2}) \operatorname{tg} \alpha_w$. Тогда при изменении направления вращения колеса 1 получим

$$\Delta_{м.х.} = (2\Delta a_w / r_{w_2}) \operatorname{tg} \alpha_w.$$

27.6. Компенсация ошибок и регулировка механизмов

Технологические возможности оборудования, на котором изготавливаются детали и звенья, не позволяют получать механизмы, точно воспроизводящие требуемые законы движения. В различных механизмах указанные ошибки проявляются по-разному. В зависимости от назначения механизма и его конструкции преобладающее значение имеет одна из каких-либо ошибок. В этом случае анализируются причины, ее вызывающие, и принимаются меры по устранению ее влияния с учетом действия этой ошибки. Иногда в механизмах предусматривают специальные регулировочные устройства, предназначенные для компенсации при сборке механизмов ошибок изготовления звеньев. Компенсатор представляет собой устройство, изменяющее отклонение одного из параметров механизма от номинального значения, для устранения ошибки положения или перемещения. Компенсируемыми при регулировании параметрами обычно являются линейные и угловые размеры звеньев или координаты взаимного расположения элементов стойки.

Различают три основных типа регулирования механизмов. Ошибка схемы и другие, относящиеся к первому типу ошибок, компенсируются введением на выходном звене постоянной поправки Δ_n (рис. 27.12, а), которая позволяет существенно уменьшить ошибку положения (перемещения) механизма, сводя ее до уровня отклонений относительно Δ_n (заштрихованная часть графика). Ошибки второго типа часто зависят от изменения обобщенной координаты

входного звена. Они в значительной степени скомпенсированы введением поправки δ_n , линейно зависящей от изменения обобщенной координаты (рис. 27.12, б). При отсутствии закономерностей в изменении ошибки для ее компенсации требуется более сложная регулировочная функция (рис. 27.12, в).

Постоянная поправка Δ_n вводится применением простых регулировочных устройств для компенсации возможных неточностей

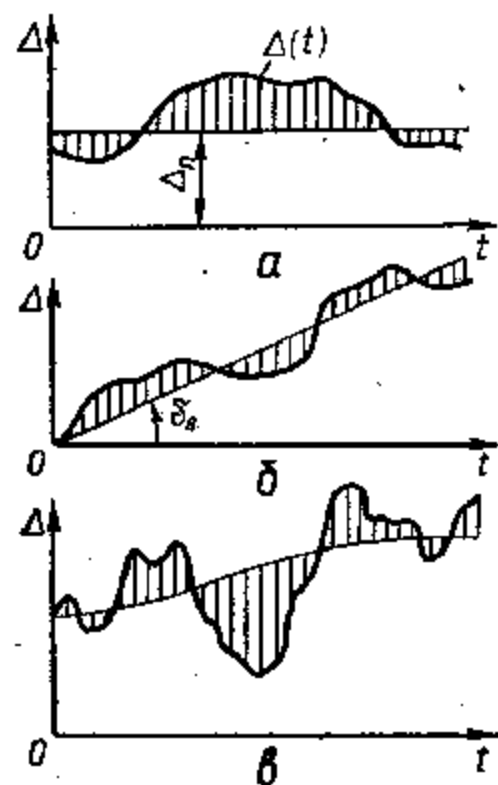


Рис. 27.12. Три типа регулировочных функций

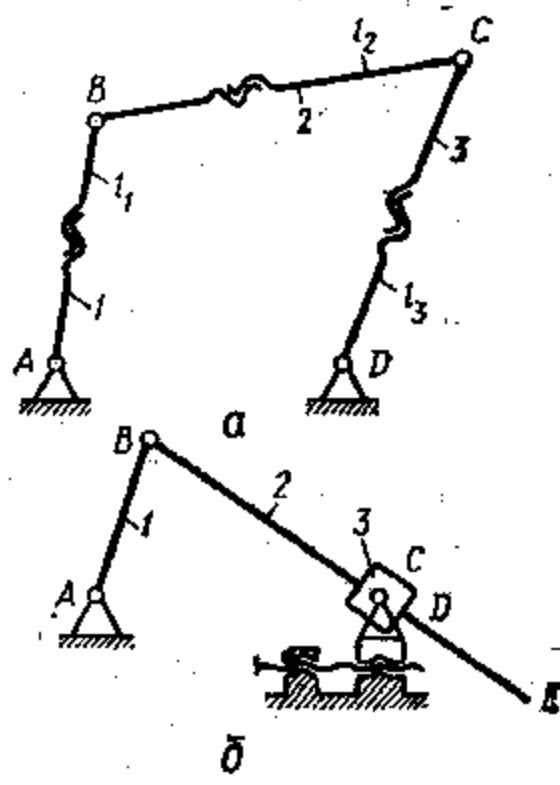


Рис. 27.13. Регулировочные устройства

длин звеньев (рис. 27.13, а). Линейная поправка δ_n вводится изменением соотношения линейных размеров участков звеньев (рис. 27.13, б). При сложном характере регулировочной функции конструкции компенсаторов усложняются. Часто требуемая точность достигается одновременной регулировкой нескольких компенсирующих устройств (рис. 27.13, а). Необходимое количество компенсаторов и их параметров определяются оценкой коэффициентов влияния или расчетом многоугольников перемещений.

28. РЕГУЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СКОРОСТИ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМОВ

28.1. Способы регулирования движения механизма

В период установившегося движения машинного агрегата скорости звеньев не постоянны (см. гл. 22). Они циклически изменяются относительно значений средних скоростей. Закон изменения этих колебаний зависит от типа механизма, масс и моментов инерции его звеньев, систем сил, на них действующих, способа приведения механизма в движение. Неравномерность движения вызывает колебания в механизмах, которые являются одной из причин неточностей

изготавливаемых на станках деталей, вибраций в транспортирующих машинах, ошибок в показаниях приборов и т. п.

Для большинства машин и приборов колебания скоростей звеньев допустимы только в пределах, определяемых коэффициентом неравномерности движения δ (см. гл. 22). Для ограничения этих колебаний в границах рекомендуемых значений δ регулируют отклонения скорости звена приведения от ее среднего значения. Для машинных агрегатов, обладающих свойством саморегулирования, регулирование заключается в подборе масс и моментов инерции звеньев, соответствующих системам движущих сил и сил сопротивления в агрегате для обеспечения энергетического баланса. Так как менять массы и моменты инерции всех звеньев нецелесообразно, задача решается установкой дополнительной маховой массы. Конструктивно ее оформляют в виде маховика — массивного диска или кольца со спицами. Часто функции маховика выполняют зубчатые колеса или шкивы ременных передач, тормозные барабаны и другие детали, для чего им придают соответствующую массу. Маховые массы накапливают кинетическую энергию в периоды цикла, когда приведенный момент движущих сил больше приведенного момента сил сопротивления и скорость звена возрастает. В периоды цикла, когда имеет место обратное соотношение между моментами сил, накопленная кинетическая энергия маховых масс расходуется, препятствуя снижению скорости. Следовательно, маховик выполняет роль аккумулятора кинетической энергии и способствует уменьшению пределов колебаний скорости относительно среднего значения ее при постоянной мощности двигателя.

Если машинный агрегат не обладает свойством саморегулирования, то колебания скорости звена приведения не имеют периодического характера. Равномерность движения достигается применением специальных устройств — регуляторов скорости. Регуляторы скорости увеличивают или уменьшают мощность двигателя, сохраняя постоянство скорости ведущего звена механизма, т. е. регулирование осуществляется за счет изменения внешних воздействий на механизм со стороны двигателя.

28.2. Обеспечение равномерности движения агрегата без учета характеристики его двигателя

Если не учитывается механическая характеристика двигателя машинного агрегата, то приведенная сила и ее момент зависят только от положения звена приведения. Тогда для периода установившегося движения механизма уравнение его движения в энергетической форме (см. гл. 22) имеет вид $E - E_0 = \Sigma A$, или $\Delta E = \Sigma A = \Delta E(\varphi_n)$. Количество кинетической энергии звеньев механизма в рассматриваемом E и начальном E_0 положениях звена приведения определяется значениями его угловой координаты φ_n . Если в механизме выделить постоянную J_c и переменную J_v составляющие момента инерции, то зависимость момента инерции звена приведения от угловой координаты φ_n описывается функцией

$J_n = J_n(\varphi_n) = J_c + J_o(\varphi_n)$. Исключая из выражений для $\Delta E(\varphi_n)$ и $J_n(\varphi_n)$ координату φ_n , получим функцию $\Delta E = \Delta E(J_n)$, графическая интерпретация которой (рис. 28.1) называется *диаграммой энергомасс* (диаграмма Ф. Виттенбауэра, см. прил.).

Если диаграмму энергомасс сместить вверх на величину E_o , что равносильно смещению оси OJ_n вниз на эту же величину, то она будет отображать изменение всей кинетической энергии механизма в зависимости от J_n . Колебания угловой скорости звена привода определяют соотношением $J_o(\varphi_n)$ и J_c . Для того чтобы эти коле-

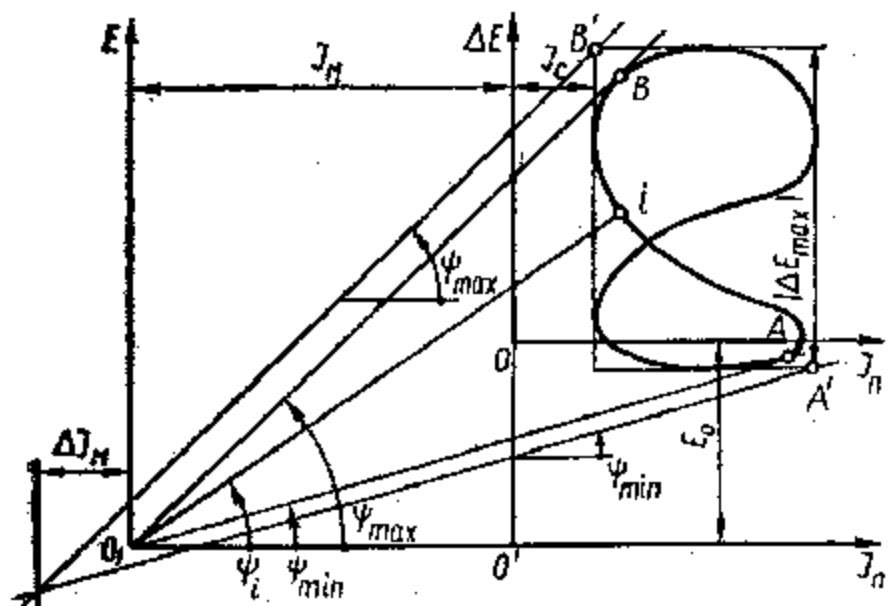


Рис. 28.1. Диаграмма энергомасс

бания не превышали максимального ω_{\max} и минимального ω_{\min} значений скорости, определяемых значениями коэффициента неравномерности движения δ , необходимо добавить к постоянной составляющей момента инерции J_c маховую массу с моментом инерции J_m . Графически это отобразится смещением оси $O\Delta E$ влево на величину J_m . В полученной таким образом координатной системе $J_n O_1 E$ для любой точки i диаграммы энергомасс справедливо равенство $E_i/J_{ni} = \omega_i^2/2$, а угловой коэффициент прямой $O_1 i$ равен $\operatorname{tg} \psi_i = \omega_i^2/2$.

При различных положениях точки i на диаграмме угол ψ_i будет меняться от ψ_{\min} до ψ_{\max} , которым соответствуют положения касательных $O_1 A$ и $O_1 B$, проведенных к нижним и верхним участкам диаграммы под этими углами. Угловые коэффициенты этих прямых будут

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 0,5(1 + \delta/2)^2 \omega_{\text{ср}}^2; \\ k_2 &= 0,5(1 - \delta/2)^2 \omega_{\text{ср}}^2. \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

Уравнения касательных запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta E - \Delta E_A &= k_1(J_n - J_A); \\ \Delta E - \Delta E_B &= k_2(J_n - J_B), \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

где $J_A, \Delta E_A, J_B, \Delta E_B$ — координаты точек A и B касания с диаграммой энергомасс прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 .

Решение системы уравнений (28.2) относительно J_n определит момент инерции маховой массы, при котором колебания угловой

скорости звена привода относительно $\omega_{\text{ср}}$ ограничены: $\omega_{\max} = (1 + \delta/2) \omega_{\text{ср}}$ и $\omega_{\min} = (1 - \delta/2) \omega_{\text{ср}}$.

После преобразований из выражений (28.2) получим зависимость для определения момента инерции маховой массы:

$$J_m = |(1/2\delta)((J_A - J_B)(1 + \delta^2/4) + (J_A + J_B)\delta) + (\Delta E_A - \Delta E_B)/(\delta\omega_{\text{ср}}^2)|. \quad (28.3)$$

Выражение (28.3) реализуется, если известны координаты точек A и B . Их определяют либо графически с помощью диаграммы энергомасс, либо при численном решении на ЭВМ для массивов значений $\Delta E(\varphi_n)$ и $J_n(\varphi_n)$. Небольшая погрешность в определение J_m вносится, если проводить не касательные к диаграмме, а под углами ψ_{\max} и ψ_{\min} прямые через точки с координатами $B(J_{n \min}, \Delta E_{\max})$ и $A(J_{n \max}, \Delta E_{\min})$ (рис. 28.1).

Если пренебречь влиянием переменной составляющей J_o приведенного момента инерции на неравномерность движения, т. е. принять $J_A = J_B = J_c$, то из выражения (28.3) получим

$$J_m = |\Delta E_{\max}|/(\delta\omega_{\text{ср}}^2) - J_c. \quad (28.4)$$

Аналогичный результат получим, рассматривая уравнение движения машины (см. гл. 22):

$$\omega(\varphi) = \omega_{\text{ср}} + \Delta E_c(\varphi)/(J_c\omega_{\text{ср}}) - (|\Delta\omega_{\max}| - |\Delta\omega_{\min}|)/2 \approx \omega_{\text{ср}} + \Delta E_c(\varphi)/(J_c\omega_{\text{ср}}).$$

Так как $\omega(\varphi)$ и $\Delta E_c(\varphi)$ пропорциональны, то экстремальные значения функции $\Delta E_c(\varphi)$ соответствуют экстремальным значениям функции $\omega(\varphi)$. Тогда при установке маховой массы получим

$$\Delta E_{c \max} = 0,5(J_m - J_c)(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = 0,5(J_m - J_c)(\omega_{\max} + \omega_{\min})(\omega_{\max} - \omega_{\min}). \quad (28.5)$$

Вводя в выражение (28.5) множитель $(\omega_{\text{ср}}/\omega_{\text{ср}})$ и учитывая, что

$$\omega_{\text{ср}} = (\omega_{\max} + \omega_{\min})/2 \text{ и } \delta = (\omega_{\max} - \omega_{\min})/\omega_{\text{ср}},$$

получим

$$J_m = |\Delta E_{\max}|/(\delta\omega_{\text{ср}}^2) - J_c. \quad (28.6)$$

28.3. Обеспечение равномерности движения агрегата с учетом характеристики его двигателя

Колебания скорости звена привода при работе машинного агрегата приводят к изменению момента движущей силы M_d , так как для большинства двигателей M_d является функцией ω (см. гл. 22). У ряда двигателей — синхронных электродвигателей, гидродвигателей и др. (см. гл. 20), имеющих жесткую характеристику, эти колебания незначительны. Но для некоторых (асинхронных, постоянного тока с параллельным возбуждением и др.) они существенны. Поэтому для более точного определения момента инерции маховика следует учитывать характеристику двигателя. Если участок

рабочей характеристики двигателя заменить отрезком прямой, то график $M_d(\omega)$ имеет вид, представленный на рис. 28.2, а. Тогда при скорости звена приведения $\omega = \omega_{\text{ср}}$ из функции $M_d(\omega)$ получим среднее значение момента движущей силы $M_{d,\text{ср}}$ и примем его равным среднему моменту сил сопротивления ($M_{d,\text{ср}} = M_{\text{ср}}$).

Амплитуды колебаний угловой скорости звена приведения устанавливают либо через коэффициент δ , либо интегрированием дифференциального уравнения движения механизма с двигателем

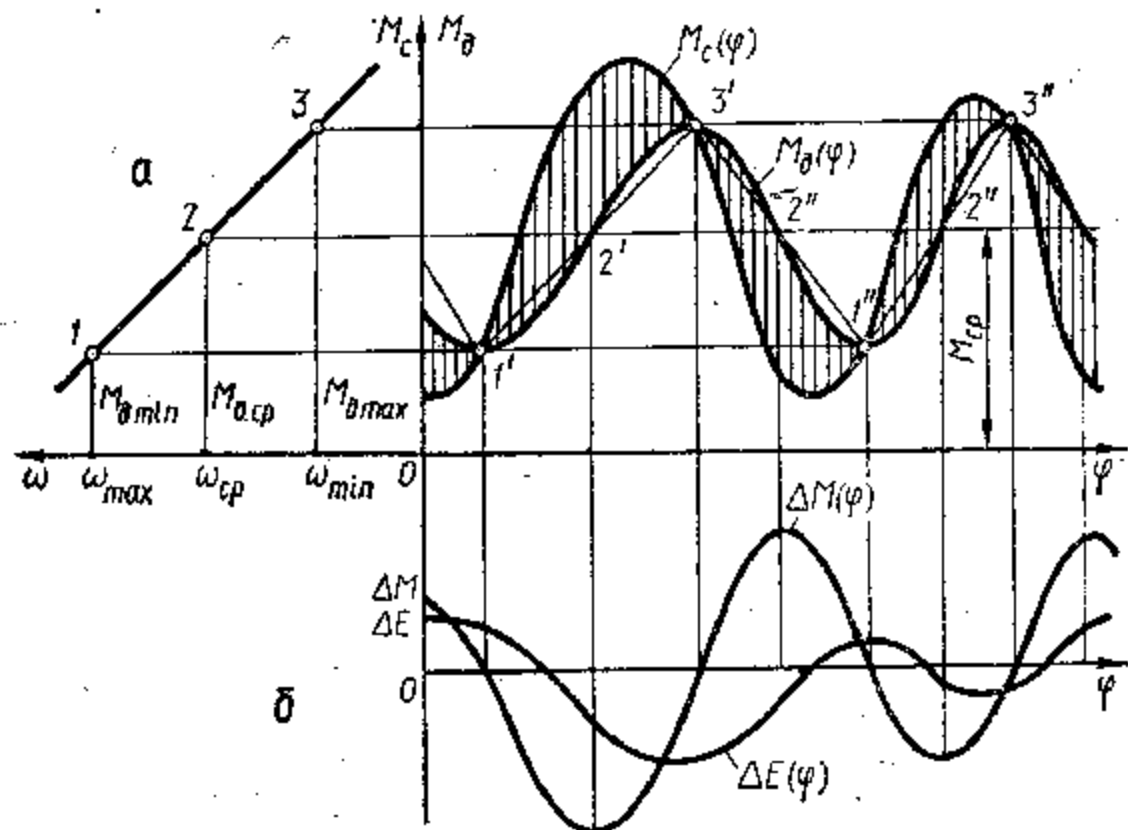


Рис. 28.2. Графики моментов сил движущих, сопротивлений и избыточной работы

(см. гл. 22). Определив значения ω_{max} и ω_{min} по рабочей характеристике, найдем соответствующие им значения движущего момента $M_{d,\text{min}}$ и $M_{d,\text{max}}$.

Так как при экстремальных значениях угловой скорости звена приведения угловое ускорение равно нулю, то приведенные моменты движущих сил и сил сопротивления равны. Следовательно, в точках пересечения графика функции $M_d(\omega)$ с линиями для $M_{d,\text{max}}$ и $M_{d,\text{min}}$ имеем $M_c = M_d$. На интервалах $1'-3'$, $3'-1''$, $1''-3''$ между точками пересечения функция $M_d(\omega)$ имеет точки перегиба, и ее истинный характер устанавливается подстановкой значения ω в уравнение характеристики двигателя. Тогда функция избыточной работы $\Delta A(\varphi) = \Delta E(\varphi)$ определится интегрированием функции $\Delta M(\varphi) = M_d(\omega) - M_c(\varphi)$. Дальнейший ход решения рассматриваемой задачи аналогичен случаю, когда не учитывается характеристика двигателя и момент инерции маховика может быть определен по зависимостям (28.3) или (28.6).

28.4. Определение размеров маховика и выбор места его установки

Конструктивно маховики оформляют в виде дисков или колец со спицами (рис. 28.3). Их изготавливают из чугуна или стали. Для дисковых маховиков (а) момент инерции относительно оси равен $J_m = mD^2/8$. Если массу m выразить через объем и плотность ρ материала, то получим

$$D = \sqrt[3]{32J_m/\pi b \rho} \quad (28.7)$$

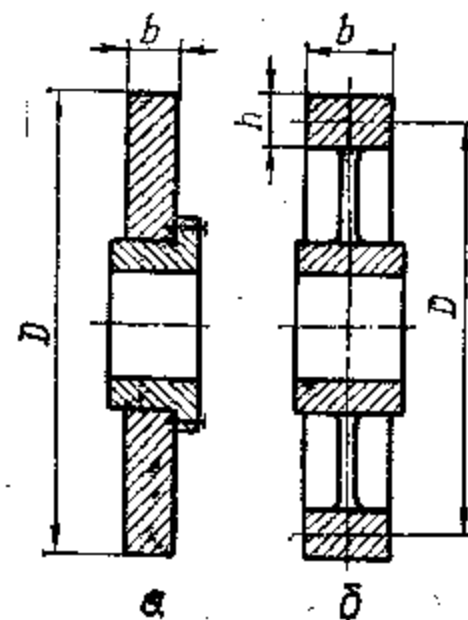


Рис. 28.3. Определение момента инерции маховика

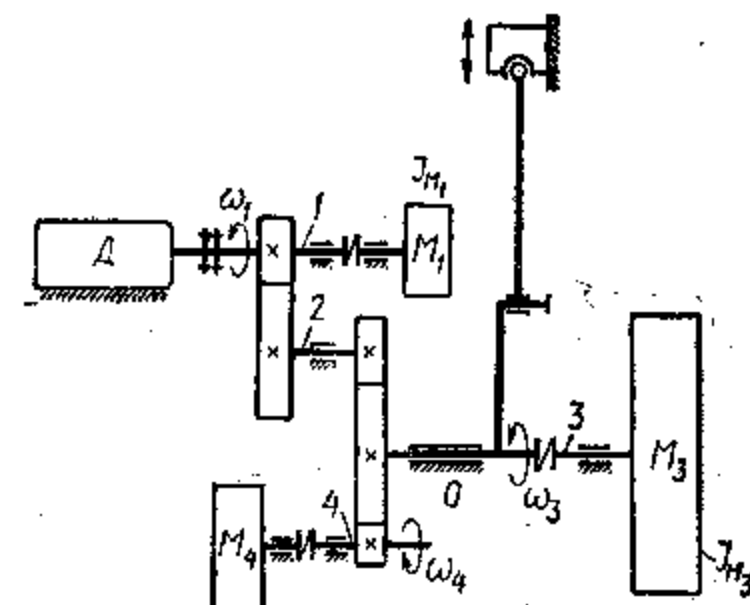


Рис. 28.4. Выбор места установки маховика

Для маховика в виде кольца со спицами (б), пренебрегая массой спиц, получим $J_m = mD^2/4$, или $J_m = \pi b h \rho D^3/4$. Обозначая $\lambda_b = b/D$ и $\lambda_h = h/D$, получим $J_m = \pi \lambda_b \lambda_h \rho D^5/4$, откуда

$$D = \sqrt[5]{4J_m/\pi \lambda_b \lambda_h \rho} \quad (28.8)$$

Из анализа выражений (28.7) и (28.8) следует, что материалоемкость маховика обратно пропорциональна квадрату его диаметра. При одинаковых диаметрах масса дискового маховика примерно в два раза больше, чем маховика со спицами. Из зависимостей (28.3) и (28.6) видно, что момент инерции маховика обратно пропорционален квадрату угловой скорости звена приведения. Поэтому для уменьшения размеров маховика целесообразно устанавливать его на самом быстроходном валу механизма. Однако такое решение не всегда рационально, так как при этом не учитывается реальная жесткость звеньев и возникающих из-за этого колебаний в механизмах.

Если вращение к рабочей машине передается от двигателя через передаточный механизм, например зубчатый (рис. 28.4), то источником возмущающих колебаний в агрегате будут как двигатель, так и передаточный механизм. Так как звенья этого механизма упругие, то под действием возмущающих сил они колеблются (см. гл. 24). Выбором звена передаточного механизма для установки

маховика достигается эффективное снижение колебаний угловой скорости звена привода. Если источником колебаний в агрегате с приводом от электродвигателя является рабочая машина (поршневые машины, молоты, прессы и т. п.), то маховик целесообразно устанавливать на валу 3 этой машины — звене привода. В этом случае передаточный механизм и двигатель разгружаются от динамических воздействий из-за колебаний звеньев, которые превышают номинальную нагрузку (особенно при резонансных режимах) и передаточный механизм рассчитывается без учета пиковых моментов. Кроме того, улучшаются условия пуска электродвигателя за счет сокращения времени пуска.

Для уменьшения момента инерции и массы маховика его помещают на валу 4, соединенном с валом звена привода повышающей передачей. В этом случае $J_{M_4} = J_M (\omega_1/\omega_4)^2$ и для двигателя и передаточного механизма сохраняется разгружающий эффект. Если в агрегатах с приводом от поршневых машин (двигателей внутреннего сгорания, поршневых гидродвигателей и др. источником колебаний является двигатель, то для защиты передаточного и рабочего механизмов от динамических воздействий маховик целесообразно устанавливать на валу 1 двигателя. В этом случае $J_{M1} = J_M (\omega_1/\omega_1)^2$.

При отступлениях от указанных рекомендаций, например при установке маховика на валу 1 при приводе от электродвигателя и действии возмущающих колебаний от рабочей машины, между двигателем и звеном привода появляется упругая связь (передаточный механизм). Если жесткость этой связи принять равной C и предположить, что силы сопротивления деформированию создают момент, пропорциональный скорости поворота вала $k(d\varphi/dt)$, а возмущающий момент, действующий на звено привода, $M = M \sin \omega_b t$, то дифференциальное уравнение, описывающее движение звена привода механизма, имеет вид (см. гл. 24)

$$d^2\varphi/dt^2 + 2nd\varphi/dt + \omega_c^2\varphi = q \sin \omega_b t, \quad (28.9)$$

где $\omega_c = \sqrt{C/J_n}$ — частота собственных колебаний звена привода; $2n = k/J_n$; $q = M/J_n$.

Из решения уравнения (28.9) следует, что при $\omega_b = \omega_{cp}$ максимальный угол закручивания вала звена привода равен (см. гл. 24) $\varphi_n = (M/C) k_d$ при коэффициенте динамичности

$$k_d = 1/\sqrt{(1 - (\omega_{cp}/\omega_c^2) + 4n^2 (\omega_{cp}/\omega_c^2)^2)}. \quad (28.10)$$

Из выражения (28.10) следует, что при совпадении ω_{cp} с собственной частотой колебаний системы ω_c наступает резонанс. Следовательно, увеличение приведенного момента инерции за счет добавления маховой массы приводит к увеличению колебаний угловой скорости звена привода. Этот фактор не учитывается при выводе зависимостей (28.3) и (28.6).

28.5. Обеспечение равномерности движения машины с помощью регуляторов скорости

Если машинный агрегат не обладает свойством саморегулирования, то его движение становится неустойчивым. Нарушение равенства приведенных моментов движущих сил и моментов сил сопротивления вызовет либо остановку машины, либо увеличение скорости движения до недопустимого, с точки зрения нормальной эксплуатации, уровня. Неустойчивость движения характерна для машинных агрегатов с приводом от двигателей внутреннего сгорания, с асинхронным двигателем в период его пуска и т. п. Так как условия на

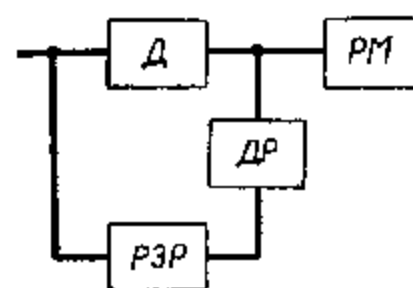
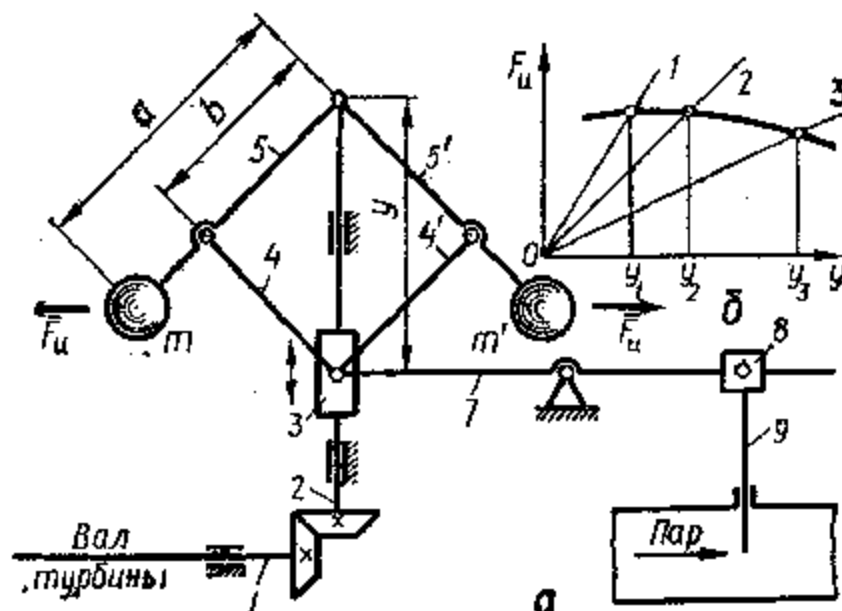


Рис. 28.5. Схема подключения регулятора к рабочей машине

Рис. 28.6. Схема прямого регулирования



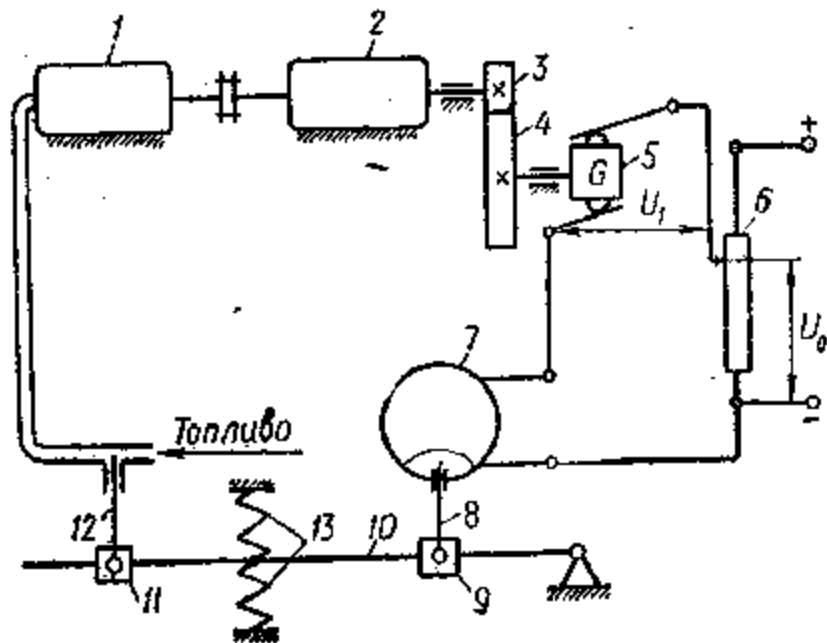
гружения многих машин непрерывно меняются во время их эксплуатации, то нормальная работа таких агрегатов возможна только при наличии специальных устройств, поддерживающих постоянную угловую скорость звена привода, — регуляторов.

Работа регулятора основана на применении принципа обратной связи, заключающегося в следующем. Пусть двигатель D (рис. 28.5) соединен с рабочей машиной PM , на которую действует сила сопротивления, меняющаяся по произвольному закону. Воздействие рабочей машины на двигатель, следовательно, тоже непрерывно изменяется. Эти изменения воспринимаются датчиком регулятора $ДР$, который, воздействуя на рабочее звено $РЗР$ регулятора, увеличивает или уменьшает подачу энергии на двигатель. Таким образом, двигатель при работе действует на регулятор, который, в свою очередь, управляет работой двигателя.

Регулирование по принципу обратной связи может быть прямым, когда регулятор воздействует непосредственно на регулирующий орган двигателя, и косвенным — через вспомогательные устройства (сервомоторы). На рис. 28.6 приведена схема прямого регулирования паровых турбин, принцип которого практически не изменился с момента их изобретения. Вал паровой турбины 1 приводит во вращение вал 2 регулятора, связанный со звеньями 3—4—5 и 3'—4'—5', образующими два симметрично расположенных кривошипно-ползунных механизма с грузами m и m' . При изменении скорости вращения турбины грузы под действием центробеж-

ных сил \bar{F}_n перемещаются в радиальном направлении, благодаря чему ползун 3 передвигается по валу 2 регулятора. Движение звена 3 с помощью звеньев 7—8 приводит к перемещению задвижки 9, в результате чего соответственно изменяется подача пара в турбину. Скорость вращения ее вала сохраняется в установленных пределах.

При непрямом регулировании используются не механические воздействия двигателя на обратную связь, а электрические, гидравлические и др. На рис. 28.7 изображена схема регулирования



с помощью электрического сигнала, вырабатываемого тахогенератором 5, ротор которого приводится в движение через зубчатые колеса 3—4, связывающие его с валом рабочей машины 2, приводимой в движение двигателем внутреннего сгорания 1. Тахогенератор 5 вырабатывает ток напряжением U_1 . Один зажим тахогенератора соединен со щеткой потенциометра 6, находящегося под напряжением постоянно-

Рис. 28.7. Схема непрямого регулирования

го тока. В усилительное устройство электромагнита 7 подается разность напряжений $U_1 - U_0$, которая равна нулю для установленной средней скорости двигателя. При изменении скорости вала рабочей машины напряжение U_1 увеличивается или уменьшается. Происходит рассогласование напряжений, и сердечник 8 электромагнита опускается или поднимается. Его движение преобразуется звеньями 9, 10, 11 в перемещение задвижки 12, регулирующей количество топлива, подаваемого в двигатель. Пружины 13 уравнивают усилие, действующее на сердечник 8.

Регулирующие свойства регуляторов могут быть оценены по характеристикам, представляющим зависимость силы инерции \bar{F}_n масс грузов регулятора, напряжения тахогенератора U и т. п. от координаты перемещения рабочих звеньев приборов. Для механического регулятора характеристику получают из условия равновесия грузов при вращении его вала, для электрического — рассмотрением влияния скорости ротора на вырабатываемое напряжение. Для механического регулятора (рис. 28.7, а) получим зависимость силы инерции $F_n = -m(a^2/2b^2)\omega^2 y$ от ω и y . Задаваясь частотами вращения ω , для которых необходимо обеспечить регулирование, получим значения координат y ползуна 3 (рис. 28.6). Зависимость $F_n(y)$ является характеристикой регулятора (рис. 28.7, б), а кривая, образованная точками U_1, F_1 , представляет уравнивающую функцию регулятора.

Важное свойство регуляторов — это их *статическая устойчивость*, проявляющаяся в стремлении регулятора вернуть систему в состояние равновесия, из которого она выведена возмущающими силами, и *динамическая неустойчивость*, проявляющаяся в изменении угловой скорости регулируемого вала со временем при изменении нагрузки на машину. Свойства регуляторов и оценка устойчивости их работы исследуются методами теории автоматического регулирования.

29. ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАШИННОГО АГРЕГАТА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

29.1. Пути ограничения динамических воздействий машины на окружающую среду

Работа машинного агрегата сопровождается динамическими воздействиями его на окружающую среду. При относительном движении звеньев усилия в кинематических парах изменяются, что приводит к переменному нагружению стойки механизма. Вследствие этого фундамент, на котором установлен машинный агрегат, испытывает циклически изменяющиеся по величине и направлению силы. Эти силы через фундамент передаются на несущие конструкции здания, соседние машинные агрегаты и приборы и приводят к колебаниям и вибрациям. Неравномерность движения звеньев механизмов приводит к возникновению дополнительных сил инерции. Эти силы увеличивают колебания и вибрации звеньев механизма и машины в целом и сказываются на точности их работы. Если амплитуда колебаний достаточно велика (например, при работе в зоне резонанса), то в деталях звеньев возникают напряжения, превышающие допускаемые, что приводит к их разрушению. Вибрации — это причина выхода из строя деталей самолетов и вертолетов, элементов газовых и паровых турбин, неточностей в работе станков, роботов и т. п.

Колебания являются причиной создания таких условий работы машин, когда затрудняется деятельность обслуживающего персонала из-за вибраций деталей и чрезмерного шума. Во многих случаях для предупреждения вредного влияния на человеческий организм требуется специальное оборудование рабочих мест машинистов экскаваторов и грузоподъемных машин, трактористов и водителей автомобилей, пилотов вертолетов и т. п.

Приведенные примеры показывают, что для нормальной эксплуатации машин требуется привести в соответствие с действующими нормами динамические параметры агрегатов. Воздействием на определенным образом выбранный параметр динамической характеристики добиваются одновременного изменения уровня шума, вибраций звеньев, фундамента и т. п. Снижение динамических воздействий агрегата на окружающую среду достигается уравниванием механизмов. Под уравниванием механизмов понимается перераспределение масс определенных звеньев таким обра-

зом, чтобы максимально уменьшать их воздействие на другие подвижные звенья и стойки.

Наибольший эффект уравнивания достигается при условии, когда массы звеньев подобраны и распределены таким образом, чтобы при работе механизмов машины их центры масс были неподвижны и центробежные моменты инерции звеньев относительно осей вращения были равны нулю, а относительно других осей — постоянны. При этом сумма проекций всех сил инерции на координатные оси и моменты сил инерции относительно этих осей равны нулю, а сумма количеств движения постоянна. Выполнение этих условий свидетельствует о полной уравновешенности агрегата. Не все механизмы могут быть полностью уравновешены, но выполнение этого условия требует последовательного решения задач уравнивания сил инерции звеньев шарнирно-рычажных механизмов, сил инерции вращающихся масс звеньев, сведения до минимума изменения сил, действующих на фундамент.

29.2. Уравнивание звеньев шарнирно-рычажных механизмов

Условия уравнивания сил инерции подвижных звеньев механизма выражаются уравнениями

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_{ni} = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n M_{ni} = 0, \quad (29.1)$$

где $\bar{F}_{ni} = -m_i \bar{a}_{Si}$ — главный вектор сил инерции, действующих на i -е звено механизма, имеющее массу m_i , сосредоточенную в центре масс S_i звена,двигающегося с ускорением \bar{a}_S центра масс; $M_{ni} = -J_{Si} \bar{e}_i$ — главный момент сил инерции, действующих на i -е звено, обладающее моментом инерции J_{Si} относительно центра масс идвигающееся с угловым ускорением e_i .

Оба условия (29.1) выполняются для механизмов с постоянными приведенными моментами инерции звеньев — зубчатых, фрикционных и др. Для механизмов с переменными приведенными моментами инерции звеньев — шарнирно-рычажных, кулачковых — обычно выполняется лишь первое условие:

$$\sum_{i=1}^n F_{ni} = - \sum_{i=1}^n m_{Si} a_{Si} = 0.$$

Оно выполняется, если центр масс S механизма неподвижен или двигается с постоянной скоростью, т. е. при $\bar{a}_S = 0$. Так как для механизмов характерно циклическое движение, то ускорение центра масс ($\bar{a}_S = 0$) соблюдается, если центр масс неподвижен, т. е. при $v_S = 0$. Это достигается добавлением к звеньям дополнительных масс — противовесов, характер движения которых выбирают таким, чтобы повлиять в нужном направлении на положение центра масс механизма. Их величины и места установки определяют из следующих соображений.

В кривошипно-ползунном механизме (рис. 29.1) единственной неподвижной точкой является центр кривошипа A . Если так разместить противовесы, чтобы центр масс механизма был приведен в эту точку, то силы инерции механизма уравниваются. С этой целью приведем центр масс звеньев 2 и 3 в центр шарнира B установкой противовеса массой m_{n2} . Для определения массы m_{n2} и координат ее установки рассмотрим в координатной системе $x_2 B y_2$ уравнения статических моментов для звеньев 2 и 3:

$$\left. \begin{aligned} m_2 x_{S_2} + m_3 l_2 + m_{n2} x_{n2} &= 0; \\ m_2 y_{S_2} + m_{n2} y_{n2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

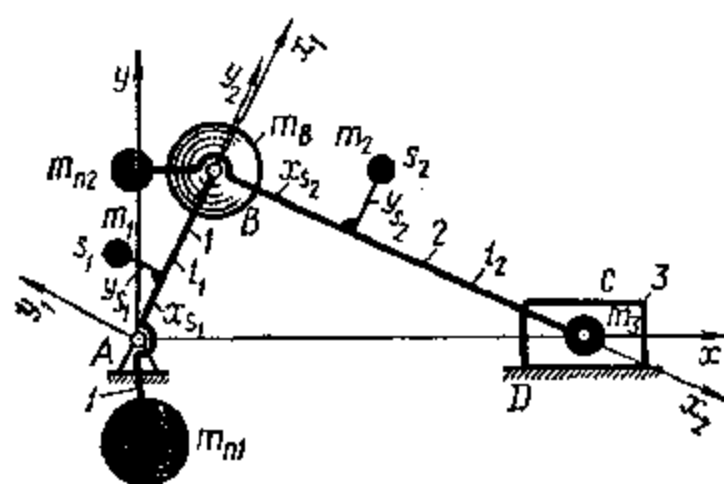


Рис. 29.1. Уравнивание звеньев кривошипно-ползунного механизма

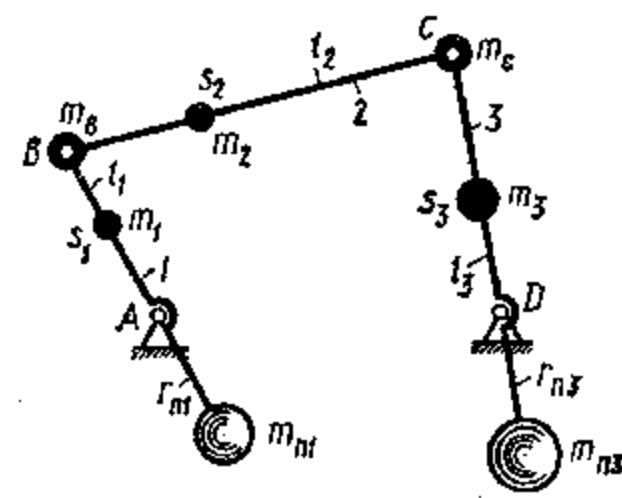


Рис. 29.2. Уравнивание звеньев шарнирного четырехзвенника

Из выражений (29.2) получим зависимости для определения координат точки установки противовеса:

$$\left. \begin{aligned} x_{n2} &= -(m_2 x_{S_2} + m_3 l_2) / m_{n2}; \\ y_{n2} &= -y_{S_2} (m_2 / m_{n2}). \end{aligned} \right\}$$

Задаваясь величиной m_{n2} , определим координаты x_{n2} и y_{n2} . Очевидно, что чем больше m_{n2} , тем ближе к центру B устанавливается противовес. После установки противовеса m_{n2} в точке B сосредоточивается масса $m_B = m_2 + m_3 + m_{n2}$. Для приведения центра масс механизма в точку A введем противовес m_{n1} , координаты установки которого в системе $x_1 A y_1$ определяют из рассмотрения уравнений статических моментов:

$$\left. \begin{aligned} m_B l_1 + m_{n1} y_{n1} + m_1 x_{S_1} &= 0; \\ m_1 y_{S_1} + m_{n1} y_{n1} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x_{n1} &= -(m_B l_1 + m_1 x_{S_1}) / m_{n1}; \\ y_{n1} &= -y_{S_1} (m_{n2} / m_{n1}). \end{aligned} \right\}$$

Если в механизме имеется несколько звеньев, вращающихся относительно неподвижной точки, то задача решается установкой противовесов на звеньях, соединяющихся со стойкой. Для механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 29.2), центры масс звеньев которого расположены как указано, получим

$$m_2 = m_B + m_C; \quad m_B l_{AS_2} = m_C (l_2 - l_{BS_2}),$$

откуда

$$m_B = m_2((l_2 - l_{BS_1})/l_2); \quad m_C = m_3 l_{BS_2}/l_2.$$

Размещая массы противовесов $m_{п1}$ и $m_{п3}$ на продолжениях звеньев 1 и 3, найдем положения их относительно центров вращающихся звеньев:

$$r_{п1} = (m_B l_1 + m_1 l_{AS1})/m_{п1};$$

$$r_{п3} = (m_C l_3 + m_3 l_{DS3})/m_{п3}.$$

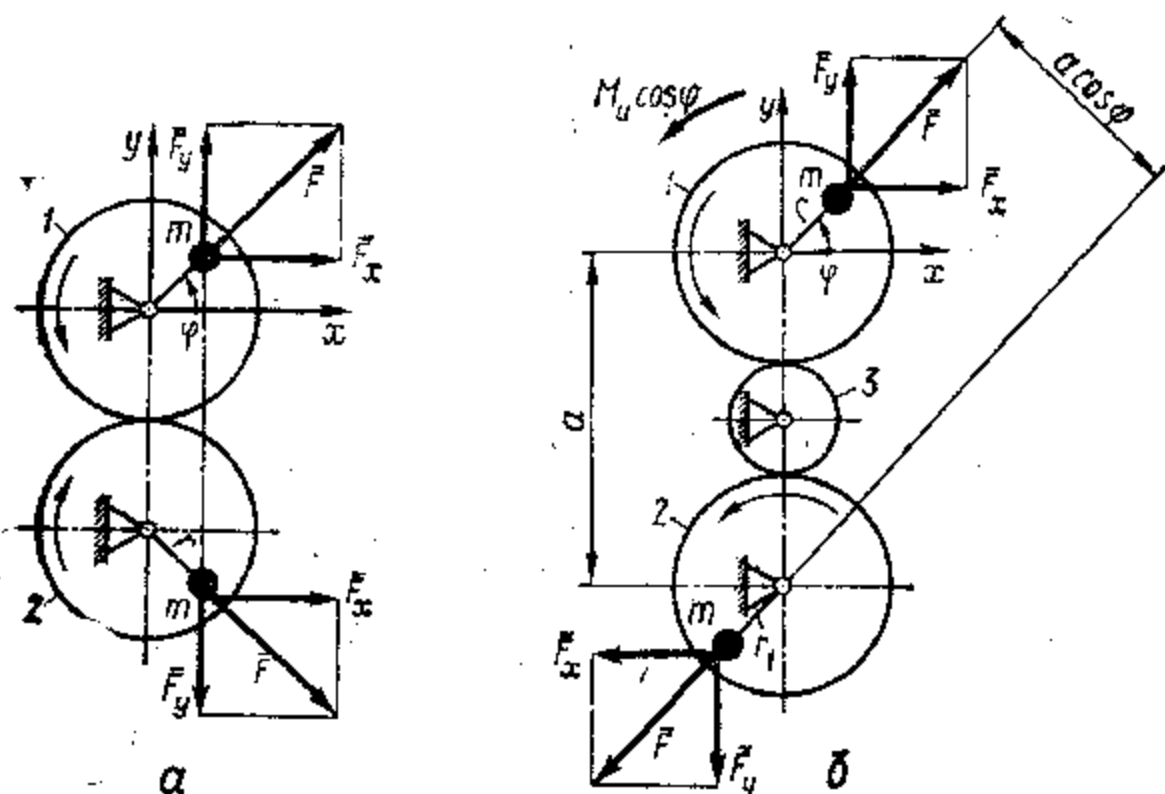


Рис. 29.3. Схемы механизмов с частичным уравновешиванием:
а — сил инерции; б — моментов сил инерции

Дополнительные противовесы увеличивают общую материалоемкость конструкции и переменную часть приведенного момента инерции, ухудшая динамические характеристики машины в период установившегося движения. Часто уравновешивают силы инерции не полностью, а только их составляющие, которые являются возбудителями колебаний звеньев. Для этого используют различные устройства, как, например, приспособление, предназначенное для уравновешивания вертикальной составляющей F_y центробежной силы инерции неуравновешенной массы m звена 1 механизма (рис. 29.3, а), включающее дополнительное звено 2, развивающее такую же силу инерции. В механизме со звеньями (основным 1 и дополнительным 2), вращающимися в одну сторону (рис. 29.3, б), второе звено 2 предназначено для создания уравновешивающего момента $M = m\omega^2 r a \cos \varphi$ в случае действия в механизме 1 периодически меняющегося момента силы инерции $M_n(\varphi) = M_n \cos \varphi$. Так как $\cos \varphi = \cos(\pi - \varphi)$, то $m r = M_n / \omega^2 r a$ при установке противовесов с фазовым углом π .

29.3. Уравновешивание вращающихся звеньев с неуравновешенными массами

Конструктивное исполнение механизмов иногда приводит к необходимости расположения на оси вращающегося звена неуравновешенных масс. Массы располагаются в одной плоскости, их может быть одна или несколько. Они находятся в параллельных плоскостях вдоль оси. При вращении такого звена возникают неуравновешенные силы инерции, которые, действуя на его опоры, вызывают колебания фундамента.

Рассмотрим случай с одной неуравновешенной массой. Если элементарная масса dm (рис. 29.4), положение которой на окружности радиуса ρ определяется углом φ , то при вращении звена с угловой скоростью ω действие результирующей силы инерции определится из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} dF_x &= \omega^2 \rho \cos \varphi dm - \varepsilon \rho \sin \varphi dm; \\ dF_y &= \omega^2 \rho \sin \varphi dm + \varepsilon \rho \cos \varphi dm; \\ dF_z &= 0; \\ dM_x &= dF_y z; \\ dM_y &= -dF_x z; \\ dM_z &= dF_x y - dF_y x. \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

Интегрируя уравнение (29.3) по всему объему массы, получим проекции главных векторов сил инерции и их моментов:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \omega^2 \int x dm - \varepsilon \int y dm = \omega^2 x_s m - \varepsilon y_s m; \\ F_y &= \omega^2 \int y dm + \varepsilon \int x dm = \omega^2 y_s m + \varepsilon x_s m; \\ F_z &= 0; \\ M_x &= \omega^2 \int y z dm + \varepsilon \int z x dm; \\ M_y &= -\omega^2 \int z x dm + \varepsilon \int y z dm; \\ M_z &= -\varepsilon \int y^2 dm - \varepsilon \int x^2 dm = -\varepsilon \int \rho^2 dm. \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

В уравнениях (29.4) интегралы $\int y z dm$, $\int z x dm$ — центробежные моменты инерции, а $\int \rho^2 dm$ — момент инерции относительно оси вращения.

Из уравнений (29.4) следует, что силы F_x и F_y равны нулю, если центр масс лежит на оси вращения звена. Результирующая сила инерции в этом случае равна также нулю: $F_n = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 0$. Такое звено называется статически уравновешенным.

Выполнение условия $F_n = 0$ для звена с несколькими неуравновешенными массами (рис. 29.5, а) достигается установкой противовеса, масса m_n которого определяется из условия равновесия

звена:

$$\bar{F}_{n1} + \bar{F}_{n2} + \bar{F}_{n3} + \bar{F}_{np} = 0.$$

Так как каждая сила инерции будет $F_{ni} = m_i \omega^2 r_i$, то имеем

$$m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + m_n \bar{r}_n = 0. \quad (29.5)$$

Из решения уравнения (29.5) получим величину $m_n \bar{r}_n$ и угол установки φ_n уравновешивающей массы m_n (б). В зависимости от конкретной конструкции задаются m_n и r_n , чем определяют параметры противовеса.

Иногда при больших осевых размерах звеньев неуравновешенность возникает из-за неточностей изготовления, например, при

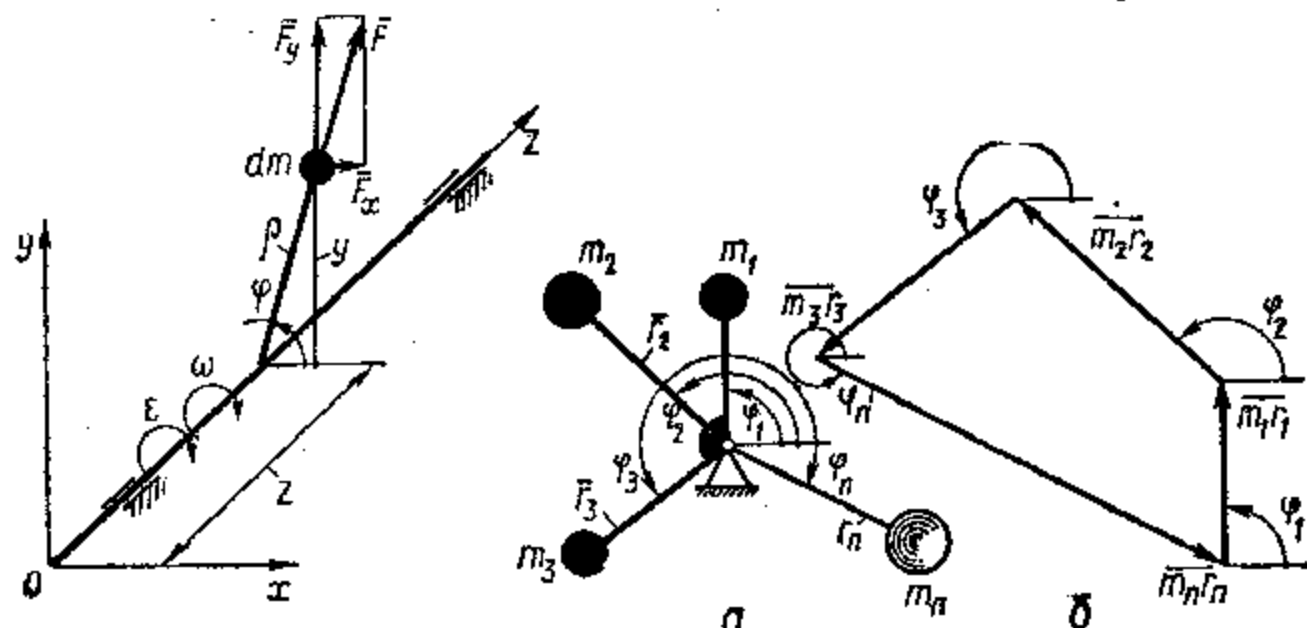


Рис. 29.4. Уравновешивание вращающегося звена с одной неуравновешенной массой

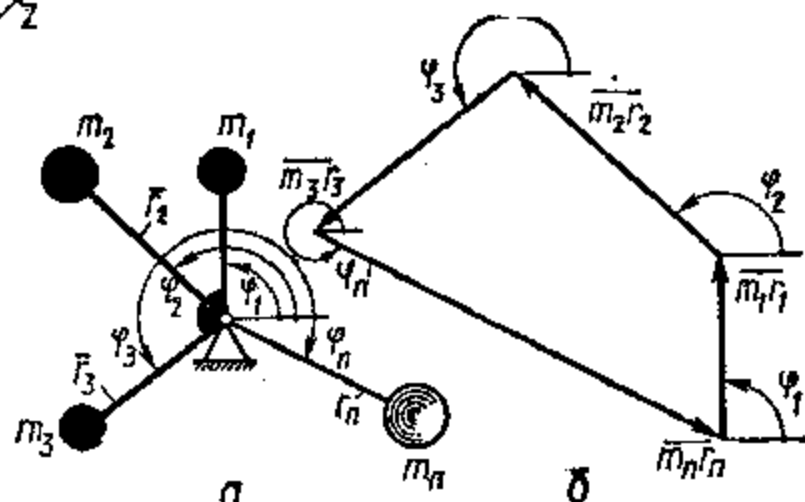


Рис. 29.5. Уравновешивание вращающегося звена с несколькими неуравновешенными массами

погрешности расположения оси вращения (рис. 29.6). Если в этом случае сила инерции $\bar{F}_n = 0$, то также равна нулю и проекция M_x вектора главного момента \bar{M} . Если не равны нулю проекции M_x и M_y вектора \bar{M} , то возникает момент сил инерции, который можно представить парой сил \bar{F}' и \bar{F}'' . Этот момент возникает, если ось вращения не является главной центральной осью инерции, т. е. при условии $\int yz dm \neq 0$ и $\int zx dm \neq 0$. Звено будет полностью уравновешено, если $M_x = M_y = 0$, т. е. ось вращения будет главной центральной осью инерции.

Если неуравновешенные массы расположены в параллельных плоскостях (рис. 29.7, а), то условия (29.4) реализуются следующим образом. Выберем произвольную плоскость I и перенесем туда силы инерции вращающихся масс. Для равновесия системы при переносе сил ее необходимо приложить моменты $M_i = F_{ni} l_i$. Дополнительные моменты M_i создаются парами сил F_{niI} и F_{niII} при условии $F_{niI} = F_{niII}$. Сила F_{niI} располагается в плоскости II, положение которой выбирается произвольно. Если расстояние между плоскостями I—II равно L, то дополнительные силы определяются из условия

$$F_{niI} = F_{niII} = m_i \omega^2 r_i (l_i / L).$$

Из условия равновесия сил в плоскостях I и II, обозначив $\lambda_i = l_i / L$, определим уравновешивающие силы в этих плоскостях (рис. 29.7, б и в):

$$\left. \begin{aligned} m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + m_1 \bar{r}_1 \lambda_1 + m_2 \bar{r}_2 \lambda_2 + m_3 \bar{r}_3 \lambda_3 + m_{nI} \bar{r}_I &= 0; \\ m_1 \bar{r}_1 \lambda_1 + m_2 \bar{r}_2 \lambda_2 + m_3 \bar{r}_3 \lambda_3 + m_{nII} \bar{r}_{II} &= 0. \end{aligned} \right\} (29.6)$$

В уравнениях (29.6) векторы $m_i \bar{r}_i \lambda_i$ и $m_i \bar{r}_i \lambda_i$ имеют противоположные направления. Из первого условия находим произведение $m_{nI} \bar{r}_I$ и направление установки противовеса в плоскости I; из второго — $m_{nII} \bar{r}_{II}$ и направление для второго противовеса. Очевидно, что при любом числе неуравновешенных масс для уравновешивания достаточно установить два противовеса в заранее выбранных параллельных плоскостях.

29.4. Балансировка вращающихся звеньев типа ротор

Вращающиеся звенья больших диаметров и длин не бывают полностью уравновешенными из-за неоднородности материала и погрешностей обработки при изготовлении. При большой угловой скорости даже незначительная неуравновешенность вызывает большие силы инерции. Поэтому такие роторы подвергают дополнительной технологической операции — балансировке. Балансировка заключается в добавлении или удалении (обычно высверливанием) необходимой массы материала.

Неуравновешенный ротор согласно уравнению (29.6) представляют в виде условного звена с двумя массами m_I и m_{II} (рис. 29.8, а), расположенными в параллельных плоскостях, вызывающими

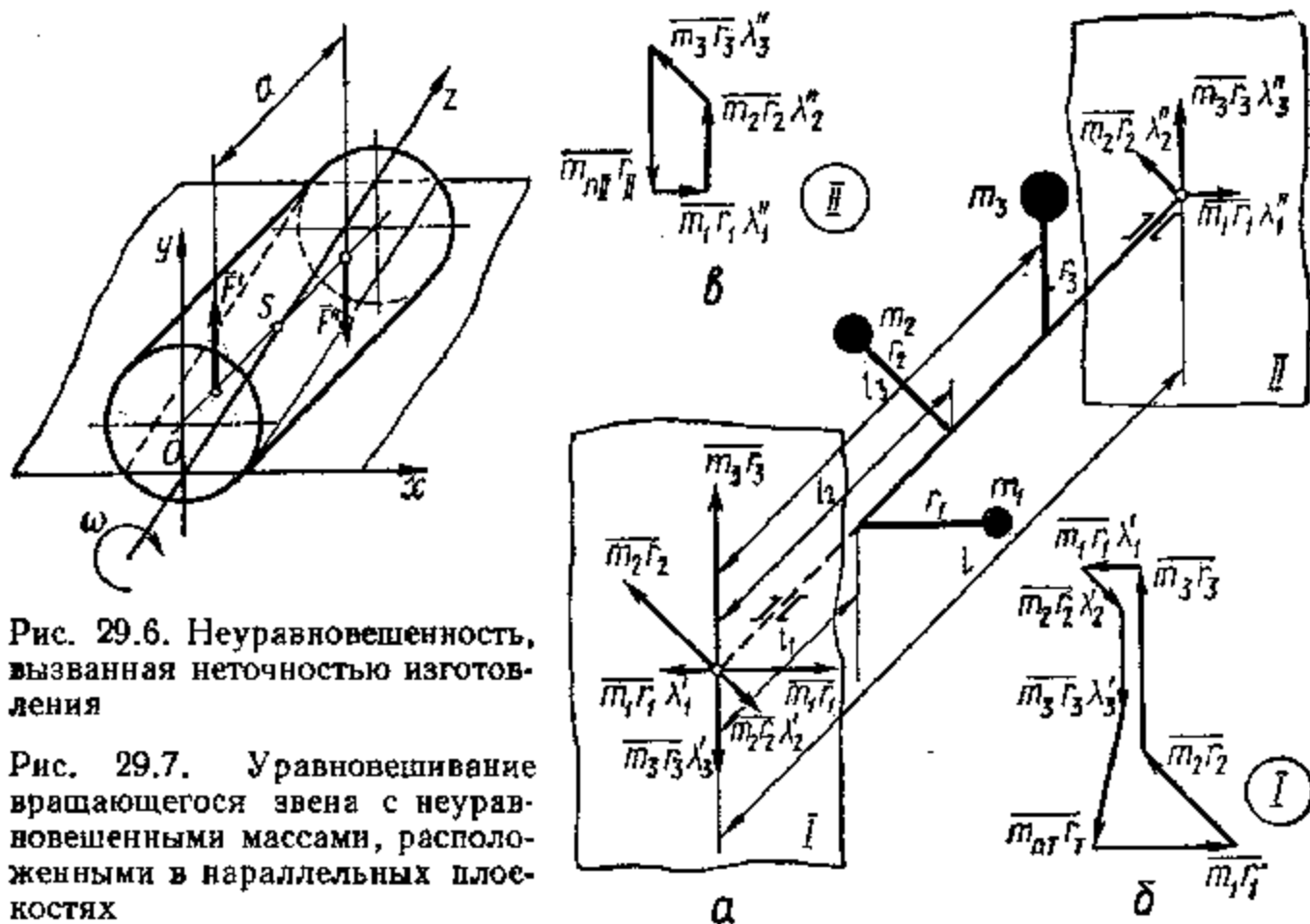
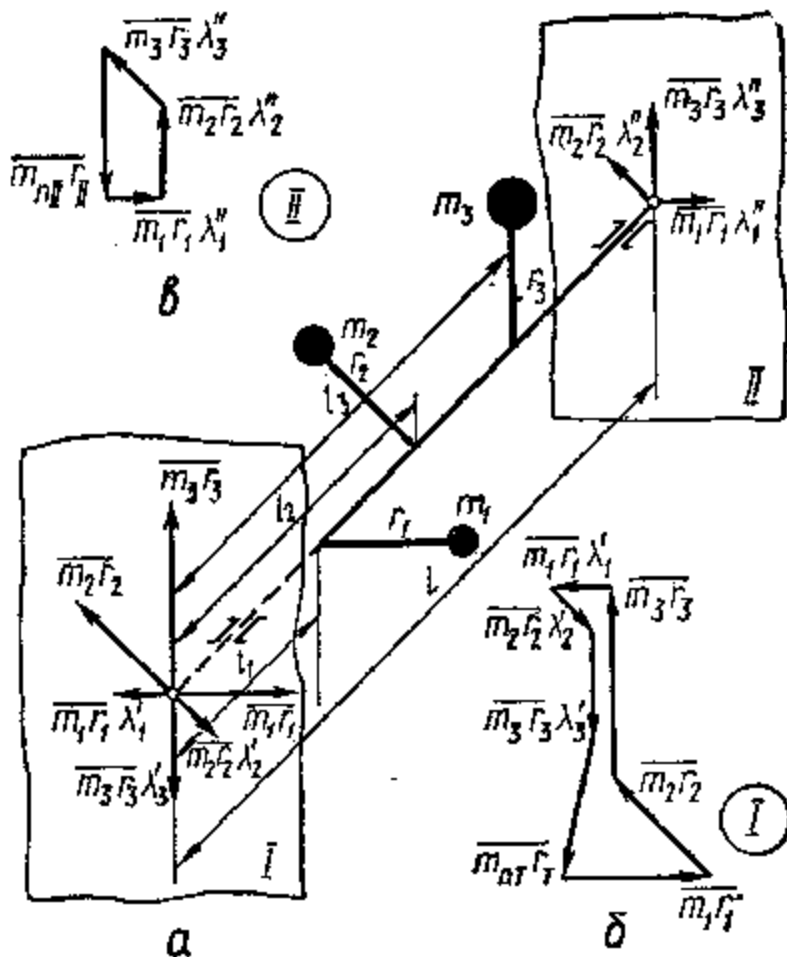


Рис. 29.6. Неуравновешенность, вызванная неточностью изготовления

Рис. 29.7. Уравновешивание вращающегося звена с неуравновешенными массами, расположенными в параллельных плоскостях



появление сил инерции \bar{F}_{n1} и \bar{F}_{n11} , пропорциональных статическим моментам $m_{n1}r_{n1}$ и $m_{n11}r_{n11}$. Эту неуравновешенность устраняют аналогично предыдущему двумя массами m_{n2} и m_{n22} , размещенными в плоскостях исправления Π_1 и Π_2 , — обычно на торцах ротора (рис. 29.8, б). Составим для ротора уравнение равновесия проекций сил инерции на координатные оси:

$$\begin{aligned} m_{n1}\omega^2 r_{n1} \cos \alpha_1 + m_{n2}\omega^2 r_{n2} \cos \alpha_2 &= m_{n11}\omega^2 r_{n11} \cos \alpha_{n11} + m_{n111}\omega^2 r_{n111} \cos \alpha_{n111}; \\ m_{n1}\omega^2 r_{n1} \sin \alpha_1 + m_{n2}\omega^2 r_{n2} \sin \alpha_2 &= m_{n11}\omega^2 r_{n11} \sin \alpha_{n11} + m_{n111}\omega^2 r_{n111} \sin \alpha_{n111}. \end{aligned}$$

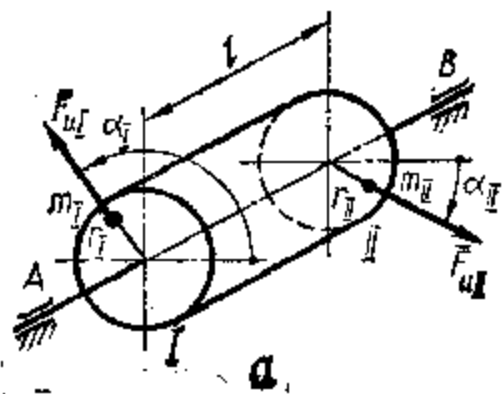


Рис. 29.8. Уравновешивание ротора

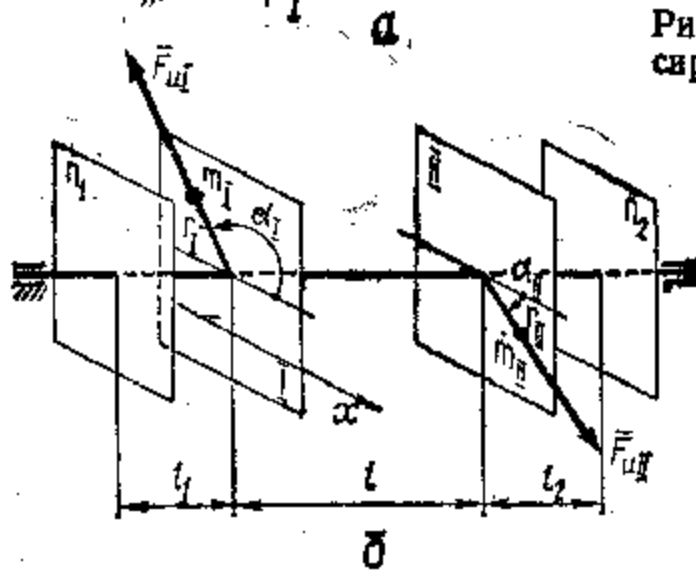
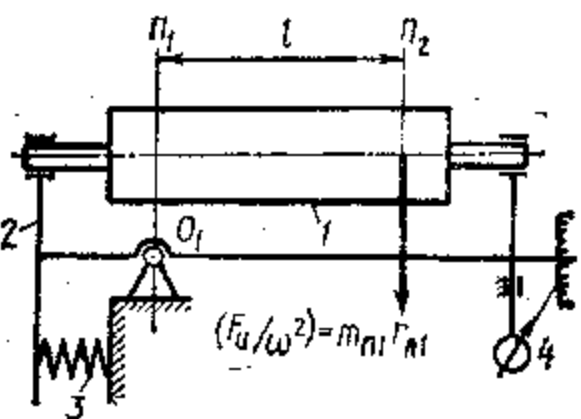


Рис. 29.9. Принципиальная схема балансировочной машины



Заменяя произведения $r_i \cos \alpha_i = z_{ix}$ и $r_i \sin \alpha_i = r_{iy}$ и исключая ω , получим

$$\left. \begin{aligned} m_{n1}r_{n1x} + m_{n2}r_{n2x} &= m_{n11}r_{n11x} + m_{n111}r_{n111x}; \\ m_{n1}r_{n1y} + m_{n2}r_{n2y} &= m_{n11}r_{n11y} + m_{n111}r_{n111y}. \end{aligned} \right\} \quad (29.7)$$

Выразим $m_{n1}r_{n1x}$ и $m_{n1}r_{n1y}$ через уравнения моментов относительно плоскости противовеса II:

$$\left. \begin{aligned} m_{n1}r_{n1x} &= (m_{n1}r_{n1x}(l+l_2) - m_{n11}r_{n11x}l_2)/(l_1+l_2+l); \\ m_{n1}r_{n1y} &= (m_{n1}r_{n1y}(l+l_2) - m_{n11}r_{n11y}l_2)/(l_1+l_2+l). \end{aligned} \right\} \quad (29.8)$$

Аналогично получим $m_{n2}r_{n2x}$ и $m_{n2}r_{n2y}$. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} m_{n1}r_{n1} &= \sqrt{(m_{n1}r_{n1x})^2 + (m_{n1}r_{n1y})^2}; \\ \cos \alpha_{n1} &= (m_{n1}r_{n1x})/(m_{n1}r_{n1}); \end{aligned} \right\} \quad (29.9)$$

$$\left. \begin{aligned} m_{n2}r_{n2} &= \sqrt{(m_{n2}r_{n2x})^2 + (m_{n2}r_{n2y})^2}; \\ \cos \alpha_{n2} &= (m_{n2}r_{n2x})/(m_{n2}r_{n2}). \end{aligned} \right\} \quad (29.10)$$

Произведения $m_{n1}r_{n1}$ и $m_{n11}r_{n11}$ определяют на специальных балансировочных машинах, одна из схем которых приведена на рис. 29.9.

Указанные параметры определяются разными способами, в основу которых положены методы определения амплитуды колебаний подшипников ротора при их упругом подвесе.

29.5. Воздействие неуравновешенных сил машины на фундамент

Рассмотрим механизм М (рис. 29.10), который закреплен на фундаменте Ф. Согласно законам механики механизм находится в равновесии под действием силы тяжести $\bar{F}_g = m_M \bar{g}$, приложенной в центре масс S_M механизма, сил инерции механизма $m_M \bar{a}_{SM}$ и реакции фундамента \bar{F}_Φ . Сила \bar{F}_Φ имеет статическую $\bar{F}_{\Phi c}$ и динамическую $\bar{F}_{\Phi d}$ составляющие. Динамическую составляющую определяют

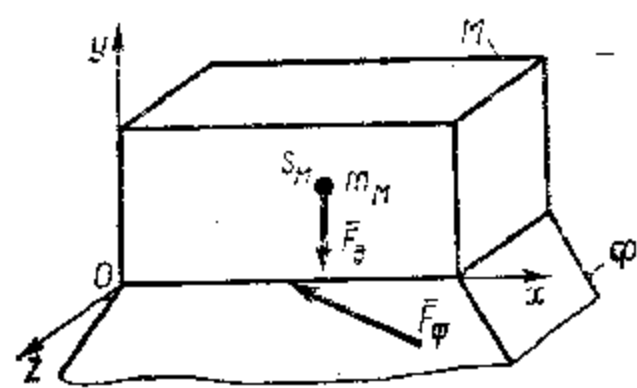


Рис. 29.10. Схема установки машины на фундаменте

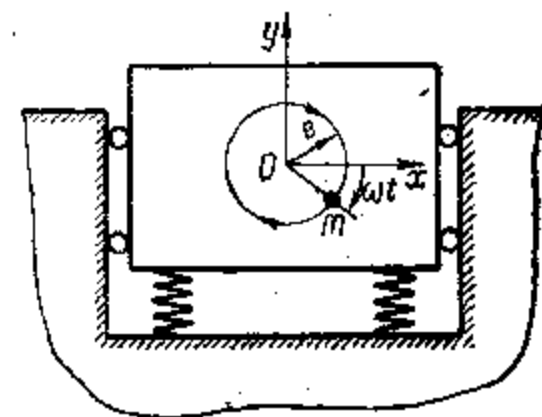


Рис. 29.11. Взаимодействие машины и фундамента

из выражения для главного вектора действующих на механизм сил $\bar{F}_g + \bar{F}_{\Phi c} + \bar{F}_{\Phi d} = \bar{F}_\Sigma$. Так как векторы \bar{F}_g и $\bar{F}_{\Phi c}$ равны, а направления противоположны, то $\bar{F}_\Sigma = \bar{F}_{\Phi d} = m_M \bar{a}_{SM}$. Главный вектор сил инерции подвижных звеньев механизма $\bar{F}_\Sigma = m_M \bar{a}_{SM}$ равен нулю только в случае $\bar{a}_{SM} = 0$. Это соответствует случаю полного уравновешивания механизма, когда его центр масс S_M неподвижен или движется равномерно и прямолинейно. Как было показано выше, это возможно только при вращательном движении звеньев. При наличии поступательно движущихся звеньев полное уравновешивание возможно при использовании специальных схем механизмов.

Если вращающиеся звенья уравновешены не полностью, то на стойку механизма и на фундамент машины передаются периодические возмущающие силы (рис. 29.11). Если центр неуравновешенной массы m расположен от оси вращения на расстоянии e , то вертикальная составляющая возмущающей силы будет

$$F_y = m\omega_b^2 e \sin \omega_b t.$$

Такое воздействие силы F_y вызывает вынужденные колебания (см. гл. 24). Подставляя в формулу (24.18) $F = F_y$, получим

$$y = (m\omega_b^2 e / C) \sin \omega_b t (1 - \omega_b^2 / \omega_c^2).$$

Максимальную амплитуду колебаний получим при $\omega_n t = \pm \pi/2$:

$$y_{\max} = (m\omega_n^2 e/C)(1 - \omega_n^2/\omega_c^2), \quad (29.11)$$

или, вводя ω_n^2/ω_c^2 , получим

$$y_{\max} = (m\omega_n^2/C)(\omega_n^2/\omega_c^2)(1/(1 - \omega_n^2/\omega_c^2)). \quad (29.12)$$

Из уравнения (29.12) следует, что при постоянном параметре $m\omega_n^2/C$ максимальная амплитуда зависит только от отношения ω_n/ω_c . При больших значениях ω_n/ω_c она стремится к $y_{\max} = m\omega_n^2/C$, так как коэффициент $(\omega_n^2/\omega_c^2)/(1 - \omega_n^2/\omega_c^2)$ стремится к единице. Зная максимальную амплитуду вынужденных колебаний и жесткость C крепления стойки на фундаменте, можно определить величину максимальной силы, передаваемой на него:

$$F_{\max} = Cy_{\max} = m\omega_n^2(1/(1 - \omega_n^2/\omega_c^2)). \quad (29.13)$$

Из формулы (29.13) следует, что упругое крепление машины уменьшает силу, передаваемую на фундамент. Это имеет место, если $|1 - \omega_n^2/\omega_c^2| > 1$, т. е. при

$$\omega_n > \omega_c \sqrt{2}. \quad (29.14)$$

Когда машина установлена на весьма податливом креплении, то $\omega_n \gg \omega_c$ и происходит существенное уменьшение воздействия на фундамент. Следовательно, для уменьшения воздействия возмущающей силы на фундамент необходимо, чтобы собственная частота колебаний ω_c была мала по сравнению с угловой скоростью ω_n . Если система крепления к фундаменту позволяет совершать машине и горизонтальные колебания, то решение задачи усложняется из-за пространственного характера колебаний.

29.6. Защита механизмов от вибраций

Силы, действующие на стойку механизма, вызывают вибрации фундамента машины. Наложение колебаний фундамента на собственные колебания звеньев механизмов приводят к совпадению частот и возникновению резонансных режимов работы. В этих условиях механизм становится неработоспособным из-за нарушения точности работы, роста амплитуд колебаний и динамических нагрузок. Для предотвращения возникновения резонансных режимов работы в механизмы вводят успокоители колебаний — демпферы, создающие силы сопротивления движущимся деталям и расходующие энергию колебательного процесса, способствуя затуханию колебаний (см. гл. 24).

Коэффициент пропорциональности между силой сопротивления движению и скоростью звена называется коэффициентом успокоения. Движение звена с демпфером в обобщенных координатах описывается дифференциальным уравнением

$$d^2q/dt^2 + 2ndq/dt + \omega_c^2 q = 0,$$

где q — обобщенная координата; $n = k\omega_n/\sqrt{Cm}$ — для поступательного движения звена и $n = k\omega_n/\sqrt{CJ}$ — для вращательного движения звена; m и J — соответственно масса и момент инерции звена; C — жесткость звена.

Для характеристики движения звена с демпфером часто используют $\delta = 2\pi n \sqrt{\omega_c^2 - n^2} = 2\pi n\beta$, называемую *логарифмическим декрементом затухания*. В качестве характеристики демпфера

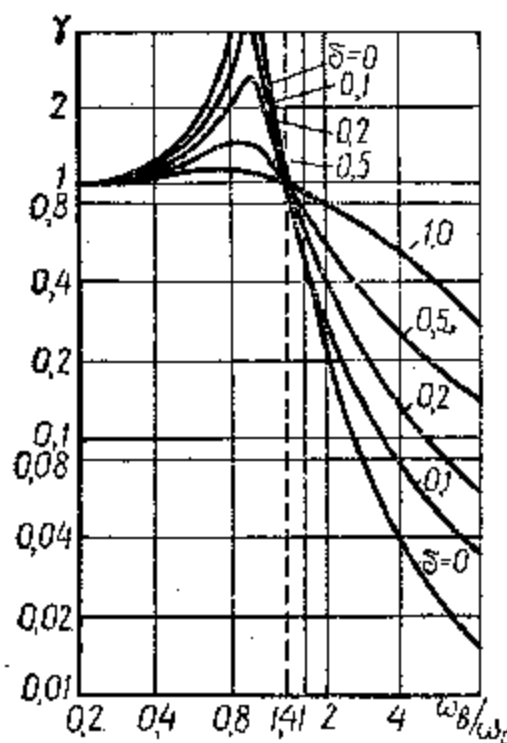


Рис. 29.12. Зависимость коэффициента виброзащиты от коэффициента демпфирования

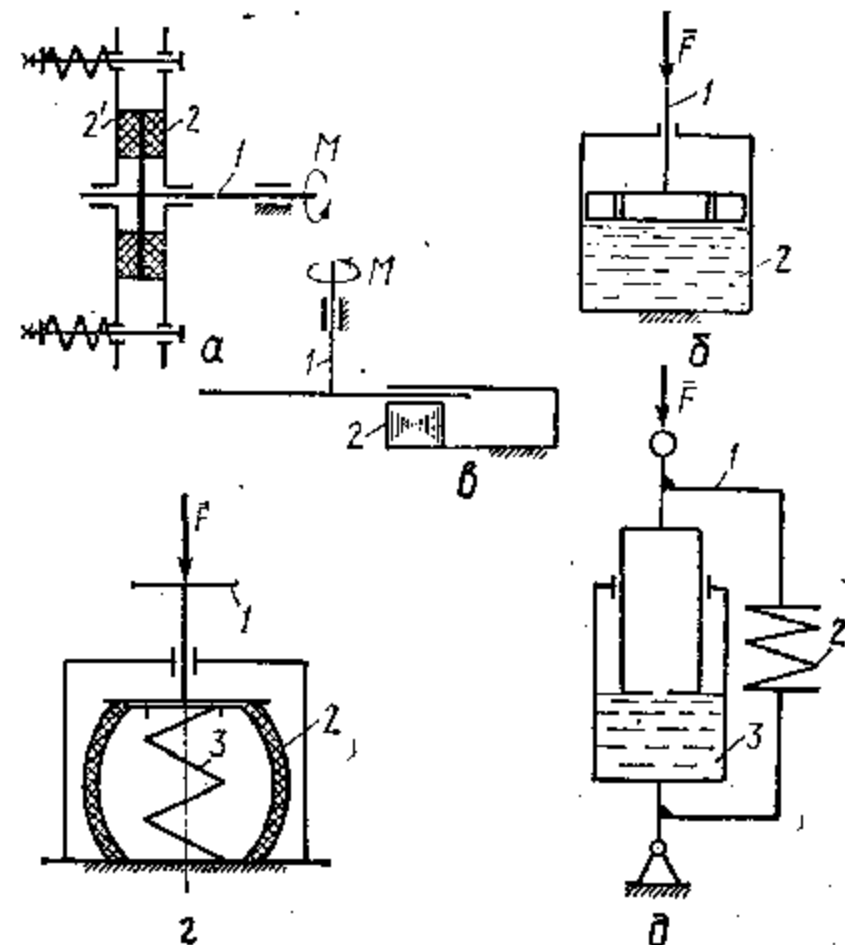


Рис. 29.13. Принципиальные схемы демпферов и амортизаторов: а — механических; б — гидравлических (пневматических); в — электромагнитных и амортизаторов; г — жидкостных

используют $\mu = n/\omega_c = \delta/\sqrt{4\pi^2 - \delta^2}$, называемую *степенью демпфирования*. Период колебаний звена с демпфером будет [см. зависимость (24.40)]

$$T = 2\pi/\beta = (2\pi/\omega_c)\sqrt{1 - \mu^2},$$

откуда следует, что при $\mu = 0$ демпфер не оказывает влияния на характер колебаний, а при $\mu = 1$ достигается полное успокоение, так как колебательный процесс прекращается.

Перегрузки машин, механизмов и приборов из-за вибраций зависят от ускорений a , возникающих при колебаниях звеньев, и характеризуются силой инерции $F_n = am$. Наибольшее ускорение зависит от амплитуды колебаний x и частоты ω_n :

$$a = x\omega_n^2.$$

Степень защиты механизма от вибраций оценивается *коэффициентом виброзащиты* γ , равным отношению амплитуды колебаний x_M звеньев механизма к амплитуде колебаний x_Φ фундамента:

$\gamma = x_M/x_\Phi$. Коэффициент виброзащиты выражается через частоты колебаний звеньев ω_c и фундамента ω_Φ следующим образом:

$$\gamma = \sqrt{((\omega_\Phi/\omega_c)^2 \mu^2 + 1)/((\omega_\Phi/\omega_c)^2 \mu^2 + (\omega_\Phi/\omega_c)^2 - 1)^2}. \quad (29.15)$$

На рис. 29.12 показана зависимость коэффициента виброзащиты от коэффициента демпфирования μ и отношения частот ω_Φ/ω_c . Виброзащита будет обеспечена при $\gamma < 1$. Это условие выполняется при $\omega_\Phi/\omega_c > 1,41$ (см. зависимость (29.14)). Если $\omega_\Phi/\omega_c > 1,41$, виброзащита ухудшает условия эксплуатации, так как при этом $\gamma > 1$ и $x_M > x_\Phi$. С уменьшением μ при $\omega_\Phi/\omega_c > 1,41$ величина γ уменьшается и улучшается виброзащита. Однако при низких значениях μ демпферы плохо смягчают удары. Обычно выбирают значение μ в пределах $0,2 \leq \mu \leq 0,5$.

В необходимых случаях стойку механизма устанавливают на специальные устройства с повышенной податливостью — амортизаторы, которые позволяют уменьшить усилия, передаваемые на фундамент за счет демпфирования их упругих элементов. В их конструкциях применены разные принципы демпфирования (рис. 29.13). К паспортным данным амортизатора относится его деформация f_a , мкм, под действием номинальной статической нагрузки. Частота собственных колебаний ω_a определяется по зависимости

$$\omega_a = \omega_c = 99,2 \sqrt{1/f_a}.$$

Определяя из условий эксплуатации $\omega_\Phi = \omega_c$ и коэффициент μ по зависимости (29.15), находят истинный коэффициент виброзащиты. Выбор амортизатора осуществляют в обратном порядке.

Отношение нагрузки F_a , воспринимаемой амортизатором, к деформации называют коэффициентом жесткости $C_a = F_a/f$. С увеличением C_a или уменьшением F_a увеличивается ω_a , что при тех же частотах ω_Φ приводит к ухудшению виброзащиты. Поэтому лучшую виброзащиту обеспечивают амортизаторы с малой жесткостью, нагруженные нагрузкой, близкой к номинальной.

Ученые, работавшие в области теории механизмов и машин

Ассур Л. В. (1878—1920), русский ученый, один из основателей русской научной школы по теории механизмов и машин.

Артоболевский И. И. (1905—1977), академик АН СССР, работал в области теории механизмов и машин.

Виттенбауэр Фердинанд (1875—1922), немецкий инженер, работал в области применения графических методов исследований механизмов.

Грасгоф Франц (1826—1893), немецкий инженер и механик, работал в области исследования структуры и кинематики механизмов.

Жуковский Н. Е. (1847—1921), русский математик и механик, основатель гидро- и аэромеханики.

Кулон Шарль Огюстен (1736—1806), французский физик и инженер.

Лагранж Жозеф Луи (1736—1813), французский математик и механик, создал аналитическую механику.

Малышев А. П. (1879—1962), русский советский ученый, работал в области теории механизмов и машин.

Новиков М. Л. (1915—1956), профессор, лауреат Ленинской премии СССР, изобрел новый тип зацепления.

Сомов С. П. (1852—1917), русский ученый-механик, впервые в обобщенном виде поставил задачу о структуре кинематических цепей и дал строгое ее решение.

Чебышев П. Л. (1821—1894), академик Российской АН, выдающийся математик и механик, основатель русской школы теории механизмов и машин.

Эйлер Леонард (1707—1783), великий математик, физик, механик, член Российской АН.