

В решениях XXVII съезда КПСС подчеркивается ведущая роль машиностроения в осуществлении стратегии ускорения научно-технического прогресса. Уровень машиностроения определяет состояние технологии производства любой отрасли промышленности и сельского хозяйства, качество производимых товаров. Развитие машиностроения связано с совершенствованием теории механизмов и машин, изучающей процессы, происходящие в машинах при преобразовании энергии, обработке материалов и их транспортировании, переработке информации при управлении машинными комплексами и т. п. В теории механизмов и машин обосновывается выбор оптимальных параметров машин, определяются методы их рационального проектирования и расчета. Все это дает возможность создавать более совершенные и производительные машины, а также машины, соответствующие новым принципам работы.

Появление новых машин приводит к разработке новых теоретических положений об их механике. Следовательно, в развитии машиностроения и теории механизмов и машин находят очередное подтверждение диалектические принципы естествознания. Не может быть прогресса в машиностроении без изучения закономерностей его развития методами теории механизмов и машин. Не получит развития теория механизмов и машин, если ее аппарат не будет отвечать реальным нуждам и запросам промышленности. Поэтому теория механизмов и машин — одна из основных общинженерных дисциплин, обеспечивающих теоретическую подготовку инженеров-механиков.

Теория механизмов и машин базируется на основных положениях теоретической механики. При изучении кинематики механизмов кроме основных принципов механики (теоремы о сложении движений, сложном составном движении и др.) учитываются геометрические и кинематические факторы, характеризующие влияние формы и размеров конкретных звеньев на особенности их движения. В связи с этим в курсе рассматриваются особенности кинематики и динамики групп механизмов (зубчатых, кулачковых, фрикционных), что обеспечивает подготовку к изучению вопросов работоспособности деталей машин.

При изложении динамики механизмов вопросы движения звеньев, в отличие от теоретической механики, изучаются с учетом физической причинности действующих на них сил. Вопросы изменения энергии движущихся звеньев рассматриваются с учетом механической работы как сил, вызывающих движение звеньев, так и сил,

препятствующих их движению. В этом случае основной энергетический принцип механики реализуется таким образом, что механическая работа представляется как разница между энергией, полученной расходом определенного количества энергоносителя (сжиганием топлива, расходом потенциальной энергии сжатого газа, кинетической энергии движущейся жидкости и т. п.), и энергией, затраченной на технологическую переработку или перемещение материалов.

Развитие теории механизмов и машин связано с прогрессом техники. По мере повышения уровня машиностроения получали развитие и различные разделы теории механизмов. Развитие машиностроения в начале нашего столетия привело к разработке теории структуры механизмов и машин. Усложнение кинематических схем машинных агрегатов обусловило необходимость в разработке методов кинематического расчета механизмов. Совершенствование двигателестроения вызвало увеличение скоростей работы машин, что потребовало развития методов динамических расчетов. В теории механизмов и машин развились методы расчетов отдельных типов механизмов (рычажных, зубчатых, кулачковых и др.), учитывающих взаимное влияние геометрических, кинематических и динамических факторов на качественные показатели работы механизмов. Это привело к созданию теорий зацепления, колебаний и др.

Современное машиностроение требует создания мощных и производительных машин с пространственной зоной обслуживания. Высокая производительность машин невозможна без создания систем управления работой машин на основе применения вычислительных программируемых устройств и микропроцессорной техники. Это вызвало создание теории роботов и манипуляторов, разработки методов их проектирования и расчета.

Современная техника выдвигает повышенные требования к точности работы механизмов. Это потребовало отказаться от методов расчета механизмов, основанных на предположении об абсолютной жесткости звеньев. Сейчас получили распространение методы кинематического и динамического исследования механизмов с учетом деформируемости звеньев, их колебаний, воздействия вибраций на окружающую среду и человека.

Для современного машиностроения характерна широкая электрификация, влияющая не только на изменение принципов управления машинами, но и на применение методов их исследований. Применение электронно-вычислительных машин для расчетов машиностроительных конструкций стало обыденным. Автоматизация расчетов потребовала разработки новых методов исследования механизмов, их широкой алгоритмизации и формализации.

Теория механизмов и машин — первая дисциплина, вводящая студентов в мир общинженерных сведений, связанных с конкретными деталями машин, а не абстрактных понятий материальной точки и материального тела. Вместе с курсами теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин она входит в комплекс профессиональной подготовки машиностроителей.

Раздел первый

СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Основные принципы классификации

Механизмы — основа любой машины. Существует огромное множество механизмов различных типов, отличающихся назначением, строением, способом передачи движения, принципом действия и многими другими признаками. С целью разработки эффективных методов анализа и рациональных путей создания новых механизмов (синтеза) их группируют по определенным признакам. В качестве одного из признаков принимают *способ преобразования движения в механизме*. Наряду с передачей движения с помощью твердых звеньев в механизмах для этой цели используют жидкости, газы, электрические и магнитные поля. Поэтому одним из признаков классификации является механическое, гидравлическое, пневматическое или электрическое воздействие для приведения механизма в движение.

Весьма распространена классификация механизмов по их *функциональному назначению*. В этом случае различают механизмы двигателей, передаточные и исполнительные механизмы, контроля, управления и регулирования, подачи, транспортировки, питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов, автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции и т. п.

Несмотря на разницу в функциональном назначении механизмов отдельных видов, в их строении, кинематике и динамике много общего. Если главным признаком классификации считать кинематику механизмов, то их делят *по характеру движения входящих в них деталей* на механизмы с вращательным, поступательным, плоскопараллельным и пространственным движением. Если в классификации учитывают *тип механизма*, то различают механизмы шарнирно-рычажные, кулачковые, зацепления, фрикционные, с гибкими связями и т. д. Более детальное деление в этой классификации строится на *характерных частностях механизмов*: планетарные, зубчатые, червячные, кулисные и т. п.

1.2. Структурная классификация

Изучение основ построения механизмов и их элементов базируется на структурной классификации. Ее принцип заключается в том, что *любой механизм представляют как цепь отдельных элементарных сочленений твердых или гибких тел определенной формы, присоединенных к исходному простейшему механизму, выполняющему и*

самостоятельные функции. Исходный механизм не может быть разделен на более простые части без нарушения основной функции — передачи движения.

Эта классификация, предложенная в 1911 г. Л. В. Ассуром (см. прил.), а затем дополненная И. И. Артоболевским (см. прил.), предусматривает объединение в определенной системе и тех комбинаций подвижных частей, присоединение которых способствует образованию сложных механизмов. Соответственно данной классификации механизмы представляют в виде структурных схем с указанием отдельных частей и их подвижных соединений условными изображениями.

1.3. Деталь, звено

Каждый механизм состоит из деталей, определенным образом соединенных между собой. **Деталь** — это изделие, которое не разделяется на составные части без нарушения возможности выполнения им предусмотренных функций. На рис. 1.1, а показан зубчатый механизм, состоящий из нескольких деталей: неподвижных — кор-

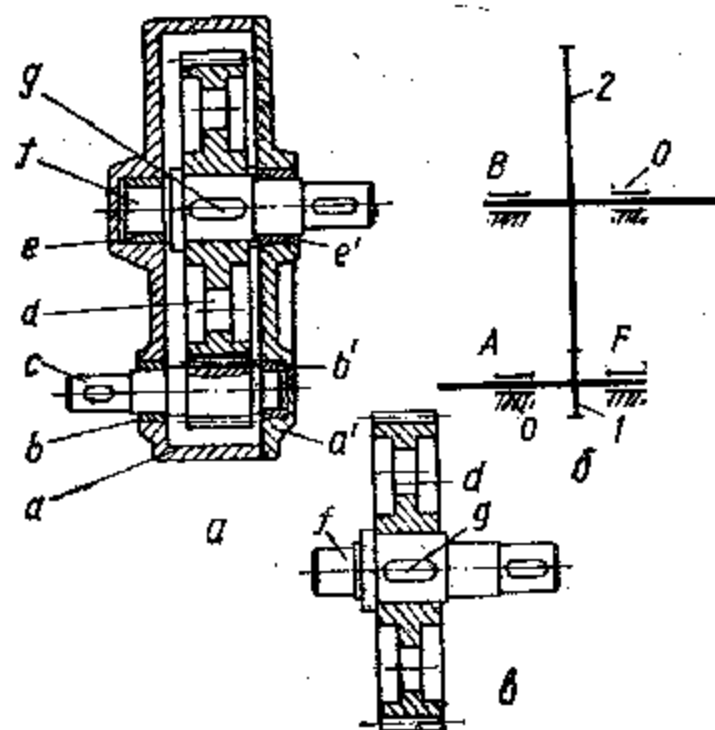


Рис. 1.1. Конструктивная и структурная схема зубчатого механизма

пуса из двух частей a и a' , подшипников b, b' и e, e' и подвижных — вращающихся вала-шестерни c и вала f с закрепленным на нем o помощью шпонки g зубчатым колесом d . Он предназначен для передачи вращательного движения от вала-шестерни c на вал f через пару зацепляющихся зубчатых колес c и d . Кроме указанных в этом механизме имеется много других деталей (болты, гайки, штифты, крышки подшипников и др.), но все они разделяются на неподвижные, связанные с корпусом, и подвижные, связанные с вращающимися деталями.

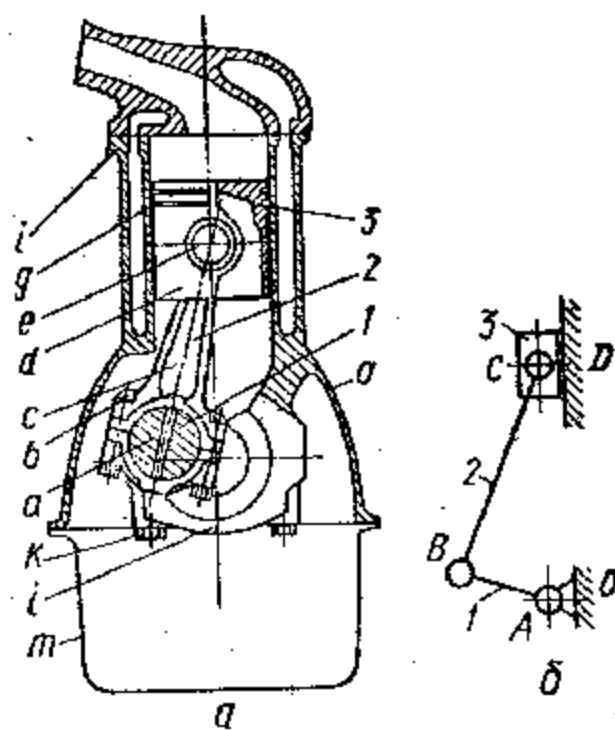


Рис. 1.2. Конструктивная и структурная схема кривошипно-ползунного механизма

С позиций структурной классификации важно знать не количество деталей, а количество совокупностей, объединяющих детали, обладающие одинаковым характером движения. На основании этого рассматриваемый механизм схематически представляется всего тремя такими совокупностями деталей. **Деталь** или несколько неподвижно соединенных между собой деталей, движущихся как одно целое, называется **звеном**.

Схематическое изображение зубчатого механизма (рис. 1.1, б) состоит из звена 0, соединяющего все неподвижные детали (корпус из двух частей a и a' , четырех подшипников b, b' и e, e' и др.), звена 1, представляющего вал-шестерню c (одна деталь), и звена 2, объединяющего вал f , колесо d и шпонку g , соединенных между собой (рис. 1.1, в) и вращающихся с одинаковой скоростью.

Шарнирно-рычажный механизм (рис. 1.2, а), используемый для преобразования вращательного движения в поступательное (и наоборот), состоит из неподвижных деталей (картера t , корпуса i , крышек подшипников, крепежных деталей подшипников k) и движущихся деталей (кривошипного вала a и всех закрепленных на нем деталей, поршня d , поршневого пальца e , поршневых колец d и шатуна c с подшипниками, деталей для крепления b и др.). Условное изображение механизма, отражающее его структуру, показано на рис. 1.2, б: звено 0 представляет группу неподвижных деталей t, i, k и др., звено 1 — вал и все вращающиеся детали, звено 2 — шатун и связь вала и поршня d , звено 3 — поршень и все другие поступательно движущиеся детали e, d и др.

1.4. Кинематические пары

Звенья механизма соединяются между собой так, чтобы они могли совершать относительные движения. **Соединение двух звеньев, обеспечивающее определенное относительное движение, называется кинематической парой**. Так, звено 2 в зубчатом механизме (см. рис. 1.1, б), состоящее из неподвижно соединенных деталей f, d и g , вращается относительно звена 0 и составляет с ним вращательную кинематическую пару B в кривошипно-ползунном механизме (см. рис. 1.2, б) звенья 3 и 0 образуют поступательную кинематическую пару — поршень d и цилиндр i .

Совокупности поверхностей, линий и точек звеньев, по которым происходит их соединение, образуют **элемент кинематической пары**. Элементы вращательной кинематической пары B — это цилиндрические поверхности подшипника скольжения e и e' и цапф вала f (см. рис. 1.1, а), зубчатой кинематической пары F — линии контакта зубьев шестерни c и колеса d . В поступательной кинематической паре D — это цилиндрические поверхности поршня d и цилиндра i .

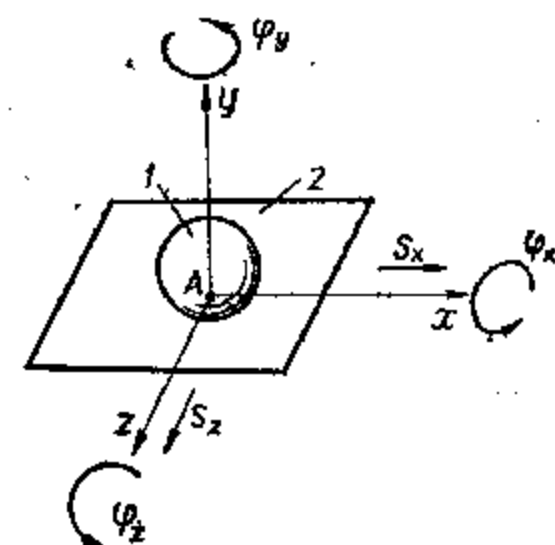


Рис. 1.3. Кинематическая пара

матической паре D кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 1.2, а) элементами являются цилиндрические поверхности поршня d (вернее, поршневых колец g) и цилиндра i . Геометрическая форма элементов кинематических пар определяет различный характер относительных движений образующих их звеньев.

Для отдельного звена, свободно перемещающегося в пространстве, число независимых свободных перемещений равно шести, т. е.

Таблица 1.1. Классификация кинематических пар

Класс кинематической пары	Возможные перемещения	Элементы кинематических пар			Условные обозначения
		Точки	Линии	Поверхности	
1	$2s$	1	—	—	
	3φ				
2	$2s$	2	3	—	
	2φ				
3	$1s$	4	5	—	
	3φ				
4	$2s$	6	7	8	
	1φ				
5	3φ	9	10	11	
6	$1s$	12	13	14	
	1φ				
7	2φ	15	16	17	
8	$1s$	18	19	20	
9	1φ	21	22	23	

числу степеней свободы: три независимых перемещения s_x , s_y и s_z относительно неподвижных координатных осей и три вращения φ_x , φ_y и φ_z вокруг этих же осей. Для звеньев, образующих кинематическую пару, возможное число движений всегда меньше шести, так как соединение их уменьшает число независимых движений одного звена относительно другого. На рис. 1.3 показана кинематическая пара A , образованная шаром 1 и плоскостью 2. Если оси координат расположить так, чтобы оси Ax и Az совпадали с плоскостью 2, число возможных движений шара относительно координатной системы будет равно только пяти (s_x , s_z , φ_x , φ_y и φ_z), так как перемещение шара s_y вдоль оси y ограничивается.

Кинематические пары классифицируют по числу связей, налагаемых их элементами на относительное движение звеньев. Элементы кинематических пар могут налагать от одной до пяти связей (при шести связях исключается возможность относительного движения: два звена соединяются неподвижно, т. е. превращаются в две детали одного звена). Число налагаемых связей является номером класса кинематической пары. Так, рассмотренная кинематическая пара шар — плоскость (рис. 1.3) будет кинематической парой 1-го класса. В табл. 1.1 показаны кинематические пары разных классов, позволяющие реализовать различные относительные движения звеньев. Звенья, образующие кинематические пары 1-го класса, касаются только в одной точке, звенья кинематических пар 2-го класса — в двух точках или по линии. В кинематических парах остальных классов, указанных на схемах механизма условными обозначениями, звенья могут иметь контакт в точках, по линиям или по поверхности.

Кинематические пары, элементами которых могут быть только точки или одна линия, называются *вышними*, кинематические пары с контактом звеньев по поверхности — *низшими*. При конструировании кинематических пар необходимо обеспечить постоянный контакт их элементов — **замыкание**. Это достигается либо с помощью определенных усилий (силовое замыкание) или приданием элементам определенной формы (геометрическое замыкание).

Таким образом, звенья, образующие кинематическую пару, обладают относительно друг друга определенностью движений, зависящей от геометрической формы элементов кинематической пары. Класс кинематической пары H удобно определять по числу степеней свободы k в относительном движении. Так как число степеней свободы в пространстве 6, то $H = 6 - k$.

1.5. Кинематические цепи

Звенья, соединенные кинематическими парами, образуют кинематические цепи. Различают **замкнутые** кинематические цепи, звенья которых входят не менее чем в две кинематические пары, образуя замкнутые контуры (рис. 1.4, а), и **незамкнутые**, имеющие звенья, входящие только в одну кинематическую пару и не образующие замкнутых контуров (рис. 1.4, б), а также **сложные** кинематические

цепи, состоящие из замкнутых и незамкнутых контуров (рис. 1.4, в). Замкнутые контуры неизменяемой конфигурации на схемах заштриховываются. Звенья, входящие только в одну кинематическую пару, называются *поводками* и имеют элементы кинематических пар, называемые *внешними*, которыми они присоединяются к другим кинематическим цепям. Элементы другого звена, присоединя-

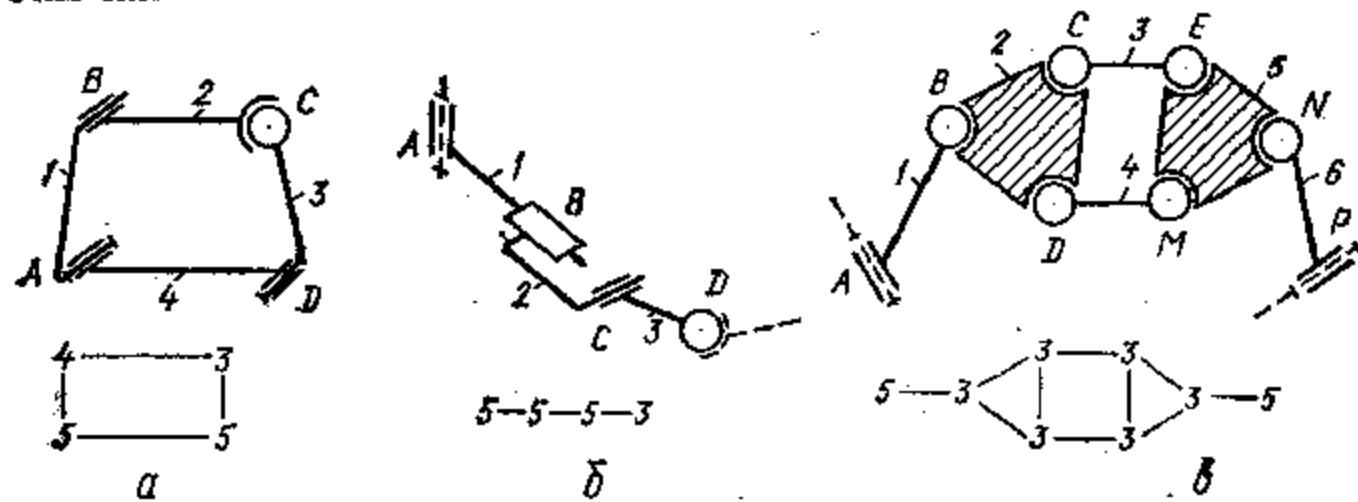


Рис. 1.4. Плоские кинематические цепи

мого к поводку, на структурных схемах механизма обозначаются штриховой линией.

В незамкнутых кинематических цепях всегда есть два поводка и две внешние кинематические пары; в сложных кинематических цепях число поводков не ограничено. При структурном анализе и синтезе применяется условная запись кинематической цепи (рис. 1.4, в), звенья обозначаются чертой, соединяющей цифры, соответствующие классу кинематических пар.

1.6. Кинематические соединения

Незамкнутая кинематическая цепь, которая по характеру относительных движений звеньев заменяет кинематическую пару, представляет собой кинематическое соединение. Как правило, кинематическое соединение выполняют в виде конструкции, звенья которой входят в низшие кинематические пары. В табл. 1.2 показаны кинематические соединения, состоящие из четырех звеньев, соединенных тремя кинематическими парами 5-го класса, эквивалентные сферической и плоскостной кинематическим парам, а также соединение, позволяющее реализовать комбинацию относительных движений, состоящую из трех перемещений (3s), нереализуемую посредством кинематической пары.

1.7. Подвижность кинематической цепи

Звенья кинематической цепи, обладая определенностью в относительном движении со звеньями, с которыми они образуют кинематические пары, могут не обладать определенностью движений относительно неподвижной системы координат, в которой рассматривается кинематическая цепь. Между тем определенность движения звеньев—

обязательное свойство кинематической цепи любого устройства, так как в противном случае управление им невозможно. Для оценки определенности движения звеньев цепи их положение относительно неподвижной координатной системы оценивается значениями независимых параметров, называемых *обобщенными координатами*.

Таблица 1.2. Кинематические соединения

Класс кинематической пары	Кинематическое соединение	Структурная схема соединения	Условное обозначение заменяемой кинематической пары
3φ			
2s 1φ			
3s			Нет аналогов

К обобщенным координатам относят расстояния между точками звеньев, их линейные и угловые координаты относительно неподвижной координатной системы, связанной с неподвижным звеном кинематической цепи — *стойкой*, которое всегда есть в кинематической цепи реального устройства. Для определения положения звеньев кинематической цепи (рис. 1.5) в системе $Oxuz$, связанной со звеном O , необходимо при известных линейных и угловых размерах звеньев знать значения четырех обобщенных координат:

угловых $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5$ и линейных — l_3 . Следовательно, если задавать во времени изменение рассматриваемых обобщенных координат, то можно получить вполне определенное движение звеньев кинематической цепи. Подвижность кинематической цепи — это определенность движения звеньев по отношению к одному из них. Степень подвижности кинематической цепи W равна числу обобщенных координат, требуемых для ее описания.

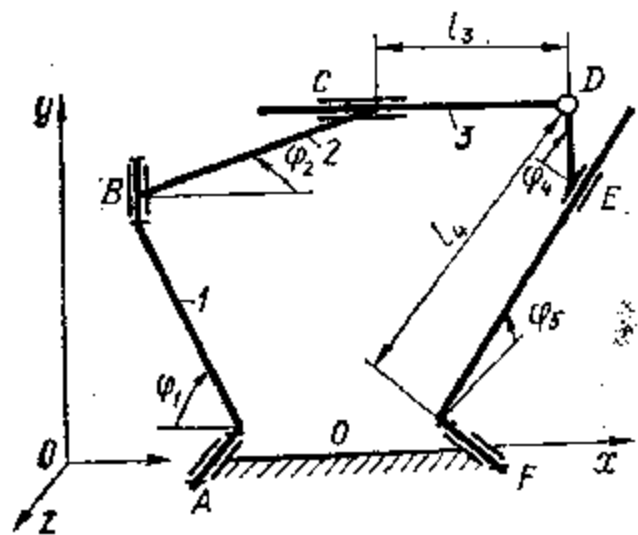


Рис. 1.5. Пространственные кинематические цепи

В сложных кинематических цепях определение степени подвижности визуально затруднительно. Ее можно определить вычислениями из следующих соображений. Если кинематическая цепь состоит из n подвижных звеньев, то для описания их положения в пространственной координатной системе без учета характера соединения звеньев необходимо $6n$ координат. Так как каждая кинематическая пара

налагает на относительное движение звеньев число ограничений — 5, 4, 3, 2, 1, определяемое ее классом, то для общего случая получим степень подвижности как разность между числом координат и числом наложенных ограничений:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (1.1)$$

где p_5, p_4, p_3, p_2, p_1 — количество кинематических пар соответствующих классов в кинематической цепи.

Если перемещение звеньев кинематической цепи происходит в одной или нескольких параллельных плоскостях, то такая кинематическая цепь называется *плоской*. Для образования плоских кинематических цепей достаточно использовать кинематические пары только 5-го и 4-го классов, налагающих на движение в плоскости соответственно два или одно ограничение, а для описания движения n подвижных звеньев такой кинематической цепи необходимо $3n$ координат.

В связи с этим зависимость для определения степени подвижности плоской кинематической цепи будет

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (1.2)$$

Рассмотрим соотношение между количеством звеньев, кинематических пар и степеней подвижности на примере пространственной кинематической цепи (рис. 1.5). Количество подвижных звеньев $n = 5$, кинематических пар 5-го класса A, B, F — $p_5 = 3$, 4-го класса C и E — $p_4 = 2$, 3-го класса D — $p_3 = 1$ и по формуле (1.1) получим $W = 6 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$. Зафиксируем последовательно звенья 1, 2 и 5, придавая $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5$ постоянные значения. Тогда каждому значению l_3 соответствуют определен-

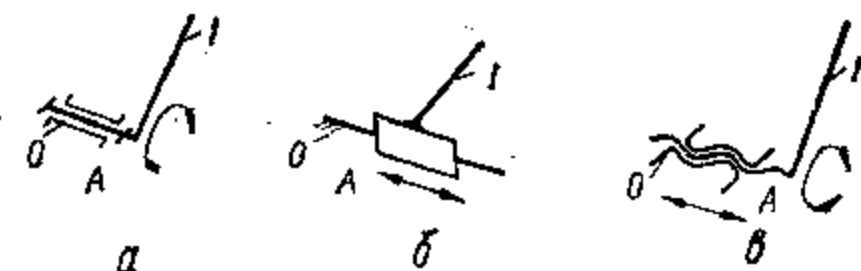
ные значения параметров φ_4 и l_3 . При фиксации звеньев 5 и 4 каждому значению φ_1 соответствуют определенные значения φ_2 и l_3 . Степень подвижности цепи в этих случаях равна единице. Если в первом случае зафиксировать дополнительно звено 3 или 4, а во втором — звено 3, то свободные звенья цепи станут неподвижными, а $W = 0$. Из рассмотренного следует, что если в кинематической цепи сообщить движение количеству звеньев, равному ее степени подвижности, то движения остальных звеньев однозначно определятся. Такие кинематические цепи называют механизмами. Звенья цепи, которым придают движение извне, называют *входными*. Следовательно, под механизмом понимают кинематическую цепь, у которой число входных звеньев равно степени подвижности.

2. МЕХАНИЗМЫ

2.1. Основные признаки механизмов

В энергетических машинах, служащих для преобразования различных видов энергии в механическую работу, получают механическое движение в виде непрерывного вращательного или возвратно-поступательного перемещения выходных звеньев. Если скорость движения по величине или направлению, усилие или момент, развиваемые этими звеньями, не соответствуют заданным для выполнения необходимой работы или по соображениям компоновки агрегата нельзя рабочий орган присоединить непосредственно к дви-

Рис. 2.1. Кинематические пары 5-го класса: входное звено — стойка



гателью, то между ними устанавливают механизмы определенного типа. Они преобразуют движение входного звена в строго определенное требуемое движение другого звена, называемого *выходным*. С помощью различных механизмов достигается переменная или постоянная скорость выходного звена при заданной скорости входного. Необходимый закон движения выходного звена обеспечивается выбором соответствующей структуры механизма и определенных классов кинематических пар.

Механизм может иметь несколько входных и одно выходное звено и наоборот. Конструктивно выходное звено одного механизма одновременно может быть входным звеном другого, присоединенного к нему механизма. Входные и выходные звенья механизма связаны между собой кинематическими цепями, структура и геометрия которых обеспечивают заданное определенное относительное движение входных и выходных звеньев. Движение этих звеньев рассматривается относительно неподвижной координатной системы, связанной со стойкой. Чаще всего входное звено механизма соединяется со стойкой кинематическими парами 5-го класса (рис. 2.1).

По назначению механизмы разделяются на передаточные и направляющие. В передаточном механизме обеспечивается заданное относительное перемещение входного и выходного звеньев, при котором происходит преобразование обычно равномерного вращательного или поступательного движения входного звена в непрерывное или прерывистое поступательное или вращательное движение выходного звена в заданной функциональной зависимости. В направляющих механизмах точки выходного звена движутся по заданным траекториям. Один и тот же механизм может быть использован как направляющий или передаточный.

По характеру движения звеньев механизмы делятся на плоские и пространственные. Плоскими называются механизмы, у которых траектории точек подвижных звеньев описывают плоские кривые, лежащие в параллельных плоскостях. Такое движение обеспечивается определенной ориентацией кинематических пар 4-го и 5-го классов. Иногда в плоских механизмах применяются кинематические пары 3-го и 2-го классов, но в определенном сочетании с парами 5-го класса и в таком месте кинематической цепи, чтобы не нарушить принципиального характера движения звеньев. Плоские механизмы получили большое распространение из-за простоты расчета и технологии изготовления.

Пространственными механизмами называются механизмы, точки звеньев которых описывают неплоские траектории или траектории, лежащие в пересекающихся плоскостях. В таких механизмах для выполнения определенных функций количество звеньев, а значит и кинематических пар, сведено к минимуму. В пространственных механизмах отсутствуют ограничения на относительное расположение входных и выходных звеньев, а возможность выбора для кинематической цепи необходимого типа кинематических пар из всех пяти классов их создает лучшие условия для образования новых типов механизмов.

2.2. Плоские механизмы с низшими кинематическими парами

Механизмы, звенья которых образуют только низшие (вращательные, поступательные, цилиндрические и сферические) кинематические пары, называются шарнирно-рычажными. Эти механизмы нашли широкое применение в машиностроении и приборостроении вследствие того, что при взаимодействии звеньев усилия в кинематических парах распределяются по поверхностям. Благодаря этому давления, а следовательно, и износ этих элементов ниже, чем элементов в высших парах. К достоинствам шарнирно-рычажных механизмов следует отнести простую геометрическую форму звеньев, что упрощает технологию их изготовления.

Основой для многих плоских механизмов служит шарнирный четырехзвенник (рис. 2.2, а): звено 1, совершающее полный оборот, называется кривошипом; звено 2, совершающее сложное движение, — шатуном, звено 3 — коромысло — совершает качательное движение. Оси кинематических пар 5-го A , C , D и 4-го B классов

в этом механизме выполнены перпендикулярно к плоскостям, в которых находятся траектории точек звеньев. Подобный механизм образуется теми же звеньями при замене пары C 5-го класса парой 3-го класса (рис. 2.2, б).

На базе шарнирного четырехзвенника построен плоский кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.3), служащий для преобразования вращательного или возвратно-качательного движения входного звена 1 в возвратно-поступательное движение выходного звена — ползуна 3. Оси вращательных и цилиндрических кинематических

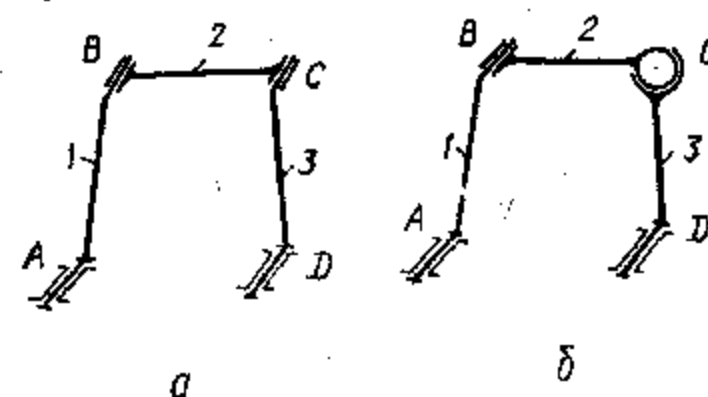


Рис. 2.2. Плоский шарнирный четырехзвенник с парами 5, 4, 3-го классов

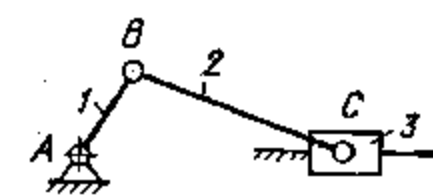


Рис. 2.3. Кривошипно-ползунный механизм

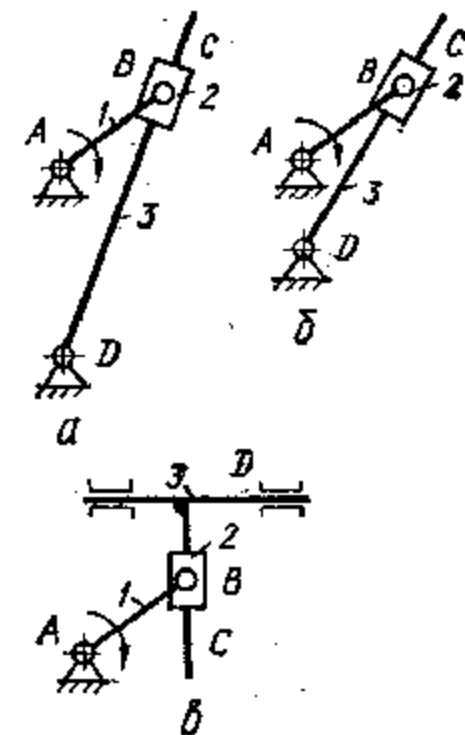


Рис. 2.4. Различные виды кривошипно-кулисных механизмов

пар в этом механизме расположены перпендикулярно к направлению движения ползуна. Этот механизм — основной во всех поршневых машинах (двигатели внутреннего сгорания, компрессоры, насосы, прессы и т. п.), а также сельскохозяйственных, дорожных и других машин.

Плоские кривошипно-кулисные механизмы (рис. 2.4) имеют в своем составе входное звено — кривошип 1, образующий вращательную пару B с ползуном 2, который, в свою очередь, входит в поступательную пару C с кулисой 3, являющейся выходным звеном. В этих механизмах при равномерном вращении входного звена можно получить неравномерное качательное (рис. 2.4, а), вращательное (рис. 2.4, б), поступательное (рис. 2.4, в) движения выходного, что позволяет увеличить производительность машин за счет сокращения времени холостого хода.

Механизмы со сложными структурно-кинематическими схемами в большинстве своем в качестве основной преобразующей движение части имеют один из рассмотренных выше типов механизмов.

2.3. Пространственные механизмы с низшими кинематическими парами

Пространственные шарнирно-рычажные механизмы применяются в качестве передаточных или направляющих для воспроизведения пространственных кривых, если оси кинематических пар, составленные входными и выходными звеньями со стойкой, пересекаются или скрещиваются в пространстве. Аналогично плоскому широко

применяется пространственный шарнирный четырехзвено-
вик, состоящий лишь из пар

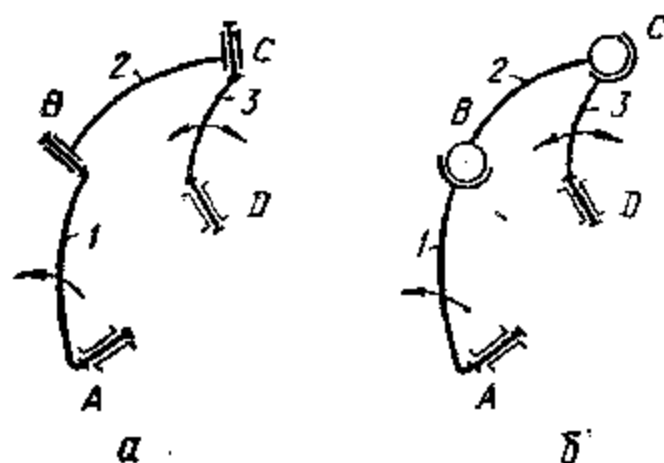


Рис. 2.5. Сферический четырехзвенник

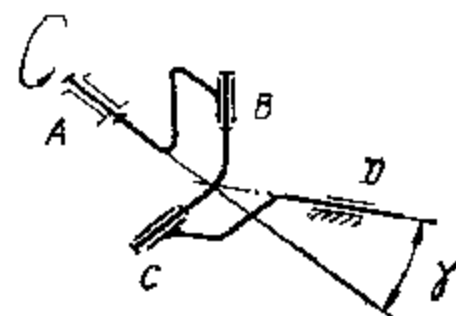


Рис. 2.6. Универсальный шарнир

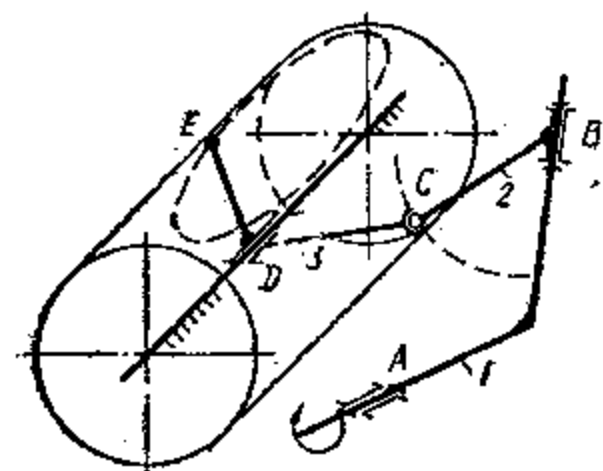


Рис. 2.7. Механизм для воспроизведения заданной траектории точки

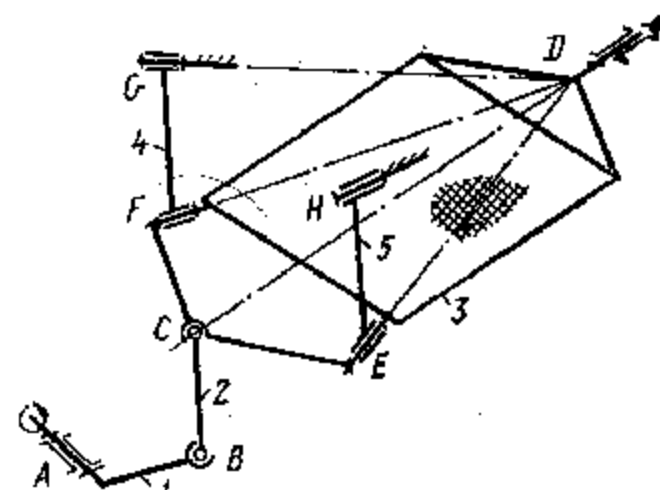


Рис. 2.8. Механизм сита

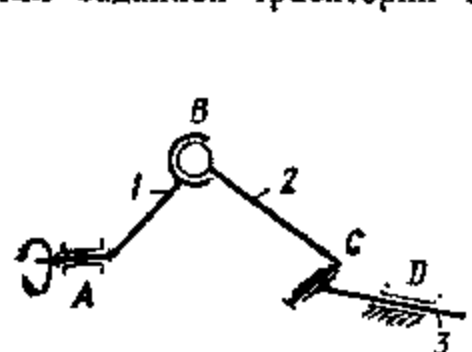


Рис. 2.9. Пространственный кривошипно-ползунный механизм

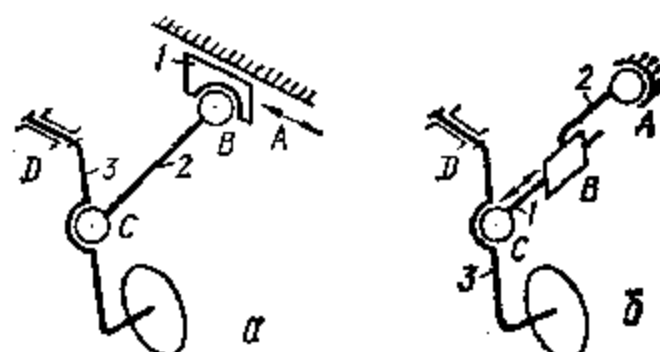


Рис. 2.10. Механизм шасси самолета

5-го класса (рис. 2.5, а) или включающий также и пары В, С 3-го класса (рис. 2.5, б). Его применяют для передачи движения между двумя скрепляющимися осями. Точки на шатуне 2 описывают сложные пространственные кривые.

Структурные преобразования пространственного четырехзвенника позволяют получить разные модификации кинематических соединений механизмов *универсальных шарниров* (рис. 2.6). Их используют в металлорежущих станках, автомобилях и других машинах для передачи движения между валами, расположенными под углом γ , а также в тех случаях, когда положение валов в процессе работы изменяется.

Механизм пространственного шарнирного четырехзвенника — структурная основа многих специальных механизмов — обеспечивает возможность получения необходимых соотношений между перемещениями входных и выходных звеньев при малом числе про-

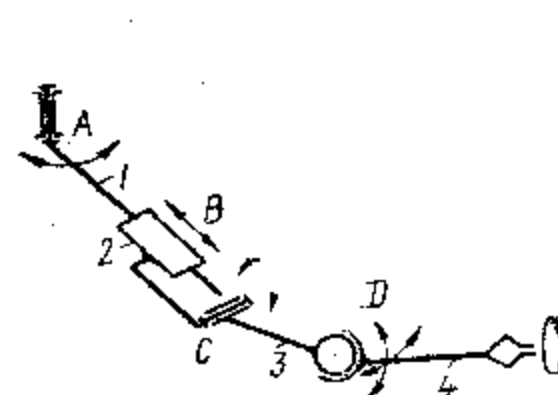


Рис. 2.11. Механизм манипулятора

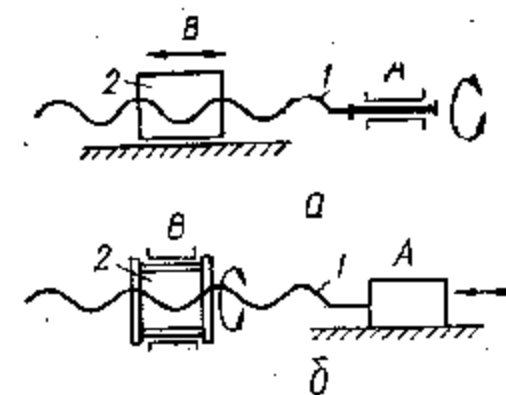


Рис. 2.12. Винтовые меха-
визмы

межуточных. Это помогает избежать применения сложных структурных схем. Например, механизмы петлителей швейных и вязальных машин должны воспроизводить заданную траекторию точки на цилиндрической поверхности. Они имеют простые структурные схемы, если применить механизм пространственного четырехзвенника (рис. 2.7). Требуемая траектория точки E воспроизводится применением вращательной пары 5-го класса B для соединения звеньев 1 и 2, в результате чего точка C движется по поверхности цилиндра, а звено 3, соединенное с неподвижной направляющей цилиндрической кинематической парой 4-го класса, совершает поступательное и вращательное движение относительно направляющей, обеспечивая точке E требуемый характер движения.

Хорошие эксплуатационные показатели и низкий уровень динамических нагрузок имеют механизмы сит, используемые в строительстве (рис. 2.8) и имеющие в своей основе рассматриваемую схему. От кривошипа 1 пространственное движение сообщается ситу 3, точка C которого описывает кривую на сфере с центром в D . Оси шарниров E, F, G, H должны пересекаться в точке D .

Пространственный кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.9) применяется в случае, если ось вращения входного звена 1 не перпендикулярна к плоскости, в которой движется ползун 3. Эти механизмы широко применяются для преобразования вращательного движения в поступательное и наоборот. На рис. 2.10, а, б показаны примеры применения пространственного кривошипно-ползунного механизма в устройствах управления шасси самолета, в которых входные звенья имеют разный характер движения.

К пространственным шарнирно-рычажным механизмам относятся также механизмы манипуляторов (рис. 2.11). Особенность этих механизмов заключается в том, что звенья 1, 2, 3, 4 — входные и замыкание их в кинематическую цепь осуществляется гидравлическим, электрическим или другими способами в зависимости от типа двигателей, приводящих их в движение. Согласованная работа двигателей этих звеньев обеспечивает перемещение определенной точки выходного звена 4 по заданной траектории.

Широко применяются винтовые механизмы (рис. 2.12), в которых с помощью кинематической винтовой пары B осуществляется преобразование вращательного (рис. 2.12, а) или поступательного (рис. 2.12, б) движения входного звена 1 в поступательное (или вращательное) движение выходного звена 2. Комбинируя расположение и количество кинематических пар 5-го класса разных типов, получают разнообразные винтовые механизмы для решения многих частных задач. Их применяют в металлорежущих станках, прессах, приборах, измерительных устройствах и т. п.

2.4. Плоские механизмы с высшими кинематическими парами

При помощи шарнирно-рычажных механизмов многие законы движения и траектории точек выходных звеньев воспроизводятся только приближенно, а иногда и вовсе неосуществимы (например, движение выходного звена с постоянно увеличенной или уменьшенной скоростью по отношению к скорости входного). Это связано с тем, что низшие кинематические пары предоставляют ограниченные возможности в выборе подвижностей. Значительно большие возможности выполнения заданных законов движения и траекторий точек выходных звеньев представляют собой механизмы, звенья которых образуют и высшие кинематические пары.

Простейший представитель таких механизмов для обеспечения постоянной скорости выходного звена — фрикционный (рис. 2.13), в котором передача от входного 1 к выходному звену 2 осуществляется за счет сил трения, возникающих на элементах высшей кинематической пары B . Элементом является точка или линия (может быть несколько линий). Сила трения создается благодаря силовому замыканию высшей кинематической пары. При больших расстояниях между осями вращения входного и выходного звеньев применяются фрикционные механизмы с гибкой связью (рис. 2.14, а, б). В качестве гибких звеньев применяют ремни разного профиля.

В роли передаточного механизма для воспроизведения требуемого закона движения выходного звена при заданном движении входного звена применяются кулачковые механизмы (рис. 2.15). Необходимый закон движения достигается приданием входному звену — кулачку 1 — соответствующей геометрической формы. Кулачок совершает вращательное (рис. 2.15, а, б) или поступательное (рис. 2.15, в, г) движение, а выходное звено 2 — поступательное (рис. 2.15, а, в). В этом случае оно называется толкателем; при качательном движении (рис. 2.15, б, г) — коромыслом. Для снижения потерь на трение в высшей кинематической паре B кулачок — тол-

катель (или коромысло) применяют дополнительное звено 3 — ролик, образующее со звеном 2 вращательную пару D . Для обеспечения постоянного замыкания кинематической пары используют пружины или элементам пары придают соответствующую форму. Кулачковые механизмы употребляют в разного рода управляющих устройствах (электрических, гидравлических и пневматических ап-

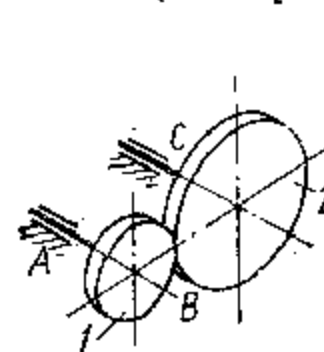


Рис. 2.13. Фрикционный механизм

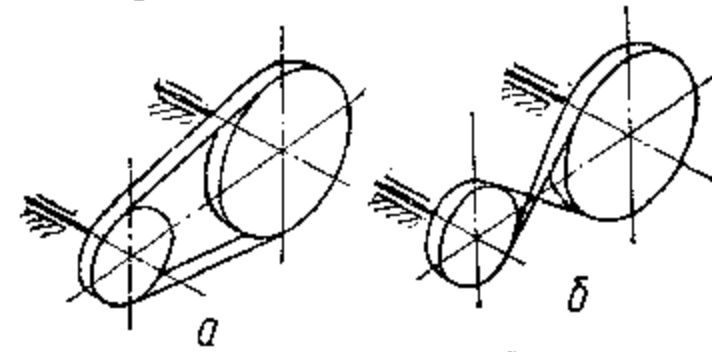


Рис. 2.14. Механизм с гибкой связью трения

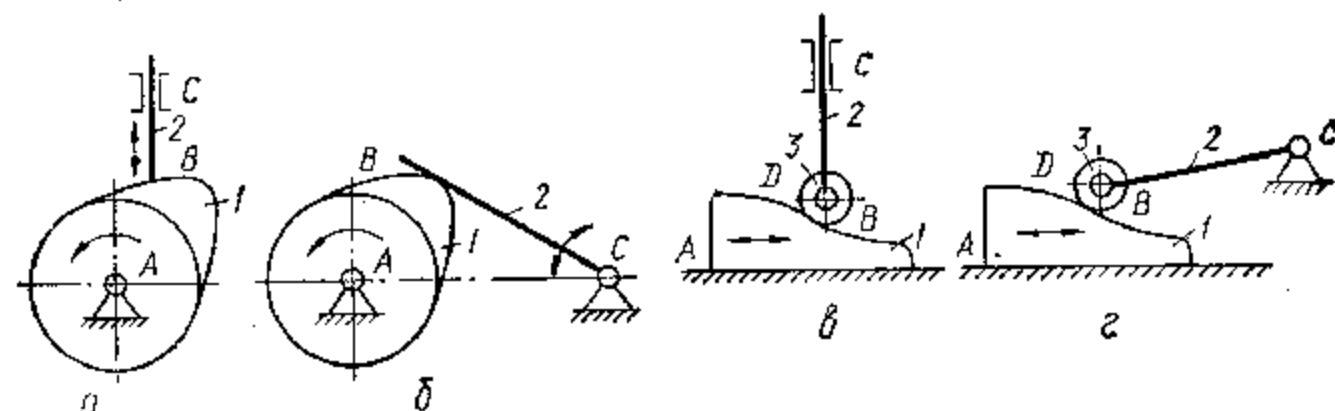


Рис. 2.15. Кулачковые механизмы

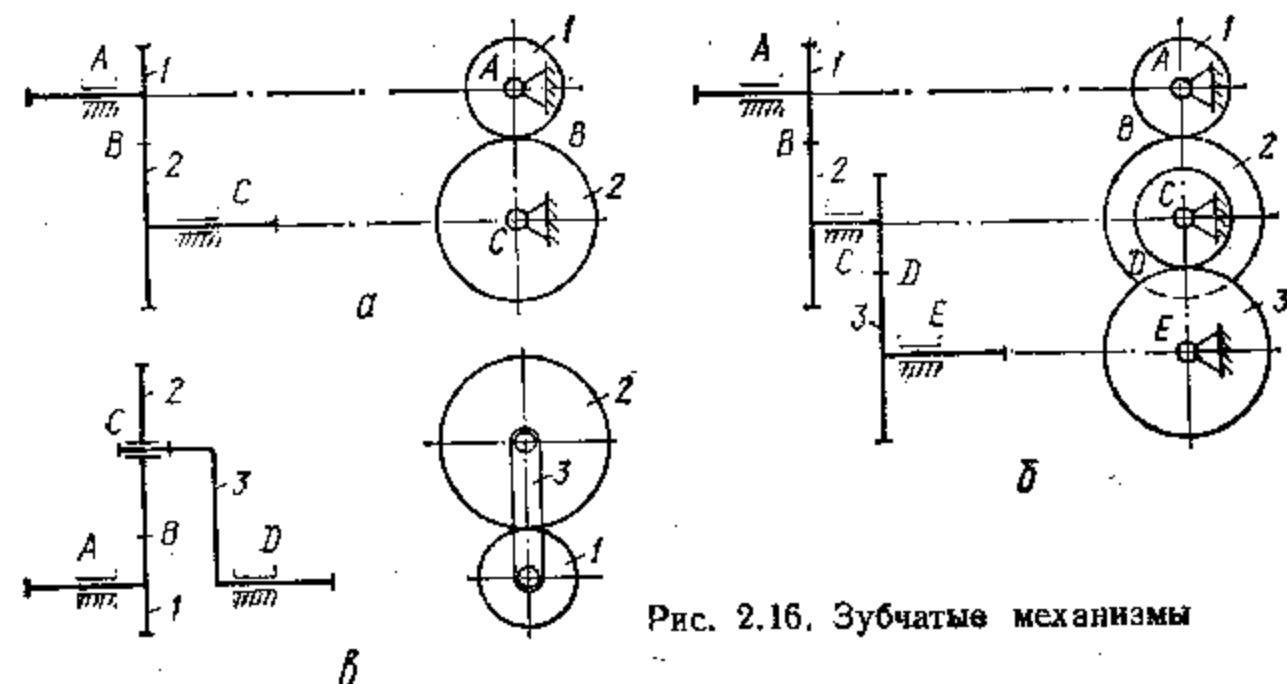


Рис. 2.16. Зубчатые механизмы

паратах, клапанных системах и т. п.). В некоторых механизмах — механических прессах, формовочных машинах, силикатных машинах и др. — их применяют непосредственно для преодоления сил технологического сопротивления.

Если при заданном вращении входного звена 1 (рис. 2.16, а) нужно получить непрерывное движение выходного звена 2 в одном направлении, используются механизмы с последовательно взаимодействующими парами поверхностей, располагающимися на опре-

деленном количестве выступов, называемых *зубьями*. Для обеспечения постоянства скорости выходного звена этим поверхностям придают специальную форму. Полнооборотные звенья с замкнутой системой зубьев, обеспечивающих непрерывное движение других подобных звеньев, называются *зубчатыми колесами*, неполнооборотные — *зубчатыми секторами*. Контактующие зубья зубчатых колес образуют высшую кинематическую пару, называемую *зубчатым зацеплением*.

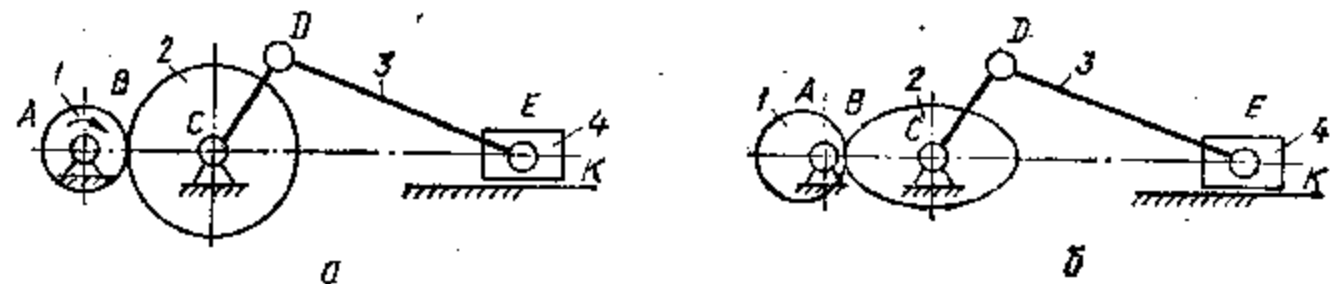


Рис. 2.17. Зубчато-рычажные механизмы

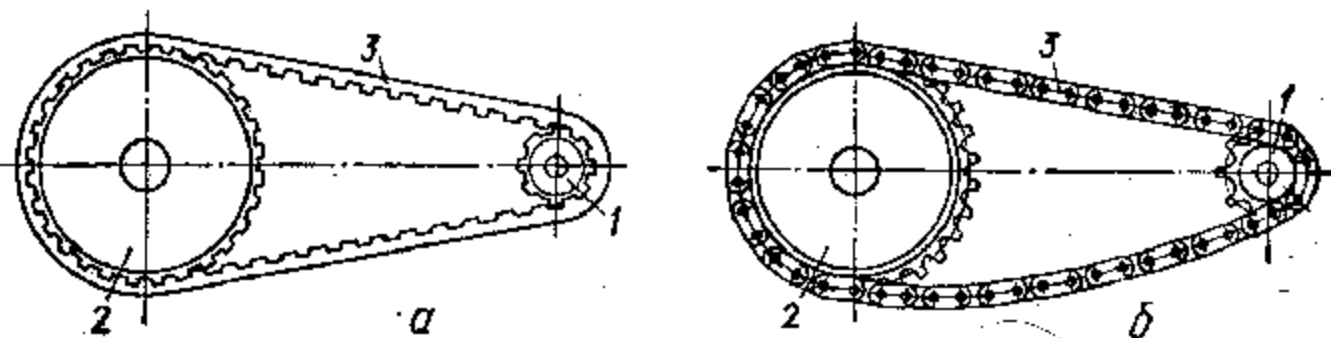


Рис. 2.18. Механизм с гибкой связью зацепления

Механизмы, в состав которых входят зубчатые колеса, называют *зубчатыми*. Плоские зубчатые механизмы, в состав которых входят цилиндрические зубчатые колеса с зубьями, расположенными на цилиндрических поверхностях, служат для передачи движения между параллельными осями. Зубчатые механизмы имеют одну или несколько пар зубчатых колес. Зубчатые механизмы разделяются на *рядовые* (рис. 2.16, б), в которых оси всех колес неподвижны, *сателлитные* (рис. 2.16, в), в которых некоторые колеса совершают два вращательных движения — вокруг собственной оси и вокруг центральной оси другого звена, и *зубчато-рычажные системы* с круглыми (рис. 2.17, а) и некруглыми колесами (рис. 2.17, б).

Зубчатые колеса применяют для изменения частоты вращения выходного звена — *ведомого вала* — по сравнению с частотой вращения входного звена — *ведущего вала*, направления вращения ведомого вала, суммирования нескольких движений. Они служат также в качестве механизмов управления, воспроизведения заданных функций и направляющих механизмов.

При необходимости сохранения строгого постоянства соотношения скоростей для передачи вращения при больших расстояниях между входными и выходными звеньями используют зубчатые механизмы с гибкой связью в виде зубчатого ремня или цепи (рис. 2.18, а, б). Зубчатый ремень 3 входит в зацепление со шкивами 1 и 2, снабженными зубьями. Цепь огибает цилиндрические коле-

са, снабженные зубьями, очерченными определенными поверхностями, — *звездочки*. Вращение выходного звена осуществляется от входного за счет тягового усилия, передаваемого элементами зубчатого ремня или цепи.

2.5. Пространственные механизмы с высшими кинематическими парами

Фрикционные механизмы при пересекающихся осях (рис. 2.19) передают движение не только с постоянным отношением скоростей (рис. 2.19, а) входного 1 и выходного 2 звеньев, но и с плавным изменением этого отношения (рис. 2.19, б). Переменная скорость выходного звена достигается относительным перемещением промежуточных звеньев 3.

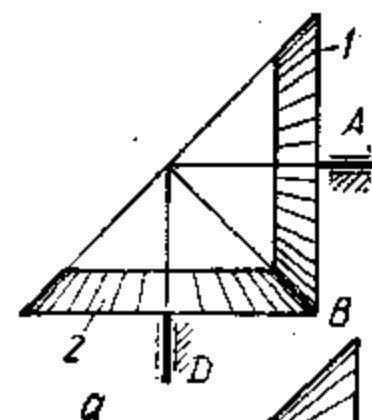


Рис. 2.19. Фрикционные пространственные механизмы

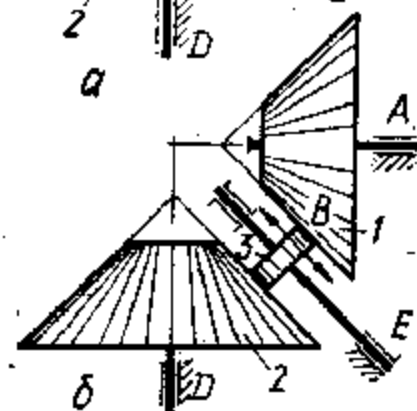


Рис. 2.20. Кулачковые пространственные механизмы

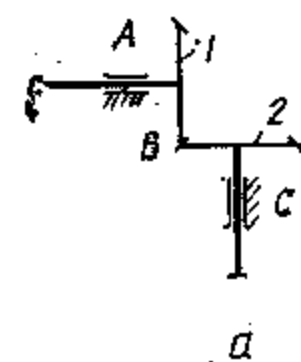


Рис. 2.21. Зубчатые механизмы с пересекающимися осями

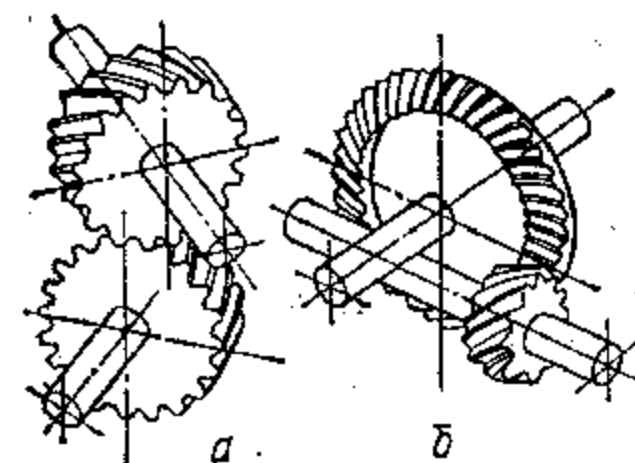


Рис. 2.22. Зубчатые механизмы со скрещивающимися осями

Широко распространены пространственные кулачковые механизмы (рис. 2.20). Чаще всего входное звено 1 осуществляет плоское вращательное (рис. 2.20, а) или поступательное (рис. 2.20, б) движение, а благодаря форме элементов высшей пары В и разной структуре механизма выходное звено 2 совершает сложное движение в пространстве.

Зубчатые пространственные механизмы применяются для передачи движения между пересекающимися или скрещивающимися осями. В механизмах с пересекающимися осями, называемых

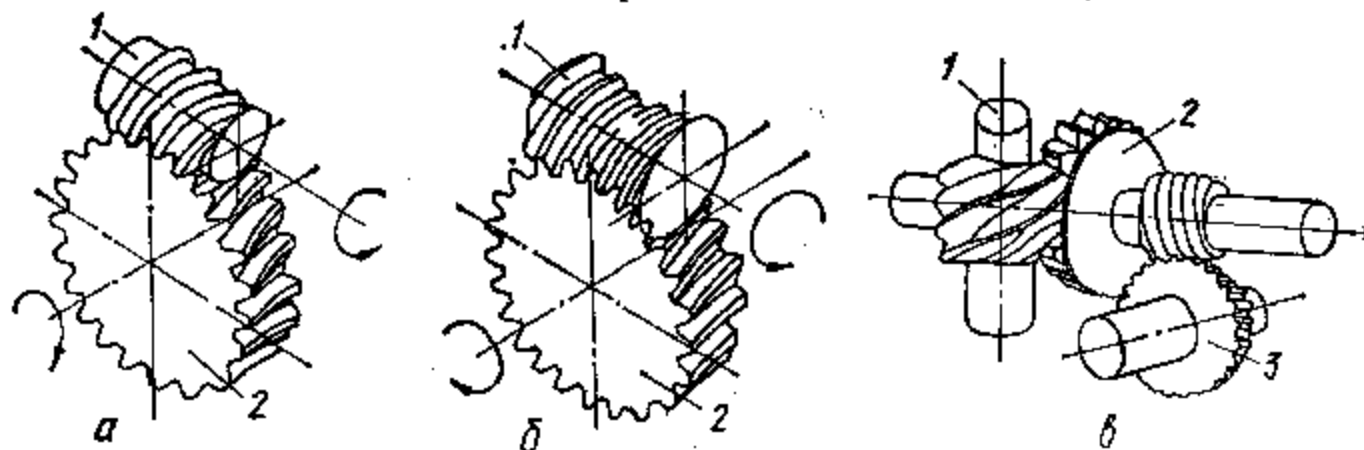


Рис. 2.23. Червячные и глобоидные механизмы

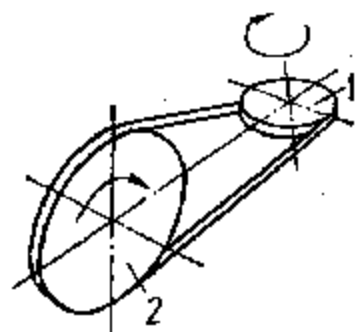


Рис. 2.24. Пространственный механизм с гибкой связью

коническими (рис. 2.21, а), зубья конических зубчатых колес располагаются на поверхностях конусов. Как и механизмы с цилиндрическими колесами, механизмы с коническими колесами бывают рядовыми (рис. 2.21, б) и сателлитными (рис. 2.21, в).

При скрещивающихся осях применяют *винтовые* (рис. 2.22, а) и *глобоидные* (рис. 2.22, б) механизмы, а также *червячные* (рис. 2.23, а) и *глобоидные механизмы* (рис. 2.23, б). В червячном механизме входное звено 1 — *червяк* — представляет собой цилиндр с винтовой нарезкой; выходное звено 2 — *червячное колесо* — входит в зацепление с червяком. В глобоидном механизме поверхность червяка образована вращением вокруг оси червяка вогнутого отрезка дуги окружности. Как и зубчатые, червячные механизмы могут образовывать *многоступенчатые*, чаще *двухступенчатые* механизмы (рис. 2.23, в). Между входным 1 и выходным 2 звеньями, расположенными в пространстве на большом расстоянии (рис. 2.24), применяют также механизмы с гибкими связями с помощью ремня или цепи.

2.6. Механизмы с немеханическим способом передачи движения

Рассмотренные выше кинематические цепи разных типов механизмов имеют одно общее свойство — передача движения в них от одного звена к другому осуществлялась механическим способом, т. е.

через взаимодействие двух твердых звеньев. Кинематика и динамика таких механизмов определяются по законам механики недеформируемого тела, основные положения которой изучаются в общем курсе теоретической механики. В большом классе механизмов звенья приводятся в движение в результате взаимодействия с электромагнитными полями, потоками движущихся жидкостей или газов. Кинематика и динамика таких звеньев определяются уже не их механическими свойствами, а параметрами, характеризующими

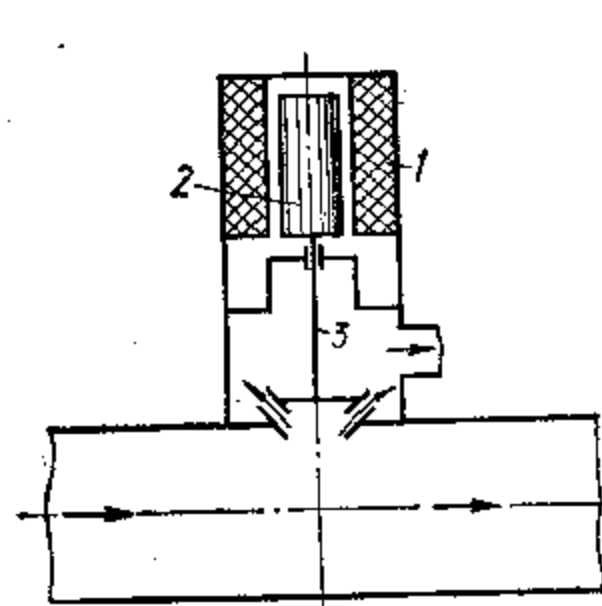


Рис. 2.25. Схема управления электромагнитом механизма клапана

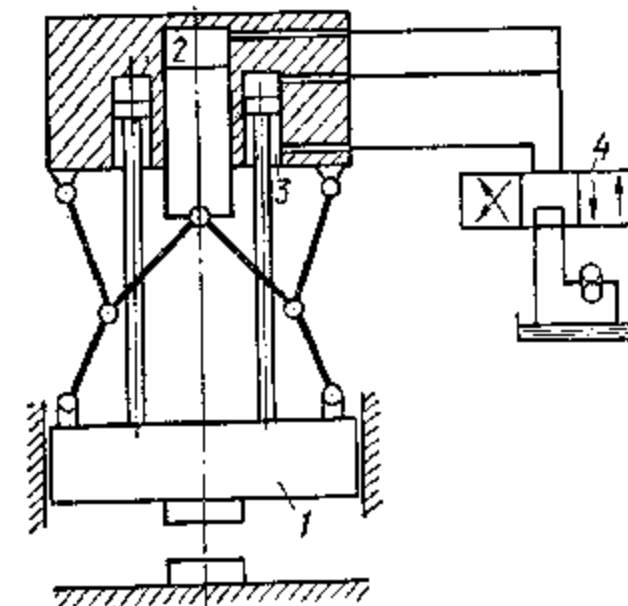


Рис. 2.26. Механизм гидромеханического пресса

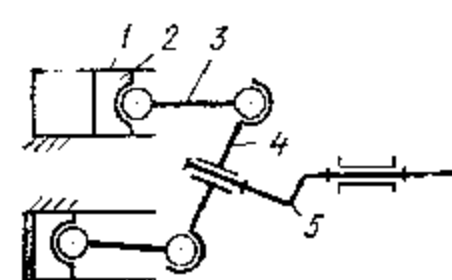


Рис. 2.27. Механизм гидравлического двигателя

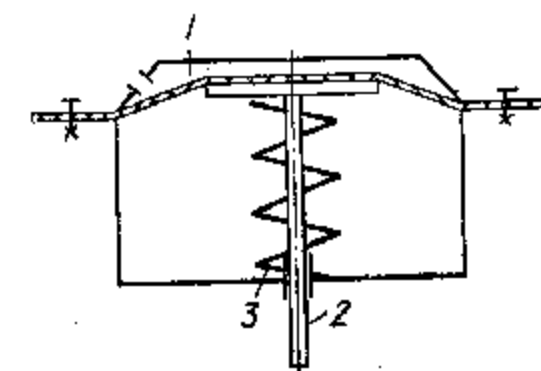


Рис. 2.28. Механизм с пневмоприводом

свойства немеханической среды, которые могут быть найдены на основе законов электродинамики, гидродинамики, аэродинамики и др.

Во многих машинах и механизмах немеханическим способом приводятся в движение только некоторые звенья цепи, чаще всего — входные, а передача движения остальным звеньям осуществляется механическим способом. Наибольшее распространение получили механизмы с электроприводом — электромеханическим устройством, в котором источником механического движения служит электродвигатель. В самом электродвигателе выходное звено — ротор — приводится в движение в результате взаимодействия с движущимся электромагнитным полем. Взаимодействием с электромагнитным полем обмотки 1 якоря 2, совмещенного со штоком 3 клапана (рис. 2.25), осуществляется управление механизмом клапана.

В механизмах с гидравлическим приводом поступательное или вращательное движение звена достигается за счет нагнетания под давлением рабочей жидкости в полость, в которой оно движется. В гидромеханическом прессе (рис. 2.26) необходимое рабочее усилие на плиту 1 достигается подачей под давлением жидкости в полости цилиндров 2. Для подъема плиты жидкость под давлением подается в полости 3. Управление работой осуществляется с помощью золотника 4 переключением его в соответствующую позицию. На рис. 2.27 приведена схема механизма гидравлического двигателя, в котором жидкость, нагнетаемая под давлением в полости цилиндров 1, приводит в поступательное движение поршни 2, которое преобразуется во вращательное движение косоугольного кривошипа 5 с помощью шатунов 3 и диска 4.

Под механизмами с пневматическим приводом обычно понимают поршневые или роторные механизмы, входные звенья которых приводятся в движение энергией сжатого газа (воздуха). Они используются чаще всего в системах управления работой машины, а также в качестве ведущих в машинах, в которых применение других видов привода нецелесообразно. Например, если механизм работает во взрывоопасной среде, то для предупреждения искробразования вместо электропривода применяют пневмопривод. На рис. 2.28 показана типичная схема пневмопривода механизма систем управления. Здесь под действием сжатого воздуха эластичная диафрагма 1 прогибается и перемещает шток 2. В исходное положение она возвращается пружиной 3 при снятии давления.

В последующем будут рассматриваться только механизмы, у которых передача движения от одного звена к другому осуществляется механическим способом.

3. СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Задача структурного синтеза

В структурном синтезе механизмов разрабатываются кинематические цепи с минимальным количеством звеньев для преобразования движения заданного количества входных звеньев в требуемые движения выходных. *Результатом структурного синтеза механизма является его структурная схема, указывающая звенья и характер их взаимосвязи (класс кинематических пар).* Выходное звено может двигаться с постоянной или переменной скоростью. Движение это бывает непрерывное или прерывистое (с остановками), неизменное или циклически изменяющееся. Для направляющих механизмов важно, чтобы траектории точек выходного звена соответствовали заданным. Задачи структурного синтеза многовариантны. Одно и то же преобразование движения получают различными по структуре механизмами. Поэтому при выборе оптимальной структурной схемы учитываются технология изготовления звеньев и кинематических пар, а также условия эксплуатации механизмов.

Различают *плоские* и *пространственные* структурные схемы. При синтезе плоской структурной схемы принимается, что звенья механизма перемещаются только в одной плоскости (рис. 3.1, а) и у них отсутствуют перемещения s_z , φ_x и φ_y . Такое относительное движение звеньев осуществляется при использовании кинематических пар только 5-х классов с перемещениями s_x , s_y и φ_z . При структурном синтезе механизмов выбор типа реальных кинематических пар производят с учетом обеспечения работоспособности механизма, особенностей технологии изготовления, сборки, монтажа и условий эксплуатации. Поэтому после синтеза плоской структурной схемы переходят к пространственной схеме (рис. 3.1, б).

3.2. Структурные группы

Проектирование механизмов, звенья которых образуют замкнутые контуры, производится присоединением к входным звеньям и стойке кинематических цепей изменяемой конфигурации, число степеней свободы которых относительно элементов её внешних кинематических пар равно нулю. Такая кинематическая цепь называется *структурной группой*. Количество звеньев, число и класс кинематических пар в плоских структурных группах, называемых группами Ассура, должны соответствовать соотношению (1.2); для плоских структурных схем при $p_3 = 0$, $p_2 = 0$, $p_1 = 0$ получим $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 0$ и, следовательно, условие существования плоской структурной группы Ассура имеет вид

$$3n = 2p_5 + p_4. \quad (3.1)$$

Простейшая структурная единица — *монада* — состоит из одного звена с элементами кинематических пар. Существуют три модификации пространственных монад (рис. 3.2): с элементами кинематических пар 1-го и 5-го, 2-го и 4-го или с двумя кинематическими парами 3-го классов. Если в пространственной монаде высшую кинематическую пару заменить эквивалентным ей в структурном отношении *кинематическим соединением*, состоящим из кинематической цепи с кинематическими парами более высоких классов, то полученные кинематические цепи будут обладать свойствами структурных групп. Например, монаде с парами 1-го и 5-го классов (рис. 3.3, а) будет эквивалентна двухзвенная кинематическая цепь с парами 3-го, 4-го и 5-го классов (рис. 3.3, б).

Простейшая монада на плоской структурной схеме (рис. 3.4) с двумя поводками имеет элементы двух внешних кинематических пар: высшей 4-го и низшей 5-го классов. Две модификации плоской монады отличаются видом кинематической пары 5-го класса, которая может быть вращательной (рис. 3.4, а) или поступательной (рис. 3.5, б). Структурные группы с числом поводков более двух образуются на базе сложных кинематических цепей с *замкнутыми внутренними контурами*. Примером может служить группа из звена 4 и трех поводков 1, 2, 3 с элементами внешних кинематических пар А, В, С 5-го класса — поступательными (рис. 3.5, а) или вращательными (рис. 3.5, б).

Из плоской монады 4—5 (см. рис. 3.3) получается двухзвенная структурная группа (диада) заменой кинематической пары 4-го класса кинематическим соединением из двух кинематических пар 5-го класса (рис. 3.6, а). Диана с одной внутренней кинематической парой C и элементами двух внешних B и D кинематических пар по

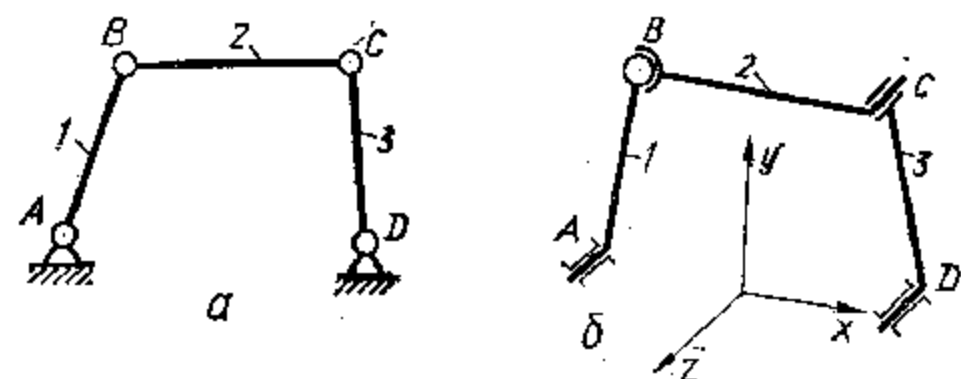


Рис. 3.1. Шарнирный четырехзвенник

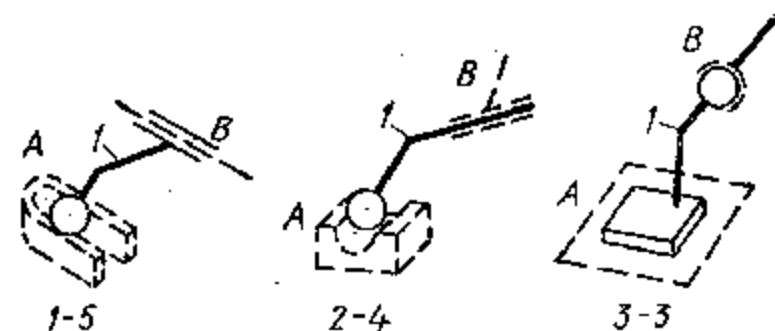


Рис. 3.2. Модификации пространственных монад

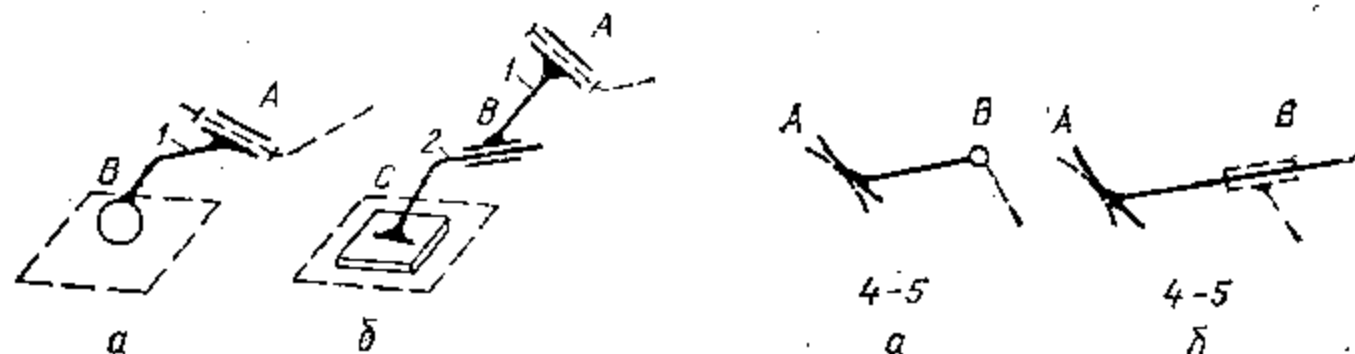


Рис. 3.3. Замена пространственной монады эквивалентной двухзвенной кинематической цепью

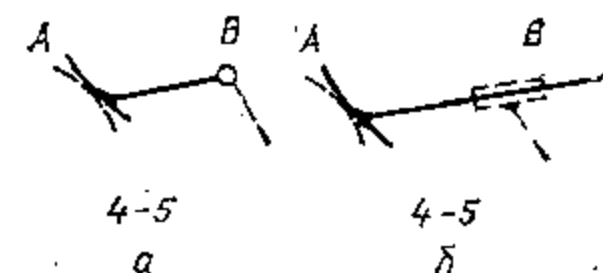


Рис. 3.4. Модификации плоских монад

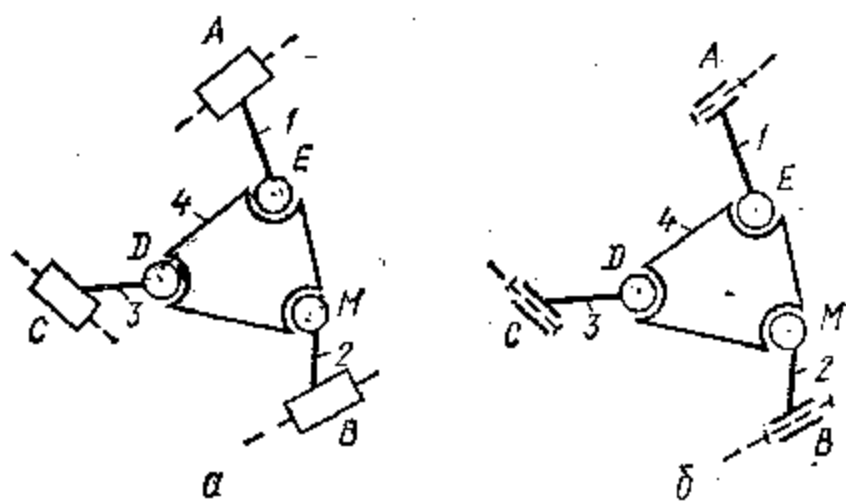


Рис. 3.5. Пространственная структурная группа с замкнутым внутренним контуром

классификации И. И. Артоболевского называется группой Ассура 2-го класса. Комбинируя в этой группе вращательные и поступательные кинематические пары, можно получить пять различных модификаций первого (рис. 3.6, а), второго (рис. 3.6, б), третьего

(рис. 3.6, в), четвертого (рис. 3.6, г) и пятого (рис. 3.6, д) видов. Класс группы по этой классификации определяется наибольшим количеством кинематических пар, образующих замкнутый контур.

Синтез более сложных плоских структурных групп, образующих замкнутые контуры, заключается в развитии и перестановке поводка. На примере двухповодковой группы 2-го класса (рис. 3.7, а) метод развития поводка заключается в том, что к одному из по-

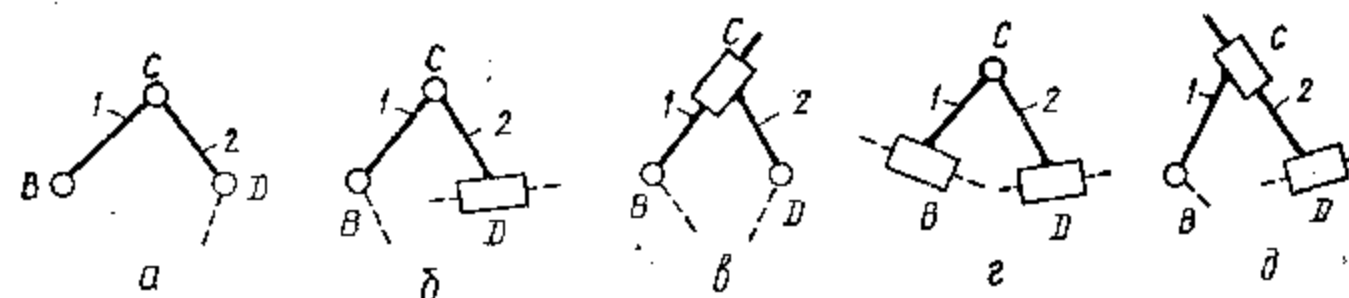


Рис. 3.6. Плоские структурные группы 2-го класса

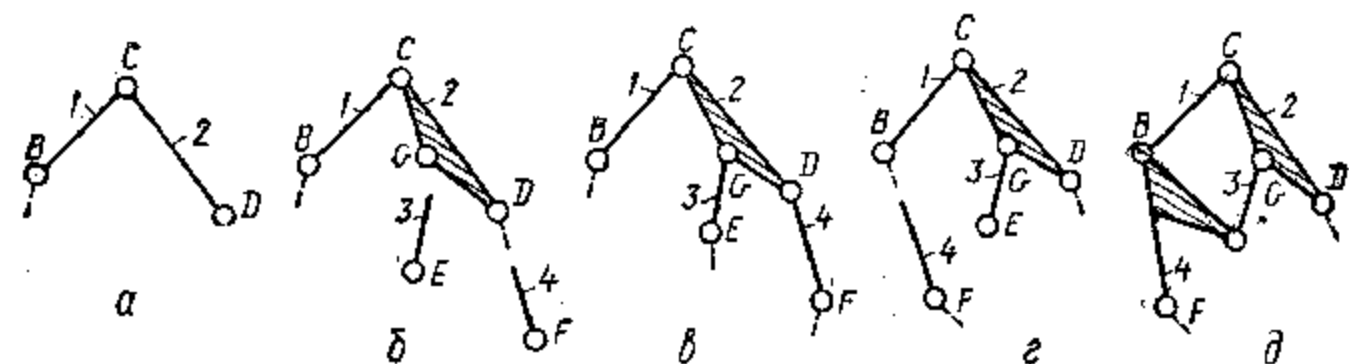


Рис. 3.7. Образование плоских структурных групп методом развития и перестановки поводка

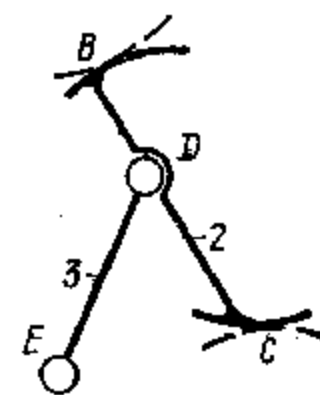


Рис. 3.8. Двухзвенная плоская структурная группа с высшими кинематическими парами

водков, например 2 (рис. 3.7, б), добавляются два поводка с элементами двух внешних кинематических пар 5-го класса E и F : поводок 3, образующий со звеном 2 новую кинематическую пару 5-го класса G , и поводок 4, составляющий со свободным элементом этого звена кинематическую пару D . В результате получается следующая по сложности трехповодковая группа Ассура 3-го класса (рис. 3.7, в): наивысший замкнутый контур группы образован тремя кинематическими парами C , G и D .

Метод перестановки поводка состоит в том, что поводок 4 (рис. 3.7, г) отсоединяется от звена 2; при этом элементы кинематической пары D вновь становятся внешними, а поводок 4 присоединяется к элементам кинематических пар B и E звеньев 1 и 3 (рис. 3.7, д). В результате получается группа Ассура 4-го класса

(наивысший контур образован кинематическими парами B, C, G и E) с элементами двух внешних кинематических пар D и F . Используя методы развития и перестановки поводка, получают сколь угодно сложные структурные группы с кинематическими парами 5-го класса.

Таким же путем получают сколь угодно сложные структурные группы с высшими кинематическими парами. Это достигается заменой в структурных группах поводка и двух кинематических пар 5-го класса кинематической парой 4-го класса на том основании, что две пары 5-го класса обладают степенью свободы, равной двум, которой обладает и высшая пара 4-го класса. Так, преобразуя группу Ассура 3-го класса (рис. 3.7, в) заменой поводков 1 и 4 высшими кинематическими парами 4-го класса, получим двухзвенную структурную группу (рис. 3.8) с двумя элементами высших кинематических пар 4-го класса и одним — 5-го.

3.3. Образование механизмов методом наложения структурных групп

Синтез структурных схем механизмов с заданным числом входных звеньев производится *методом наложения структурных групп*. Присоединением монады 2 к входному звену 1 и к стойке в зависимости от того, какими кинематическими парами осуществляется это присоединение, можно получить два варианта механизмов (рис. 3.9). Используя таким образом двухповодковую структурную группу, состоящую из двух звеньев 2 и 3 (рис. 3.10), получим кривошипно-коромысловый механизм (рис. 3.10, а). Более сложный механизм можно образовать присоединением второй структурной группы, состоящей из звеньев 4 и 5, к звену 3 механизма и к стойке (рис. 3.10, б). Последовательным наложением двухповодковых структурных групп можно образовать сколь угодно сложные механизмы.

Механизмы с числом входных звеньев, равным одному, двум и более, могут создаваться на основе многоповодковых (более двух поводков) структурных групп, образующих внутренние замкнутые контуры. Так, при помощи трехповодковой структурной группы (см. рис. 3.5, б) можно создавать механизмы с числом степеней свободы от 1 до 3. Например, присоединением такой группы к трем входным звеньям 5, 6, 7 (рис. 3.11), составляющим поступательные кинематические пары со стойкой, получим механизм, с помощью которого можно обеспечивать необходимое положение звена 4 в пространстве.

При синтезе структурных схем плоских механизмов пользуются плоскими структурными группами. При присоединении монады с поступательной кинематической парой (см. рис. 3.4, б) к входному звену и к стойке получается плоский кулачковый механизм с толкателем (рис. 3.12, а) или зубчато-реечный механизм (рис. 3.12, б). При присоединении монады с вращательной кинематической парой (см. рис. 3.3, а) к входному звену и к стойке получается плоско-

кий кулачковый механизм с коромыслом (рис. 3.12, в) или зубчатый механизм (рис. 3.12, г).

Плоские зубчатые механизмы на структурной схеме изображают в плоскости расположения осей вращения зубчатых колес (рис. 3.13, а). Условные обозначения кинематических пар 5-го класса в этом случае соответствуют их изображениям на пространственной схеме, а кинематическая пара, образованная зубчатым

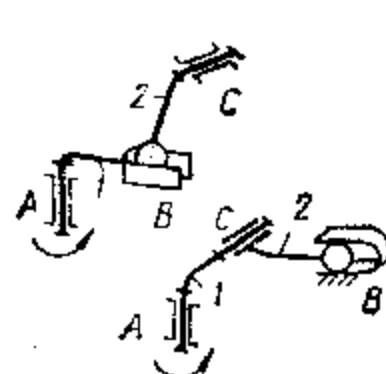


Рис. 3.9. Механизмы с пространственными монадами

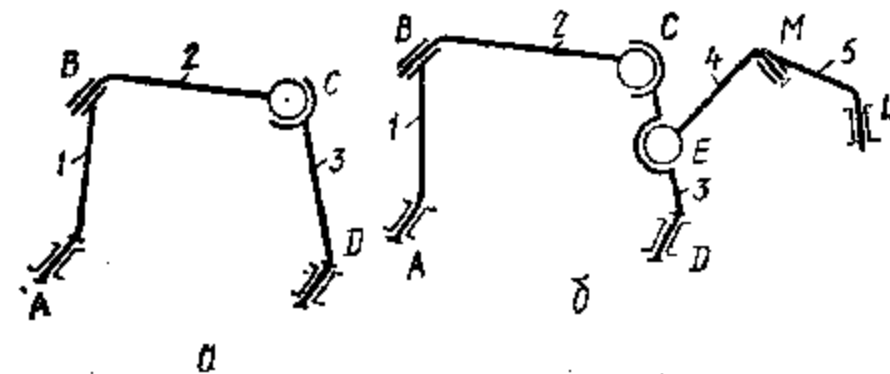


Рис. 3.10. Образование механизмов наложением структурных групп

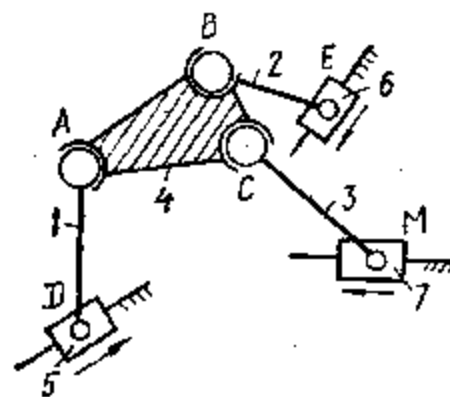


Рис. 3.11. Позиционер с трехповодковой пространственной структурной группой

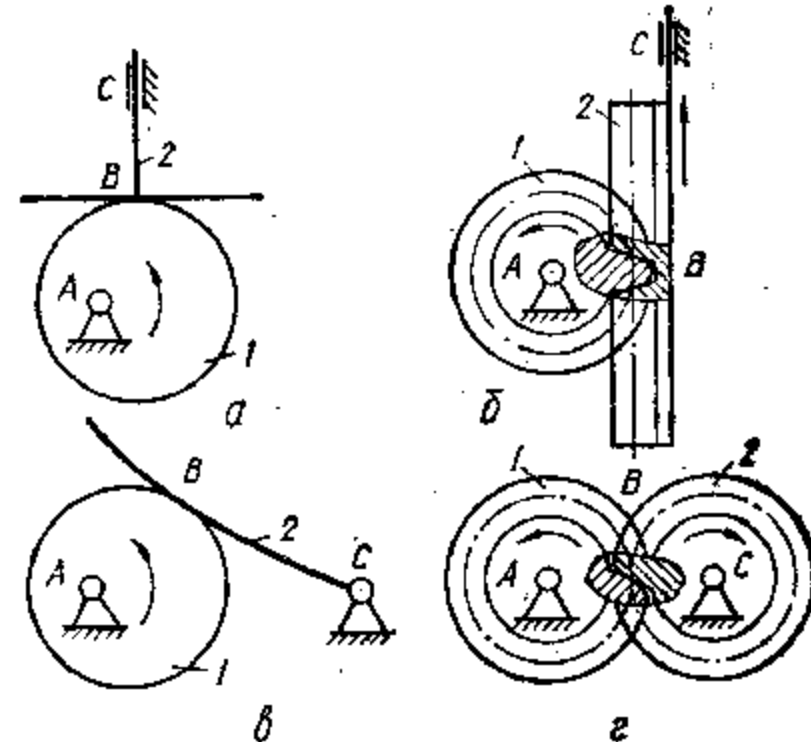


Рис. 3.12. Образование плоских механизмов при помощи плоских монад

зацеплением, изображается чертой, соединяющей звенья 1 и 2 структурной группы, входящие в эту пару. Последовательным присоединением плоских монад получают и более сложные плоские зубчатые механизмы, например, присоединением монады 3 к кинематическим парам D и E (рис. 3.13, б). Иногда зубчатые механизмы изображают и в двух проекциях (рис. 3.13, в).

Различные плоские шарнирно-рычажные механизмы образуются присоединением плоских структурных групп Ассура 2-го класса пяти видов. Группа Ассура 2-го класса второго вида (см. рис. 3.6, б), отличающаяся наличием свободного элемента одной внешней поступательной пары, чаще всего применяется в исполнении, когда центр средней вращательной пары C располагается на ползуне 3 (рис. 3.14, а). После присоединения такой группы элементами внеш-

вертого вида (рис. 3.6, *г*) применяется при образовании кулисно-ползунного (рис. 3.16, *а*), а группа пятого вида (см. рис. 3.6, *д*) —

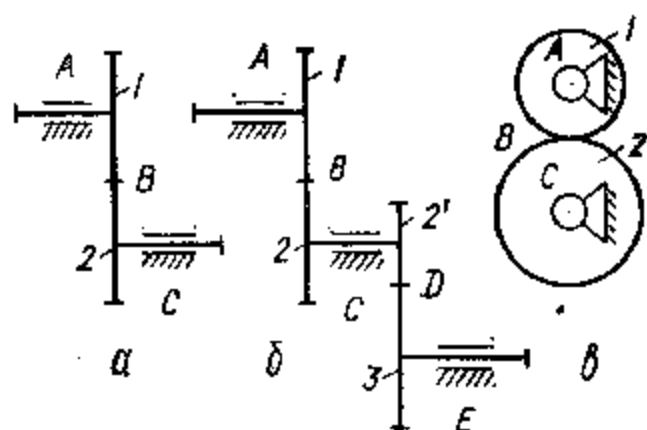


Рис. 3.14. Кривошипно-ползунный механизм

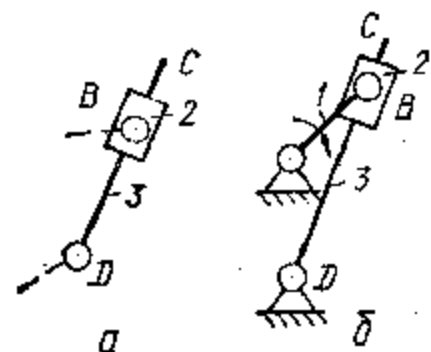


Рис. 3.15. Кривошипно-кулисный механизм

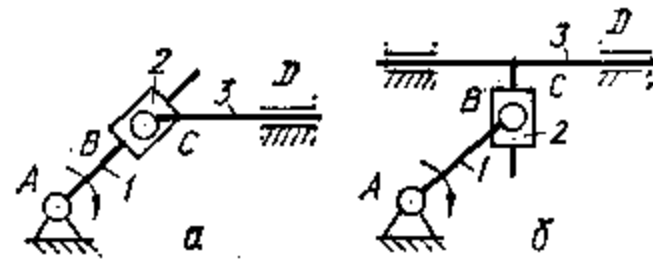


Рис. 3.16. Кулисно-ползунный и кривошипно-кулисный механизмы

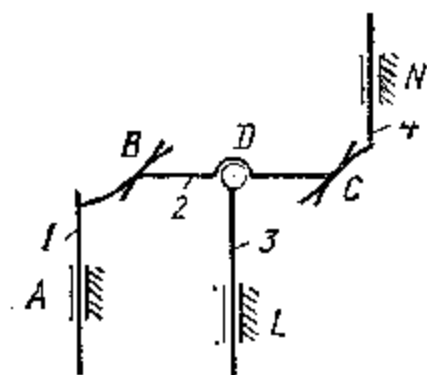


Рис. 3.17. Суммирующий механизм

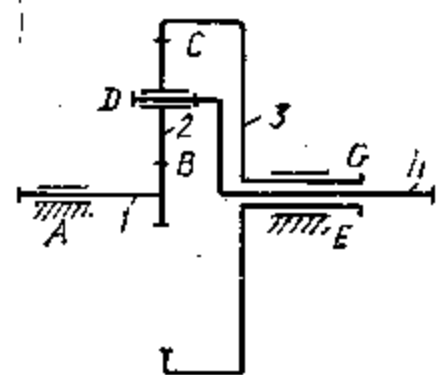


Рис. 3.18. Дифференциальный зубчатый механизм

Присоединением диады (см. рис. 3.8, б) к двум входным звеньям 1 и 4 к стойке получим *суммирующий механизм* (рис. 3.17), в котором перемещения этих звеньев преобразуются в перемещение выходного звена 3 как сумма величин, равных или пропорциональных перемещениям входных звеньев. Если входное, выходное и звено 2 этой структурной группы — зубчатые колеса, то структурная группа образует *плоский дифференциальный зубчатый механизм* (рис. 3.18).

В зависимости от выбора в кинематической цепи входного звена и стойки получают другие механизмы с измененным характером относительного движения некоторых звеньев. Если в плоской структурной схеме шарнирного четырехзвенника, образованного из плоской замкнутой кинематической цепи, стойкой будет звено 4

Рис. 3.21. Инверсия зубчатого дифференциала

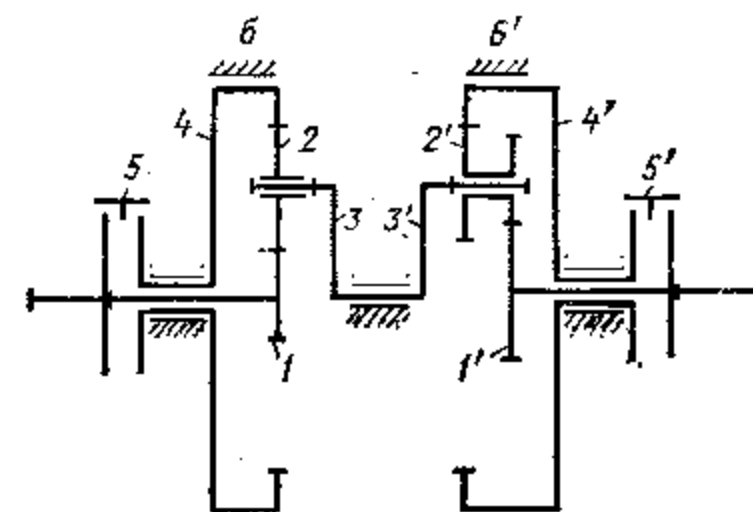


Рис. 3,22. Коробка скоростей

(рис. 3.19, а), то получим *кривошипно-коромысловый* механизм. Если закрепить неподвижно наименьшее звено 1 и сделать входным звено 2, то образуется другой вариант этого механизма — *двухкривошипный* (б). Такой прием получения вариантов механизма и его компоновок путем замены функций одного звена функциями другого

называется инверсией. Использование метода инверсии возможно при соотношениях длин звеньев, определяемых условием существования кривошипа в шарнирном четырехзвеннике (см. гл. 6).

Инверсией кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.20, а) при превращении ползуна 3 в стойку, а звена 2 — во входное получаем механизм с поступательно движущимся звеном 4 (рис. 3.20, б). Этот же механизм превращается в кривошипно-кулисный (рис. 3.20, в), если стойкой сделать звено 1, а входным — звено 2 (звено 4 станет кулисой).

Методом инверсии из дифференциального зубчатого механизма (см. рис. 3.18) получают три различных механизма (рис. 3.21). Так, остановкой звена 3 (рис. 3.21, а) или 1 (рис. 3.21, б) получаем два вида планетарных зубчатых механизмов с входным звеном 1 или h и 3 или h ; остановкой звена h — водила — (рис. 3.21, в) получаем рядовой зубчатый механизм. Этот метод используется для синтеза зубчатых механизмов со ступенчато изменяющейся скоростью вращения выходного звена. На рис. 3.22 изображена структурная схема механизма, составленного из одинаковых дифференциальных механизмов, показанных на рис. 3.18. Водила 3 и 3' обоих этих механизмов представляют собой одно звено, входные и выходные звенья — центральные зубчатые колеса 1 и 1'. Механизм снабжен двумя муфтами 5 и 5', которые соединяют попарно звенья 1 и 4, 1' и 4', и двумя тормозами 6 и 6', превращающими звенья 4 и 4' в стойку. Включением муфты 5 и тормоза 6' механизм превращается в планетарный с входным звеном 3', включением муфты 5' и тормоза 6 — в планетарный с выходным звеном 3, включением тормозов 6 и 6' — в двухступенчатый планетарный механизм, а одновременным включением муфт 5 и 5' — в прямую передачу между звеньями 1 и 1'.

3.5. Переход от структурной схемы к реальному механизму

Проектирование плоских механизмов начинается с синтеза плоских структурных схем, на которых определяются число звеньев, характер их относительных движений и все кинематические пары 4-го или 5-го класса. Фактически звенья механизма находятся в разных плоскостях, действительные условия работы кинематических пар на плоской структурной схеме не могут быть изучены, и для перехода к реальному механизму необходимо строить пространственную структурную схему. На пространственной схеме можно определить пути обеспечения непересечения звеньев между собой; выявить необходимые изменения элементов кинематических пар с целью обеспечения устойчивой работы механизма и в связи с этим найти соответствующие замены кинематических пар, а также установить меры по сохранению условий существования плоского механизма.

Рассмотрим последовательный переход от плоской к пространственной структурной схеме газораспределительного механизма двигателя внутреннего сгорания (рис. 3.23, а). Входное звено меха-

низма кулачок 1 распределительного вала — взаимодействует с рычагом 2, контактирующим с клапаном 3. При вращении распределительного вала кулачком 1 через рычаг 2 приводится в поступательное движение клапан 3, осуществляющий впуск или выпуск газов. Синтез плоской структурной схемы (рис. 3.23, б) для обеспечения функционального назначения этого механизма может быть

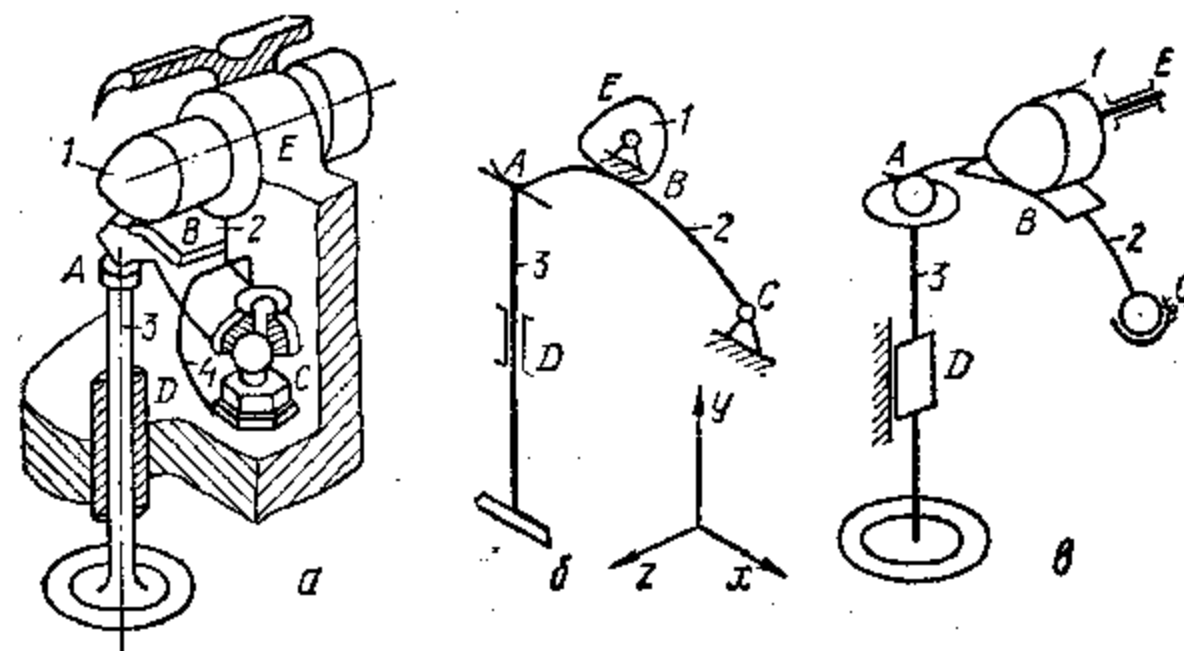


Рис. 3.23. Газораспределительный механизм двигателя внутреннего сгорания

Таблица 3.1. Перемещения, обеспечиваемые кинематическими парами разных классов

Кинематическая пара	Плоская структурная схема		Пространственная структурная схема		Реальный механизм	
	Подвижности	Класс	Подвижности	Класс	Подвижности	Класс
A	$s_x \varphi_z$	4	$s_x s_z \varphi_x \varphi_y \varphi_z$	1	$s_x s_z \varphi_x \varphi_y \varphi_z$	1
B	$s_x \varphi_z$	4	$s_x s_z \varphi_y \varphi_z$	2	$s_x s_z \varphi_y \varphi_z$	2
C	φ_z	5	$\varphi_x \varphi_z$	4	$\varphi_x \varphi_y \varphi_z$	3
D	s_y	5	s_y	5	$s_y \varphi_y$	4
E	φ_z	5	φ_z	5	φ_z	5

произведен последовательным присоединением двух плоских монад с вращательной (рис. 3.4, а) и поступательной (см. рис. 3.4, б) кинематическими парами: монады 2 с высшей кинематической парой B 4-го класса и вращательной кинематической парой C 5-го класса и монады 3 с высшей кинематической парой A 4-го класса и поступательной кинематической парой D 5-го класса. Перемещения, обеспечиваемые этими кинематическими парами на плоской структурной схеме, показаны в табл. 3.1. На пространственной схеме механизма (рис. 3.23, в) кинематические пары 4-го класса A и B будут парами 2-го класса, так как в них возможны дополнительные движения: перемещение s_z вдоль оси z и поворот φ_y относительно оси y.

При условиях, принятых на плоской структурной схеме, необходимо предъявить повышенные требования к точности выполнения осей кинематических пар E и C в стойке O и точного расположения элементов кинематической пары B относительно этих осей. В противном случае распределение нагрузки вдоль линии контакта в паре B будет неравномерным, что приведет к быстрому износу элементов этой кинематической пары. Для создания благоприятных условий контакта в кинематической паре B необходимо придать угловую подвижность φ_x звену 2, заменив вращательную кинематическую пару C 5-го класса кинематической парой C 4-го класса (сферический шарнир с пальцем) (см. табл. 1.2). Этим устраняется связь, налагаемая кинематической парой C 5-го класса. Удаление этой связи позволяет понизить требования к точности изготовления элементов кинематических пар.

Элементы кинематических пар E , B и C определяют положение звена 2 относительно стойки. Поэтому если кинематическую пару A , как и кинематическую пару B 2-го класса, выполнить с контактом по линии, то необходимо точно изготовить элементы этой кинематической пары относительно элементов кинематических пар D и B . Выполнения этого требования можно избежать, если устранить связь, заменив кинематическую пару A 2-го класса на пару 1-го класса (рис. 3.23, в). В этом случае точечный контакт звеньев 2 и 3 обеспечивает направление усилия взаимодействия этих звеньев вдоль оси кинематической пары D , что способствует созданию хороших условий работы в этой паре и увеличению долговечности её элементов.

В реальных условиях эксплуатации предусматривают дополнительные относительные перемещения звеньев. Так, для равномерного износа фаски головки клапана по условиям работы (при контакте с седлом) следует допустить его произвольное проворачивание относительно оси. Поэтому в реальном механизме (рис. 2.23, а) кинематическая пара D выполняется цилиндрической 4-го класса. Возникшая подвижность — поворот клапана 3 относительно своей оси не влияет на определенность относительного поступательного движения звеньев, обеспечивающего функциональное назначение механизма. Для упрощения технологии изготовления и сборки кинематическую пару C (сферический шарнир с пальцем) целесообразно заменить кинематической парой 3-го класса C (сферическим шарниром). Однако при этом появляется вращение звена 2 относительно его продольной оси, проходящей через центр пары C , что нарушает нормальную работу механизма. В данном случае это движение вредно и должно быть устранено (например, введением специальных пружин 4).

3.6. Избыточные связи и подвижности

Как было показано выше, структурный синтез реального механизма сопровождается непрерывной оценкой конструктивных схем соединений звеньев. Конструктивная проработка элементов кинематических пар, обеспечивающая необходимую подвижность соедине-

ния, может быть различной, но разные конструкции соединения имеют и различную работоспособность. Это обусловлено тем, что в реальных механизмах из-за неизбежных неточностей изготовления и монтажа, деформаций звеньев при действии эксплуатационных нагрузок и износа поверхностей элементов кинематических пар в процессе эксплуатации появляются *избыточные связи и подвижности*.

Избыточные связи создают дополнительные ограничения на подвижность звеньев механизмов, вследствие чего конструкция становится статически неопределимой. Их удаление не изменяет кинематику звеньев, а приводит лишь к перераспределению усилий в со-

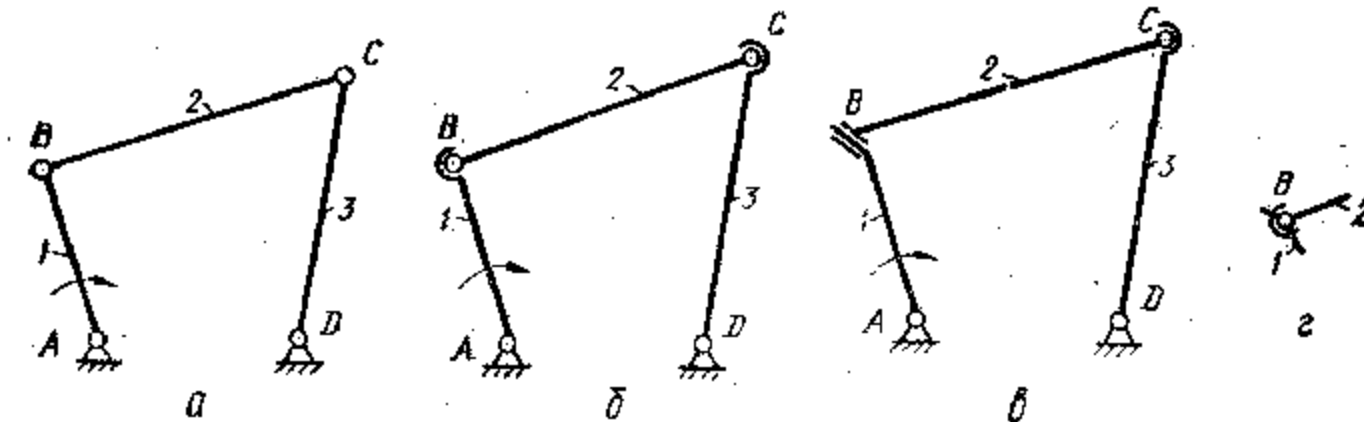


Рис. 3.24. Синтез рационального механизма шарнирного четырехзвенника

единениях, вызывающих дополнительную деформацию звеньев к той которая возникала от действия эксплуатационных усилий. Выявление избыточных связей на стадии структурного синтеза имеет важное практическое значение, так как позволяет правильно выбрать класс кинематических пар, соединяющих звенья механизма, и сделать конструкцию более работоспособной.

На рис. 3.24, а приведена кинематическая схема простейшего плоского четырехзвенного шарнирного механизма с входным звеном 1. Степень подвижности его по формуле (1.2) $W = 3 \cdot 3 - 2 \times 4 = 1$. Если из-за неточностей изготовления и монтажа оси шарниров непараллельны, то звенья его двигаются в параллельных плоскостях только при условии их деформации. Если значения деформаций превысят допустимые, то это приведет либо к заклиниванию механизма, либо к преждевременной поломке одного из звеньев. Так как формулы (1.1) и (1.2) не отражают геометрических соотношений между звеньями, то при предотвращении деформаций звеньев формула (1.1) более точно отражает возможность движения звеньев в непараллельных плоскостях. Степень подвижности рассматриваемого механизма по формуле (1.1) $W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -2$, что указывает на возможность потери подвижности из-за избыточных связей.

Для выявления избыточных связей формулы (1.1) и (1.2) преобразуют к виду

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + q; \quad (3.1)$$

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 + q, \quad (3.2)$$

где q — число избыточных связей и подвижностей.

Для пространственного механизма получим

$$q = W + 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1 - 6n; \quad (3.3)$$

для плоского —

$$q = W + 2p_5 + p_4 - 3n. \quad (3.4)$$

Если $q > 0$, то механизм имеет избыточные связи, если $q < 0$, то — избыточные подвижности.

Для механизма на рис. 3.24, а по формуле (3.3) получим $q = 1 + 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 3$, что говорит о трех избыточных связях. Исходя из непараллельности осей шарниров как условия пространственного характера кинематики его звеньев, заменим пары 5-го класса В, С на пары 3-го класса (сферические шарниры) (рис. 3.24, б). При этом получим $q = 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = -1$. Результат говорит о появлении избыточной подвижности, что проявляется в возможности свободного вращения звена 2 вокруг своей оси. Если по каким-либо причинам проворачиваемость звена 2 нежелательна, то ее можно избежать, применив вместо пары В или С 3-го класса цилиндрическую кинематическую пару 4-го класса (рис. 3.24, в) или сферическую с пальцем (рис. 3.24, г).

Из рассмотренного примера можно сделать следующие выводы. Для удаления избыточной связи понижается класс соответствующей кинематической пары, принятой в плоской схеме. Опираясь на пространственную структурную схему, проектируется реальный механизм, в котором небольшие смещения относительного положения звеньев и элементов кинематических пар, вызванные неточностью изготовления или деформациями звеньев под нагрузкой, не влияют на его нормальную работу. Механизмы, в которых удалено большинство избыточных связей, называются *рациональными*. В некоторых случаях, наоборот, целесообразно вводить избыточные связи, например, для увеличения жесткости или распределения нагрузки на несколько потоков.

Избыточная подвижность появляется при замене соответствующей кинематической пары парой более низкого класса; в зависимости от конкретных условий она может быть вредной или полезной. Избыточные подвижности появляются в реальных механизмах в результате синтеза структурных схем при введении в них дополнительных звеньев, не влияющих на относительное движение выходного звена, но, в частности, снижающих износ высших кинематических пар и улучшающих эксплуатационные характеристики механизма или способствующих лучшему распределению давлений.

4. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

4.1. Задачи структурного анализа

Анализ структурных схем механизмов позволяет определить количество звеньев, число и класс кинематических пар, соединяющих их в кинематические цепи, функциональное назначение кинематических соединений и дать сравнительную характеристику механизмам,

выполняющим одни и те же функции, еще на этапе выбора их структуры. По структурной схеме механизма определяют наличие избыточных связей или подвижностей. Пользуясь методами структурного анализа, можно преобразовать структурную схему, удалив звенья, изменив класс кинематических пар, вносящих избыточные связи и подвижности, произвести замену высших кинематических пар кинематическими соединениями с низшими кинематическими парами. Эти преобразования представляют анализируемый механизм в виде совокупности статически определимых структурных групп с низшими кинематическими парами, присоединенных к входным звеньям механизма, и свести задачу кинематического и динамического анализа к использованию набора соответствующих операторных функций, разработанных для этих структурных групп.

Этой же цели служит структурная классификация механизмов, предложенная для плоских механизмов с кинематическими парами 5-го класса И. И. Артоболовским. Согласно этой классификации механизмы объединяются в классы от 1-го и выше по наивысшему классу структурной группы, входящей в механизм. Следовательно, *класс механизма определяется в результате его структурного анализа*.

4.2. Определение класса механизма

Структурный анализ выполняется в порядке, обратном синтезу. Так как структурная схема механизма формируется последовательным присоединением структурных групп к входным звеньям, то их выделение из структурной схемы начинается с групп, в которые входят выходные звенья. При этом подсчитывают степень подвижности оставшейся части механизма, которая должна равняться степени подвижности исходного механизма, и проверяют, не распалась ли кинематическая цепь на не связанные между собой части. После выделения всех структурных групп остаются *механизмы 1 класса — стойка и входные звенья*.

Рассмотрим процесс структурного анализа рычажного механизма на примере механизма для формовки керамических изделий (рис. 4.1, а). Выходным звеном механизма является звено 5, связанное с кулисой 3 кинематической парой D, а со стойкой — кинематической парой E. Выделить эти звенья в двухзвенную структурную группу нельзя, так как в этом случае разрывается кинематическая цепь: звено 4 не связывается с входным звеном, звенья 4 и 2 получают подвижность. По той же причине не выделяются в двухзвенную группу звенья 4 и 3. Следовательно, выделяют только группу 2—3—4—5 (рис. 4.1, б). Степень подвижности ее при присоединении к стойке $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$. Звено 3 образует контур с кинематическими парами C, F, D, следовательно, это структурная группа 3-го класса. Весь механизм будет также 3-го класса.

Проведем структурный анализ этого механизма, если входным звеном будет звено 4 (рис. 4.2, а). Звено 1 со звеном 2 образуют двухзвенную группу 2-го класса второго вида (рис. 4.2, б). Степень

подвижности оставшейся кинематической цепи из звеньев 4—3—5 $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$. Следующая двухзвенная группа (звенья 5 и 3) также является группой 2-го класса. Следовательно, весь механизм в этом случае является механизмом 2-го класса.

Из проведенного анализа следует, что класс структурных групп и механизма зависит от выбора входного звена при неизменной кинематике звеньев. Так как методы кинематического и динамического

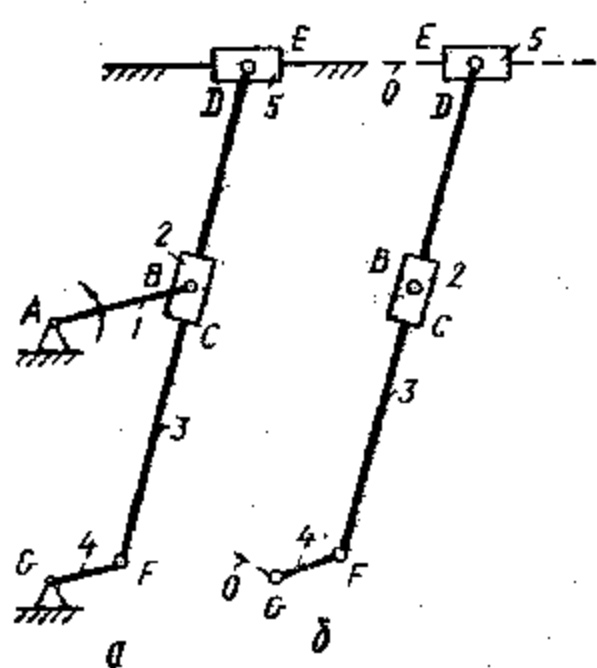


Рис. 4.1. Механизм для формовки керамических изделий

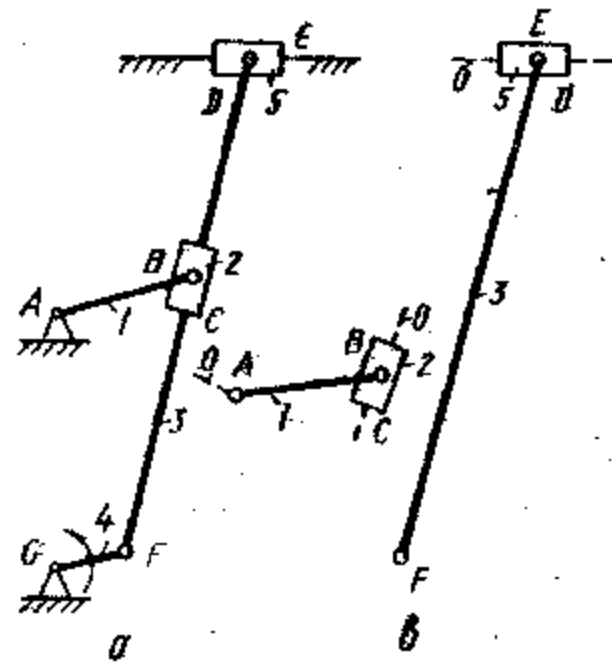


Рис. 4.2. Механизм для формовки керамических изделий с измененным входным звеном

исследований проще для механизмов более низких классов, то иногда при структурном анализе целесообразно принять за входное такое звено, при котором понижается класс механизма. Это позволяет применить для расчета более простые алгоритмы и операторные функции.

Для использования более простых алгоритмов расчета механизмов с высшими кинематическими парами производятся структурные преобразования в группах с высшими парами путем замены их структурно и кинематически эквивалентными кинематическими цепями с низшими кинематическими парами.

4.3. Структурные преобразования путем замены высших кинематических пар цепями с низшими парами

Рассмотрим плоскую структурную схему трехзвенного механизма (рис. 4.3, а), состоящего из звеньев 1 и 2, образующих между собой высшую кинематическую пару K 4-го класса и со стойкой 0 вращательные кинематические пары A и D 5-го класса. Кинематическую пару K можно заменить одним звеном, присоединенным к звеньям 1 и 2 кинематическими парами 5-го класса. Вид и расположение этих кинематических пар зависят от элементов высшей кинематической пары. Для того чтобы замена была структурно и кинематически эквивалентной, проводим общую нормаль $n - n$ к соприка-

сающимся профилям в точке K , ставим на ней точки B и C , являющиеся центрами кривизны этих профилей в рассматриваемом положении механизма. Заменяющее кинематическую пару K звено 3 располагается по общей нормали $n - n$, а центры вращательных кинематических пар, которыми она присоединяется к звеньям 1 и 2, должны совпадать с точками B и C . Если одно из звеньев будет иметь прямолинейный профиль (рис. 4.3, б), то центр его кривизны расположен в бесконечности, и звено 3 будет с поступательной кинематической парой.

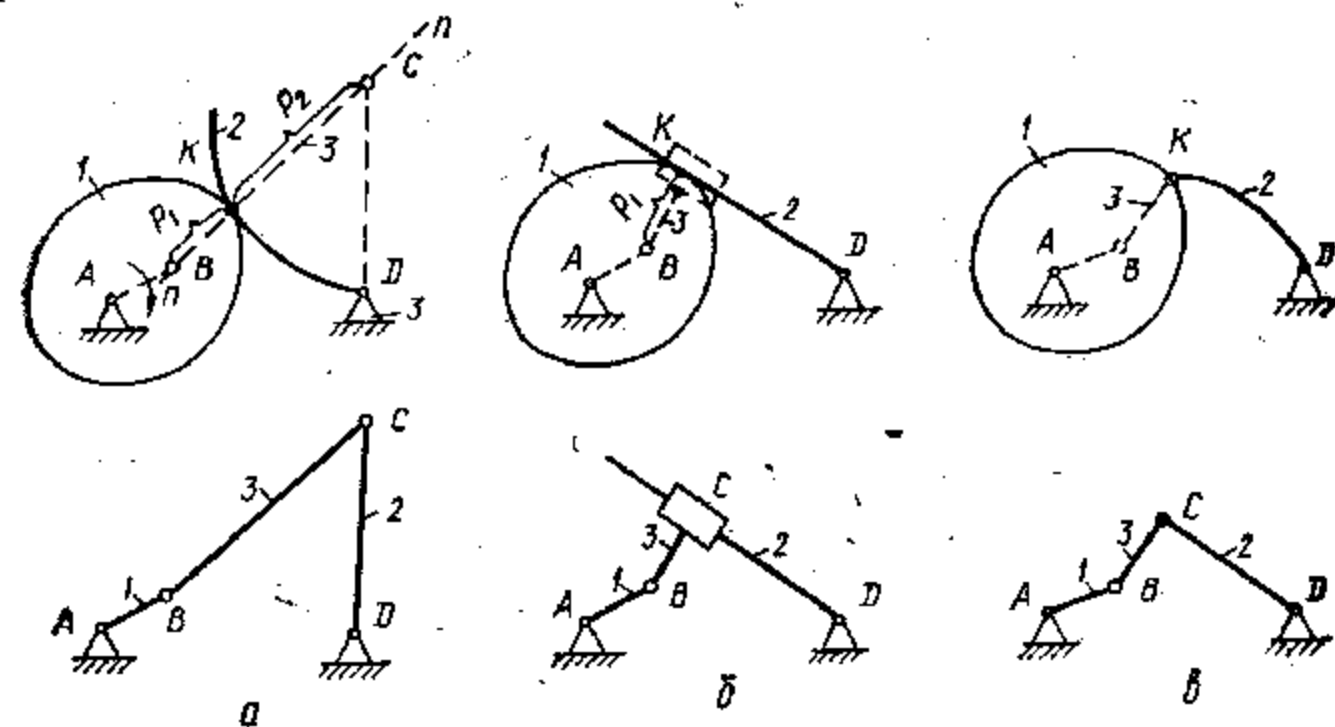


Рис. 4.3. Замена высших кинематических пар цепями с низшими кинематическими парами

матической парой, имея в качестве ее элемента направляющую для прямолинейного движения.

Полученные заменяющие механизмы — шарнирные четырехзвенники (рис. 4.3, а, в) и кривошипно-кулисный (рис. 4.3, б) — кинематически эквивалентны заменяемому механизму только в данном зафиксированном положении входного звена. При изменении его положения меняются размеры звеньев заменяющей кинематической цепи. После замены высших кинематических пар механизмов для данного расположения входного звена при кинематических и динамических расчетах используют алгоритмы для шарнирно-рычажных механизмов.

4.4. Анализ связей, налагаемых кинематическими параметрами

Анализ плоских структурных схем позволяет определить число звеньев, число кинематических пар, характер относительного движения входных и выходных звеньев и их число, равное числу степеней свободы механизма. На плоской структурной схеме нельзя выявить избыточные связи, налагаемые элементами кинематических пар, так как все кинематические пары на ней эквивалентны только кинематическим парам 4-го и 5-го классов. Однако это свойство плоских структурных схем позволяет выявлять звенья, налагающие избыточные связи, или звенья с избыточными подвижностями.

Звенья, налагающие избыточные связи,— это промежуточные звенья, выполняющие одни и те же функции. При удалении одного из них движение выходных звеньев не изменяется. Примером может служить шарнирный четырехзвенный механизм (рис. 4.4, а). Здесь звено 2 (или звено 4) налагает избыточные связи. Однако для нормального функционирования такого механизма необходимо, чтобы выполнялись равенства, обусловленные наличием избыточных свя-

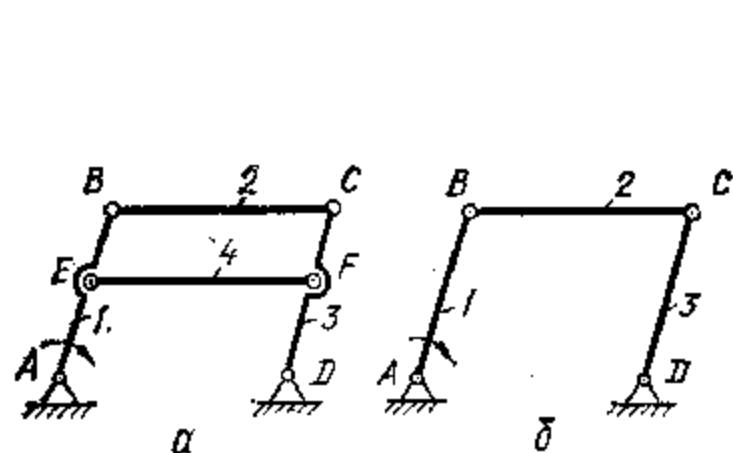


Рис. 4.4. Шарнирный механизм со звеном, налагающим избыточные связи

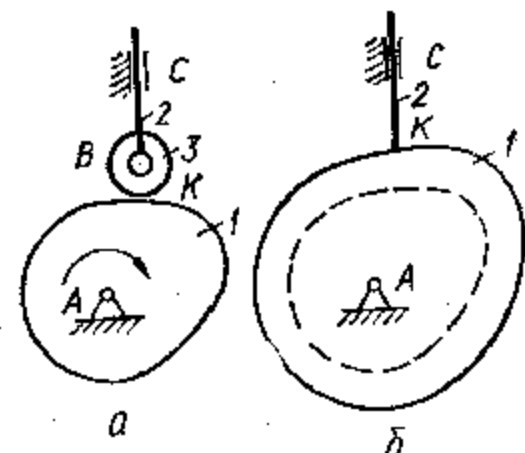


Рис. 4.5. Кулачковый механизм с роликом

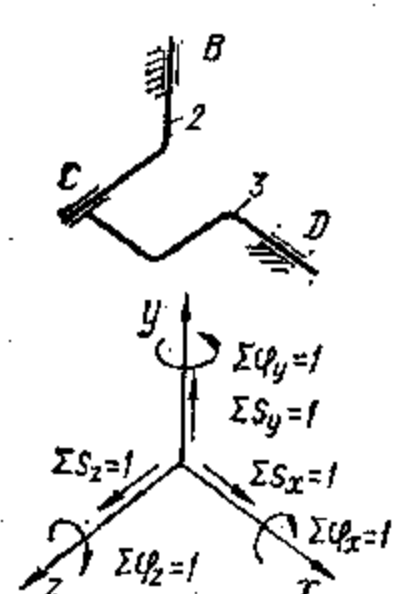


Рис. 4.6. Подвижности в замкнутом контуре, образованном структурной группой

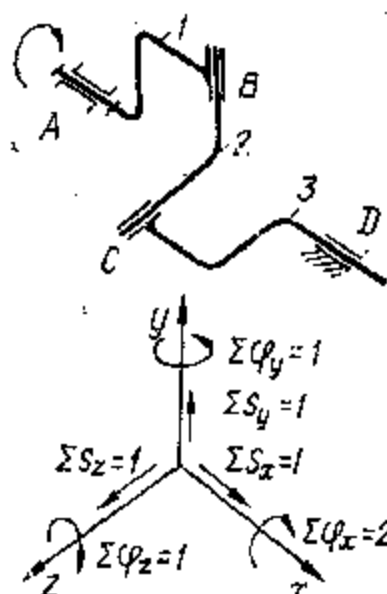


Рис. 4.7. Подвижности в замкнутом контуре четырехзвенного шарнирного механизма

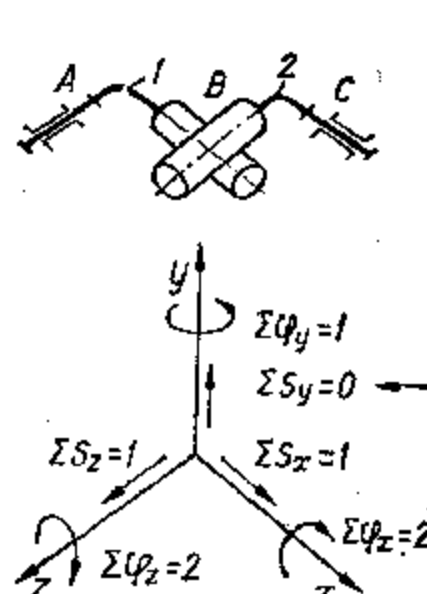


Рис. 4.8. Подвижности в замкнутом контуре поводкового механизма

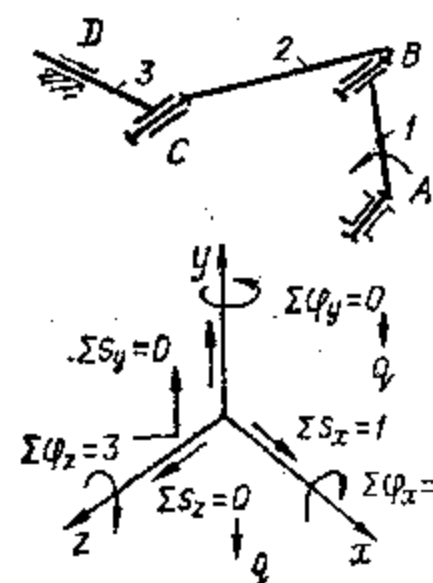


Рис. 4.9. Анализ подвижностей кривошипно-ползунного механизма

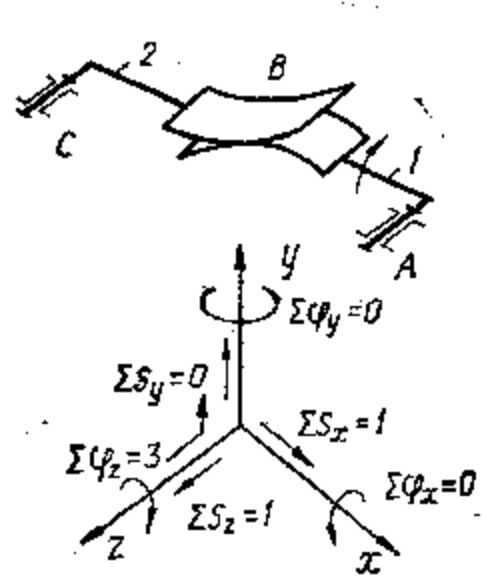


Рис. 4.10. Анализ подвижностей зубчатого механизма

зей $L_{AD} = L_{EF} = L_{BC}$. При нарушении этого условия движение механизма невозможно ($W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$).

Задача силового анализа такого механизма статически неопределима, поэтому для возможности использования уравнений статики при решении задач силового анализа звено 2 (или звено 4) удаляют и переходят к кинематически эквивалентной схеме (рис. 4.4, б).

Звенья, движение которых не влияет на движение выходного звена, вносят избыточную подвижность. Примером служит звено 3 — ролик в кулачковом механизме (рис. 4.5, а): $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$. Такие ролики применяются в механизмах для замены в кинематических парах трения скольжения на трение качения. Такой механизм для решения задач кинематического анализа заменяют кинематически эквивалентным ему механизмом с острым толкателем, а действительный профиль входного звена заменяют эквидистантным ему (рис. 4.5, б).

Для определения метода, позволяющего выявить избыточные связи, проанализируем подвижности в замкнутом контуре, образованном структурной группой 2 и 3, присоединенной парами B и D к стойке (рис. 4.6). Этот замкнутый контур представляет собой кинематическую цепь со степенью подвижности $W = 6 \cdot 2 - 4 \times \times 3 = 0$. Анализ возможных перемещений показывает, что кинематические пары C, B и D обеспечивают шесть подвижностей относительно неподвижной системы координат. В рассматриваемом замкнутом контуре эти подвижности в кинематических парах компенсируют возможные неточности изготовления и деформации звеньев. При присоединении структурной группы к входному звену 1 и к стойке (рис. 4.7) получаем механизм с числом подвижностей в кинематических парах $6 + 1$. Подсчет по формуле (3.3) показывает, что число избыточных связей в этом механизме $q = 1 + 5 \times \times 1 + 4 \cdot 3 - 6 \cdot 3 = 0$.

Следовательно, если в присоединяемой кинематической цепи при образовании механизма возможны шесть перемещений относительно координатных осей, то с учетом степеней свободы кинематических пар, которые составляют входные звенья со стойкой, в механизме отсутствуют избыточные связи. Отсутствие какой-либо из шести подвижностей указывает на наличие избыточной связи, кроме случаев, когда отсутствие подвижности относительно какой-либо из осей компенсируется угловой подвижностью относительно перпендикулярной оси. Примером служит рациональный поводковый механизм на рис. 4.8. Анализ подвижностей в замкнутом контуре этого механизма показывает, что $\Sigma s_y = 0$ при $\Sigma \varphi_x = 2$. Отсутствие одной подвижности s_y компенсируется угловой подвижностью φ_x , так как оси x и y перпендикулярны. Действительно, если по какой-либо причине кинематическая пара C сместится вдоль оси y , то это смещение может быть компенсировано поворотом звена 2 относительно оси x . Однако смещение кинематической пары C вдоль оси y нельзя компенсировать поворотом звена 2 относительно этой же оси. Поэтому недостаток линейной подвижности относительно

Корни системы определяются из выражения

$$x_j = D_j/D;$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где D — определитель системы, неравный нулю; D_j — определитель, получаемый из определителя D заменой j -го столбца на столбец свободных членов.

Алгоритм решения системы включает составление определителей D и D_j и вычисление корней x_j . Весь объем действий реализуется операторной функцией

$$SISTEMA\ N, A(N, N), C(N); x(N), \quad (5.4)$$

где N — переменная, определяющая порядок системы линейных уравнений; $A(N, N)$ — двумерный массив коэффициентов при неизвестных, формирующий определитель D ; $C(N)$, $x(N)$ — одномерные массивы чисел столбика свободных членов и корней системы, получаемых после ее решения.

5.3. Операторные функции, реализующие базовые алгоритмы численного интегрирования и дифференцирования

При решении ряда задач теории механизмов требуется интегрировать функции. Если функция задана в виде графика или таблично, то применяют численные методы интегрирования. Численное интегрирование основано на геометрической интерпретации определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, представляющего

собой площадь подынтегральной функции. При неизвестном характере функции $f(x)$, соответствующей большинству случаев применения численного интегрирования, ее заменяют некоторым многочленом, т. е. аппроксимируют функцию выражением, удобным для вычисления определенного интеграла.

Если функция задана в виде графика (рис. 5.2) или таблично, то задача ее численного интегрирования заключается в нахождении площади под ломаной, соединяющей узловые точки. В простейшем случае под кривой на участке ab площадь будет

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta x y_i, \quad (5.5)$$

а значение интеграла в i -й точке

$$J_i = J_{i-1} + \Delta x y_i,$$

где Δx — расстояние между точками x_i в случае деления участка ab на n одинаковых отрезков.

Использование выражения (5.5) приводит к погрешности, зависящей от того, площадь какого прямоугольника аппроксимирует площадь под кривой на участке Δx . Для уменьшения погрешности необходимо уменьшать шаг интегрирования, т. е. увеличивать число отрезков n . Более точны способы, основанные на замене кривой на отдельных участках хордами (рис. 5.3) или аппроксимирующими кривыми, например участками парабол (рис. 5.4):

$$A_{x_{i-1}, x_i} = 0,5 \Delta x \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i); \quad J_i = J_{i-1} + 0,5 \Delta x (y_{i-1} + y_i); \quad (5.6)$$

$$A_{x_{i-1}, x_{i+1}} = (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \Delta x / 3;$$

$$J_i = J_{i-1} + (y_{i-2} + 4y_{i-1} + y_i) \Delta x / 3. \quad (5.7)$$

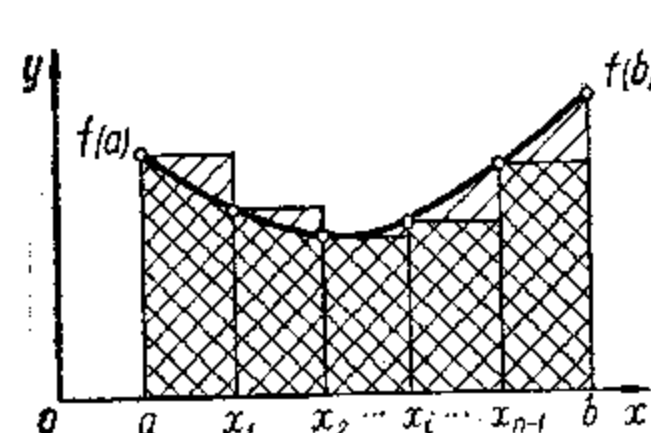


Рис. 5.2. К задаче о численном интегрировании

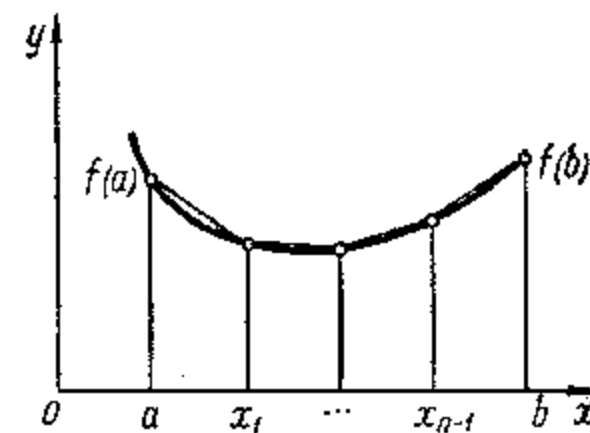


Рис. 5.3. Замена участков исходного графика хордами

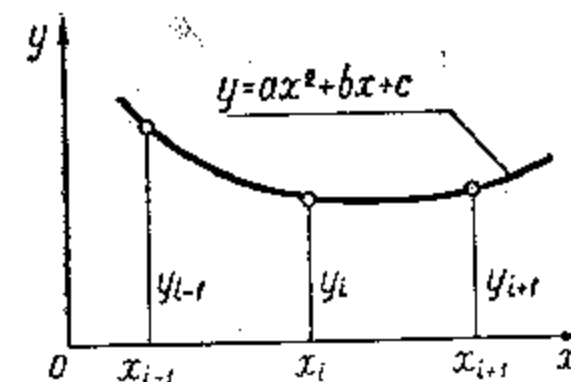


Рис. 5.4. Замена участков графика параболami

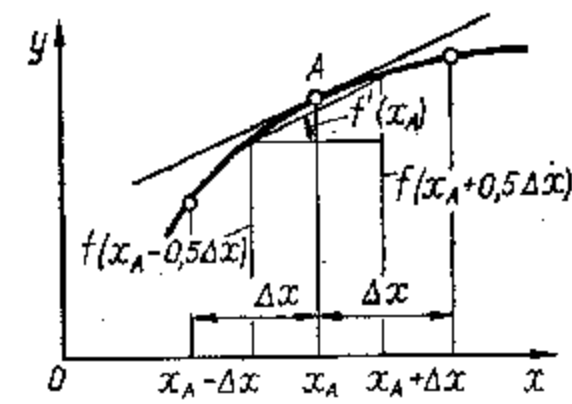


Рис. 5.5. Графическое представление дифференцирования

Формулы (5.7) дают результаты значительно точнее формул (5.6) при интегрировании функций второго и третьего порядков. Для всех трех способов (прямоугольников, хорд и кривых) значения интеграла для первой точки равны нулю, а при использовании зависимостей (5.7) значение интеграла для второй точки вычисляется способом хорд. Алгоритм численного интегрирования рассмотренными способами описывается операторной функцией

$$INTGR(n, \Delta x, NOMER, y; J), \quad (5.8)$$

где число участков $n = 2m$, $2m$ — четное число участков; y — наименование интегрируемого массива; J — наименование массива интегральных значений; $NOMER$ — числовое значение управляю-

щего параметра, в соответствии с которым применяется один из приведенных способов численного интегрирования, например, для текста $NOMER = 1, 2, 3$ соответственно для зависимостей (5.5), (5.6), (5.7).

Численное дифференцирование функций применяется при табличном либо численном способе задания функции. Производная функция $f'(x_A)$ для произвольного значения аргумента точки A определится из зависимости (рис. 5.5)

$$f'(x_A) = (f(x + 0,5\Delta x) - f(x - 0,5\Delta x)) / \Delta x, \quad (5.9)$$

где Δx — шаг дифференцирования.

Алгоритм численного дифференцирования описывается операторной функцией

$$DFRNCL(n, \Delta x, y; y'). \quad (5.10)$$

где n — число узловых точек; Δx — шаг дифференцирования; y и y' — наименование массивов числовых значений первообразной и производной функций.

Из формулы (5.9) следует, что значение производной функции вычисляется для середины участка значений аргумента. Значение производной функции для других точек в пределах данного промежутка определяется *интерполяцией*. При численном дифференцировании производная функция определяется с гораздо меньшей точностью, чем заданная первообразная. При этом, в отличие от численного интегрирования, уменьшение шага дифференцирования ведет к увеличению погрешности. Поэтому для сложной функции более целесообразно определять производную, подбирая аппроксимирующий многочлен и применяя аналитические методы.

5.4. Действия с векторными величинами

В плоской и в пространственных системах координат вектор $\vec{l}$ определяется произведением его алгебраического значения — модуля l и орта $\vec{e}$. Если проекции вектора $\vec{l}$ на оси системы координат обозначить l_x, l_y, l_z (рис. 5.6), проекции орта $\vec{e}$ на те же оси e_x, e_y, e_z , орты осей координат обозначить $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то получим

$$\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}; \quad \vec{e} = e_x \vec{i} + e_y \vec{j} + e_z \vec{k}.$$

Так как проекции орта на координатные оси являются его направляющими косинусами, то

$$\vec{e} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma. \quad (5.11)$$

Направляющие косинусы любого вектора выражаются в виде скалярных произведений его орта и ортов соответствующих осей координат:

$$\cos \alpha = \vec{e} \cdot \vec{i}; \quad \cos \beta = \vec{e} \cdot \vec{j}; \quad \cos \gamma = \vec{e} \cdot \vec{k}, \quad (5.12)$$

а косинус угла между векторами $\vec{l}$ и $\vec{R}$ — в виде скалярного произведения их ортов $\vec{e}$ и $\vec{r}$:

$$\cos(\vec{l}, \vec{R}) = \vec{e} \cdot \vec{r} = e_x r_x + e_y r_y + e_z r_z.$$

Следует иметь в виду, что скалярные произведения ортов $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, а векторные произведения ортов $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$; $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

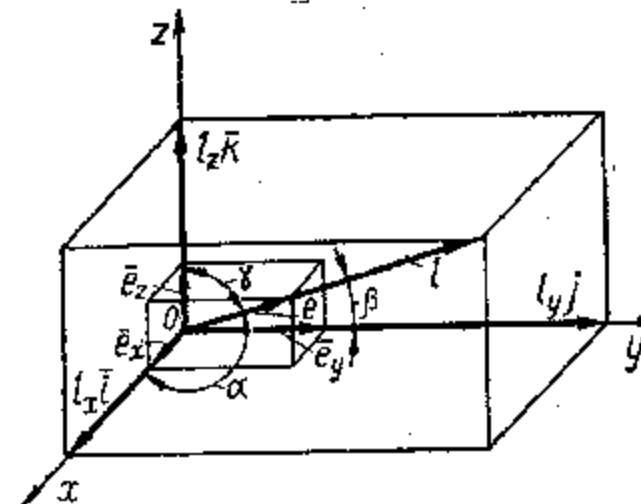


Рис. 5.6. Вектор в координатной системе

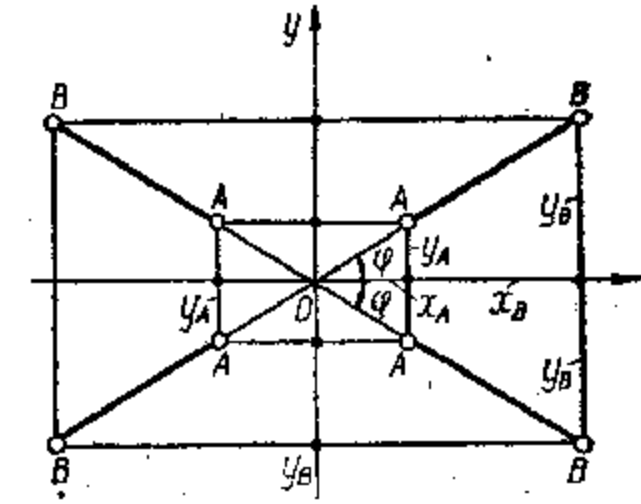


Рис. 5.7. Определение положения линии действия вектора

Направление перпендикуляра к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{l}$ и $\vec{R}$, определится из формулы для векторного произведения

$$\vec{S} = \vec{l} \times \vec{R} = lR \sin(\vec{l}, \vec{R})$$

по направлению орта вектора $\vec{s}$:

$$\vec{s} = (\vec{e} \times \vec{r}) / \sin(\vec{l}, \vec{R}).$$

Если направление одного вектора задано ортами в двух координатных системах $Oxyz$ и $O'x'y'z'$:

$$\vec{e} = e_x \vec{i} + e_y \vec{j} + e_z \vec{k};$$

$$\vec{e}' = e'_x \vec{i}' + e'_y \vec{j}' + e'_z \vec{k}',$$

то проекции e_x, e_y, e_z орта в первой координатной системе связываются с проекциями во второй системе следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= e'_x \vec{i}' \cdot \vec{i} + e'_y \vec{j}' \cdot \vec{i} + e'_z \vec{k}' \cdot \vec{i}; \\ e_y &= e'_x \vec{i}' \cdot \vec{j} + e'_y \vec{j}' \cdot \vec{j} + e'_z \vec{k}' \cdot \vec{j}; \\ e_z &= e'_x \vec{i}' \cdot \vec{k} + e'_y \vec{j}' \cdot \vec{k} + e'_z \vec{k}' \cdot \vec{k}. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Часто приходится определять направляющие углы векторов в виде функций по их проекциям в зависимости от значений каких-либо параметров. В ряде случаев в качестве вектора рассматривается направленный отрезок, например звено механизма, для которого известны координаты двух его точек — начала A и конца B

(рис. 5.7). Тогда положение линии действия отрезка $\overline{AB}$ определяется углом

$$\varphi = \operatorname{arctg} [(y_B - y_A)/(x_B - x_A)].$$

Эта зависимость не всегда удобна, так как в ней не учитывается, какая точка является началом отрезка, какая концом, и, следовательно, угол получается как положительным, так и отрицательным. Направляющий угол вектора $\overline{AB}$, как существенно положительная величина, определяется из зависимости

$$\varphi_{AB} = \begin{cases} \varphi, & (y_B - y_A) \geq 0; \\ \varphi + \pi, & (y_B - y_A) < 0; \end{cases} \varphi \geq 0; \quad (5.14)$$

$$\varphi_{AB} = \begin{cases} \varphi + \pi, & (y_B - y_A) > 0; \\ \varphi + 2\pi, & (y_B - y_A) < 0. \end{cases} \varphi < 0.$$

Выражение (5.14) может быть реализовано операторной функцией

$$UGL1(y_A, y_B, \varphi; \varphi_{AB}), \quad (5.15)$$

где y_A и y_B — ординаты начала и конца направленного отрезка; φ — угол наклона к оси абсцисс линии направленного отрезка.

Операторная функция для направляющего угла отрезка может быть составлена и по координатам точек его начала и конца:

$$UGL2(x_A, y_A, x_B, y_B; \varphi_{AB}) = \operatorname{sign}(y_B - y_A) \operatorname{arccos}((x_B - x_A)/l_{AB}), \quad (5.16)$$

где x_A, y_A и x_B, y_B — координаты точек начала и конца направленного отрезка длиной l_{AB} ; sign — обозначение функции присвоения знака.

Направляющий угол вектора принимает разные значения в зависимости от параметров. Например, линия действия вектора скорости точки при ее движении по окружности перпендикулярна радиусу, но направление вектора по линии его действия зависит от знака угловой скорости звена, на котором расположена точка. Алгоритм определения направляющего угла Ψ вектора для подобных случаев реализуется операторной функцией

$$UGL3(\varphi, \alpha, v; \Psi) = \varphi + \operatorname{sign}(v) \alpha, \quad (5.17)$$

где φ — угол, относительно которого отсчитывается угол Ψ ; v — параметр, определяющий знак угла α .

В некоторых задачах, например при определении реакций в кинематических парах, предварительно принятое направление вектора на линии его действия в зависимости от результата решения изменяется на противоположное. В этом случае алгоритм определения направляющего угла выражается зависимостью

$$UGL4(\varphi, \alpha, v; \Psi) = \begin{cases} \varphi, & v \geq 0; \\ \varphi + \alpha, & v < 0, \end{cases} \quad (5.18)$$

где Ψ — угол, определяющий направление вектора; v — параметр, определяющий необходимость изменения значения направляющего угла на α .

Иногда удобным является определение направляющего угла вектора по его проекциям на координатные оси. В этих случаях алгоритм реализуется операторной функцией

$$UGL5(l_x, l_y; \Psi) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(l_y/l_x), & l_x \geq 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}(l_y/l_x), & l_x < 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

При решении задач механики часто приходится суммировать векторы. Алгоритм определения величины и направления вектора $\vec{l}$ суммы двух других векторов $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ реализуется операторной функцией

$$SMVKT(l_1, \varphi_1, l_2, \varphi_2; l, \varphi), \quad (5.20)$$

описывающей следующие действия над величинами векторов $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ и их направляющими углами φ_1 и φ_2 :

$$\vec{l} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2; \quad l_x = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2; \quad l_y = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2;$$

$$UGL5(l_x, l_y; \varphi); \quad l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.$$

При графической интерпретации функции (5.20) выполняются построения, соответствующие «правилу параллелограмма».

5.5. Матричная форма записи векторных соотношений

При исследовании многозвенных плоских и пространственных механизмов векторные преобразования становятся сложными, а вычисления громоздкими. Удобно эти вычисления выполнять с помощью матриц, под которыми понимают таблицы чисел, расположенные строками и столбцами:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

В матрице, содержащей m строк и n столбцов, произведение $m \times n$ обозначает порядок матрицы. Если $m = n$, то матрица называется квадратной. Если n либо m равны единице, то получаем соответственно столбцовую

$$B = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{vmatrix},$$

или строчную

$$C = \| a_1, a_2, \dots, a_n \|$$

матрицы.

Над матрицами можно выполнять действия *транспонирования, сложения, умножения*. Матрица A' , транспонированная по отношению к матрице A , образуется из матрицы A заменой каждой ее строки на столбец того же номера. Например, при транспонировании матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 12 \\ 3 & 20 & 17 & 5 \\ 9 & 14 & 20 & 7 \end{pmatrix}$$

получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 5 & 20 & 14 \\ 7 & 17 & 20 \\ 12 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Суммой двух матриц V и W одинакового порядка называется третья матрица $U = V + W$ того же порядка, каждый элемент строки i и столбца k которой равен сумме соответствующих элементов обеих матриц $U_{ik} = V_{ik} + W_{ik}$. При сложении матриц справедливы *переместительные и сочетательные законы*.

Матрица умножается на *скалярную величину*. В этом случае на скаляр умножаются все элементы матрицы. Две матрицы перемножаются, если число столбцов одной матрицы равно числу строк второй матрицы. Если матрица A имеет порядок $m \times n$, а матрица $B - n \times q$, то их произведение определяет матрицу $C = A \cdot B$, порядок которой равен $m \times q$. Элемент матрицы C определится по правилу

$$C_{ik} = \sum_{l=1}^n A_{il} B_{lk},$$

где $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, q$.

Например, при умножении матрицы A из примера транспонирования на матрицу

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \\ 12 & 7 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

получим матрицу

$$F = \begin{pmatrix} 144 & 208 \\ 420 & 251 \\ 440 & 302 \end{pmatrix}.$$

Для матриц не соблюдается *переместительный закон умножения*, т. е. $A \cdot B \neq B \cdot A$, но соблюдается *сочетательный*:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C; \quad A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Матричная форма записи позволяет значительно упростить запись соотношений между величинами. Например, соотношение (5.13) записывается матричным способом, если ввести в рассмотре-

ние матрицы

$$E = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}; \quad E' = \begin{pmatrix} e'_x \\ e'_y \\ e'_z \end{pmatrix}; \quad M_{11'} = \begin{pmatrix} \bar{i}' \cdot \bar{i} & \bar{j}' \cdot \bar{i} & \bar{k}' \cdot \bar{i} \\ \bar{i}' \cdot \bar{j} & \bar{j}' \cdot \bar{j} & \bar{k}' \cdot \bar{j} \\ \bar{i}' \cdot \bar{k} & \bar{j}' \cdot \bar{k} & \bar{k}' \cdot \bar{k} \end{pmatrix}$$

в виде

$$E = M_{11'} E'. \quad (5.21)$$

Матрица $M_{11'}$ образуется перемножением простых матриц: столбцовой F и строчной F' , составленных для ортов координатных систем $Oxyz$ и $O'x'y'z'$:

$$F = \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}; \quad F' = \begin{pmatrix} \bar{i}' & \bar{j}' & \bar{k}' \end{pmatrix}; \quad M_{11'} = F \cdot F',$$

тогда

$$E = F \cdot F' \cdot E'. \quad (5.22)$$

Если проекции орта вектора в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ равны e_{x1}, e_{y1}, e_{z1} , то проекции орта этого вектора в координатной системе $O_2x_2y_2z_2$ в соответствии с выражением (5.21) определяются как

$$E_2 = M_{21} E_1,$$

где

$$E_2 = \begin{pmatrix} e_{x2} \\ e_{y2} \\ e_{z2} \end{pmatrix}; \quad E_1 = \begin{pmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \\ e_{z1} \end{pmatrix};$$

M_{21} — матрица направляющих косинусов для обеих систем, аналогичная M_{11} .

Если имеется n систем координат, то для других координатных систем

$$\begin{aligned} E_3 &= M_{32} \cdot E_2 = M_{32} \cdot M_{21} \cdot E_1; \\ E_4 &= M_{43} \cdot E_3 = M_{43} \cdot M_{32} \cdot M_{21} \cdot E_1; \\ &\dots \dots \dots \\ E_n &= M_{n,n-1} \cdot E_{n-1} = M_{n-1,n-2} \dots M_{32} \cdot M_{21} \cdot E_1. \end{aligned}$$

Следовательно, для получения проекций орта вектора в некоторой координатной системе по проекциям его в исходной координатной системе необходимо перемножить матрицу направляющих косинусов, составленных для этих систем, и матрицу проекций орта в исходной системе.

Если элементы матрицы A являются дифференцируемыми функциями $a_{ik}(t)$ скалярного аргумента t , то матрица может быть продифференцирована по правилу

$$dA(t)/dt = d(a_{ik}(t))/dt,$$

т. е. при дифференцировании матрицы дифференцируется каждый ее элемент. Следовательно, по имеющимся матрицам, например, определяющим положения звеньев, определяются скорости и ускорения.

5.6. Преобразования координат

При определении траекторий точек механизмов, их скоростей и ускорений удобно использовать несколько координатных систем, последовательно определяя в них координаты точек механизма. Для вычислений координат точек в одной координатной системе по их координатам в других системах (рис. 5.8) используют известные из векторной алгебры и аналитической геометрии зависимости:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \cos(\widehat{x_i, \bar{x}_i}) \cdot x_j + \cos(\widehat{x_i, \bar{y}_j}) \cdot y_j + \cos(\widehat{x_i, \bar{z}_j}) z_j + a_i; \\ y_i &= \cos(\widehat{y_i, \bar{x}_j}) \cdot x_j + \cos(\widehat{y_i, \bar{y}_j}) \cdot y_j + \cos(\widehat{y_i, \bar{z}_j}) z_j + b_i; \\ z_i &= \cos(\widehat{z_i, \bar{x}_j}) \cdot x_j + \cos(\widehat{z_i, \bar{y}_j}) \cdot y_j + \cos(\widehat{z_i, \bar{z}_j}) z_j + c_i, \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

или в матричном виде

$$\bar{r}_i = M_{ij} \bar{r}_j, \quad (5.24)$$

где

$$r_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}; \quad r_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{x_i, \bar{x}_j}) & \cos(\widehat{x_i, \bar{y}_j}) & \cos(\widehat{x_i, \bar{z}_j}) & a_i \\ \cos(\widehat{y_i, \bar{x}_j}) & \cos(\widehat{y_i, \bar{y}_j}) & \cos(\widehat{y_i, \bar{z}_j}) & b_i \\ \cos(\widehat{z_i, \bar{x}_j}) & \cos(\widehat{z_i, \bar{y}_j}) & \cos(\widehat{z_i, \bar{z}_j}) & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

В матрицах r_i , r_j , M_{ij} число строк увеличено по сравнению с зависимостями (5.21) за счет добавления в них тождества $1 \equiv 1$. Это не изменяет исходной системы, но делает матрицу M_{ij} квадратной, что позволяет при дальнейших преобразованиях обойтись только операцией матричного умножения. Матрица (5.25) выражает все возможные соотношения между координатами звеньев, соединенных кинематической парой любого класса. В зависимости от типа кинематической пары матрица (5.25) соответственно преобразуется. Для сферической кинематической пары (рис. 5.9), соединяющей звенья 1 и 2, с которыми связаны соответствующие координатные системы, начала координат систем совпадают. Эти звенья вращаются относительно любой оси, и матрица (5.25) принимает вид

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{x_1, \bar{x}_2}) & \cos(\widehat{x_1, \bar{y}_2}) & \cos(\widehat{x_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ \cos(\widehat{y_1, \bar{x}_2}) & \cos(\widehat{y_1, \bar{y}_2}) & \cos(\widehat{y_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ \cos(\widehat{z_1, \bar{x}_2}) & \cos(\widehat{z_1, \bar{y}_2}) & \cos(\widehat{z_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Для сферической кинематической пары 4-го класса (рис. 5.10) возможны два движения; вокруг оси пальца и в плоскости прорези. При составлении матрицы M_{12} для этой пары выберем направления координатных осей так, чтобы две оси были параллельны или совмещены. Например, оси $O_1 y_1$ и $O_2 y_2$ направим перпендикулярно

Рис. 5.8. Преобразование координат

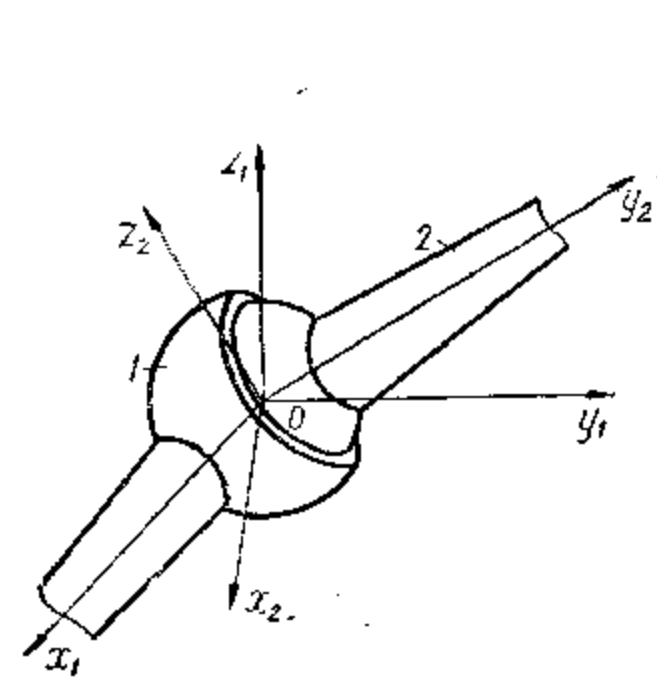


Рис. 5.9. Координатная система для сферической кинематической пары 3-го класса

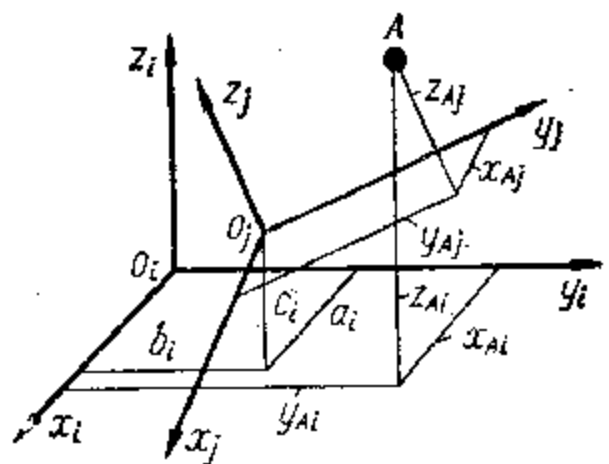


Рис. 5.10. Координатная система для сферической кинематической пары 4-го класса

плоскости прорези. Принимая направление $O_2 x_2$ вдоль оси пальца, получим

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{x_1, \bar{x}_2}) & 0 & \cos(\widehat{x_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(\widehat{z_1, \bar{x}_2}) & 0 & \cos(\widehat{z_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Для цилиндрической пары 4-го класса при совпадении осей $O_1 y_1$ и $O_2 y_2$ координатных систем (рис. 5.11)

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{x_1, \bar{x}_2}) & 0 & \cos(\widehat{x_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ \cos(\widehat{z_1, \bar{x}_2}) & 0 & \cos(\widehat{z_1, \bar{z}_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Для цилиндрической вращательной кинематической пары 5-го класса при совмещении центров координатных систем и при совпа-

дении осей O_1y_1 и O_2y_2 получим

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & 0 & \cos(\bar{x}_1, \bar{z}_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(\bar{z}_1, \bar{x}_2) & 0 & \cos(\bar{z}_1, \bar{z}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.29)$$

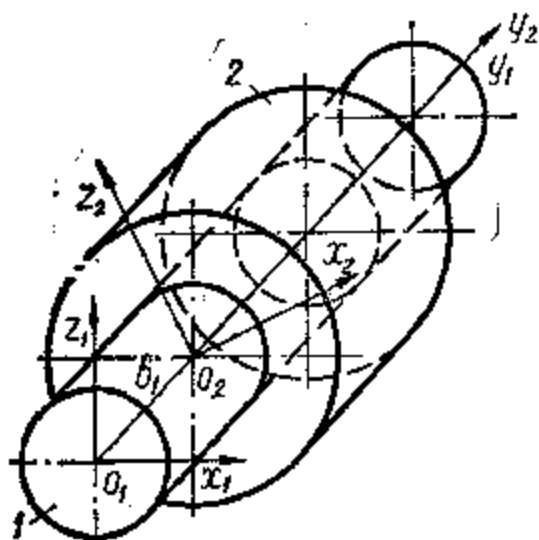


Рис. 5.11. Координатная система для цилиндрической кинематической пары 4-го класса

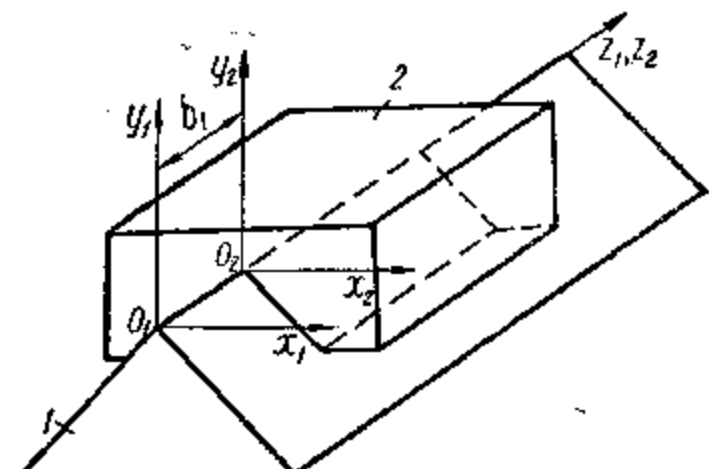


Рис. 5.12. Координатная система для поступательной кинематической пары 5-го класса

Для поступательной кинематической пары 5-го класса при общем случае расположения начала координат (рис. 5.12) получим

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.30)$$

Используя эти матрицы для кинематических пар разных классов (5.26) ... (5.30) и зависимость (5.23) или (5.24), определяют положение любого звена кинематической цепи и координаты любой точки механизма.

6. ПУТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

6.1. Задачи, решаемые с помощью механизмов с низшими парами

Механизмы с низшими кинематическими парами нашли широкое применение в машиностроении и приборостроении благодаря возможности обеспечения требуемого преобразования движения при простоте геометрической формы звеньев и элементов кинематических пар. Важное функциональное качество их — это возможность воспроизвести точно или с заданной степенью приближения практически любой закон движения или траекторию исполнительного органа при соответствующем выборе структуры механизма и разме-

ров его звеньев. В отличие от структурного в кинематическом синтезе решается вопрос о размерах звеньев для получения движений с конкретными характеристиками перемещений, скорости и ускорений — s , v , a или φ , ω , ε .

Простейшие шарнирно-рычажные механизмы, включающие одну структурную группу (рис. 6.1), применяются для преобразо-

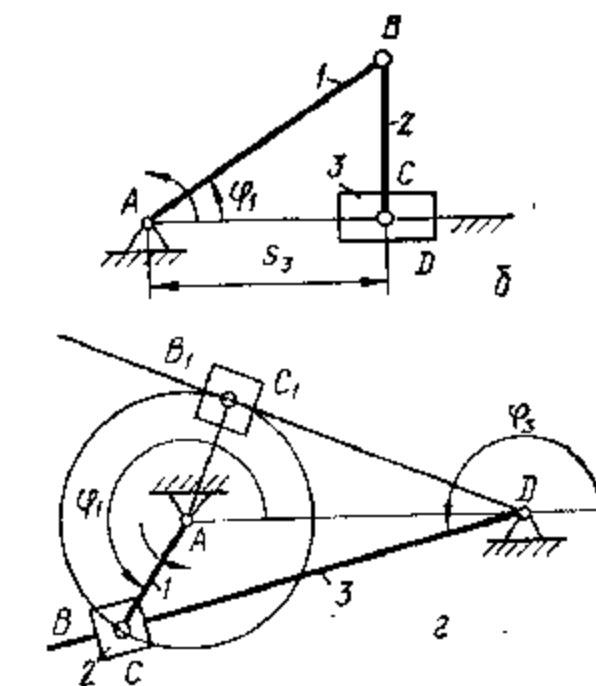
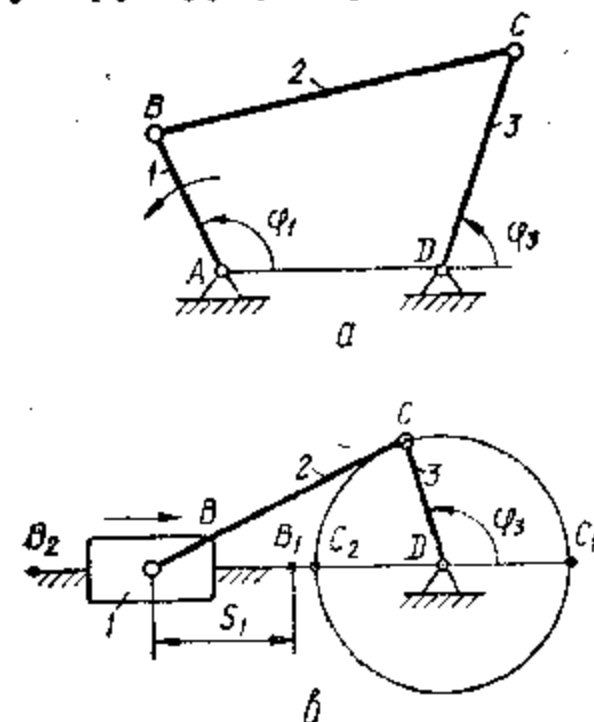
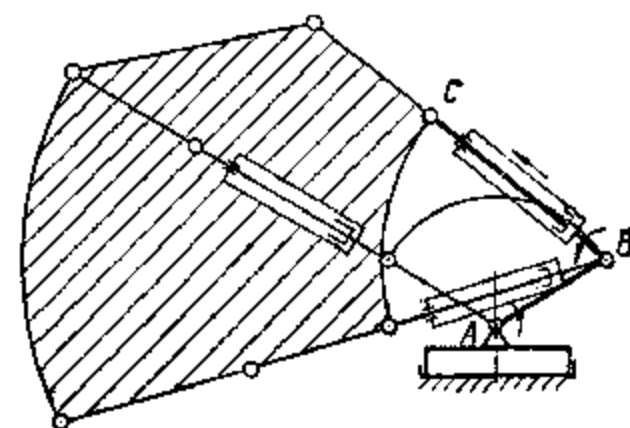
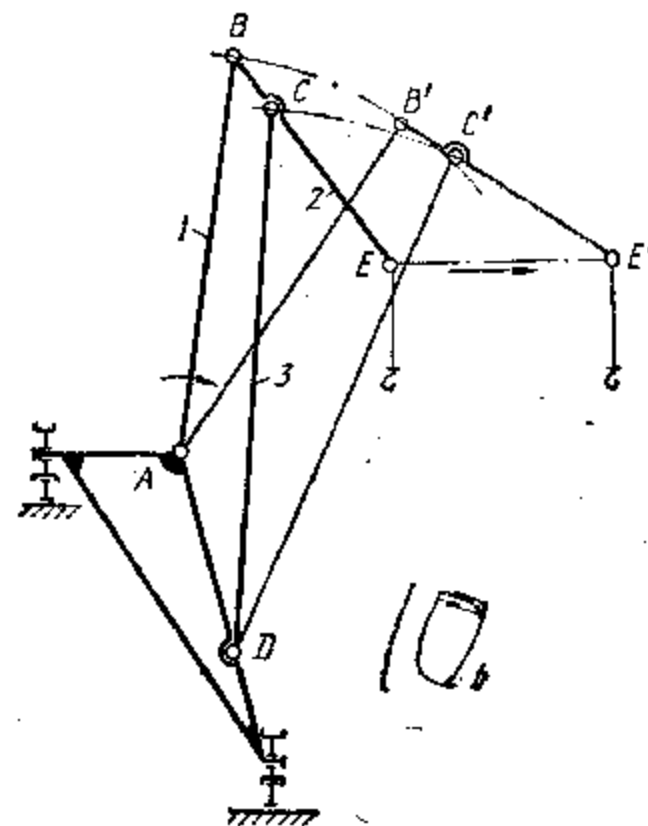


Рис. 6.1. Простейшие шарнирно-рычажные механизмы

Рис. 6.2. Кинематическая схема механизма изменения вылета стрелы краша

Рис. 6.3. Механизм манипулятора



вания равномерного вращательного движения входного звена 1 в неравномерное или равномерное вращательное, колебательное, возвратно-поступательное движение выходного звена 3 или в сложное движение промежуточного звена 2 и возвратно-поступательное входного во вращательное движение выходного. В зависимости от соотношения геометрических размеров звеньев обеспечивается неравномерное вращение выходного звена в одном направлении, например, при $l_{AB} > l_{AD}$ (рис. 6.1, а, г) или неравномерное знакопе-

ременное его вращение при $l_{AB} < l_{AD}$ (рис. 6.1, а, з), мгновенная остановка его в положении, когда $l_{AB} \perp l_{CD}$ (рис. 6.1, з). Движение звена становится невозможным при $l_{AB} \perp l_{BC}$ (рис. 6.1, б) или когда точка С попадает на линию AD (рис. 6.1, в). Неравномерное движение выходного звена с определенными законами его изменения обуславливается технологическими характеристиками машин с целью получения наивысшей производительности.

Многозвенные шарнирно-рычажные механизмы с числом звеньев более четырех применяются для получения более сложных законов движения выходных звеньев. Такая задача решается применением либо нескольких структурных групп 2-го класса, либо структурных групп высших классов. Геометрические размеры звеньев таких механизмов, как выходные параметры синтеза, подбираются из условий обеспечения требуемых перемещений и скоростей (полиграфические и ткацкие машины), ускорений (машины для транспортировки сыпучих грузов, вибрационных бункеров и т. п.), обеспечения требуемого увеличения силы на рабочем элементе выходного звена (рычажные и винтовые прессы).

Шарнирно-рычажные механизмы используют для обеспечения перемещения звена или только определенной точки его по заданной траектории. Например, при проектировании кинематической схемы портовых кранов для уменьшения расхода энергии и удобства управления необходимо обеспечить нахождение груза на одной высоте при изменении вылета стрелы, что достигается горизонтальным движением головки стрелы Е (рис. 6.2). При проектировании роботов и манипуляторов (см. гл. 18) размеры звеньев механизма подбираются из условия достижения захватом манипулятора любой точки пространства в зоне его обслуживания (рис. 6.3).

Таким образом, задача кинематического и геометрического синтеза механизмов с низшими кинематическими парами заключается в определении размеров звеньев структурной схемы механизма с целью удовлетворения требований к движению выходного или промежуточного звеньев механизма. Случается, что для принятой структурной схемы механизма нельзя подобрать такие размеры звеньев, чтобы получить заданные кинематические характеристики. Тогда приходится выбирать новую структурную схему. Поэтому структурный и кинематический синтез ведутся одновременно.

6.2. Требования к геометрическим параметрам звеньев в связи с задачами их кинематики

Задача выбора параметров синтеза шарнирно-рычажного механизма в общем случае многовариантна. Например, при одной и той же структуре механизма возможен синтез: по нескольким заданным положениям исполнительного органа, когда не существует закон его движения; по заданному закону движения входного и выходного звеньев либо по значению кинематических параметров, характеризующих этот закон; по заданной траектории движения точки выходного звена.

Постоянными параметрами при кинематическом синтезе обычно являются либо линейные размеры звеньев механизмов, либо положения точек на заданных траекториях, их скорости и ускорения. Эти параметры назначают исходя из типа механизма с учетом конкретных его свойств и назначения. При этом для обеспечения требуемых кинематических свойств механизма необходимо удовлетворить некоторые условия, связанные с определенными ограничениями.

Для механизмов непрерывного действия прежде всего обеспечивают проворачивание входных звеньев на угол $\varphi > 2\pi$. Здесь следует учесть не только предупреждение пересечения звеньев, но и размеры звеньев. Из рассмотрения схем механизмов на рис. 6.1 следует, что при некоторых условиях проворачивание входных звеньев невозможно. Например, звено 1 в шарнирном четырехзвеннике (см. рис. 6.1, а) не совершит полного оборота при $l_{BC} < l_{AD}$, а в кривошипно-ползунном (см. рис. 6.1, б) при $l_{BC} < l_{AB}$. В том же механизме при входном поступательно движущемся звене (см. рис. 6.1, в) периодически звенья 2 и 3 располагаются по одной прямой. Такое положение механизма называется «мертвым». Для выведения механизма из таких положений необходимо обеспечить движение выходного звена 3 в заданном направлении, для чего предусматривают специальные устройства.

Во всех механизмах необходимо обеспечить заданное перемещение выходного звена, т. е. определенные значения параметров φ_3 и s_3 . В ряде случаев, кроме заданных диапазонов изменения этих параметров, ставится условие прохождения определенной точкой выходного звена некоторых координат при строго предусмотренных положениях входного звена, т. е. необходимо обеспечить заданный закон движения $\varphi_3(\varphi_1)$ и $s_3(\varphi_1)$. Это требование обязательно при кинематическом синтезе машин-автоматов, большинства технологических механизмов, в ряде приборов и т. п.

В некоторых механизмах периодического действия для повышения производительности необходимо сокращать время холостого хода. С этой целью при кинематическом синтезе выдерживают заданные максимальные скорости или ускорения звена при его движении под нагрузкой (рабочий ход) и без нагрузки (холостой ход). Это условие характеризуется коэффициентом изменения средней скорости ведомого звена — отношением скорости холостого хода к скорости рабочего хода:

$$k_v = v_x/v_p; \quad k_\omega = \omega_x/\omega_p,$$

где v_x , ω_x и v_p , ω_p — скорости выходных звеньев при холостом и рабочем ходе.

При определении размеров звеньев следует иметь в виду, что при некоторых их соотношениях возникает *самоторможение* или *заклинивание* (рис. 6.4), т. е. внезапное прекращение движения в некоторых положениях звеньев. Заклинивание возможно в определенных относительных положениях звеньев в случае возникновения чрезмерных сил и моментов из-за трения в кинематических парах, возрастающих пропорционально увеличению движущих сил. Незакли-

нивание для вращательной кинематической пары C соблюдается при условии

$$\cos v_{\max} \leq \sin \alpha_d,$$

где $v_{\max}$ — наибольший угол между звеньями данной кинематической пары; α_d — допускаемое значение угла α между векторами силы и скорости, называемого углом давления, обеспечивающее возможность относительного движения.

6.3. Функции положения звеньев и передаточные функции

При решении задач кинематического синтеза механизмов с низшими парами необходимо движение выходного звена связать с движением входного звена механизма. Математическая зависимость, связывающая положение выходного n и входного 1 звеньев, называется функцией положения механизма. В общем случае для любого шар-

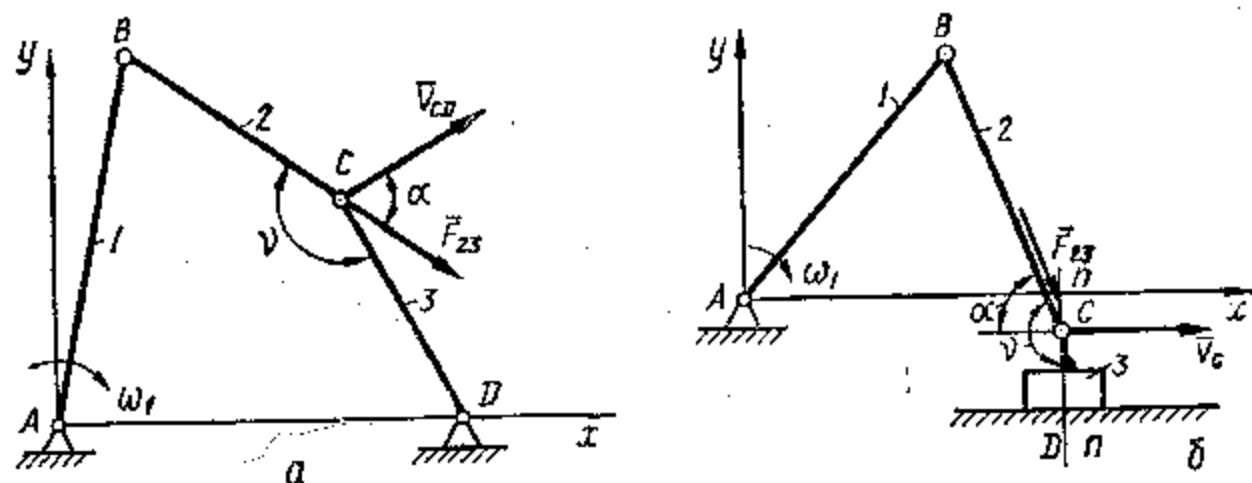


Рис. 6.4. Условие не-заклинивания механизма

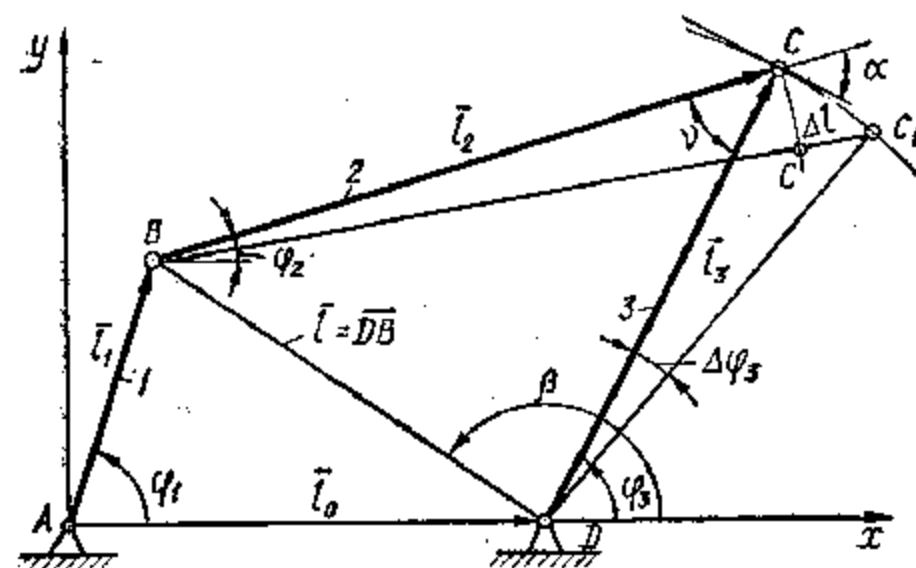


Рис. 6.5. Условие замкнутости контура шарнирного четырехзвенника

нирно-рычажного механизма функция положения может быть определена методом замкнутого векторного контура. Сущность этого метода заключается в том, что для любой замкнутой кинематической цепи, представляемой в виде многоугольника векторов, можно записать условие замкнутости векторного контура, вследствие чего суммы проекций сторон многоугольника на оси прямоугольной системы координат равны нулю. Направления векторов принимаются исходя из удобства отсчета углов, определяющих положения звеньев.

Для четырехзвенного механизма с вращательными кинематическими парами (рис. 6.5) условие замкнутости при обходе контура по часовой стрелке будет $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0$. Поместим начало координат в точку A , а ось абсцисс направим по AD . Для удобства отсчета угла φ_3 придадим векторам направления, как указано на рис. 6.5. Тогда условие замкнутости примет вид

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_0 + \vec{l}_3, \quad (6.1)$$

чему соответствуют два уравнения проекций сумм векторов на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_0 + l_3 \cos \varphi_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Функциями положения звеньев 2 и 3 являются функции $\varphi_2(\varphi_1)$ и $\varphi_3(\varphi_1)$. Выражая в формуле (6.2) φ_2 и φ_3 через φ_1 , получим искомые функции положения механизма. Функции положения являются математическим описанием механизма. Имея функцию положения, получают необходимое множество положений выходного звена в зависимости от положений входного звена.

Зная закон движения входного звена $\varphi_1(t)$, из функций положения получают законы движения звеньев механизма: $\varphi_2(t) = \varphi_2(\varphi_1(t))$; $\varphi_3(t) = \varphi_3(\varphi_1(t))$. По закону движения звеньев определяют качественные кинематические характеристики их движения — функции скоростей и ускорений. Например, для звена j имеем

$$\omega_j(t) = d\varphi_j(t)/dt; \quad \varepsilon_j(t) = d^2\varphi_j(t)/dt^2.$$

При кинематическом синтезе принимают благоприятные, с точки зрения эксплуатации механизмов, функции $\omega_j(t)$ и $\varepsilon_j(t)$. Например, для большинства механизмов желательно монотонное или плавное изменение скоростей и ускорений звеньев, так как быстрое изменение скорости приводит к появлению ударной нагрузки при работе. Изменения ускорений приводят к изменению сил инерции. Исходя из благоприятных качественных характеристик находят соответствующую функцию положения.

Кинематические свойства механизма характеризуются передаточным отношением, под которым понимается отношение линейных или угловых скоростей звеньев. Зависимость передаточного отношения i от положения входного звена φ_1 называют передаточной функцией. В общем случае для поступательно движущихся звеньев механизма при вращении входного звена

$$\begin{aligned} v_i(t) &= (ds_i(t)/dt) \cdot (d\varphi_1/d\varphi_1) = (ds_i(t)/d\varphi_1) \cdot (d\varphi_1/dt) = \\ &= \omega_1(t) ds_i(t)/d\varphi_1; \end{aligned} \quad (6.3)$$

для вращательно движущихся звеньев механизма

$$\begin{aligned} \omega_i(t) &= (d\varphi_i(t)/dt) \cdot (d\varphi_1/d\varphi_1) = (d\varphi_i(t)/d\varphi_1) \cdot (d\varphi_1/dt) = \\ &= \omega_1(t) d\varphi_i(t)/d\varphi_1; \\ d\varphi_i(t)/d\varphi_1 &= i(\varphi_i) = \omega_i(t)/\omega_1(t). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из приведенных формул следует, что функция положения звена однозначно определяет передаточную функцию и закон его движения.

6.4. Выбор методов синтеза

Для многозвенных механизмов задача кинематического синтеза решается редко. Чаще необходимо решать эту задачу для основного механизма, который определяет работоспособность всей машины в целом. Так, например, в подъемно-транспортном оборудовании, манипуляторах и т. п. — для шарнирных четырехзвенных механизмов; в тепловых двигателях, компрессорных машинах и т. п. — для кривошипно-ползунных механизмов.

При синтезе механизмов передаточные функции, как и функции положения, задаются для обеспечения требуемых кинематических характеристик. *Задача синтеза решается точными или приближенными методами.* Точные методы применяются к малозвенным механизмам, имеющим простую структурную схему. Для сложных схем усложняются передаточные функции и функции положения, увеличивается число параметров синтеза. К тому же при синтезе многозвенных механизмов обычно удовлетворяют не только кинематические требования к механизму, но и часто требования к его динамике. В этих условиях более удобными оказываются приближенные методы кинематического синтеза. Кроме того, во многих случаях методы приближенного кинематического синтеза более приемлемы, так как истинные кинематические характеристики все равно отличаются от расчетных, полученных точным методом. Это объясняется тем, что в реальных механизмах из-за погрешностей изготовления и упругости звеньев всегда имеются зазоры между элементами кинематических пар, неточности в линейных размерах звеньев, вследствие чего траектории точек, скорости и ускорения звеньев неизбежно отличаются от расчетных. Если для сложных задач синтеза использовать приближенные методы, то при обеспечении допустимых пределов отклонения от заданных параметров затраты на расчет окажутся значительно меньшими, чем при использовании точных методов.

Из задаваемых условий синтеза, определяющих свойства механизма, обычно выбирают одно *основное условие*: получение заданной траектории, воспроизведение закона движения и т. п. Тогда все остальные условия называются *дополнительными*. Основное условие обычно выражается в виде целевой функции, экстремум которой определяет выходные параметры синтеза. Если целевую функцию нельзя выразить в явном виде через параметры синтеза, то ее задают алгоритмом вычисления, т. е. через операторную функцию. Например, для механизма на рис. 6.5 в качестве целевой функции представляют максимальное отклонение от расчетного значения функции (положения звена 3) в зафиксированной позиции k ведущего звена

$$\Delta \varphi_{3k} = |\varphi_3(\varphi_1)_k - \varphi_3(\varphi_1)| \quad (6.5)$$

либо передаточной функции

$$\Delta i(\varphi_3)_k = |i(\varphi_3)_k - i(\varphi_3)|. \quad (6.6)$$

Рассмотрим схему решения задачи синтеза на примере механизма шарнирного четырехзвенника. Из выражений (6.2) следует, что параметрами синтеза являются $l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_1$. Если задать положения звеньев 1 и 3 углами $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1n}$ и $\varphi_{31}, \varphi_{32}, \dots, \varphi_{3n}$, то по функции положения звена 3 получим систему уравнений $\varphi_{31} = \varphi_3(\varphi_{11}), \varphi_{32} = \varphi_3(\varphi_{12}), \dots, \varphi_{3n} = \varphi_3(\varphi_{1n})$. Если число уравнений и число параметров совпадают, то параметры определяемы. Полученные подобным образом параметры могут не удовлетворять передаточной функции, тогда число входных параметров надо дополнить необходимыми кинематическими соотношениями, связывающими между собой некоторые другие параметры синтеза.

Достаточная для инженерной практики точность передаточной функции и функции положения достигается при применении приближенных методов кинематического синтеза. Степень приближения оценивается по теории приближения функции Чебышева. *Приближенный синтез по Чебышеву делится на три этапа. Первый этап* — выбор основного условия синтеза и его ограничений — заключается в определении целевой функции и аналитического выражения отклонений от нее. *Второй* — упрощение основного условия синтеза в виде отклонения от заданной функции. Наиболее удобный способ — использование *метода взвешенной разности*:

$$\Delta_q = q\Delta, \quad (6.7)$$

где Δ_q — отклонение от заданной функции, выраженное функционально; q — непрерывная весовая функция аргумента и параметров приближающей функции Δ .

Например, для механизма рассматриваемого шарнирного четырехзвенника отклонения от функции положения $\varphi_3(\varphi_1)$ звена 3 при синтезе определяются по достаточно сложной зависимости. Более простая зависимость будет, если это отклонение оценивать разностью $\Delta_l = C'C_1$ между длиной звена l_2 и выходным значением его l_2 при синтезе, т. е. $\Delta_l = l_2 - l'_2$. Очевидно, чем меньше Δ_l , тем меньше отклонение от заданной функции $\varphi_3(\varphi_1)$. Если в качестве весовой функции выбрать $q = l_2 + l'_2 \approx 2l_2$, то согласно формуле (6.7) получим

$$\Delta_q = q\Delta_l = 2l_2(l_2 - l'_2) = (l_2 + l'_2)(l_2 - l'_2) = l_2^2 - (l'_2)^2. \quad (6.8)$$

Так как $\Delta_l = l_3\Delta\varphi_3 \cos \alpha$, то с учетом формулы (6.7) получим

$$\Delta\varphi_3 = \Delta_l/l_3 \cos \alpha = \Delta_q/(2l_2l_3 \cos \alpha), \quad (6.9)$$

где $\alpha = \pi/2 - \delta$ — угол давления звена 2 на звено 3.

Третий этап синтеза (по Чебышеву) — вычисление параметров синтеза из условия минимума отклонения от заданной функции. Этот этап тем проще, чем проще целевая функция или функция взвешенной разности. Обычно он сводится к решению системы линейных уравнений (см. гл. 7).

6.5. Многопараметрическая и многокритериальная оптимизация

Задача синтеза решается либо просто как поиск параметров, удовлетворяющих целевой функции, либо как выбор таких их значений, при которых целевая функция имеет экстремальное значение. В этом случае говорят об оптимальном синтезе механизма по нескольким параметрам. Практически оптимальный синтез всегда возможен только с применением ЭВМ при использовании математических методов оптимизации: случайного поиска, направленного поиска и т. п.

Для многопараметрического оптимального синтеза механизма требуется решить задачу поиска глобального минимума целевой функции, так как в общем случае она имеет несколько минимумов. Глобальным минимумом функции называют наименьший из минимумов, называемых локальными (рис. 6.6): глобальный минимум находится в точке 3, в точках 1 и 2 находятся локальные минимумы. Очевидно, что даже для механизма простой схемы (см. рис. 6.5) поиск глобального минимума функции (6.5) перебором значений $l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_1$, являющихся параметрами синтеза, невозможен без ЭВМ. В сложных механизмах при учете ограничений синтеза эта задача еще более усложняется. Решение ее возможно на основе положений теории оптимальных систем, и сама задача является математической, а не механической.

Так как задача определения размеров звеньев механизмов решается с той или иной степенью приближения, то необходимо оценивать отклонения закона движения синтезированного механизма от заданного, исходного закона движения. Для ряда значений угловой координаты входного звена необходимо определить угловые или линейные координаты выходного звена. Тогда, погрешность положения выходного звена для i -го положения входного звена будет

$$\Delta_{i\varphi} = \varphi_{3i} - \varphi_{3i} \text{ или } \Delta_{is} = s_{3i} - s_{3i},$$

где φ_{3i}, s_{3i} — фактические координаты выходного звена; φ_{3i}, s_{3i} — заданные координаты выходного звена.

За критерий оценки при рассмотрении n положений входного звена принимают либо среднее по модулю значение отклонения

$$\Delta_{\text{ср}} = \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i \right) / n, \text{ либо среднее квадратическое отклонение } \Delta_{\text{кв}} = \left(\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \right) / n.$$

7. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

7.1. Модификации шарнирного четырехзвенника

С помощью инверсии (см. гл. 3) из шарнирного четырехзвенника получают механизмы, обеспечивающие различный характер движения выходного звена. В этих условиях в качестве входного звена может быть принято любое из четырех звеньев механизма, но при определенном соотношении их размеров. Пусть l_1 — самое короткое звено механизма (рис. 7.1), а l_2 или l_3 — самое длинное. Для того чтобы при вращении кривошипа 1 точка B попала в положение B_1 , необходимо соблюдать неравенство

$$l_1 + l_0 < l_2 + l_3. \quad (7.1)$$

Из свойства треугольника следует также, что при $l_2 > l_3$

$$l_1 + l_0 > l_2 - l_3. \quad (7.2)$$

Для прохождения точки B через положение B_3 необходимо соблюдать неравенство

$$l_0 - l_1 < l_2 + l_3. \quad (7.3)$$

а при $l_2 > l_3$ следует, что

$$l_0 - l_1 > l_2 - l_3. \quad (7.4)$$

Неравенство (7.1) исключает неравенство (7.3), неравенство (7.4) исключает неравенство (7.2). Тогда для случая $l_2 > l_3$ получим систему неравенств

$$\left. \begin{aligned} l_1 + l_0 &< l_2 + l_3; \\ l_1 + l_2 &< l_0 + l_3. \end{aligned} \right\}$$

Так как l_1 — наименьшее звено, то при наибольшем звене l_2 неравенство

$$l_1 + l_2 < l_0 + l_3 \quad (7.5)$$

обеспечивает выполнение остальных условий. При наибольшем звене l_3 условие прохождения точки B через B_1 и B_3 выражается неравенством

$$l_1 + l_3 < l_2 + l_0. \quad (7.6)$$

Неравенства (7.5) и (7.6) позволяют сформулировать условие проворачиваемости звеньев (правило Грасгофа, см. прил.): самое короткое звено шарнирного механизма (рис. 7.2) будет кривошипом, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев. Из этого следует, что: механизм будет двухкоромысловым (рис. 7.2, а), если размеры его звеньев не удовлетворяют указанному правилу; кривошипно-коромысловым (рис. 7.2, б), если размеры его удовлетворяют правилу и кривошип — самое короткое звено; двухкривошипным (рис. 7.2, в), если размеры его звеньев удовлетворяют правилу и за стойку принято самое короткое звено.

Рассмотренные условия проворачиваемости справедливы и для четырехзвенных механизмов, имеющих поступательную кинематическую пару. Это устанавливают при рассмотрении процесса преобразования вращательной пары в поступательную. Так как центр вращательной пары C движется по окружности радиуса $D'C$ (рис. 7.3, а), то кинематика звеньев 1 и 2 не изменяется, если звено 3 механизма заменить ползуном, движущимся по круговой направ-

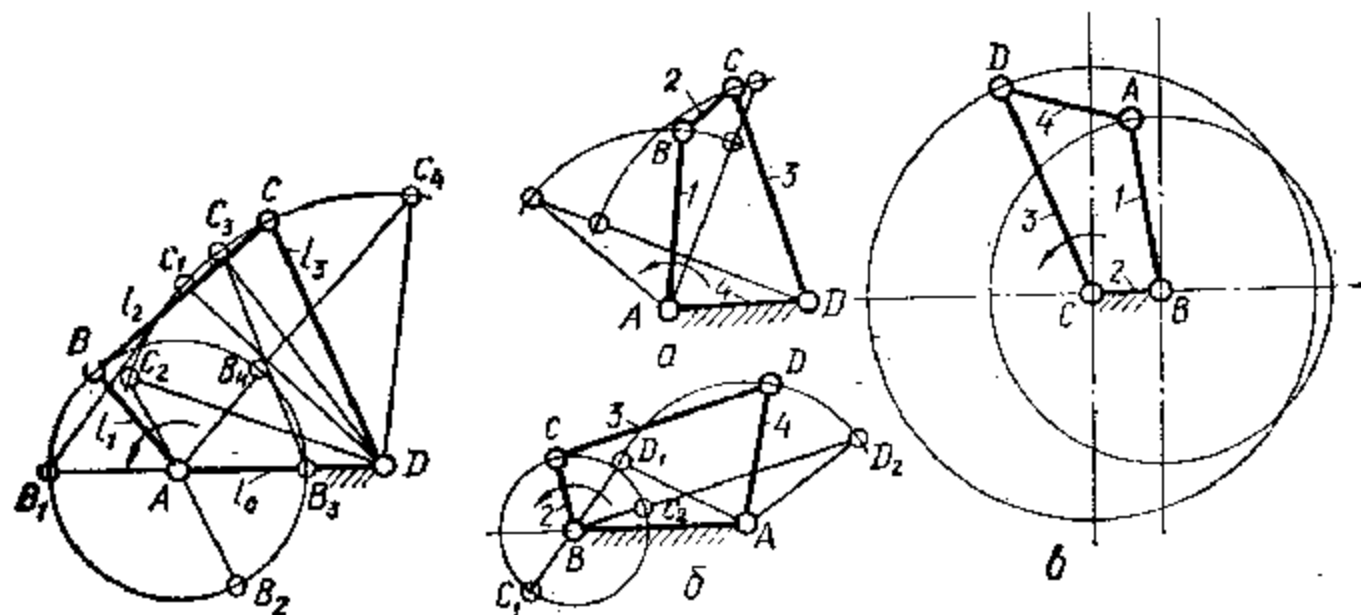


Рис. 7.1. Условие проворачиваемости звеньев

Рис. 7.2. Модификация шарнирного четырехзвенника с вращательными парами

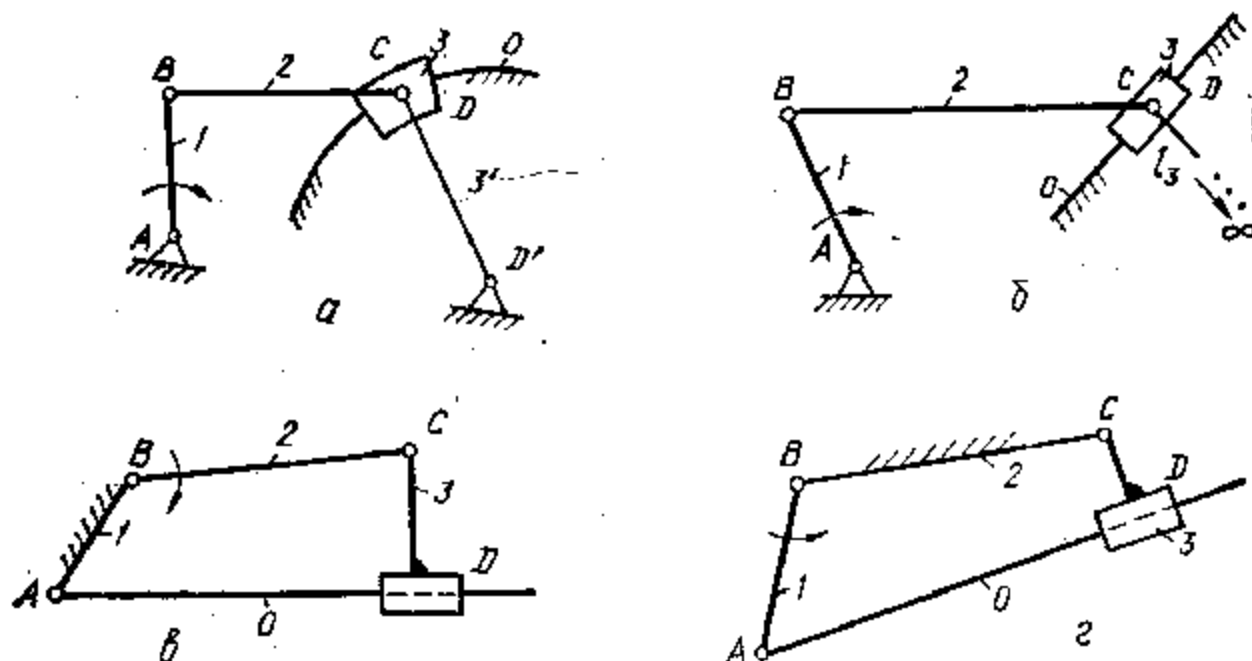


Рис. 7.3. Модификации шарнирного четырехзвенника с поступательными парами

ляющей того же радиуса. При увеличении длины l_3 звена 3 направляющая выпрямится и при $l_3 \rightarrow \infty$ станет прямолинейной. В этом случае механизм превратится в кривошипно-ползунный (рис. 7.3, б). Если при $l_3 \rightarrow \infty$ за стойку принять звено 1, а звено 0 освободить (рис. 7.3, в), то получим кулисный механизм с вращающимися звеньями 2 и 0 со свойствами, аналогичными двухкривошипному механизму, приведенному на рис. 7.2, в. При закреплении звена 2 получим другую разновидность кулисного механизма (рис. 7.3, г).

Увеличивая размеры элементов кинематической пары B и не изменяя длину звена 1 — l_1 (рис. 7.4), получают механизмы других типов, но обладающих такой же проворачиваемостью звеньев и кинематикой, как и в шарнирном четырехзвеннике. В этих механизмах звено 1 превращается в эксцентрик с эксцентриситетом $e = l_1$. Обычно такие решения конструктивно удобно выполнять при l_1 , соизмеримых с диаметрами шарниров кинематических пар.

7.2. Точный метод синтеза шарнирного четырехзвенника

В общем случае синтез механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 7.5) сводится к определению параметров $l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_1$, где $\varphi_1 = \text{const}$, т. е. механизм рассматривается при фиксированном кривошипе. Рассмотрим метод, при котором предварительно задаются длиной ведомого звена l_3 при известной длине стойки l_0 и предполагают заданными угловые координаты $\varphi_{31}, \varphi_{32}, \varphi_{33}$ выход-

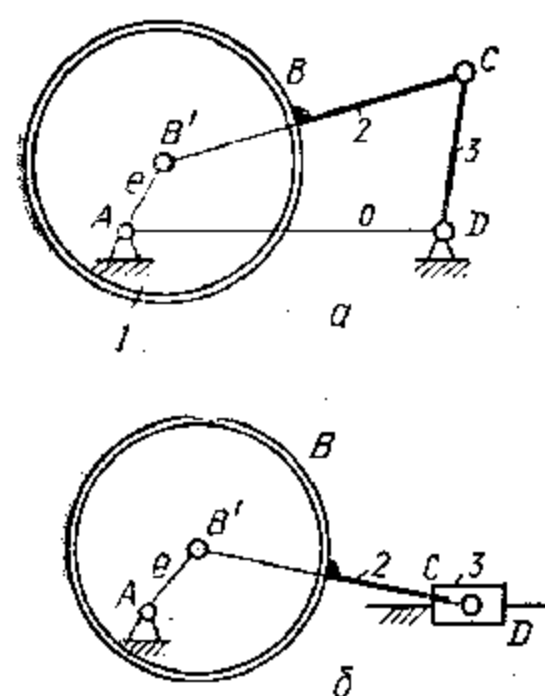


Рис. 7.4. Эксцентрикые механизмы

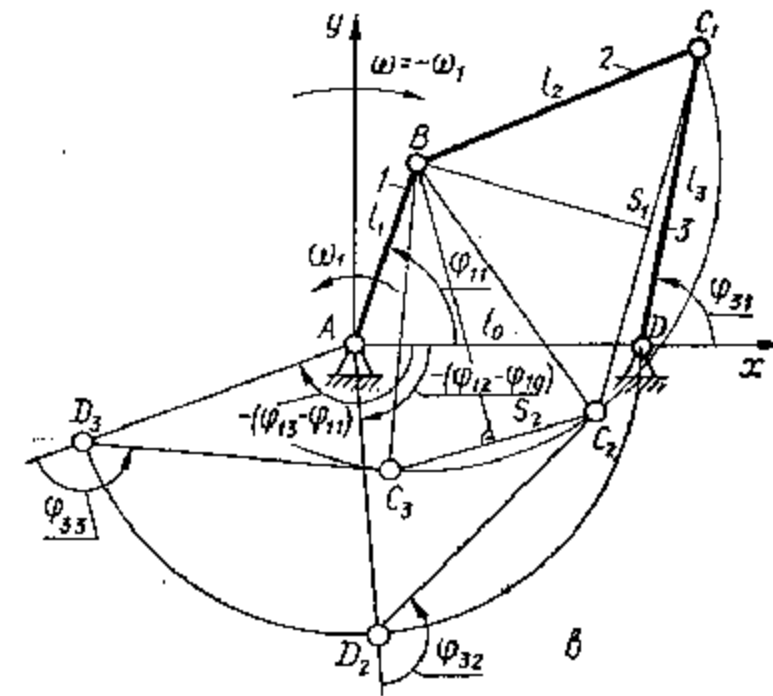


Рис. 7.5. К точному синтезу шарнирного четырехзвенника

ного звена при трех положениях входного с угловыми координатами φ_{11} (начальное положение) и $(\varphi_{12} - \varphi_{11}), (\varphi_{13} - \varphi_{11})$. При принятых условиях кинематический синтез сводится к определению размеров l_1 и l_2 . Эти размеры определяются, если в системе координат xAy (рис. 7.5) известны координаты точки B .

Сообщим всему механизму угловую скорость $\omega = -\omega_1$. Тогда входное звено в системе xAy станет неподвижным, а в направлении, противоположном скорости ω_1 , будет вращаться стойка 0. Для второго и третьего положений механизма положение стойки относительно звена 1 определяется углами $(\varphi_{12} - \varphi_{11})$ и $(\varphi_{13} - \varphi_{11})$, откладываемыми от оси абсцисс в направлении вращения со скоростью $-\omega_1$. Так как точка B при движении звена 2 не меняет положения, а длина звена 2 неизменна, то точка B является центром окружности, проведенной через три точки: C_1, C_2 и C_3 . Положение точки B , как

центра окружности, определится пересечением перпендикуляров, восстановленных к серединам отрезков C_1C_2 и C_2C_3 .

Аналитически координаты точек C_i при $i = 1, 2, 3$ определяются с помощью векторного уравнения $\overline{AC_i} = \overline{AD} + \overline{DC_i}$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} x_{Ci} &= l_0 \cos(\varphi_{11} - \varphi_{1i}) + l_3 \cos(\varphi_{3i} + (\varphi_{11} - \varphi_{1i})); \\ y_{Ci} &= l_0 \sin(\varphi_{11} - \varphi_{1i}) + l_3 \sin(\varphi_{3i} + (\varphi_{11} - \varphi_{1i})). \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Угловые коэффициенты прямых, проходящих через точки C_1 , C_2 и C_3 , C_2 :

$$k_{C_1C_2} = (y_{C_2} - y_{C_1}) / (x_{C_2} - x_{C_1}); \quad k_{C_2C_3} = (y_{C_3} - y_{C_2}) / (x_{C_3} - x_{C_2}).$$

Тогда угловые коэффициенты соответствующих перпендикуляров к прямым C_1C_2 и C_2C_3 :

$$k_{12} = -(x_{C_2} - x_{C_1}) / (y_{C_2} - y_{C_1}); \quad k_{23} = -(x_{C_3} - x_{C_2}) / (y_{C_3} - y_{C_2}).$$

Координаты точек S_1 и S_2 , лежащих на серединах отрезков C_1C_2 и C_2C_3 :

$$\left. \begin{aligned} x_{S_1} &= (x_{C_1} + x_{C_2}) / 2; & x_{S_2} &= (x_{C_2} + x_{C_3}) / 2; \\ y_{S_1} &= (y_{C_1} + y_{C_2}) / 2; & y_{S_2} &= (y_{C_2} + y_{C_3}) / 2. \end{aligned} \right\}$$

Уравнения прямых BS_1 и BS_2 :

$$\left. \begin{aligned} -k_{12}x + y &= y_{S_1} - k_{12}x_{S_1}; \\ -k_{23}x + y &= y_{S_2} - k_{23}x_{S_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Из решения системы (7.8) определяются координаты x_B и y_B точки B и размеры звеньев 1 и 2:

$$l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}; \quad (7.9)$$

$$l_2 = \sqrt{(x_B - x_{C_1})^2 + (y_B - y_{C_1})^2}, \quad (7.10)$$

при начальном положении кривошипа, определяемом углом

$$\varphi_{11} = \arctg(y_B/x_B).$$

Приведенный алгоритм синтеза шарнирного четырехзвенного механизма реализуется операторной функцией $SNTZR$, охватывающей своим действием зависимости от (7.7) и все промежуточные выражения для φ_{11} до

$$SNTZR(l_0, l_3, \varphi_1(3), \varphi_3(3); l_1, l_2), \quad (7.11)$$

где $\varphi_1(3)$, $\varphi_3(3)$ — массивы трех числовых значений углов, определяющих взаимные положения звена 1 и звена 3.

7.3. Приближенный синтез шарнирного четырехзвенника

Алгоритм синтеза, описываемый операторной функцией (7.11), позволяет определить размеры механизма, при которых выходное звено находится в трех определенных положениях, соответствующих положениям кривошипа. Однако положения звена 3 при других положениях входного звена при полученных размерах звеньев точно не фиксируются.

Если в качестве исходных положений для синтеза механизма принят закон движения выходного звена, необходимо иметь зависимость между угловыми перемещениями выходного и входного звеньев. Эта зависимость может быть задана в виде функций положения $\varphi_3(\varphi_1)$, $\varphi_2(\varphi_1)$, либо передаточных функций $i(\varphi_1)$ или $i(\varphi_2)$, а также табличным способом. Функции положения $\varphi_2(\varphi_1)$ и $\varphi_3(\varphi_1)$ звеньев 2 и 3 механизма шарнирного четырехзвенника получают

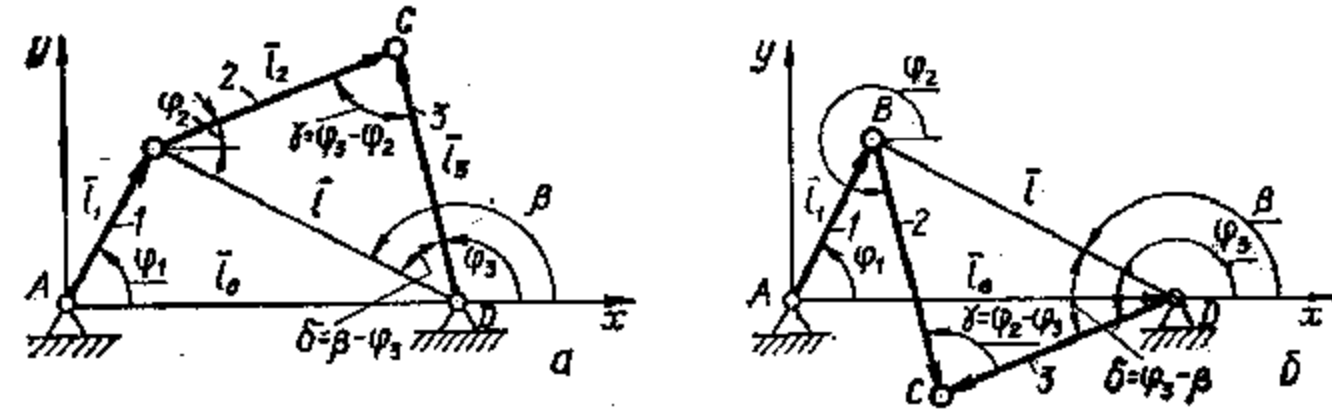


Рис. 7.6. Приближенный синтез шарнирного четырехзвенника

из условий (6.2) замкнутости векторного контура механизма. Вводя вектор $\vec{l} = \overline{DB}$ с направляющим углом β , получим (рис. 7.6):

$$\left. \begin{aligned} \vec{l}_1 &= \vec{l}_0 + \vec{l}; \\ l_1 \cos \varphi_1 &= l_0 + l \cos \beta; \\ l_1 \sin \varphi_1 &= l \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

где $l = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1l_0 \cos \varphi_1}$.

Подставляя выражения (7.12) в условие (6.2), получим

$$\left. \begin{aligned} l_2 \cos \varphi_2 &= l_3 \cos \varphi_3 - l \cos \beta; \\ l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3 - l \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Возведем в квадрат обе зависимости (7.13), сложим их и после преобразований получим $\delta = |\varphi_3 - \beta| = \arccos((l_3^2 + l^2 - l_2^2)/(2l_3l))$, откуда $\varphi_3 = \beta \pm \delta$.

Два возможных значения для φ_3 объясняются тем, что при одном и том же положении звена 1 звенья 2 и 3 могут занимать два различных положения. Для определенности решения вводят понятие условия сборки механизма — число $q = -1$ для схемы (рис. 7.6, а) и $q = 1$ для схемы (б). Тогда $\varphi_3 = \beta + q\delta$ и, следовательно,

$$\varphi_3 = \arcsin(l_1 \sin \varphi_1 / l) + q \arccos((l_3^2 + l^2 - l_2^2)/(2l_3l)). \quad (7.14)$$

Для определения функции положения звена 2 $\varphi_2(\varphi_1)$ найдем $\gamma = |\varphi_3 - \varphi_2|$ из формулы (6.2):

$$\gamma = \arccos((l_2^2 + l_3^2 - l^2)/(2l_2l_3)).$$

С учетом условия сборки получим

$$\varphi_2 = \varphi_3 + q \arccos((l_2^2 + l_3^2 - l^2)/(2l_2l_3)). \quad (7.15)$$

Передаточные функции $i(\varphi_3)$ и $i(\varphi_2)$ получают дифференцированием зависимостей (7.14) и (7.15) по переменной φ_1 . В общем виде дифференцирование этих функций весьма громоздко. Более удобным является применение численного дифференцирования массивов значений углов φ_3 и φ_2 для получения ряда числовых значений передаточных функций. Применяя операторную функцию численного дифференцирования $DFRNCL$ (см. гл. 5), получим:

$$DFRNCL(N, \Delta\varphi_1, \varphi_3(N); i_{\varphi_3}(N));$$

$$DFRNCL(N, \Delta\varphi_1, \varphi_2(N); i_{\varphi_2}(N)).$$

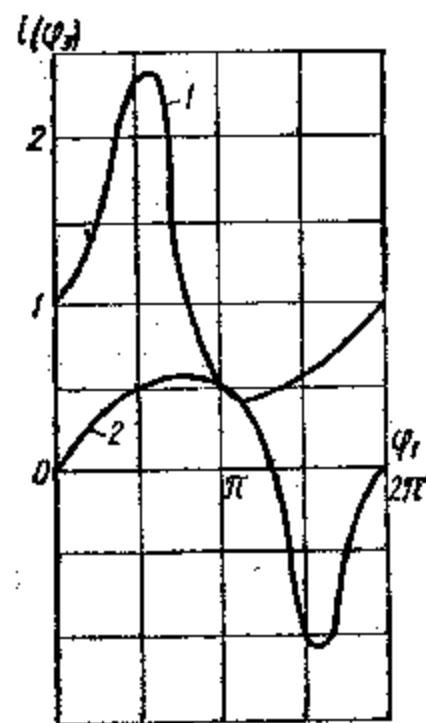


Рис. 7.7. Графики передаточных функций

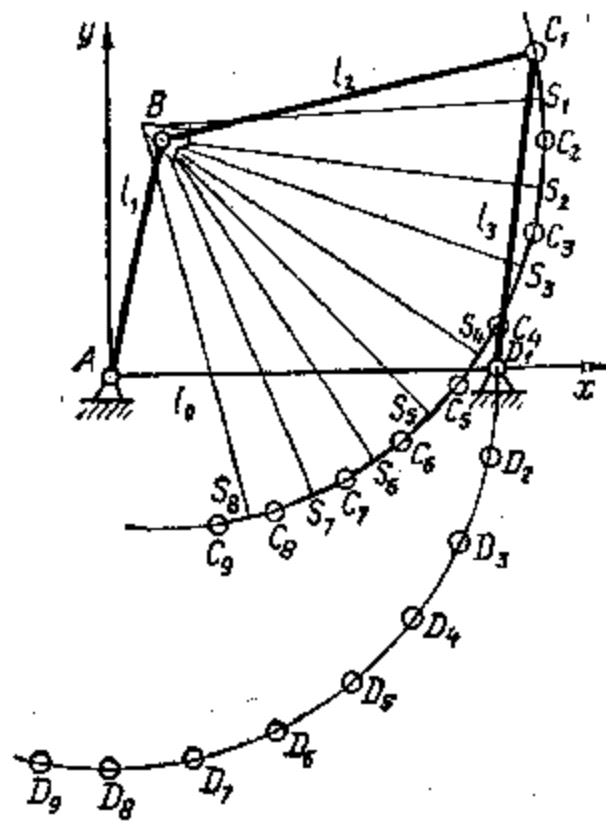


Рис. 7.8. Синтез механизма по массиву числовых значений углов звеньев

где N — количество числовых значений функций; $\varphi_2(N)$, $\varphi_3(N)$ — массивы числовых значений функций положения; $i_{\varphi_2}(N)$, $i_{\varphi_3}(N)$ — массивы числовых значений передаточных функций; $\Delta\varphi_1$ — шаг интегрирования.

На рис. 7.7 приведены примерные графики передаточных функций для двухкривошипного 1 и кривошипно-коромыслового 2 механизмов.

Функцию положения ведомого звена получают аналитическим либо численным интегрированием передаточной функции, т. е.

$$\varphi_3(\varphi_1) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} i(\varphi_3) d\varphi_1. \text{ Обращаясь к гл. 5, получим}$$

$$INTGR(N, \Delta\varphi_1, NOMER, i_{\varphi_3}(N); \varphi_3(N)).$$

В конечном счете зависимость угловых перемещений сводится к массивам числовых значений углов входного и выходного звеньев. При синтезе по такому условию из массивов значений переменных, кратных трем, выбирают элементы массивов $i_{\varphi_3}(3)$ и $\varphi_3(3)$. После

этого обращением к операторной функции $SNTZR$ определяют размеры l_1 и l_2 и координаты точек B_i (рис. 7.8). Если бы координаты точек B_i совпадали, то решение было бы точным. В общем случае точки C_i не располагаются на одной окружности, следовательно, и точки B_i тоже не совпадут. Тогда при размерности массивов данных n и $m = n/3$ получим средние значения параметров синтеза:

$$l_1 = \left(\sum_{i=1}^n l_{1i} \right) / m;$$

$$l_2 = \left(\sum_{i=1}^n l_{2i} \right) / m;$$

$$\varphi_1 = \arctg \left(\sum_{i=1}^n y_{Bi} / \sum_{i=1}^n x_{Bi} \right).$$

Если необходимо обеспечить движение некоторых точек звеньев механизма (чаще всего на шатуне) по определенным заданным траекториям, то выбором размеров шатуна и положения точек на нем можно получить *шатунные кривые*, которые на некотором участке

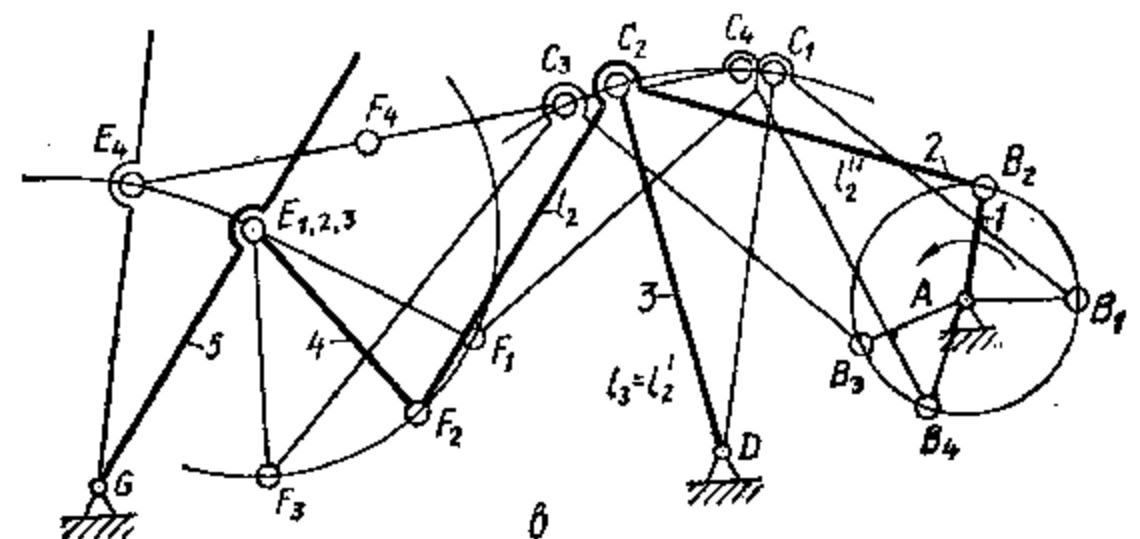
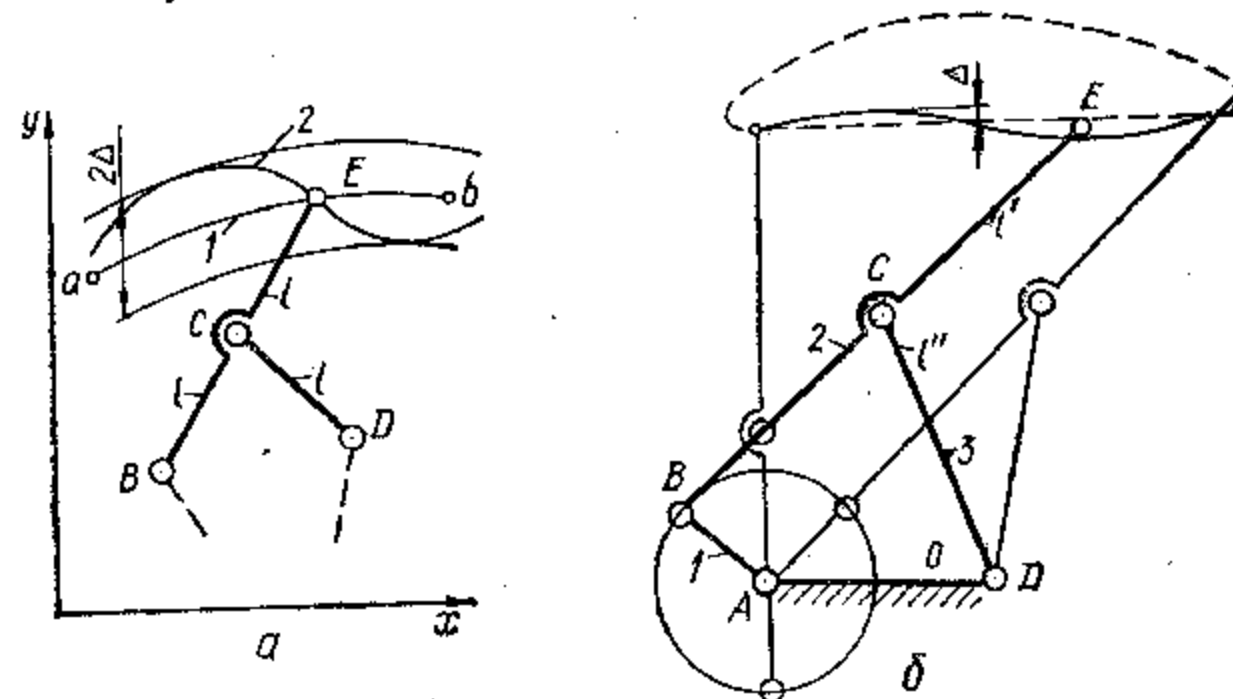


Рис. 7.9. Синтез механизмов, приближенно воспроизводящих заданную траекторию

с высокой точностью приближения являются отрезками прямых, дуг окружностей, эллипсов, гипербол и т. д., заданных в условии синтеза. Часто для этого применяют метод построения многосвязных механизмов, приближенно воспроизводящих заданную траекторию, основанный на теории о функциях, наименее отклоняющихся от нуля, разработанный Чебышевым. Сущность его заключается в следующем. Пусть в системе координат xOy (рис. 7.9, а) траектория 1 задана функцией $f(x)$, к которой максимально приближается траектория 2 точки E звена механизма, описываемая в общем случае полиномом

$$p(x) = p_1\varphi_1(x_1) + p_2\varphi_2(x_2) + \dots + p_{n+1}\varphi_{n+1}(x_{n+1}),$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{n+1}(x)$ — функции Чебышева, характер которых определяется типом кривой 1; $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ — коэффициенты полинома.

По Чебышеву (приводится без доказательства), для того чтобы полином $p(x)$ наименее уклонялся от $f(x)$ в интервале ab , необходимо и достаточно, чтобы разность $(f(x) - p(x))$ не менее $n + 2$ раз достигала своих предельных отклонений $\pm \Delta$ с последовательно чередующимися знаками, т. е. $(f(x) - p(x)) = \pm \Delta$. Исходя из этого функции Чебышева выражаются через размеры звеньев, которые определяются решением системы линейных уравнений. П. Л. Чебышев показал, что свойствами лучшего приближения шатунной кривой к заданной обладают механизмы, имеющие в своей структуре двухповодковую группу — диаду Чебышева, образующую в кинематической цепи четыре вращательные пары, и у которых $BC = CE = CD$ (а). В диаде Чебышева погрешность отклонения точки E от воспроизводимой кривой 1 на порядок меньше погрешности, с которой воспроизводит кривую точка B . На рис. 7.9, б показано применение диады Чебышева для воспроизведения прямой линии, а на рис. 7.9, в для механизма с остановкой звена 5.

7.4. Кривошипно-коромысловые механизмы с заданными свойствами

Из технологических или конструктивных соображений некоторые шарнирно-рычажные механизмы должны обладать определенными свойствами, обеспечивающими заданное соотношение прямого и обратного хода выходного звена, движение шатуна по определенному закону, очерчивание некоторыми точками предусмотренных траекторий и т. п. Так, например, с целью повышения производительности необходимо, чтобы скорость холостого хода была больше рабочего, что характеризуется определенной величиной коэффициента изменения средней скорости коромысла $k_\omega = \omega_{3\text{х}}/\omega_{3\text{р}}$ (гл. 2).

Пусть заданы длина l_3 коромысла четырехзвенника (рис. 7.10), угловые координаты φ_{31} и φ_{32} двух крайних положений его и коэффициент k_ω ; требуется определить остальные размеры механизма. Точки C_1 и C_2 , соответствующие крайним положениям коромысла, определяют положение точек B_1 и B_2 на линиях AC_1 и AC_2 для соот-

ветствующих положений кривошипа 1. Обозначим через β угол между AC_1 и AC_2 . Тогда $k_\omega = (\pi + \beta)/(\pi - \beta)$, откуда

$$\beta = \pi(k_\omega - 1)/(k_\omega + 1). \quad (7.16)$$

Построение механизма с заданным коэффициентом k_ω выполняют в следующей последовательности. Проведем из середины отрезка C_1C_2 в точке S перпендикуляр, который пройдет через искомую точку D . Относительно линии SD под углом β проведем через точки C_1 и C_2 прямые, которые пересекутся в точке E . Центр вращения

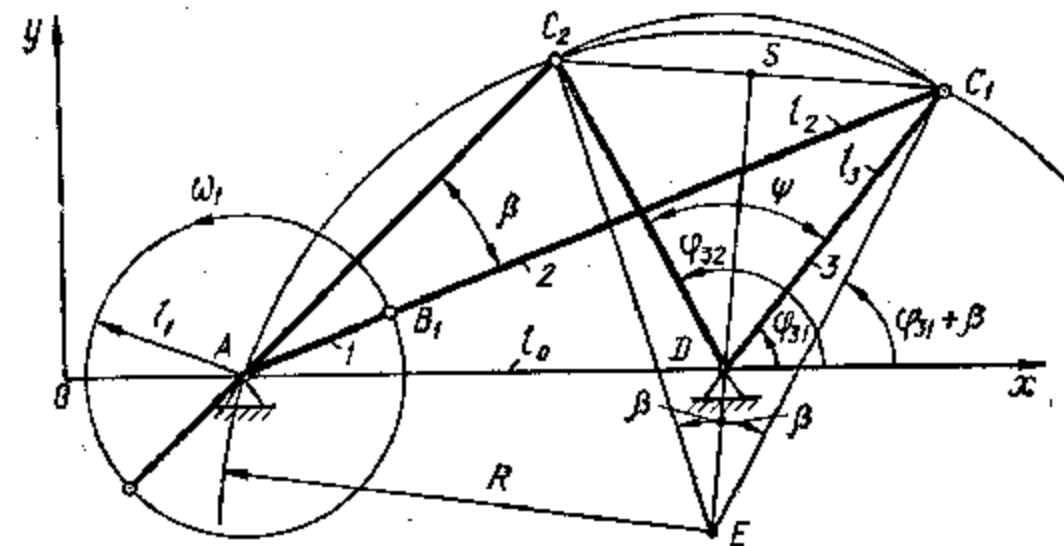


Рис. 7.10. Синтез механизма по коэффициенту изменения средней скорости коромысла

А кривошипа 1 должен находиться на пересечении окружности радиуса $R = EC_1$ с осью абсцисс, так как для окружности будет справедливо геометрическое соотношение $\angle C_2AC_1 = \beta = 0,5 \angle C_2EC_1$. Из этого построения координаты точек C_1 и C_2 будут

$$\left. \begin{aligned} x_{C_1} &= x_D + l_3 \cos \varphi_{31}; & y_{C_1} &= l_3 \sin \varphi_{31}; \\ x_{C_2} &= x_D + l_3 \cos \varphi_{32}; & y_{C_2} &= l_3 \sin \varphi_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Угловой коэффициент прямой SD определится по координатам точек C_1 и C_2 :

$$k_{SD} = -(x_{C_2} - x_{C_1})/(y_{C_2} - y_{C_1}),$$

а для прямой C_1E он будет равен

$$k_{C_1E} = \tan(\varphi_{31} + \beta).$$

Координаты x_E, y_E точки E определяются из совместного решения уравнений прямых SD и C_1E :

$$\left. \begin{aligned} y - k_{SD}x &= -k_{SD}x_D; \\ y - k_{C_1E}x &= -k_{C_1E}x_{C_1}, \end{aligned} \right\}$$

а радиус окружности $R = EC_1$ будет равен

$$R = \sqrt{(x_E - x_{C_1})^2 + (y_E - y_{C_1})^2}.$$

Абсцисса точки A определится из условия

$$x_A = x_E \pm \sqrt{R^2 - y_E^2}.$$

Знаки «+» и «—» определяют два возможных варианта сборки механизма.

Длина кривошипа согласно рис. 7.10 будет равна

$$l_1 = (AC_1 - AC_2)/2, \quad (7.18)$$

где

$$AC_1 = \sqrt{(x_A - x_{C_1})^2 + (y_A - y_{C_1})^2};$$

$$AC_2 = \sqrt{(x_A - x_{C_2})^2 + (y_A - y_{C_2})^2}.$$

Размеры шатуна и стойки определяются из зависимостей

$$l_2 = AC_1 - l_1; \quad (7.19)$$

$$l_0 = |x_D - x_A|. \quad (7.20)$$

Алгоритм синтеза механизма по величине k_ω и двум положениям коромысла l_3 может быть описан операторной функцией

$$SNTZR1(k_\omega, \varphi_{31}, \varphi_{32}, l_3, x_D; l_1, l_2, l_0), \quad (7.21)$$

последовательно реализующей зависимости от (7.16) до (7.20), включая и промежуточные преобразования.

Если кроме значения кинематического параметра k_ω ставится требование обеспечения незаклинивания звеньев, то к условиям синтеза механизма добавляется дополнительный параметр — *угол передачи движения* $\gamma = 90^\circ - \alpha$ (гл. 6). Этот угол между звеньями 2 и 3 (рис. 7.11) связан с углом φ_1 поворота кривошипа зависимостью, получаемой из рассмотрения $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$:

$$(BD)^2 = l_1^2 + l_0^2 - 2l_1l_0 \cos \varphi_1 = l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \cos \gamma.$$

Из $\triangle AC_2C_1$ схемы механизма при допускаемых углах передачи движения $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ для крайних положений коромысла получим

$$\rightarrow C_2C_1A = (\pi - \psi)/2 - \gamma_{\min}; \quad \rightarrow AC_2C_1 = \gamma_{\max} + (\pi - \psi)/2;$$

$$\beta = \pi - \rightarrow C_2C_1A - \rightarrow AC_2C_1 = \pi - \pi + \psi + \gamma_{\min} - \gamma_{\max} = \\ = \psi + \gamma_{\min} - \gamma_{\max}; \quad \psi = \beta + \gamma_{\max} - \gamma_{\min}.$$

Положение центра вращательной пары A кривошипа и стойки находят на пересечении прямых C_1A и C_2A , угловые коэффициенты которых $k_1 = \operatorname{tg}(\varphi_{31} - \gamma_{\min})$ и $k_2 = \operatorname{tg}(\varphi_{31} + \psi - \gamma_{\max})$.

Система уравнений прямых C_1A и C_2A будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} -k_1x + y &= y_{C_1} - k_1x_{C_1}; \\ -k_2x + y &= y_{C_2} - k_2x_{C_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Координаты точки C_1 и C_2 определяются по формулам (7.17) при подстановке $\varphi_{32} = \varphi_{31} + \psi$. Решения системы (7.22) определяют координаты x_A, y_A ; размеры l_1, l_2, l_0 определяются соответственно из формул (7.18), (7.19) и (7.20).

Алгоритм синтеза механизма по параметрам $k_\omega, \gamma_{\min}, \gamma_{\max}$ описывается операторной функцией

$$SNTZR2(k_\omega, \varphi_{31}, l_3, x_D, \gamma_{\min}, \gamma_{\max}; l_1, l_2, l_0), \quad (7.23)$$

последовательно реализующей соответствующие зависимости.

Если в кривошипно-коромысловом механизме нужно обеспечить определенные положения шатуна, то размеры механизма определяют по задаваемым координатам его точек. Пусть два положения звена 2 (рис. 7.12) заданы координатами точек B_1, B_2 и C_1, C_2 углом поворота кривошипа φ_1 , соответствующего перемещению шатуна из одного в другое положение.

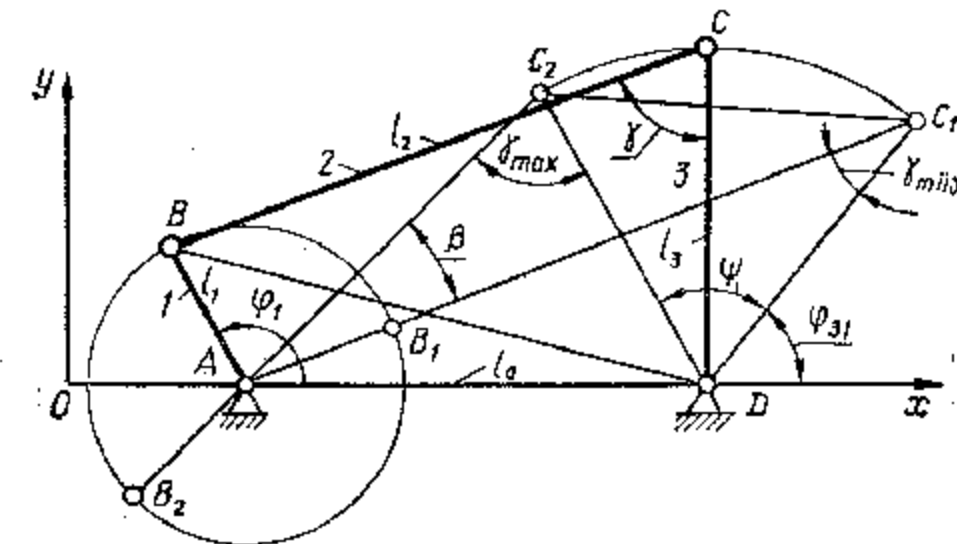


Рис. 7.11. Синтез механизма с учетом угла передачи движения

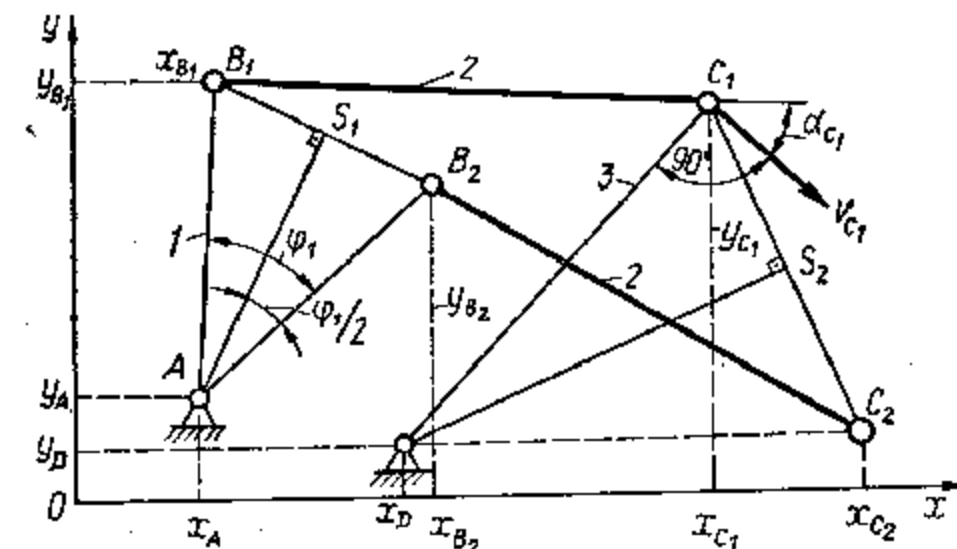


Рис. 7.12. Синтез механизма по заданным положениям шатуна

Соединим точки B_1 и B_2 , а также C_1 и C_2 прямыми и в середине этих прямых в точках S_1 и S_2 проведем перпендикуляры к ним. Если задано направление скорости точки C_1 в данный момент, то положение центра вращательной пары D определится на пересечении перпендикуляров к линии C_1C_2 , проходящих через точку S_2 и через точку C_1 к вектору v_{C_1} . Положение центра A вращательной пары кривошип — стойка определяется пересечением прямых B_1A и S_1A . Расчетные зависимости получают из следующих соображений. Направляющие углы отрезков B_1B_2 и C_1C_2 :

$$UGL2(x_{B_1}, y_{B_1}, x_{B_2}, y_{B_2}; \varphi_{B_1B_2}); \quad (7.24)$$

$$UGL2(x_{C_1}, y_{C_1}, x_{C_2}, y_{C_2}; \varphi_{C_1C_2}). \quad (7.25)$$

Угловые коэффициенты прямых S_1A и S_2D :

$$k_{S_1A} = -1/\operatorname{tg} \varphi_{B_1B_2}; \quad k_{S_2D} = -1/\operatorname{tg} \varphi_{C_1C_2}.$$

Угловые коэффициенты прямых B_1A и C_1D

$$k_{B_1A} = \operatorname{tg}(\varphi_{B_1A} - \pi/2 + \varphi_1/2); \quad k_{C_1D} = \operatorname{tg}(\alpha_C - \pi/2).$$

Координаты точек S_1 и S_2

$$\left. \begin{aligned} x_{S_1} &= (x_{B_1} + x_{B_2})/2; \\ y_{S_1} &= (y_{B_1} + y_{B_2})/2; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x_{S_2} &= (x_{C_1} + x_{C_2})/2; \\ y_{S_2} &= (y_{C_1} + y_{C_2})/2. \end{aligned} \right\}$$

Уравнения для определения координат x_A и y_A

$$\left. \begin{aligned} -k_{B_1A}x + y &= y_{B_1} - k_{B_1A}x_{B_1}; \\ -k_{S_1A}x + y &= y_{S_1} - k_{S_1A}x_{S_1}, \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

а для определения координат x_D и y_D

$$\left. \begin{aligned} -k_{C_1D}x + y &= y_{C_1} - k_{C_1D}x_{C_1}; \\ -k_{S_2D}x + y &= y_{S_2} - k_{S_2D}x_{S_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

В результате решения систем (7.26) и (7.27) получим координаты точек A и D . Размеры звеньев определяются из зависимостей

$$l_1 = \sqrt{(x_A - x_{B_1})^2 + (y_A - y_{B_1})^2}; \quad (7.28)$$

$$l_3 = \sqrt{(x_{C_1} - x_D)^2 + (y_{C_1} - y_D)^2}. \quad (7.29)$$

Алгоритм, реализующий эти зависимости, описывается операторной функцией

$$SNTZR3(x_B(2), x_C(2), \varphi_1, \alpha_C; l_1, l_3). \quad (7.30)$$

7.5. Кривошипно-ползунные механизмы

Синтез кривошипно-ползунного механизма осуществляется точно, если заданными являются координаты ползуна (например, три координаты точки C (рис. 7.13, а): x_{C_1} , x_{C_2} , x_{C_3} , соответствующие положениям ведущего звена 1 при повороте его от исходного φ_{11} на углы $(\varphi_{12} - \varphi_{11})$ и $(\varphi_{13} - \varphi_{11})$, величина l_3 и смещение e). При этих входных параметрах выходными параметрами синтеза будут размеры l_1 и l_2 , для определения которых применим принцип обращения движения. Плоскость, в которой расположен механизм, поворачивают в сторону, противоположную скорости ω , кривошипа (рис. 7.13, б). Тогда звено 1 станет неподвижным, а звенья 2 и 3 будут вращаться вокруг точки B и A . Траекторией движения точки C будет окружность с центром B ; линия, проходящая через центр шарнира C и параллельная оси абсцисс, касается окружности радиуса $(e + l_3)$ с центром в точке A . Из схемы приведенного выше механизма очевидно, что $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$, тогда для любого положения кривошипа AB , определяемого углом φ_{1i} , $i = 1, 2, 3$, получим

$$\left. \begin{aligned} x_{C_i} &= AE_i \cos(\varphi_{11} - \varphi_{1i}) + (e + l_3) \cos(\varphi_3 + (\varphi_{11} - \varphi_{1i})); \\ y_{C_i} &= AE_i \sin(\varphi_{11} - \varphi_{1i}) + (e + l_3) \sin(\varphi_3 + (\varphi_{11} - \varphi_{1i})). \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Координаты точки B , как и в случае синтеза шарнирного четырехзвенного механизма, отыскиваем как точку пересечения перпендику-

ляров к отрезкам C_1C_2 и C_2C_3 , проведенным через середины их в точках S_1 и S_2 . Сравнение систем уравнений (7.31) и (7.11) с последующими преобразованиями позволяет сделать вывод, что алгоритм синтеза кривошипно-ползунного механизма реализуется операторной функцией (7.11) при несколько измененном обращении к ней. Так как в функции (7.11) l_0 — постоянный параметр, а в рассматриваемом случае — переменный, то обращение к операторной функ-

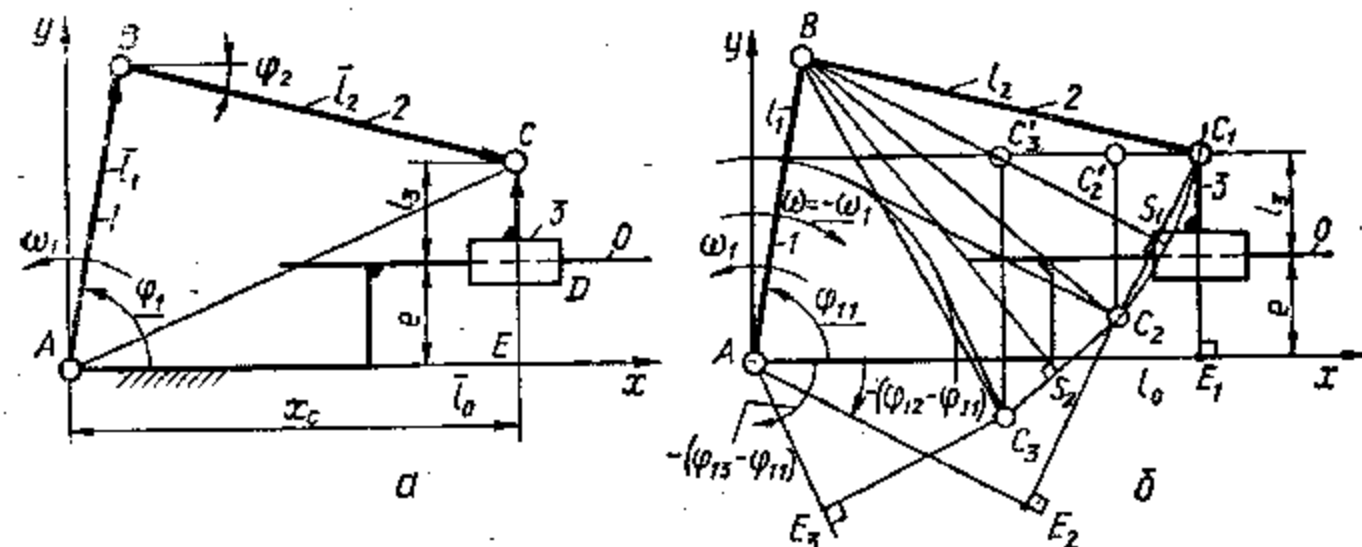


Рис. 7.13. Синтез кривошипно-ползунного механизма

Рис. 7.14. Графики передаточных функций

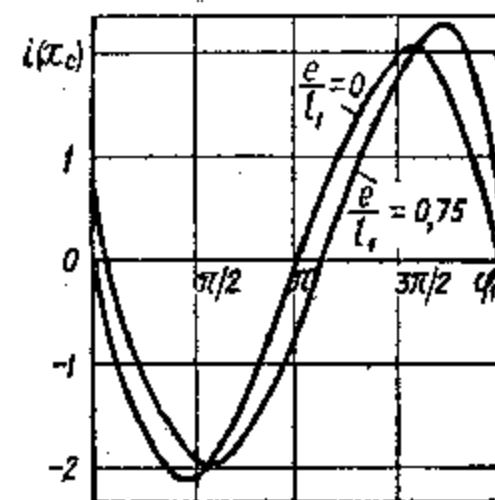
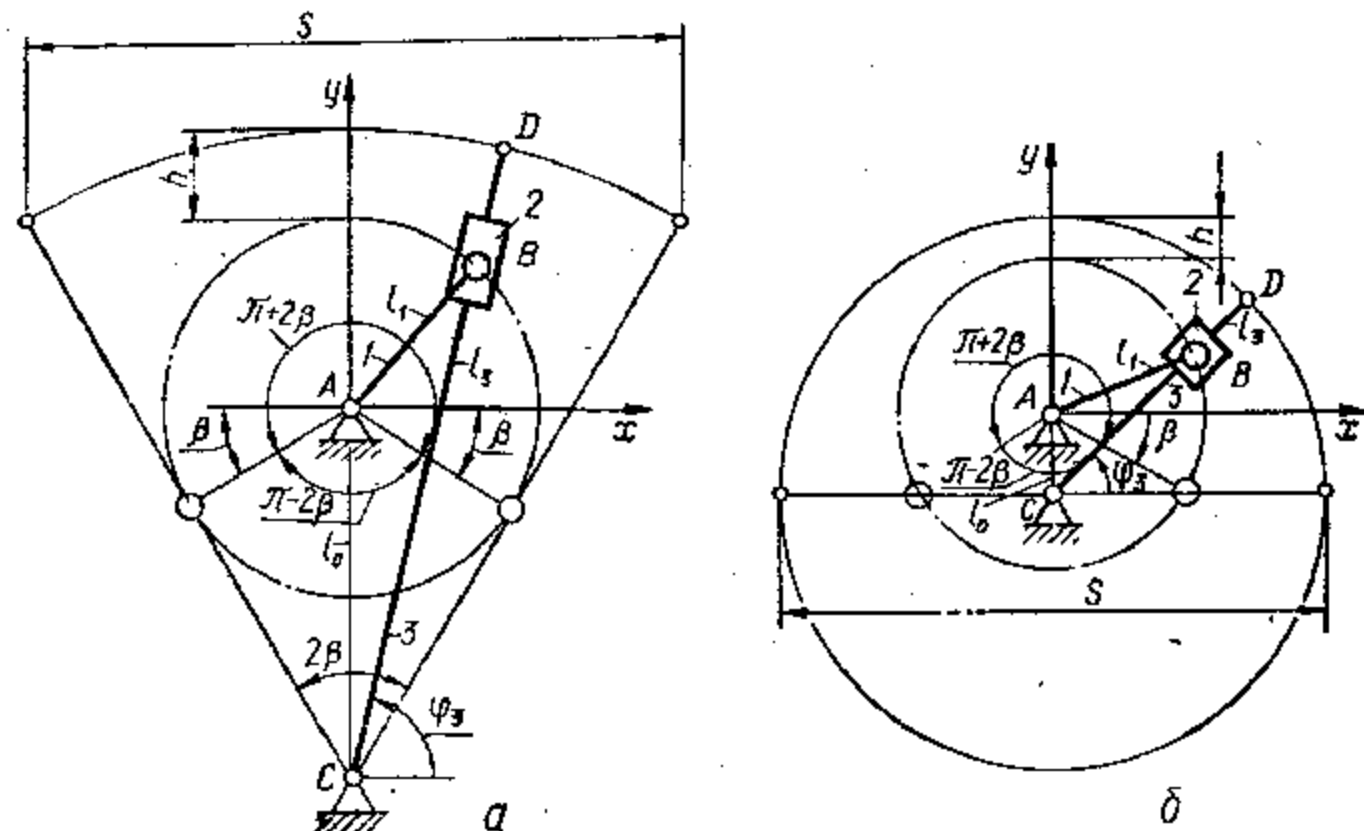


Рис. 7.15. Синтез кривошипно-кулисного механизма



ции в общем виде будет иметь вид

$$SNTZR(l_0(3), l_3, \varphi_1(3), \varphi_3(3); l_1, l_2). \quad (7.32)$$

При обращении к функции (7.32) одинаковыми значениями задаются параметры $l_0(3)$ при синтезе шарнирного четырехзвенника и параметры $\varphi_3(3)$ при синтезе кривошипно-ползунного механизма. В последнем случае на место l_3 вносится значение $e + l_3$.

Приближенный синтез кривошипно-ползунного механизма по заданному закону движения выходного звена $x_C(\varphi_1)$ выполняется аналогично синтезу шарнирного четырехзвенника. Функция положения звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 7.13, а) получается при использовании векторного многоугольника $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{AE} + \bar{EC}$. Из проекций на оси координат имеем

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= x_C; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= e + l_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

откуда

$$\varphi_2(\varphi_1) = \arcsin((e + l_3 - l_1 \sin \varphi_1)/l_2). \quad (7.34)$$

После подстановки φ_2 в уравнение (7.33) получим

$$x_C(\varphi_1) = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\arcsin((e + l_3 - l_1 \sin \varphi_1)/l_2)). \quad (7.35)$$

Дифференцируя по φ_1 выражения (7.34) и (7.35), получим передаточные функции звеньев 2 и 3. На рис. 7.14 приведены примеры графиков функции $i(x_C)$ (см. гл. 6).

7.6. Кривошипно-кулисные механизмы

Входными параметрами при синтезе кулисных механизмов (рис. 7.15) обычно являются коэффициент $k_\omega = \omega_x/\omega_p$, кинематический параметр S выходного звена 3 и запас хода h ползуна 2. Нужно определить размеры l_1 , l_0 и l_3 . Рабочий ход кулисы совершает при повороте кривошипа на угол $\pi + 2\beta$, холостой — при повороте на угол $\pi - 2\beta$. Тогда при $\omega_1 = \text{const}$ имеем $k_\omega = (\pi + 2\beta)/(\pi - 2\beta)$, а угол

$$\beta = ((k_\omega - 1)/(k_\omega + 1)) \pi/2. \quad (7.36)$$

Для механизма с качающейся кулисой (рис. 7.15, а) $\sin \beta = l_1/l_0 = \lambda$ и $l_3 = s/2\lambda$, с вращающейся кулисой (рис. 7.15, б) $\sin \beta = l_0/l_1 = l/\lambda$; $l_3 = s/2$ и, следовательно, для обоих типов механизмов

$$l_0 = (l_3 - h)/(1 + \lambda). \quad (7.37)$$

Операторная функция алгоритма синтеза кривошипно-кулисного механизма, реализующая эти зависимости, имеет вид

$$SNTZK(s, h, k_\omega; l_1, l_0, l_3). \quad (7.38)$$

Размеры звеньев l_0 , l_1 определяют функцию положения, которая получается из условия $\bar{l}_1 = \bar{l}_0 + \bar{l}_{CB}$:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 &= l_{CB} \cos \varphi_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 &= l_0 + l_{CB} \sin \varphi_3, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\varphi_3 = \pi/2 - \arcsin(l_1 \sin(\varphi_1 + \pi/2)/l_{CB}) \quad (7.39)$$

и

$$l_{CB} = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1l_0 \cos(\varphi_1 + \pi/2)}. \quad (7.40)$$

Подставляя l_{CB} из формулы (7.40) в формулу (7.39), после преобразований получим

$$\varphi_3 = \arctg((l_1 \sin \varphi_1 + l_0)/(l_1 \cos \varphi_1)). \quad (7.41)$$

Дифференцируя выражение (7.41) по φ_1 , определим передаточную функцию

$$i(\varphi_3) = 1/(1 + (l_1 \sin \varphi_1 + l_0)^2/(l_1^2 \cos^2 \varphi_1)) d \times \\ \times ((l_1 \sin \varphi_1 + l_0)/(l_1 \cos \varphi_1)) d\varphi_1$$

и после преобразований

$$i(\varphi_3) = l_1(l_1 + l_0 \sin \varphi_1)/(l_1^2 + l_0^2 + 2l_1l_0 \sin \varphi_1). \quad (7.42)$$

7.7. Механизмы с остановкой ведомого звена

Все четырехзвенные кривошипные механизмы со знакопеременным движением выходного звена обладают свойством его мгновенной остановки при изменении направления скорости. Это происходит при угле передачи движения между кривошипом и шатуном $\gamma_{12} = 0$ и $\gamma_{12} = \pi$ в кривошипно-коромысловом и кривошипно-ползунном механизмах и при взаимно перпендикулярном расположении кривошипа и кулисы в кулисном механизме. Конструктивным развитием кулисного механизма является мальтийский механизм, позволяющий осуществлять длительную остановку выходного звена при непрерывном равномерном вращении входного звена. Основными характеристиками мальтийского механизма (рис. 7.16) являются

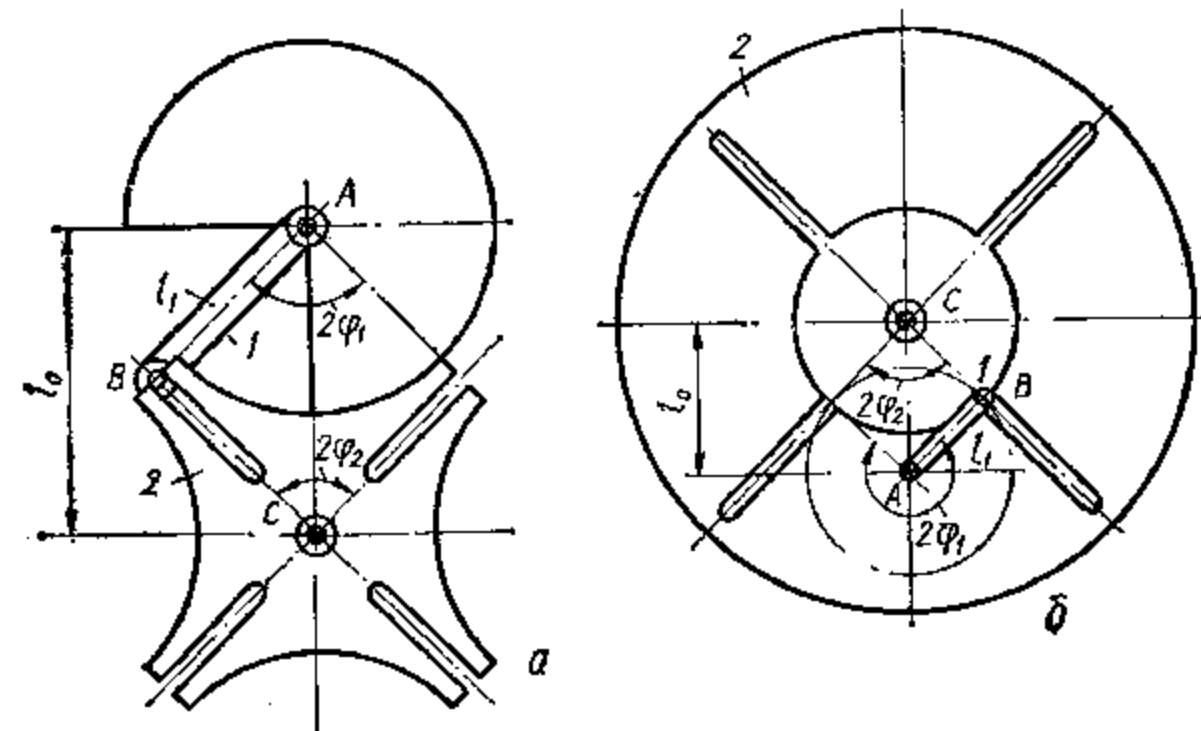


Рис. 7.16. Мальтийский механизм

функция положения, передаточная функция и коэффициент использования времени цикла — отношение времени поворота к времени покоя $k_t = t_1/t_2$.

Для произвольного положения кривошипа 1 мальтийского механизма в фазе вращения звена 2 из геометрических соображений получим

$$l_1/l_0 = \lambda = \sin \varphi_2 / \sin (\varphi_1 + \varphi_2),$$

откуда функция положения

$$\varphi_2(\varphi_1) = \arctg(\lambda \sin \varphi_1 / (1 - \lambda \cos \varphi_1)). \quad (7.43)$$

Дифференцируя условие (7.43) по φ_1 , получим передаточную функцию

$$i(\varphi_2) = \lambda (\cos \varphi_1 - \lambda) / (1 - 2\lambda \cos \varphi_1 + \lambda^2). \quad (7.44)$$

При числе пазов z на звене 2 (кресте) угол поворота его за один оборот кривошипа составит $2\varphi_2 = 2\pi/z$. При повороте креста на угол $2\varphi_2$ кривошип поворачивается на угол $2\varphi_1 = \pi - 2\varphi_2 = \pi - 2\pi/z = \pi(1 - 2/z)$, из чего следует, что число пазов $z \geq 3$.

При полном времени цикла $t = t_1 + t_2$ время поворота креста на угол $2\varphi_2$

$$t_1 = 2\varphi_1/\omega_1 = \pi(1 + 2/z)/\omega_1;$$

время покоя

$$t_2 = (2\pi - 2\varphi_1)/\omega_1 = \pi(1 - 2/z)/\omega_1;$$

коэффициент использования времени цикла для механизма с внешним зацеплением (рис. 7.16, а)

$$k_t = t_1/t_2 = (z - 2)/(z + 2);$$

для механизма с внутренним зацеплением (рис. 7.16, б)

$$k_t = (z + 2)/(z - 2).$$

8. СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ С НИЖИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

8.1. Особенности синтеза пространственных механизмов

Для определения положения звеньев пространственных механизмов в пространственной системе координат требуется больше параметров, чем для плоских механизмов с тем же числом звеньев. Функция положения механизма плоского шарнирного четырехзвенника (рис. 7.5) включает пять параметров $\varphi_3 = \varphi_3(l_1, l_2, l_3, l_0, \varphi_1)$. Функция положения пространственного четырехзвенного механизма (рис. 8.1) включает уже восемь параметров $\varphi_3 = \varphi_3(l_1, l_2, l_3, x_D, y_D, z_D, \alpha, \varphi_1)$. Следовательно, пространственные механизмы позволяют реализовать заданные функции положения и передаточные функции с большей степенью точности, так как увеличивается число возможных вариантов подбора параметров и возможных сочетаний их значений.

Однако по той же причине пространственные механизмы обладают большей, чем плоские механизмы, чувствительностью к отклонениям линейных и угловых размеров звеньев от заданных. Поэтому применение точных методов синтеза пространственных механизмов из-за неточностей изготовления и монтажа звеньев, неизбежных при изготовлении и сборке реальных механизмов, не приводит к точному воспроизведению функции положения или передаточной функции. При проектировании пространственных механизмов более

Рис. 8.1. Определение параметров функции положения механизмов

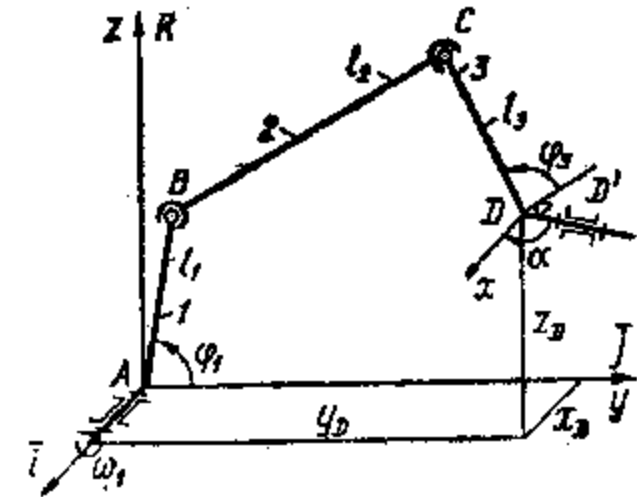
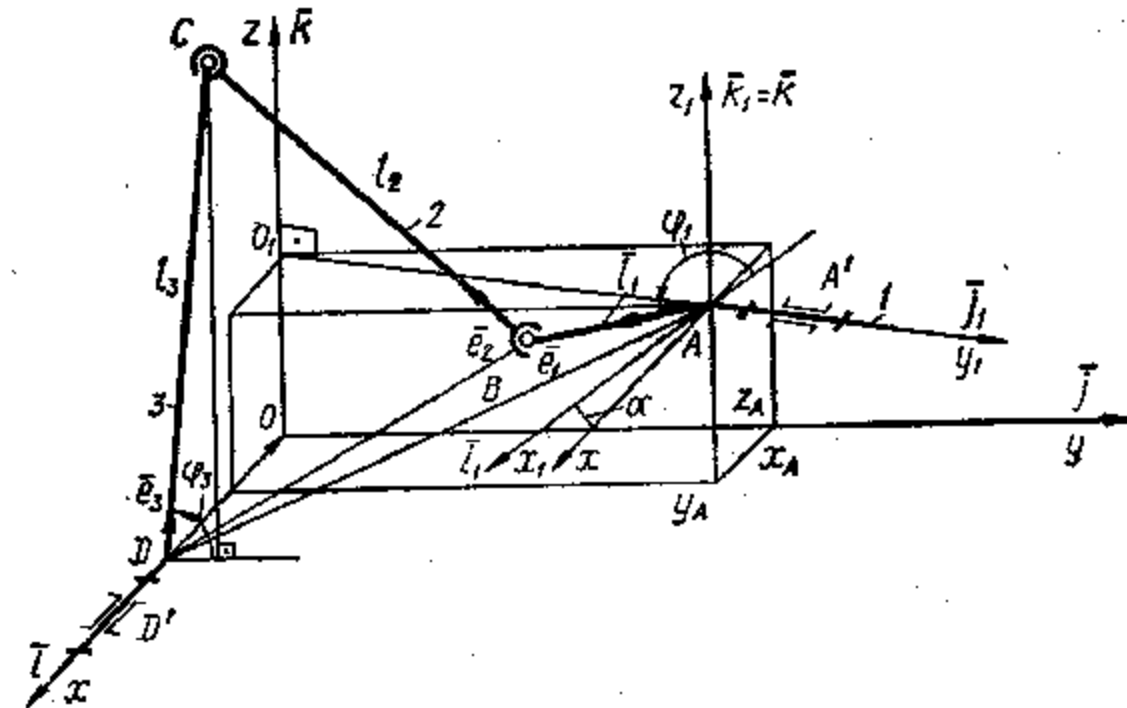


Рис. 8.2. Синтез пространственного шарнирного четырехзвенника



целесообразно применять приближенные методы синтеза с минимальным количеством определяемых параметров. Значениями других параметров задаются исходя из назначения механизма и конкретных условий его работы. Уменьшение количества параметров синтеза позволяет решать задачу оптимального синтеза для нескольких комбинаций значений принимаемых параметров. Получаемые при этом варианты схемы механизма анализируются, из них выбираются те, которые при конструктивной проработке механизмов дают наибольший выигрыш в массе звеньев, стоимости их технологической обработки и т. п.

Для пространственных механизмов пользуются методами синтеза, рассмотренными выше. Наиболее общим является **векторный метод**. При некоторых частных случаях расположения звеньев в

пространстве и ориентации кинематических пар меньше математических преобразований требуют методы приближенного синтеза по Чебышеву.

8.2. Пространственные шарнирные четырехзвенники

Рассмотрим синтез механизма шарнирного четырехзвенника для произвольного случая положения его звеньев и осей кинематических пар (рис. 8.2). Зафиксируем на осях вращательных кинематических пар A' и D' точки A и D , которые используем для построения векторных многоугольников. При использовании пространственных координатных систем целесообразно применять вспомогательные координатные системы, позволяющие получить простые зависимости для координат точек в них, а координаты этих точек в основной системе — через формулы перехода (см. гл. 5). Для упрощения векторных преобразований в разных координатных системах ось Ox основной координатной системы $Oxyz$ направим по оси кинематической пары D' , ось Oz — по линии кратчайшего расстояния OO_1 между скрещивающимися осями кинематических пар D' и A' , а ось Oy — перпендикулярно плоскости xOz .

Поместим начало вспомогательной координатной системы в точку A так, чтобы ось Ax_1 совпадала с осью вращательной пары A' , а ось Az_1 была параллельна оси Oz . Звено 1 разместим на линии AB , соединяющей ось пары A' с центром пары B . При таком направлении осей координатной системы оси пар D' и A' располагаются в параллельных плоскостях xOy и $x_1O_1y_1$, а оси Ox и Ax_1 образуют угол α . Орты координатных осей $Ax_1y_1z_1$ будут (см. гл. 5):

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_1 &= \bar{i} \cos \alpha + \bar{j} \sin \alpha; \\ \bar{j}_1 &= \bar{i} \sin \alpha + \bar{j} \cos \alpha; \\ \bar{k}_1 &= \bar{k}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Звену 1 пусть соответствует орт $\bar{e}_1$, звену 3 — орт $\bar{e}_3$, значения которых следующие:

$$\bar{e}_1 = \bar{i} \cos \varphi_1 + \bar{k}_1 \sin \varphi_1 = \bar{i} \cos \alpha \cos \varphi_1 + \bar{j} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \bar{k} \sin \varphi_1; \quad (8.2)$$

$$\bar{e}_3 = \bar{j} \cos \varphi_3 + \bar{k} \sin \varphi_3. \quad (8.3)$$

Рассмотрим определение размеров l_1, l_2, l_3 звеньев 1, 2 и 3 при заданных координатах точки A , точки D и функции положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$. Условие замкнутости векторного контура $ABCD$ имеет вид $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_{DA} = 0$. Представим вектор $\bar{l}_{DA}$ как сумму векторных составляющих по определенным ортами направлениям $\bar{l}_{DA} = \bar{l}_{DO} + \bar{l}_{OO_1} + \bar{l}_{O_1A}$. Тогда условие замкнутости запишется в виде $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_{DO} + \bar{l}_{OO_1} + \bar{l}_{O_1A} = 0$ или

$$l_1 \bar{i}_1 + l_2 \bar{e}_2 - l_3 \bar{e}_3 - l_{DO} \bar{i} + l_{OO_1} \bar{k} + l_{O_1A} \bar{j}_1 = 0. \quad (8.4)$$

Заменим орты направляющими косинусами. Для этого в уравнении (8.4) перенесем $l_2 \bar{e}_2$ в правую часть и возведем его в скалярный

квадрат. После преобразований получим

$$\begin{aligned} (l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_{DO}^2 + l_{OO_1}^2 + l_{O_1A}^2) - 2l_1 l_3 \bar{e}_1 \bar{e}_3 - 2l_1 l_{DO} \bar{e}_1 \bar{i} + 2l_1 l_{OO_1} \bar{e}_1 \bar{k} + \\ + 2l_1 l_{O_1A} \bar{e}_1 \bar{j}_1 + 2l_3 l_{DO} \bar{e}_3 \bar{i} - 2l_3 l_{OO_1} \bar{e}_3 \bar{k} - 2l_3 l_{O_1A} \bar{e}_3 \bar{j}_1 - 2l_{DO} l_{OO_1} \bar{i} \bar{k} - \\ - 2l_{DO} l_{O_1A} \bar{i} \bar{j}_1 + 2l_{OO_1} l_{O_1A} \bar{k} \bar{j}_1 = 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Используя свойства ортов при скалярном умножении, получим: $\bar{e}_1 \bar{e}_3 = \sin \alpha \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3$; $\bar{e}_1 \bar{i} = \sin \alpha \cos \varphi_1$; $\bar{e}_1 \bar{k} = \sin \varphi_1$; $\bar{e}_1 \bar{j}_1 = 0$; $\bar{e}_3 \bar{i} = 0$; $\bar{e}_3 \bar{k} = \sin \varphi_3$; $\bar{e}_3 \bar{j}_1 = \cos \alpha \cos \varphi_3$; $\bar{i} \bar{j} = \sin \alpha$; $\bar{k} \bar{j}_1 = 0$. Подставляя в уравнение (8.5) значения скалярных произведений ортов, найдем

$$\begin{aligned} (l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_{DO}^2 + l_{OO_1}^2 + l_{O_1A}^2) - 2l_1 l_3 (\sin \alpha \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \\ + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3) - 2l_1 l_{DO} \sin \alpha \cos \varphi_1 + 2l_1 l_{OO_1} \sin \varphi_1 - 2l_3 l_{OO_1} \sin \varphi_3 - \\ - 2l_3 l_{O_1A} \cos \alpha \cos \varphi_3 - 2l_{DO} l_{O_1A} \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

В этом выражении первое и последнее слагаемые не зависят от исходных параметров. Разделим обе части уравнения (8.6) на l_1 (этим выражаем все линейные размеры в долях l_1) и обозначим

$$2x_0 = (1 - l_2^2 + l_3^2 + l_{DO}^2 + l_{OO_1}^2 + l_{O_1A}^2 - 2l_{DO} l_{O_1A} \sin \alpha).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} x_0 - (\sin \alpha \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3) l_3 - l_{DO} \sin \alpha \cos \varphi_1 + \\ + l_{OO_1} \sin \varphi_1 - l_3 l_{OO_1} \sin \varphi_3 - l_3 l_{O_1A} \cos \alpha \cos \varphi_3 = 0. \end{aligned}$$

Разделив все члены этого уравнения на l_3 , определяем $x_1 = x_0/l_3$; $x_2 = l_{DO}/l_3$; $x_3 = l_{OO_1}/l_3$; $x_4 = l_{OO_1}$; $x_5 = l_{O_1A}$. Тогда для произвольного i -го положения кривошипа, характеризуемого определенным значением угла поворота кривошипа φ_{1i} , соответствующие ему по функции положения значения угла поворота коромысла φ_{3i} получим из условия

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \sin \alpha \cos \varphi_{1i} + x_3 \sin \varphi_{1i} - x_4 \sin \varphi_{3i} - x_5 \cos \alpha \cos \varphi_{3i} - \\ - (\sin \alpha \cos \varphi_{1i} \cos \varphi_{3i} + \sin \varphi_{1i} \sin \varphi_{3i}) = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

В уравнении (8.7) пять неизвестных. Принимая значения $i = 1, 2, \dots, 5$, получим пять уравнений. Из решения системы этих пяти уравнений получим неизвестные размеры: непосредственно из решений — l_{OO_1} и l_{O_1A} , затем — l_3 , l_{DO} , а из выражения для x_0 — величину l_2 . Принимая из конкретных условий работы механизма размер l_1 , вычислим линейные размеры всех звеньев механизма.

Синтез механизма пространственного четырехзвенника осуществляют и методом Чебышева. Ввиду громоздкости алгебраических преобразований для общего случая рассмотрим этот метод для частного случая, когда оси кинематических пар A' и D' скрещиваются под углом 90° (рис. 8.3). Заданной является функция положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$; в результате синтеза необходимо определить размеры звеньев 1, 2 и 3. Направим ось Oy по оси вращения кинематической

пары A' с ординатой a точки A на этой оси. Ось вращательной кинематической пары D' поместим в плоскость xOz с координатами b и c фиксированной на ней точки D .

Степень приближения заданной функции φ_3 (φ_1) к функции положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$ синтезируемого механизма оценивается взвешенной разностью Δ_q , которую примем, как и для плоского механизма (см. гл. 6), в известном уже виде

$$\Delta_q = l_2^2 - l_{2c}^2. \quad (8.8)$$

Значение l_{2c}^2 для пространственного механизма будет

$$l_{2c}^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2. \quad (8.9)$$

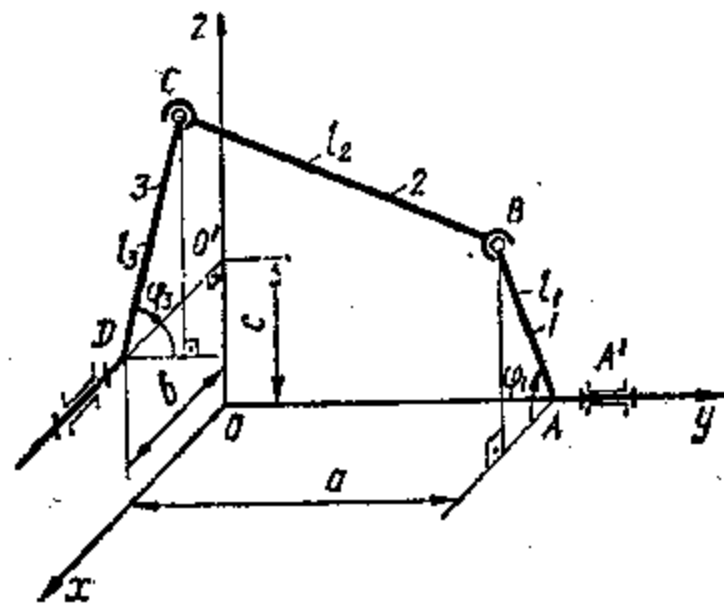


Рис. 8.3. Синтез механизма по методу Чебышева

Координаты центров сферических кинематических пар B и C определим по зависимостям $x_B = l_1 \cos \varphi_1$; $y_B = a$; $z_B = l_1 \sin \varphi_1$; $x_C = b$; $y_C = l_3 \cos \varphi_3$; $z_C = l_3 \sin \varphi_3 + c$. Подставляя их в уравнение (8.9), после преобразований получим

$$l_{2c}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + l_1^2 + l_3^2 - 2l_1l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - 2cl_1 \sin \varphi_1 - 2bl_1 \cos \varphi_1 - 2al_3 \cos \varphi_3 - 2cl_3 \sin \varphi_3.$$

Принимая для дальнейших расчетов $l_1 = 1$, получим выражение для l_{2c}^2 , в котором все линейные размеры выражены в долях l_1 :

$$l_{2c}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 1 + l_3^2 - 2l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - 2c \sin \varphi_1 - 2bc \cos \varphi_1 - 2al_3 \cos \varphi_3 - 2cl_3 \sin \varphi_3.$$

Тогда взвешенная разность (8.8) для рассматриваемого механизма определится в виде

$$\Delta_q = l_2^2 - l_{2c}^2 = 2l_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + 2c \sin \varphi_1 + 2b \cos \varphi_1 + 2al_3 \cos \varphi_3 + 2cl_3 \sin \varphi_3 - a^2 - b^2 - c^2 - l_3^2 - 1 + l_2^2.$$

Введем обозначения: $a_1 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_3$; $x_1 = 2l_3$; $a_2 = \sin \varphi_1$;

$$x_2 = 2c; \quad a_3 = \cos \varphi_1; \quad x_3 = 2b; \quad a_4 = \cos \varphi_3; \quad x_4 = 2al_3;$$

$$a_5 = \sin \varphi_3; \quad x_5 = 2cl_3; \quad a_6 = -1; \quad x_6 = a^2 + b^2 + c^2 + l_3^2 + 1 - l_2^2.$$

Тогда получим

$$\Delta_q = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 + \Phi(\varphi_1), \quad (8.10)$$

где $\Phi(\varphi_1)$ — задаваемая функция, не содержащая параметров синтеза.

Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_6$ определяют функцию положения и находят для любого значения φ_1 . Определяя их для любого угла поворота кривошипа φ_1 и соответствующего ему угла φ_3 , для значений $i = 1, 2, \dots, 6$ получим систему из шести уравнений, из решения которой определим $x_1, x_2, \dots, x_6$, а по ним — линейные размеры звеньев механизма в долях l_1 . Принимая l_1 для обеспечения конкретных условий работы механизма, вычисляют размеры всех звеньев.

8.3. Кривошипно-ползуновые механизмы

В задаче синтеза пространственного кривошипно-ползунового механизма обычно заданными являются угол между направляющей поступательной пары D' ползуна 3 (рис. 8.4) и осью вращательной кинематической пары A' кривошипа 1, а также координаты фиксированной точки A на ней. Расположим основную координатную систему $Oxyz$ так, чтобы ось Ox была направлена по направляющей

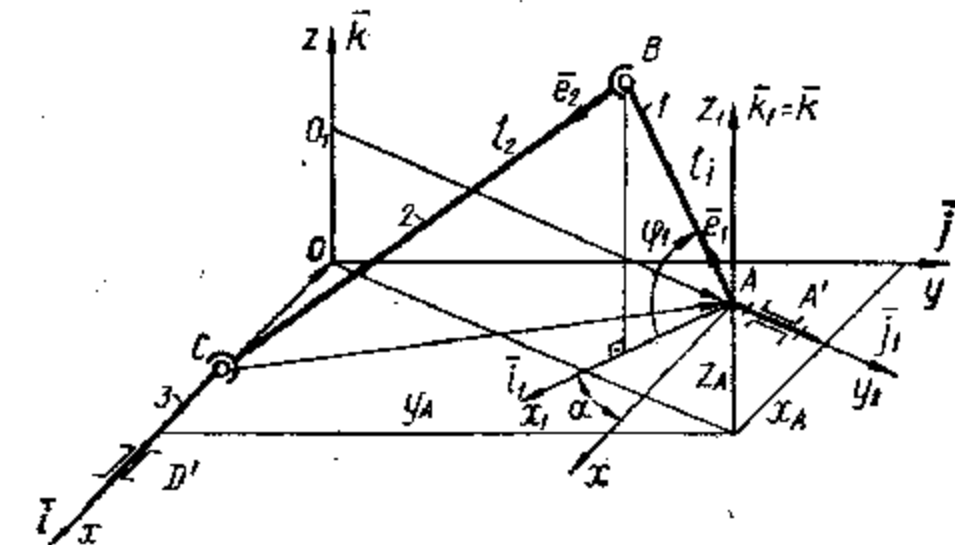


Рис. 8.4. Синтез пространственного кривошипно-ползунового механизма

поступательной пары D' , ось Oz — по линии OO_1 кратчайшего расстояния между скрещивающимися осями пар A' и D' , ось Oy — перпендикулярна плоскости xOz . В точке A поместим начало вспомогательной координатной системы $Ax_1y_1z_1$, ось Ay_1 которой пройдет по оси кинематической пары A' через точку O_1 на оси Oz , а ось Az_1 будет параллельна оси Oz . Так как ось Oz совпадает с линией OO_1 , то оси Ox и Ax_1 лежат в параллельных плоскостях, а угол между ними составит α .

Орты осей системы $Ax_1y_1z_1$ определятся по зависимостям (8.1), орт $\bar{e}_1$ — по зависимости (8.2). Условие замкнутости векторного контура ABC будет $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{CA} = 0$. Вектор $\bar{l}_{CA}$ можно разложить по известным направлениям: $\bar{l}_{CA} = \bar{l}_{CO} + \bar{l}_{OO_1} + \bar{l}_{O_1A}$. Тогда условие замкнутости контура $ABCOO_1A$ окончательно запишем в виде $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_{CO} + \bar{l}_{OO_1} + \bar{l}_{O_1A} = 0$ или

$$l_1\bar{e}_1 + l_2\bar{e}_2 - l_{CO}\bar{i} + l_{OO_1}\bar{k} + l_{O_1A}\bar{j}_1 = 0. \quad (8.11)$$

Исключим из выражения (8.11) орт $\bar{e}_3$, для чего перенесём $l_2 \bar{e}_2$ в правую часть и возведём в скалярный квадрат. Тогда после преобразований с учетом скалярных произведений ортов, полученных выше, найдем

$$(l_1^2 - l_2^2 + l_{00}^2 + l_{0,A}^2) - 2l_1 l_{00} \sin \alpha \cos \varphi_1 + 2l_1 l_{0,A} \sin \varphi_1 - 2l_{00} l_{0,A} \sin \alpha = -l_{00}^2 \quad (8.12)$$

Разделив это выражение на l_1 , выразим все линейные размеры в долях l_1 и в дальнейшем примем $l_1 = 1$. В условии (8.12) первое слагаемое не зависит от входных параметров. Обозначив $2x_1 = 1 + l_{00}^2 + l_{0,A}^2 - l_2^2$, получим

$$x_1 - (l_{00})_i \cos \varphi_{1i} \sin \alpha + \sin \varphi_{1i} l_{00,i} - (l_{0,A})_i \sin \alpha = -(l_{00})_i^2$$

Если принять, что $x_2 = \sin \alpha$; $x_3 = l_{00,i}$; $x_4 = l_{0,A} \cdot \sin \alpha$, то

$$x_1 - (l_{00})_i \cos \varphi_{1i} x_2 + \sin \varphi_{1i} x_3 - (l_{0,A})_i x_4 = -(l_{00})_i^2$$

Вычисляя по заданной функции положения $x_c = x_c(\varphi_1)$ значения коэффициентов при неизвестных для φ_{1i} при $i = 1, 2, 3, 4$, сведем задачу к решению системы уравнений, из которой последовательно определим $\sin \alpha$, $l_{00,i}$, $l_{0,A}$, l_2 . Принимая l_1 из конкретных условий, вычислим все размеры звеньев механизма.

9. ПУТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

9.1. Задачи, решаемые с помощью механизмов с высшими парами

Механизмы с высшими кинематическими парами получили большое распространение в связи с возможностью реализации практически любого закона движения выходного звена при минимальном числе промежуточных звеньев.

Передающими механизмами с высшими кинематическими парами решают задачи преобразования непрерывного, обычно равномерного движения входного звена в непрерывное движение выходного звена с постоянной или переменной скоростью. Входные и выходные звенья совершают как вращательные, так и поступательные движения с постоянным или изменяющимся направлениями угловых и линейных скоростей. Следовательно, механизмы с высшими кинематическими парами имеют постоянное или переменное передаточное отношение.

9.2. Требования к геометрии звеньев в связи с задачами кинематики

При решении задачи синтеза механизмов с высшими кинематическими парами необходимо установить геометрические формы их элементов, обеспечивающие требуемый характер относительного дви-

жения звеньев, и их геометрические размеры, соответствующие значениям входных параметров синтеза.

Поверхности, образующие элементы высших кинематических пар и обеспечивающие заданное относительное движение звеньев, называются сопряженными. Могут иметь место два случая касания сопряженных поверхностей — *точечное*, при котором поверхности касаются друг друга в точке, и *линейчатое*, при котором поверхности касаются друг друга по линии.

На рис. 9.1 показаны звенья 1 и 2, взаимодействующие друг с другом в точке контакта K . Если связать с звеньями 1 и 2 системы координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ и $O_2 x_2 y_2 z_2$, а со стойкой — неподвижную систему $Oxyz$, то при движении звеньев траектории точки контакта в координатных системах определяют *сопряженные линии* $K_1 K'_1$ и $K_2 K'_2$, принадлежащие взаимодействующим звеньям. Траектория точки контакта K в неподвижной системе $Oxyz$ определит линию $K_0 K'_0$, которая называется *линией зацепления*. Положение и форма сопряженных линий и линии зацепления определяются характером относительного движения взаимодействующих звеньев в данном направлении и формой поверхностей.

При изменении направления относительного движения форма и положение сопряженных линий и линии зацепления при точечном контакте звеньев меняются. Совокупность сопряженных линий звеньев образуют поверхности S_1 и S_2 , которые будут сопряженными, если вектор относительной скорости движения поверхностей $\bar{v}_{12}$ в точке контакта лежит в общей, касательной к поверхностям плоскости при любом направлении относительного движения. В этом случае составляющая относительной скорости вдоль общей нормали $n - n$ в точке контакта K сопряженных поверхностей равна нулю и выбранные поверхности не расходятся и не пересекаются.

Совокупность линий зацепления $K_0 K'_0$, найденных для различных направлений вектора $\bar{v}_{12}$, определит *поверхность зацепления* Q звеньев 1 и 2. Возможные линии пересечения сопряженных поверхностей находятся за пределами взаимодействующих звеньев.

При точечном касании звеньев форма сопряженных поверхностей S_1 и S_2 должна быть строго очерчена только в рабочей зоне поверхности зацепления, в которой определены сопряженные линии, а на других участках она диктуется наиболее простой технологией изготовления и учетом возможного смещения сопряженных линий из-за неточностей изготовления и деформации звеньев.

Если взаимодействующие звенья 1 и 2 касаются в точках пространственной сопряженной линии или по плоской контактной линии, то требование для вектора относительной скорости $\bar{v}_{12}$ соблюдается во всех точках контакта. Совокупность контактных линий в системах $O_1 x_1 y_1 z_1$ и $O_2 x_2 y_2 z_2$ полностью определяет форму сопряженных поверхностей, а в системе $Oxyz$ — поверхность зацепления Q . В этом случае сопряженные поверхности S_1 и S_2 полностью определены на всех участках рабочей зоны звеньев.

9.3. Синтез сопряженных поверхностей пространственной высшей кинематической пары

Задача синтеза сопряженных поверхностей высшей кинематической пары в простейшей постановке заключается в определении поверхности S_2 , сопряженной с заданной поверхностью S_1 , при известных передаточной функции звеньев 1 и 2 $i_{12} = \omega_1/\omega_2$ и функции изменения направляющего угла вектора $\bar{v}_{12}$ от координат звена 1. При взаимодействии твердых звеньев не может быть внедрения одной по-

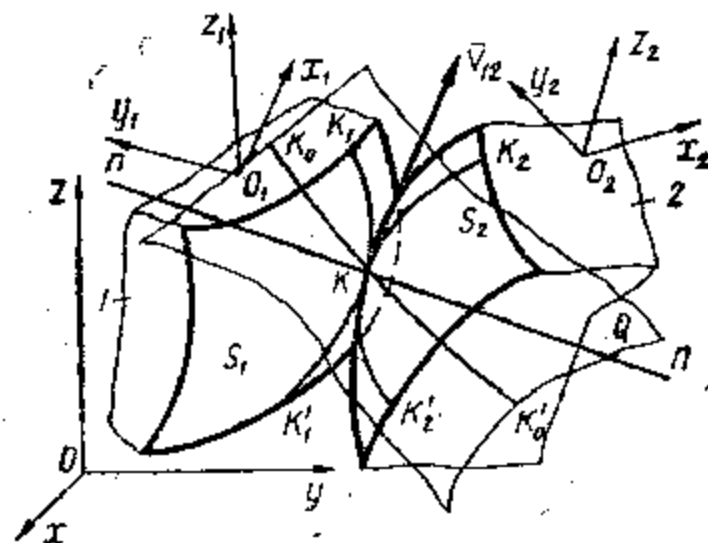


Рис. 9.1. Контакт звеньев в точке

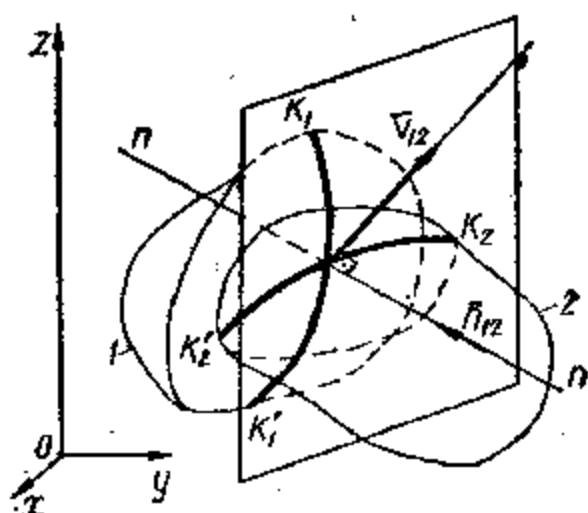


Рис. 9.2. Условие сопряженности поверхностей

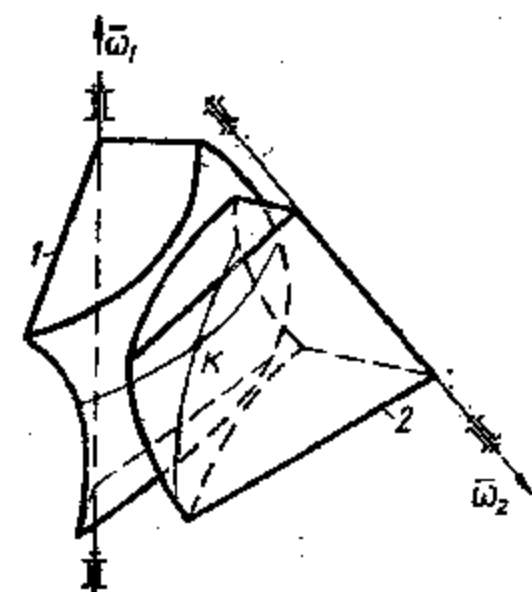


Рис. 9.3. Общий случай кинематической пары

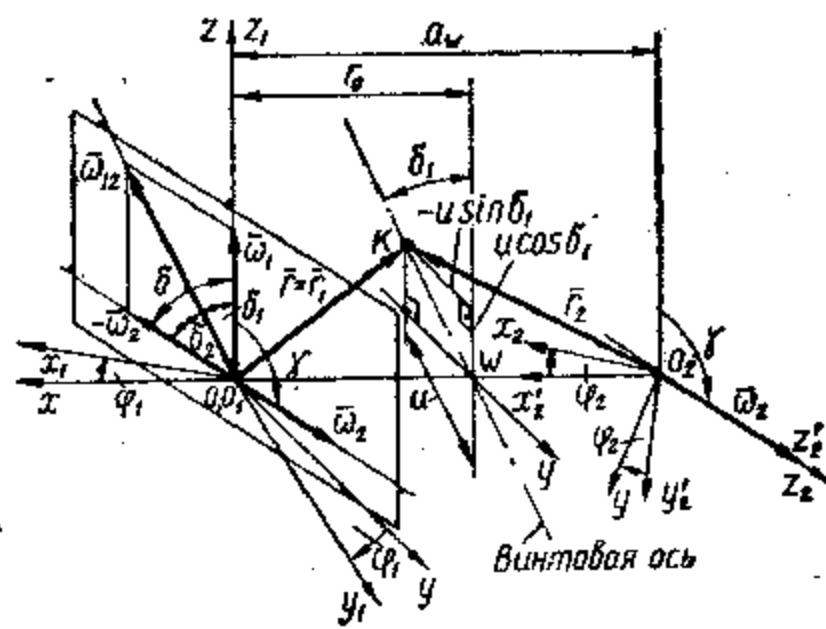


Рис. 9.4. Синтез поверхностей высшей кинематической пары

верхности в другую либо размыкания кинематической пары. Чтобы удовлетворить это требование, вектор $\bar{v}_{12}$ относительного движения в любой точке контакта поверхности зацепления должен находиться в плоскости, касательной к обоим сопряженным поверхностям в этой точке. Это требование записывают в виде условия перпендикулярности вектора относительной скорости $\bar{v}_{12}$ к общей нормали в точке контакта K или единичному вектору (орту) $\bar{n}_{12}$ об-

щей нормали (рис. 9.2):

$$\bar{v}_{12} \cdot \bar{n}_{12} = 0. \quad (9.1)$$

Выражение (9.1) является математической записью основной теоремы зацепления: поверхности элементов высшей кинематической пары будут сопряженными, если в любой точке контакта общая нормаль к ним будет перпендикулярна вектору скорости их относительного движения. Вектор относительной скорости $\bar{v}_{12}$ определяется из общих положений кинематики относительного движения твердого тела.

Пусть звенья 1 и 2 (рис. 9.3), элементы которых, касаясь в точке K , образуют высшую кинематическую пару, вращаются. Тогда в общем случае векторы угловых скоростей $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ (рис. 9.4) скрещиваются. Свяжем со звеном 1 неподвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$ так, что ось O_1z_1 совпадает с линией действия вектора $\bar{\omega}_1$. Начало O неподвижной координатной системы $Oxyz$ совместим с точкой O_1 , ось Oz — с линией действия вектора $\bar{\omega}_1$ (т. е. Oz и O_1z_1 совпадают), а ось Ox — с линией $O_1O_2 = a_w$ кратчайшего расстояния между скрещивающимися под углом γ линиями действия векторов $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$. Тогда положение звена 1 в системе $Oxyz$ определится углом поворота координатных осей φ_1 . Со звеном 2 свяжем координатную систему $O_2x_2y_2z_2$, ось O_2z_2 которой совпадает с линией действия вектора $\bar{\omega}_2$. Векторы скоростей точек контакта звеньев 1 и 2 будут

$$\bar{v}_{K,0} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1; \quad \bar{v}_{K,0} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2,$$

где $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ — радиусы-векторы точек контакта звеньев.

Скорость точки K_2 в системе $Oxyz$ определим на основании основной теоремы кинематики твердого тела:

$$\bar{v}_{K_2} = \bar{v}_{K,0} = \bar{v}_{O,0} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_1 = \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_1, \quad (9.2)$$

где $\bar{v}_{O,0} = \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w$ — вектор скорости поступательного движения точки O_2 при пространственном винтовом перемещении.

По теореме о сложном движении для точки K получим

$$\bar{v}_{K_2} = \bar{v}_{K_1} + \bar{v}_{K,K_2}; \quad \bar{v}_{K,K_1} = \bar{v}_{K_2} - \bar{v}_{K_1}; \quad \bar{v}_{12} = \bar{v}_{K,K_2} = \bar{v}_{K_2} - \bar{v}_{K_1}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{v}_{12} &= \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w = (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \times \bar{r}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w = \\ &= \bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1 - \bar{\omega}_2 \times \bar{a}_w. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Вектор $\bar{\omega}_{12}$ определится геометрическим суммированием векторов $\bar{\omega}_1$ и $-\bar{\omega}_2$ после переноса $\bar{\omega}_2$ в плоскость zOy .

Для принятого расположения систем координат $Oxyz$ следует что

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \omega_1 \bar{k}; \quad \bar{\omega}_2 = j\omega_2 \sin \gamma + k\omega_2 \cos \gamma; \\ \bar{\omega}_{12} &= -j\omega_2 \sin \gamma + k(\omega_1 - \omega_2 \cos \gamma). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Учитывая свойства скалярных и векторных произведений ортов координатных осей (см. гл. 5), получим из формулы (9.3) проекции $\bar{v}_{12}$ на координатные оси при заданном $\bar{\omega}_1$:

$$\left. \begin{aligned} v_{12x} &= -\omega_1 ((1 - i_{21} \cos \gamma) y + z i_{21} \sin \gamma); \\ v_{12y} &= \omega_1 ((1 - i_{21} \cos \gamma) x - a_w i_{21} \cos \gamma); \\ v_{12z} &= \omega_1 (a_w + x) i_{21} \sin \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

где $i_{21} = \omega_2/\omega_1$ — значения воспроизводимой заданной передаточной функции.

Орт нормали $\bar{n}_{12}$ в уравнении (9.1) определяется по заданному уравнению поверхности элемента кинематической пары звена 1 $S_1(x, y, z) = 0$. В этом условии $x = x(v, \theta)$, $y = y(v, \theta)$, $z = z(v, \theta)$, где v и θ — независимые параметры, являющиеся аргументами для непрерывных функций координат (криволинейные координаты на поверхности). В векторном виде уравнение поверхности имеет вид $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(v, \theta)$. Тогда орт нормали

$$\bar{n}_{12} = (\partial \bar{r}_1 / \partial v \times \partial \bar{r}_1 / \partial \theta) / |\partial \bar{r}_1 / \partial v + \partial \bar{r}_1 / \partial \theta|. \quad (9.6)$$

Выразим вектор $\bar{v}_{12}$ через координаты поверхности S и заданные параметры синтеза с помощью выражений (9.5). Определяя $\bar{n}_{12}$ из выражения (9.6), решим уравнение (9.1), после чего определим координаты точек поверхности S_2 , элемента звена 2 кинематической пары, сопряженной с поверхностью звена 1.

Если контакт звеньев происходит по линии, то для каждой точки контактной линии должно соблюдаться условие (9.1). Прямая линия, через которую проходят нормали к сопряженным поверхностям всех точек контакта сопряженных поверхностей, называется *осью зацепления*. Из теоретической механики известно, что при вращательном движении звеньев со скрещающимися осями их относительное движение является *винтовым*, совокупным вращательным движением со скоростью $\bar{\omega}_{12}$ относительно мгновенной винтовой оси вращения и поступательным движением со скоростью $\bar{v}_{12}$ вдоль нее. Эта ось является линией касания аксоидных поверхностей, связанных со звеньями. Так как и через ось зацепления, и через винтовую ось проходят нормали, то эти оси совпадают. Уравнение винтовой оси

$$\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_{12} = 0,$$

откуда следует, что линии действия векторов $\bar{\omega}_{12}$ и $\bar{v}_{12}$ параллельны. Учитывая выражения (9.4) и (9.5), свойства проекций векторного произведения и принимая $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$, получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{12y} v_{12z} - \omega_{12z} v_{12y} &= -(i_{21} \sin \gamma)^2 (x + a_w) - (1 - i_{21} \cos \gamma) \times \\ &\times ((1 - i_{21} \cos \gamma) x - a_w i_{21} \cos \gamma) = 0; \\ \omega_{12z} v_{12x} - \omega_{12x} v_{12z} &= \\ &= -(1 - i_{21} \cos \gamma) (z i_{21} \sin \gamma + (1 - i_{21} \cos \gamma) y) = 0; \\ \omega_{12x} v_{12y} - \omega_{12y} v_{12x} &= -i_{21} \sin \gamma (z i_{21} \sin \gamma + (1 - i_{21} \cos \gamma) y) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Из уравнений (9.7) получим после преобразований для винтовой оси:

$$\left. \begin{aligned} x &= -r_0 = -a_w i_{21} (i_{21} - \cos \gamma) / (1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2); \\ y &= -z i_{21} \sin \gamma / (1 - i_{21} \cos \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Из уравнений (9.8) видно, что винтовая ось пересекает линию кратчайшего расстояния OO_2 в точке $x = -r_0$, а с осью z она образует угол $\delta_1 = \arctg [i_{21} \sin \gamma / (1 - i_{21} \cos \gamma)]$ при $y_K/z_K = -\tg \delta_1$. Тогда, определяя положение точки K на винтовой оси (рис. 9.4) через заданные параметры, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= -r_0 = -a_w i_{21} (i_{21} - \cos \gamma) / (1 - 2i_{21} \cos \gamma + i_{21}^2); \\ y &= -u \sin \delta_1; \\ z &= u \cos \delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Уравнения (9.9) определяют положение винтовой оси в неподвижной координатной системе $Oxyz$, ось Oz которой совпадает с осью O_1z_1 системы $O_1x_1y_1z_1$, связанной с вращающимся звеном 1. Тогда уравнение винтовой оси в системе $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 9.4) получим, используя матрицы перехода от системы $Oxyz$ к системе $O_1x_1y_1z_1$ (см. гл. 5):

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_0 \\ -u \sin \delta_1 \\ u \cos \delta_1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (9.10)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -r_0 \cos \varphi_1 - u \sin \delta_1 \sin \varphi_1; \\ y_1 &= r_0 \sin \varphi_1 - u \cos \varphi_1 \sin \delta_1; \\ z_1 &= u \cos \delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Уравнение винтовой оси в системе $O_2x_2y_2z_2$, связанной со вторым звеном кинематической пары, получим, используя матрицы перехода от системы $Oxyz$ к системе $O_2x_2y_2z_2$, через вспомогательную систему $O_1x_1y_1z_1$, ось O_2x_2 которой совпадает с осью Ox , а ось O_2z_2 — с осью O_1z_1 . Матрицы перехода от системы $Oxyz$ к системе $O_2x_2y_2z_2$ равны (см. гл. 5):

$$\left. \begin{aligned} M_{2'0} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_w \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad M_{22'} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \\ M_{20} &= \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \cos \gamma \sin \varphi_2 & -\sin \gamma \sin \varphi_2 & a_w \cos \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \gamma \cos \varphi_2 & -\sin \gamma \cos \varphi_2 & -a_w \sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Тогда уравнение винтовой оси в системе $O_2x_2y_2z_2$ будет

$$\bar{r}_2 = M_{20}\bar{r}_0$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (a_w - r_0) \cos \varphi_2 - u \sin(\delta_1 + \gamma) \sin \varphi_2; \\ y_2 &= -(a_w - r_0) \sin \varphi_2 - u \sin(\delta_1 + \gamma) \cos \varphi_2; \\ z_2 &= u \cos(\delta_1 + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Уравнения (9.11) и (9.13) описывают аксоидные поверхности звеньев 1 и 2, являющиеся однополостными гиперboloидными поверхностями вращения. В этом легко убедиться. Приняв в этих уравнениях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$, получим уравнения гипербол в сечениях, проходящих через оси O_1z_1 и O_2z_2 (рис. 9.5, а), а приняв $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$ — уравнения окружностей в горловинах гиперболюидов.

Если оси звеньев 1 и 2 пересекаются, то $a_w = 0$, $\gamma = \delta$, тогда $x = 0$, $y = -u \sin \delta$, $z = u \cos \delta$ и винтовая ось образует в отно-

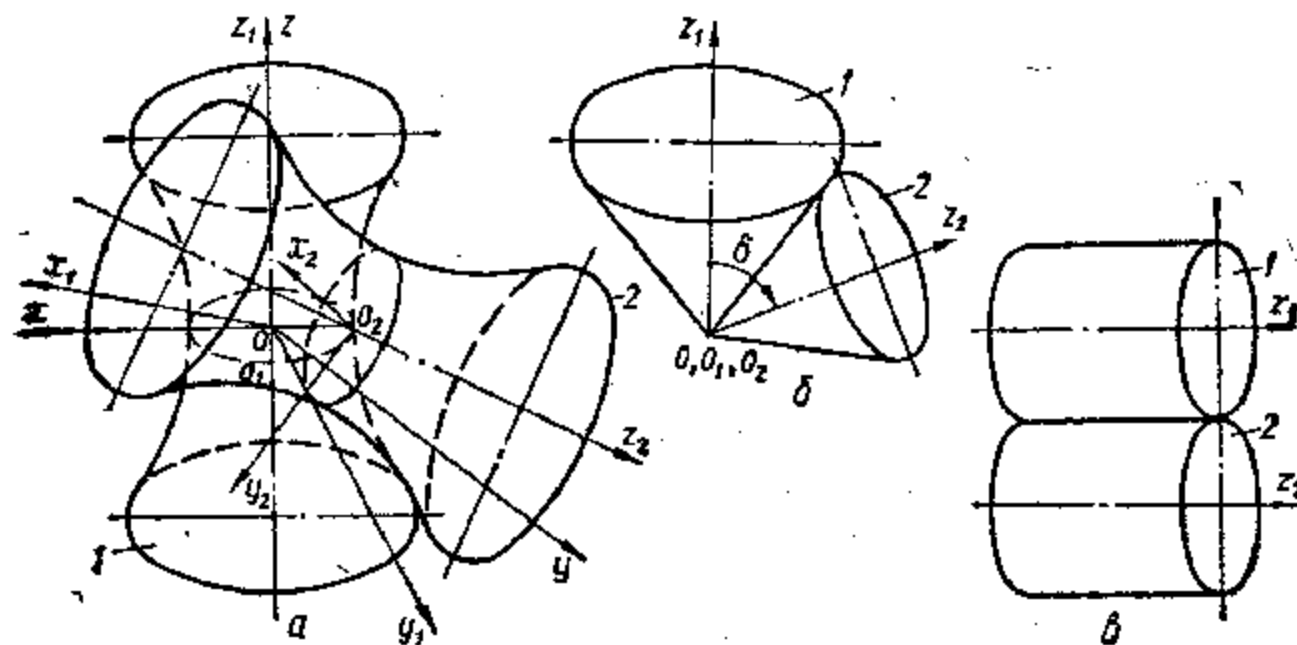


Рис. 9.5. Аксоидные поверхности

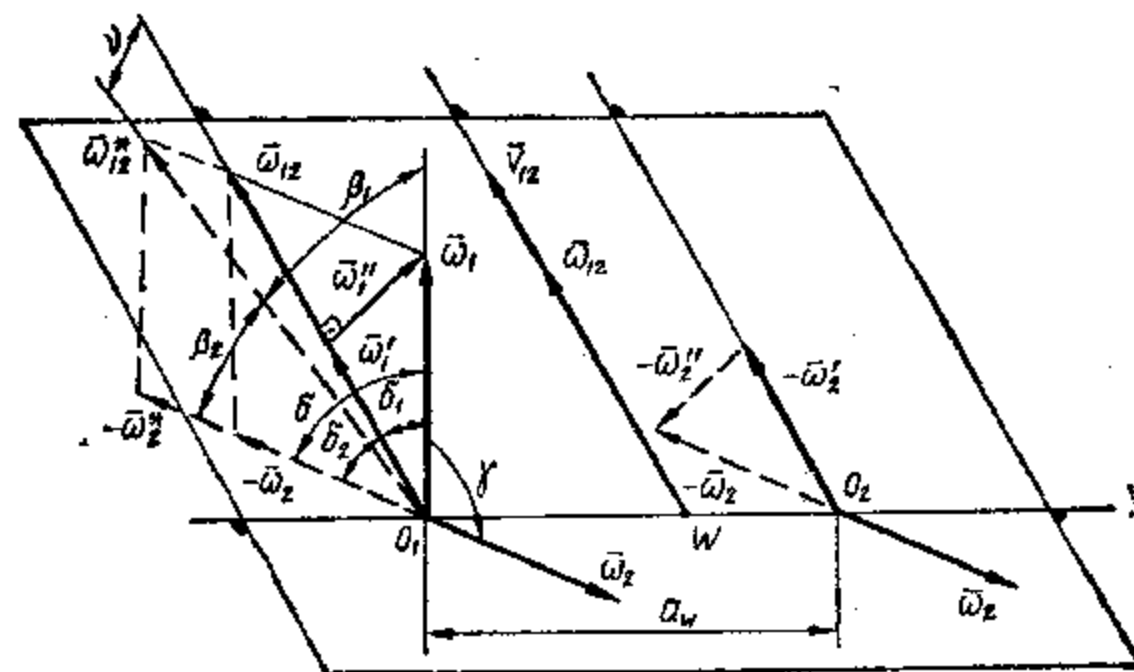


Рис. 9.6. Определение относительной скорости звеньев

сительном движении конические аксоидные поверхности (рис. 9.5, б). Если оси звеньев, образующих высшую кинематическую пару, параллельны, то $\gamma = 0$, тогда $x = -a_w i_{21}/(1 - i_{21})$; $y = 0$; $z = u$ и, следовательно, винтовая ось образует в относительном движении цилиндрические аксоидные поверхности (рис. 9.5, в).

При синтезе поверхностей элементов конической пары вектор относительной скорости $\bar{v}_{12}$ зависит от мгновенного значения передаточного отношения i_{21} передаточной функции $i_{21}(\varphi_1)$. Это объясняется тем, что передаточная функция зависит от геометрической формы звеньев и является входным параметром синтеза. Действительно, если через отрезок $O_1O_2 = a_w$ (рис. 9.6) и линию вектора $\bar{\omega}_{12}$ провести плоскость и спроецировать на нее векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, то получим

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \omega_1 + \omega_2 = \omega_1 \cos \delta_1 + \omega_2 \cos \delta_2 = \\ &= \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \delta}. \end{aligned}$$

Точка W делит межосевое расстояние O_1O_2 на части, обратно пропорциональные ω_1 и ω_2 . Следовательно, $O_1W/O_2W = \omega_2/\omega_1 = \omega_2 \cos \delta_2/\omega_1 \cos \delta_1$, а

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = (O_2W/O_1W)(\cos \delta_2/\cos \delta_1). \quad (9.14)$$

Если поверхности S_1 и S_2 элементов кинематической пары выполнить в виде аксоидных гиперболюидов, то контакт звеньев по винтовой оси будет линейчатым. Так как нормаль к поверхности гиперболюидов пройдет через оси их вращения, то силовое взаимодействие звеньев не вызовет передачи движения. Передать движение с помощью такой кинематической пары можно только силами трения между звеньями 1 и 2, возникающими за счет прижимающих их сил. Для обеспечения передачи движения непосредственным соприкосновением звеньев необходимо придать им форму, при которой нормаль к поверхностям звеньев не проходила бы через их оси вращения. Тогда касательная плоскость к звеньям пройдет согласно условию (9.1) перпендикулярно $n - n$ через векторы $\bar{\omega}_{12}$ и $\bar{v}_{12}$.

Увеличим угловую скорость звена 2 до значения ω_2^* . Тогда новый вектор угловой скорости относительного движения $\bar{\omega}_{12}^*$ отклонится по плоскости $(\bar{\omega}_{12} - a_w)$ на угол γ (рис. 9.6). Между векторами $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_{12}^*$ образуются новые углы β_1 и β_2 , причем $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \delta_1 + \delta_2 = \delta$. Для обеспечения передаточного отношения $i_{12}^* = \omega_1/\omega_2^*$ поверхности элементов звеньев 1 и 2 должны быть такими, чтобы направление касательной к звеньям совпало с направлением вектора $\bar{\omega}_{12}^*$, т. е. с винтовой осью новых гиперболюидов. Эти новые гиперболюиды касаются аксоидных гиперболюидов в одной точке — точке контакта звеньев 1 и 2, так как их винтовые оси пересекаются под углом γ . Следовательно, и контакт звеньев будет точечным. Для этого случая

$$i_{12}^* = \omega_1/\omega_2^* = (O_2W/O_1W)/(\cos \beta_2/\cos \beta_1) = (r_2/r_1)(\cos \beta_2/\cos \beta_1). \quad (9.15)$$

Такие гиперболоиды называются *начальными*. Соответствующие им поверхности, имеющие радиусы r_1 и r_2 в точке касания, также называются *начальными*. У начальных поверхностей сопряженные линии касаются, а проекция вектора $\bar{v}_{12}$ на плоскость, нормальную в точке касания звеньев, равна нулю. В таком случае для обеспечения точечного касания звеньев нет необходимости в качестве начальных поверхностей принимать именно гиперболоиды. Целесообразно за начальные принимать простые по форме поверхности — круглые цилиндры радиусов r_1 и r_2 , построенные у горловин гиперболоидов и касающиеся друг друга в точке на линии O_1O_2 , или конусы с несовпадающими вершинами и точечным контактом и т. п. Из кинематики звеньев следует, что если оси звеньев 1 и 2 лежат в одной плоскости (рис. 9.5, б, в), то начальные и аксоидные поверхности совпадают.

9.4. Синтез элементов плоской высшей кинематической пары

Если поверхности S_1 и S_2 (см. рис. 9.1) рассечь плоскостью, проходящей через вектор $\bar{v}_{12}$ и общую нормаль $\bar{n}_{12}$, то в сечении получим контакт кривых, принадлежащих этим поверхностям и лежащих в одной плоскости. Эти кривые в дальнейшем будем называть *профильными*, или *профилями*. Такие профили Π_1 и Π_2 образуют кинематическую пару 4-го класса (рис. 9.7), звенья которой 1 и 2, в за-

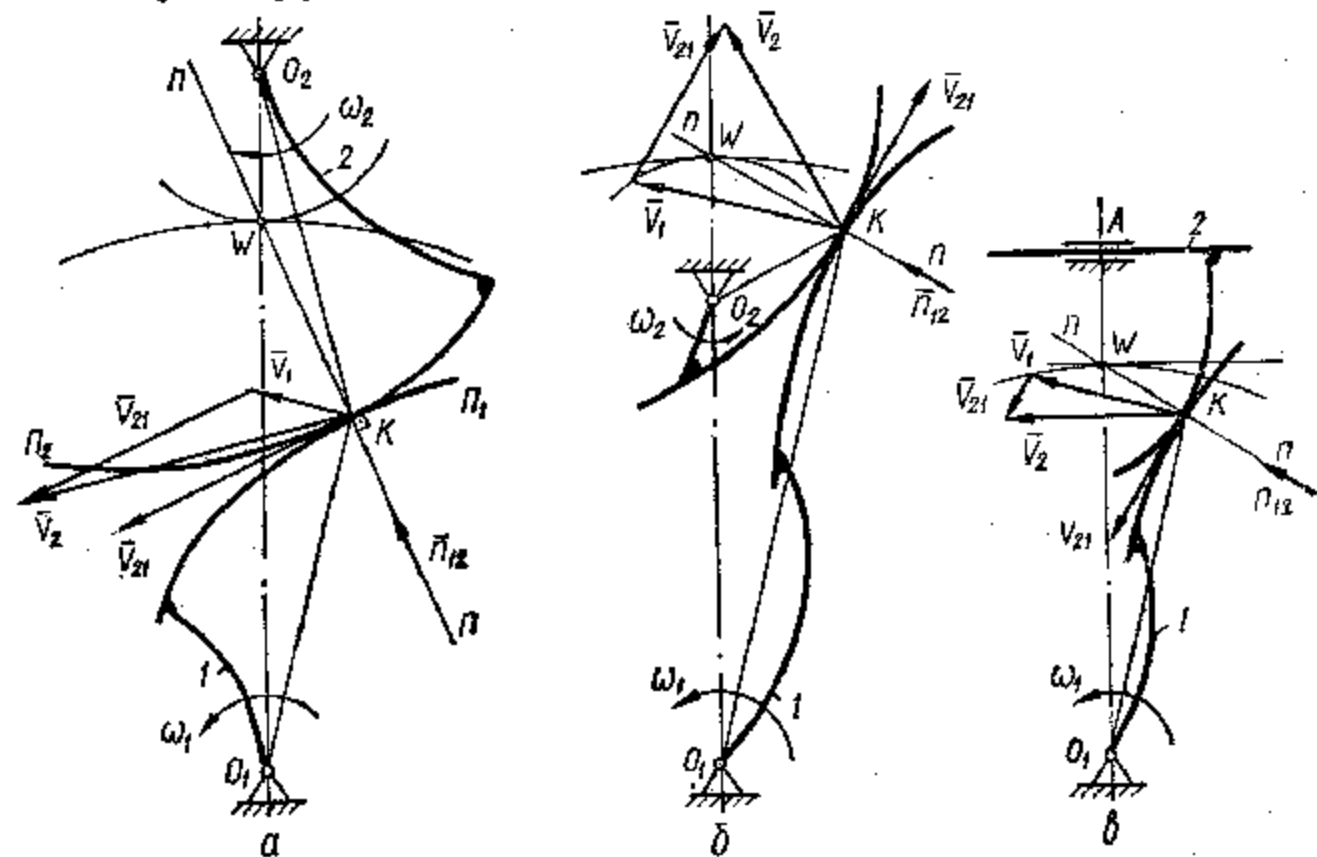


Рис. 9.7. Синтез элементов плоской высшей кинематической пары

висимости от характера движения поверхностей S_1 и S_2 , совершают вращательное (рис. 9.7, а, б) или поступательное (рис. 9.7, в) движения.

Задача синтеза в этом случае сводится к определению формы профиля 2 по профилю 1 и функции положения или передаточной функции.

Все ранее рассмотренные зависимости справедливы и для плоской кинематической пары, так как плоско-параллельное движение является частным случаем пространственного движения. Вектор $\bar{v}_{12} = -\bar{v}_{21}$ будет направлен по касательной к профилям 1 и 2 и перпендикулярен к общей нормали $n - n$. Из теоретической механики известно, что мгновенный центр вращения при относительном движении двух звеньев лежит на линии их центров. Следовательно, точка пересечения W нормали $n - n$ и линии центров O_1O_2 является мгновенным центром вращения звеньев 1 и 2 и называется *полюсом*. Геометрические места мгновенных центров вращения W , связанные с плоскостями профилей 1 и 2, образуют *центроиды*. Очевидно, центроиды будут соответствовать сечению плоскостью $(\bar{v}_{21} - \bar{n}_{12})$ аксоид поверхностей S_1 и S_2 , которым принадлежат профили. Для плоской кинематической пары математическое выражение основной теоремы зацепления также имеет вид $\bar{v}_{12} \cdot \bar{n}_{12} = 0$.

Если передаточная функция постоянна, то точка W не меняет своего положения на линии центров и центроиды звеньев будут окружностями радиусов O_1W и O_2W . Тогда $\delta_2 = \delta_1 = 0$ и по формуле (9.14) передаточное отношение

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = O_2W/O_1W = \text{const.} \quad (9.16)$$

Для плоской кинематической пары передаточное отношение имеет знак (см. рис. 9.7). Если направления угловых скоростей разные, то полюс W лежит между точками O_1 и O_2 (см. рис. 9.7, а), если одинаковые — на продолжении линии O_1O_2 (см. рис. 9.7, б). При поступательном движении звена 2 (см. рис. 9.7, в) полюс будет находиться на перпендикуляре, проведенном из центра вращения звена 1 на линию действия вектора $\bar{v}_2$, а знак передаточного отношения определится направлением угловой скорости ω_1 .

9.5. Формообразование элементов высшей кинематической пары реальных звеньев

Сопряженные поверхности звеньев образуются при их изготовлении как огибающие производящих поверхностей в относительном движении. Производящая поверхность касается сопряженных поверхностей, которые формируют режущие грани инструмента. Чаще применяют производящие плоскости. Режущие кромки инструмента, определяющие производящие поверхности, очерчивают обычно прямыми линиями, эвольвентами или окружностями, так как это облегчает контроль их взаимного положения при производстве и заточке. Относительные движения производящих поверхностей и заготовки обеспечиваются кинематикой станков. Конструкции станков предусматривают образование сопряженных поверхностей как огибающих в относительном движении инструмента и заготовки.

Производящая поверхность может совпадать с одной из сопряженных поверхностей и может отличаться от обеих сопряженных поверхностей. Если производящая поверхность совпадает с заданной

поверхностью S_1 , то при образовании поверхности S_2 производящая и образуемая поверхности имеют такое же относительное движение, как и поверхности S_1 и S_2 звеньев 1 и 2 пары при их взаимодействии. Если поверхности S_1 и S_2 образуются производящей поверхностью S_n , отличной от S_1 и S_2 , то этой поверхности задается определенное движение по отношению к стойке, а звеньям 1 и 2 задается движение с соответствующим отношением скоростей.

При изготовлении сопряженных поверхностей в целях их взаимозаменяемости и снижения номенклатуры инструмента применяются стандартные исходные контуры — сечения исходных сопряженных поверхностей плоскостями, цилиндрическими или коническими поверхностями (см. гл. 10). Стандартный исходный контур должен быть сопряжен с обеими изготавливаемыми сопряженными поверхностями. Исходный контур должен быть технологичен в изготовлении и легко подвергаться контролю, что обеспечивает его точность. Форма контура кроме геометрических соображений выбирается с учетом изгибной и контактной прочности сопряженных поверхностей.

10. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

10.1. Эвольвентная функция

Для передачи движения с постоянным передаточным отношением широкое распространение получили предложенные еще Л. Эйлером (см. прил.) профили, являющиеся дугами эвольвент окружностей. Геометрическое место центров кривизны любой кривой (эвольвенты) называется эволютой. Эвольвенту и эволюту характеризуют следующие геометрические свойства: эвольвента является разверткой эволюты, т. е. она описывается точкой прямой, которая перекатывается по эволюте без скольжения, поэтому радиус кривизны эвольвенты равен длине соответствующей дуги эволюты; касательная к эволюте является нормалью к эвольвенте; точка касания с эволютой нормали к эвольвенте является центром ее кривизны.

В теории зацепления эволюта — окружность радиуса r_b , называемая основной (рис. 10.1). Точка B касания производящей прямой Q с основной окружностью является мгновенным центром вращения в относительном движении, отрезок BM — радиусом кривизны эвольвенты в точке M . Точка C на основной окружности (начало эвольвенты) называется предельной точкой. Угол ν_M между радиусами, проведенными в предельную точку C и точку B касания производящей прямой с основной окружностью, называется углом развернутости эвольвенты в точке M .

Радиус кривизны эвольвенты при $\nu_M = 0$ равен нулю; с увеличением угла развернутости он увеличивается, при этом $\overline{CB} = \overline{MB}$. Угол α_M между радиусами OM и OB называется углом профиля

в точке M и определяется по формуле

$$\alpha_M = \arccos(r_b/r_M), \quad (10.1)$$

где r_M — радиус эвольвенты в данной точке.

Угол $\theta_M = \nu_M - \alpha_M$ называется эвольвентным углом. Из треугольника OMB при $\overline{CB} = \overline{MB}$ имеем $\operatorname{tg} \alpha_M = MB/OB = \overline{CB}/OB = r_b \nu_M / r_b = \nu_M$. Отсюда

$$\theta_M = \operatorname{tg} \alpha_M - \alpha_M = \operatorname{inv} \alpha_M. \quad (10.2)$$

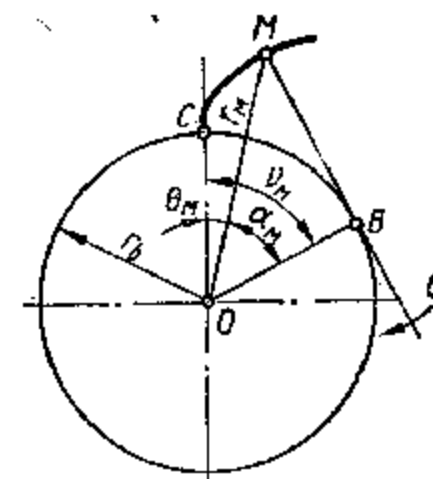


Рис. 10.1. Эвольвента окружности

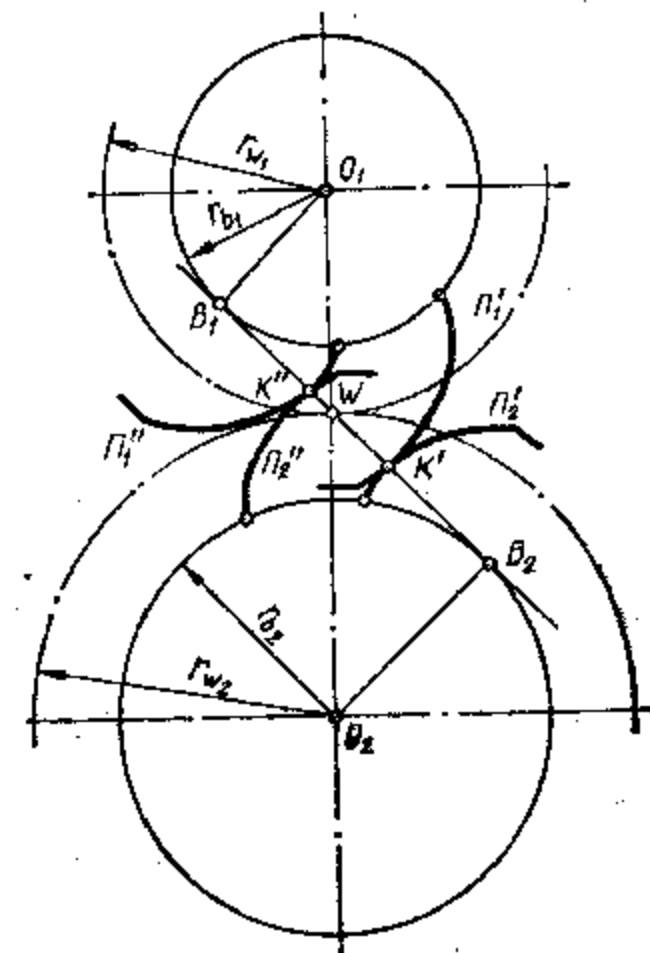


Рис. 10.2. Эвольвентные профили

Зависимость $\theta_M = \operatorname{inv} \alpha_M$ называется эвольвентной функцией, она является характеристикой эвольвенты окружности, табулирована и используется при определении геометрических размеров эвольвентных зубьев. Если из формул (10.1) и (10.2) исключить α_M , то получим зависимость между r_M и θ_M , выраженную через r_b . Следовательно, эвольвента полностью определяется основной окружностью и для отыскания координат эвольвентного профиля достаточно задать её радиус r_b .

10.2. Эвольвентные профили

Схема взаимодействия двух эвольвентных профилей Π_1 и Π_2 с основными окружностями r_{b1} и r_{b2} , вращающимися вокруг центров O_1 и O_2 , показана на рис. 10.2. По свойству эвольвент общая нормаль к этим профилям в положении Π_1' и Π_2' в точке их контакта K' касательна к обоим основным окружностям в точках B_1 и B_2 . При повороте звеньев профили займут положение Π_1'' и Π_2'' , а точка контакта эвольвент переместится в точку K'' , но так как положение основных окружностей не изменяется, то и положение общей

нормали B_1B_2 , касательной к этим окружностям, будет постоянным, и она будет пересекать линию O_1O_2 в одной и той же точке W . Как показано ранее (см. гл. 9), окружности, касающиеся друг друга в точке W , являются центроидами в относительном движении. В теории зацеплений эти окружности радиусов r_{W1} и r_{W2} , перекатывающиеся без скольжения, называются *начальными*. При неподвижных центрах O_1 и O_2 передаточное отношение $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = r_{W2}/r_{W1}$ и на основании подобия $\triangle O_1B_1W$ и $\triangle O_2B_2W$ получим

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = r_{W2}/r_{W1} = r_{b2}/r_{b1}. \quad (10.3)$$

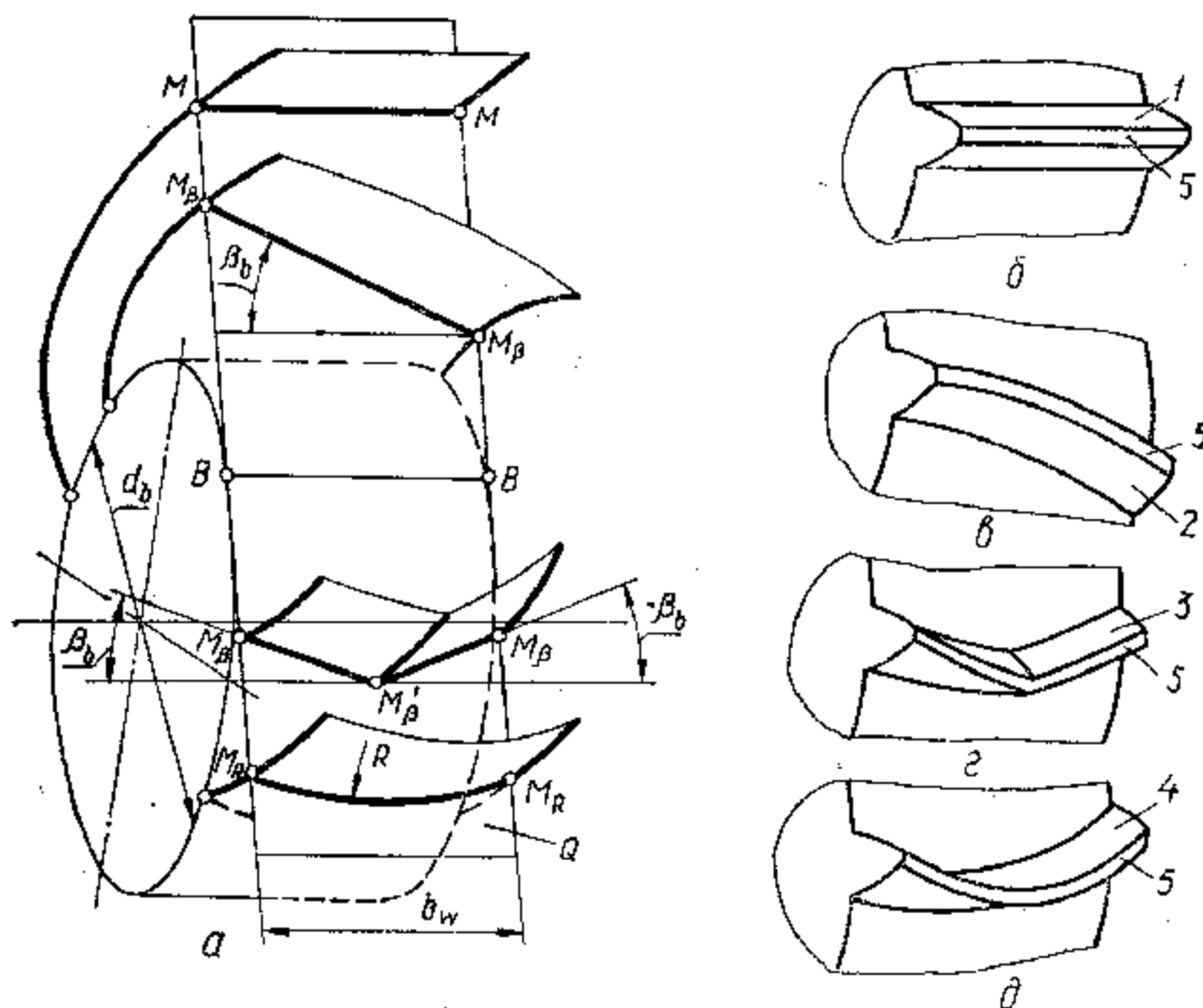


Рис. 10.3. Образование зубьев разных видов

Следовательно, при взаимодействии эвольвентных профилей передаточное отношение не изменяется, так как не изменяются радиусы основных окружностей.

При зацеплении реальных звеньев эвольвентные профили ограничиваются наружным размером звена. Для сохранения непрерывности передаточного отношения между звеньями при их движении необходимо до того, как профили Π_1 и Π_2 выйдут из зацепления, ввести в зацепление следующие профили и т. д. На практике это достигается приданием звеньям круглой формы с равномерным расположением профилей по основной окружности. Расстояние между соседними профилями по дуге радиуса r_b называется *шагом по основной окружности*. Обычно профили выполняют двусторонними. Такие звенья называют *зубчатыми колесами*.

10.3. Образование прямых зубьев

Зубчатые колеса имеют третье измерение вдоль осей вращения — ширину зубчатого венца b_w (рис. 10.3, а); основная окружность в этом случае является торцовым сечением основного цилиндра. Эвольвентные поверхности зубьев образуются линиями, расположенными на производящей плоскости Q , перекатывающейся без скольжения по основному цилиндру.

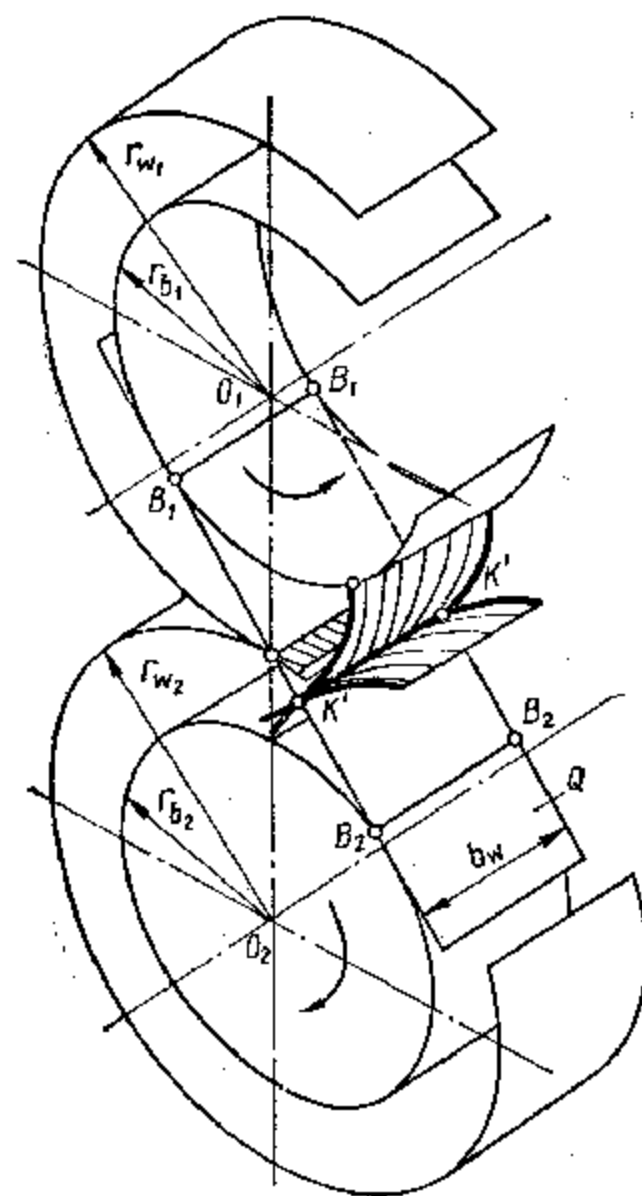


Рис. 10.4. Образование прямых зубьев

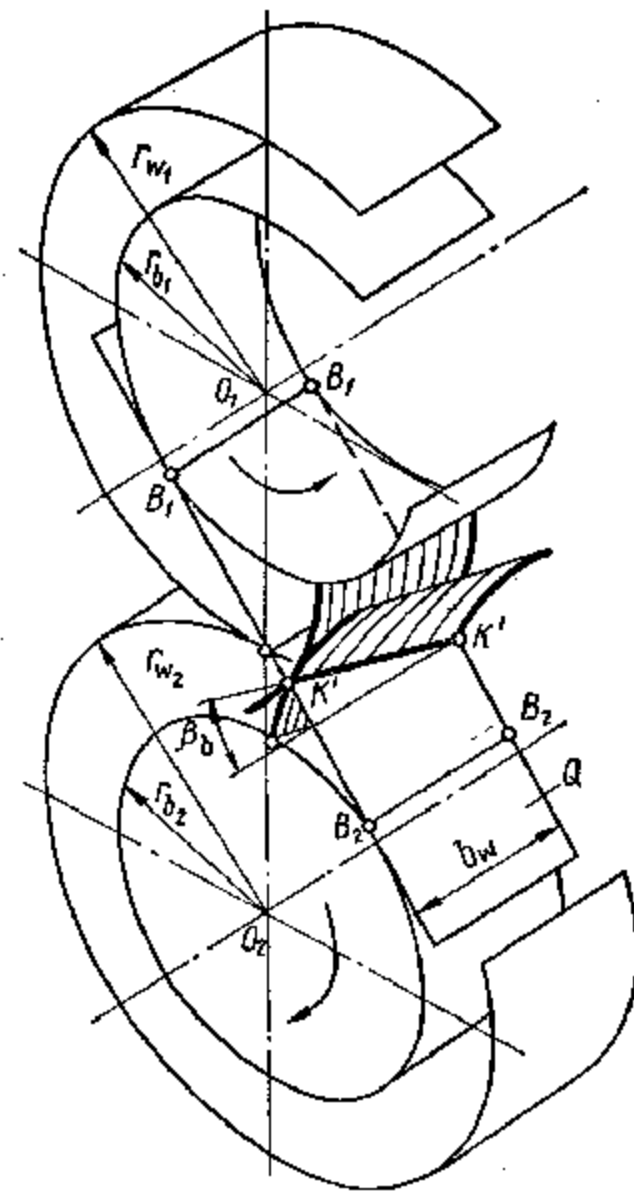


Рис. 10.5. Образование косых зубьев

Линия MM , параллельная линии BB касания плоскости с основным цилиндром, описывает цилиндрическую эвольвентную поверхность 1 , которая является рабочей поверхностью прямого зуба (рис. 10.3, б), ограниченного цилиндрической поверхностью 5 вершин зубьев. Так как любая точка на прямой MM при обкатывании плоскости Q по основному цилиндру описывает эвольвенту, то, как и эвольвентные профили, эвольвентные боковые поверхности двух взаимодействующих зубьев являются *сопряженными*, т. е. они обеспечивают постоянство заданного передаточного отношения.

Точке контакта K' двух плоских эвольвентных профилей (рис. 10.2) соответствует в пространстве контактная линия $K'K'$ (рис. 10.4) на поверхностях зубьев, которая в прямозубой цилинд-

рической эвольвентной передаче является прямой, параллельной осям колес. В процессе зацепления контактная линия перемещается по боковой поверхности ведущего зуба в направлении к его вершине, а по поверхности ведомого — приближаясь к основанию зуба. Плоскость $B_1B_2B_2B_1$ в неподвижной системе координат, в которой лежит контактная линия, называют **плоскостью зацепления**. Она касается основных цилиндров обоих взаимодействующих колес и нормальна боковым поверхностям зубьев.

10.4. Образование косых зубьев

Если линию M_2M_1 (см. рис. 10.3, а), образующую эвольвентную поверхность, расположить под углом β_b по отношению к линии BB касания производящей плоскости Q с основным цилиндром, то при ее обкатывании получим винтовую эвольвентную поверхность. Часть ее 2 (см. рис. 10.3, в), ограниченную цилиндрической поверхностью вершин 5, используют в качестве рабочей поверхности зуба косозубого колеса. Постоянство передаточного отношения пары косозубых колес обеспечивается благодаря их сопряженности в любом торцовом сечении. Так как боковые поверхности сопрягаемых эвольвентных зубьев (рис. 10.5) образуются одной и той же прямой при обкатывании ее по двум основным цилиндрам радиусов r_{b1} и r_{b2} , то их линия контакта $K'K'$ тоже является прямой линией. На плоскости зацепления $B_1B_2B_2B_1$, как и на основном цилиндре, контактная линия расположена под углом β_b . На поверхностях цилиндров, соосных с основным цилиндром, углы наклона линии зуба отличаются от β_b : они тем меньше, чем больше диаметр цилиндра.

Так как каждое из пары косозубых колес представляет собой цилиндрическое колесо с зубьями, расположенными по винтовой линии, то зубья входят в зацепление плавно: контакт пары зубьев начинается в точке на торце, по мере поворота колес контакт распространяется на линию, длина которой постепенно увеличивается, а затем также плавно уменьшается до точки на противоположном торце колес.

Чем больше угол наклона зубьев, тем больше количество пар зубьев, одновременно передающих нагрузку. Однако с увеличением угла наклона зубьев растет осевая составляющая нормальной силы в зацеплении. Для уравнивания этой осевой силы применяют **шевроновые зубья** (см. рис. 10.3, г), боковые поверхности 3 которых образуются двумя линиями M_3M_3 и M_3M_3 (см. рис. 10.3, а), расположенными под углами β_b , имеющими противоположное направление по отношению к линии BB касания производящей плоскости Q с основным цилиндром. **Шевронное зубчатое колесо** можно представить себе состоящим из двух косозубых колес, называемых **полушевронами**. На каждом полушевроне процесс взаимодействия зубьев аналогичен процессу взаимодействия в косозубых колесах.

10.5. Образование криволинейных зубьев

В случае, если в качестве образующей линии принять кривую $M_R M_R$, например дугу окружности радиуса R (см. рис. 10.3, а), то при перекачивании поверхности Q по основному цилиндру получим криволинейную эвольвентную поверхность. Часть ее 4 (см. рис. 10.3, д) описывает боковую поверхность зуба. Так как в любом сечении, перпендикулярном оси колес, профиль зубьев очерчен эвольвентой,

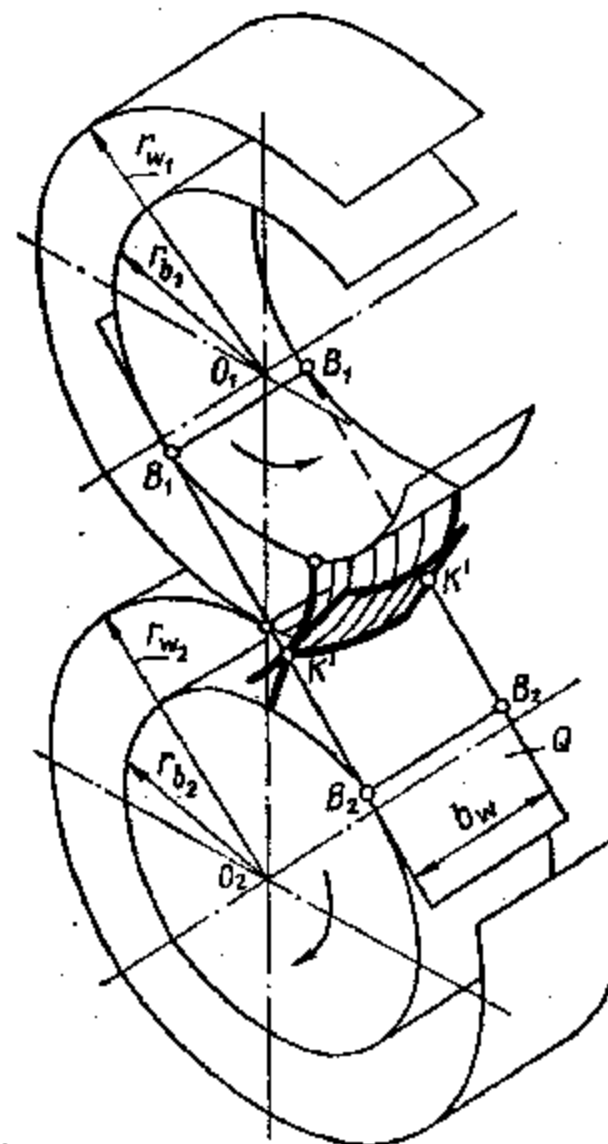


Рис. 10.6. Образование криволинейных зубьев

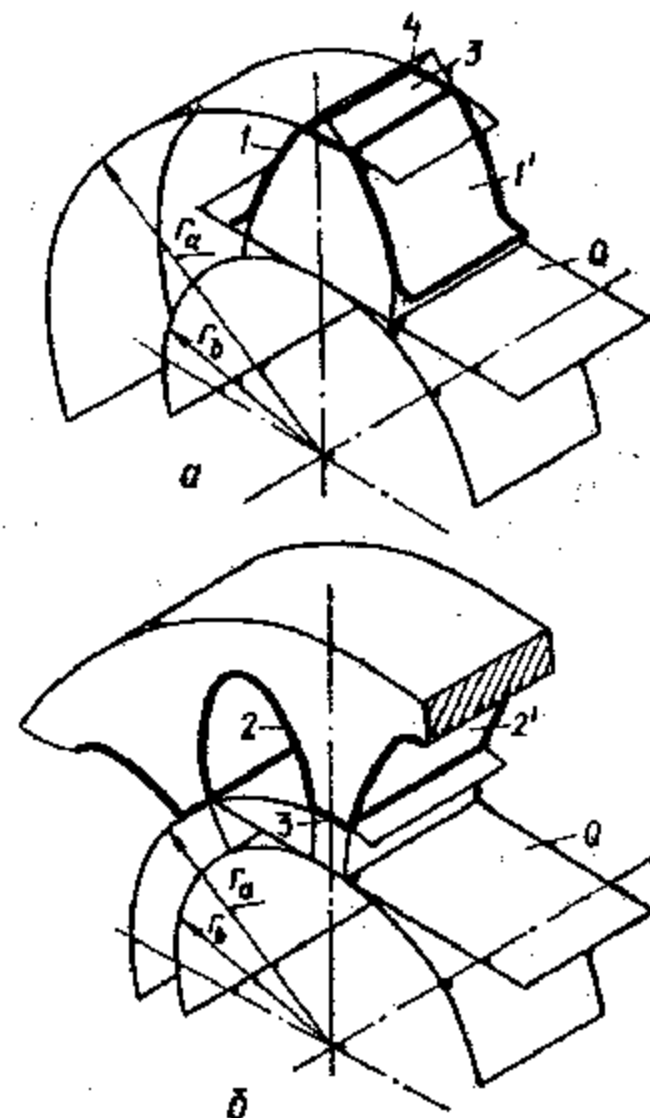


Рис. 10.7. Образование внутренних зубьев

то зацепление с криволинейными зубьями обеспечивает постоянство передаточного отношения. В контакте находятся вогнутая поверхность одного зуба с выпуклой поверхностью другого, линия контакта этих зубьев — кривая $K'K'$ (рис. 10.6). Контакт зубьев начинается по торцам, а затем перемещается к средней части колес, если зубья на ведущем колесе входят в зацепление вогнутой стороной; при вхождении в зацепление выпуклой стороной контакт начинается в средней части колеса, а затем распространяется к торцам.

10.6. Образование внутренних зубьев

Прямые, косые и криволинейные зубья могут быть внешними и внутренними. Боковые поверхности 1 и 1' внешних зубьев (рис. 10.7, а) образованы выпуклыми эвольвентными поверхностями, сходящи-

мися по мере удаления от основной окружности и пересекающимися по линии 4. Поверхности 3 вершин зубьев имеют наибольший диаметр. Боковые поверхности 2 и 2' внутренних зубьев (рис. 10.7, б) образуются вогнутыми эвольвентными поверхностями, расходящимися по мере удаления от основного цилиндра. Выпуклая и вогнутая эвольвентные поверхности внешнего и внутреннего зуба в прямозубом зацеплении касаются по прямой линии $K'K'$ (рис. 10.8). Плоскость зацепления располагается только выше линии B_1B_1 , так как на части плоскости $B_1B_2B_2B_1$ эвольвентные поверхности пересекаются вследствие несовпадения нормалей к эвольвентным поверхностям в точках контакта.

10.7. Зубчатая рейка

Если радиус r , основной окружности одного из звеньев увеличивать до бесконечности (рис. 10.9), то начальная окружность (цилиндр) вырождается в прямую линию (плоскость 2), соответствующая эвольвента — в прямую линию, а вращательное движение — в поступательное.

Взаимодействие прямолинейного профиля с эвольвентным, подобно взаимодействию двух эвольвент, происходит с постоянным

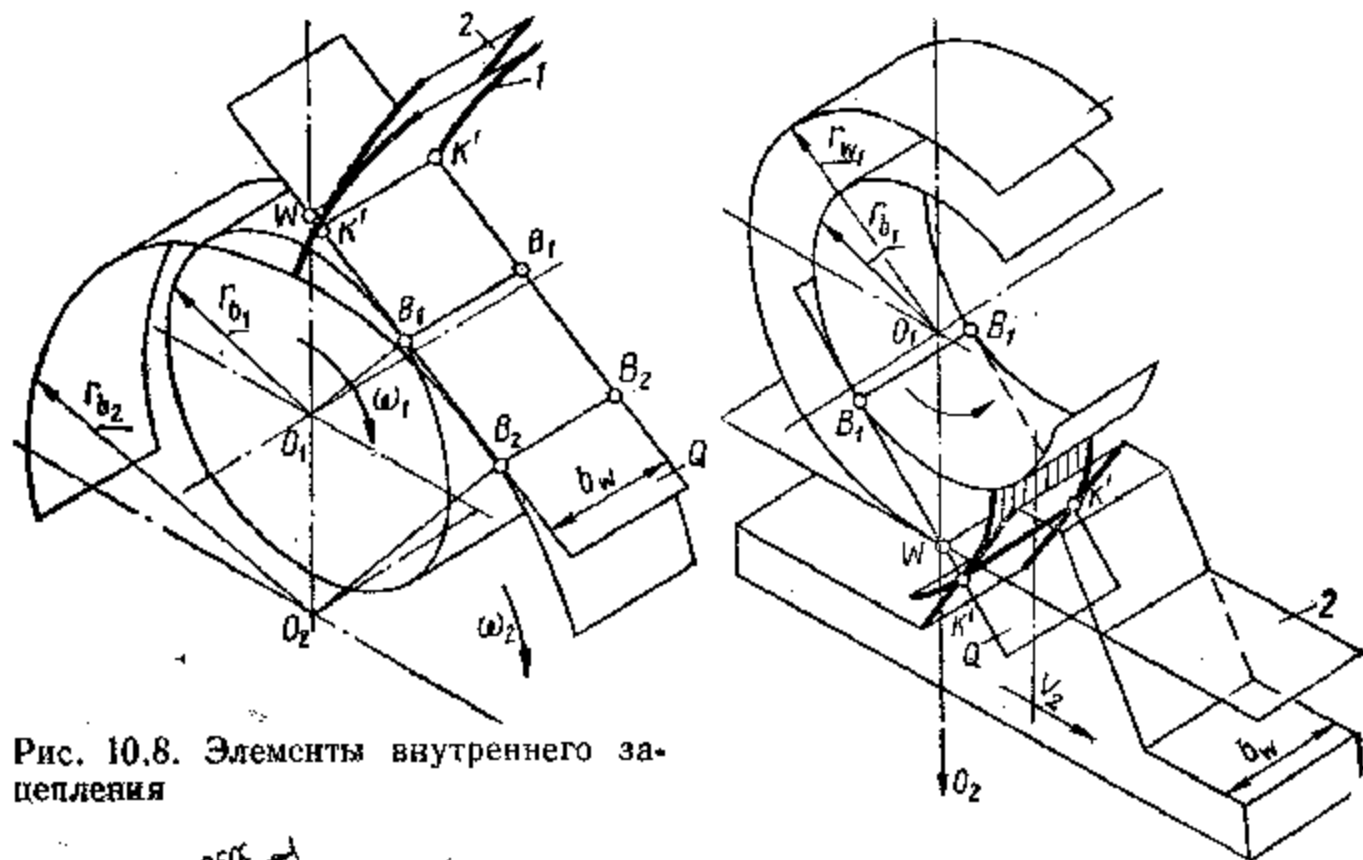


Рис. 10.8. Элементы внутреннего зацепления

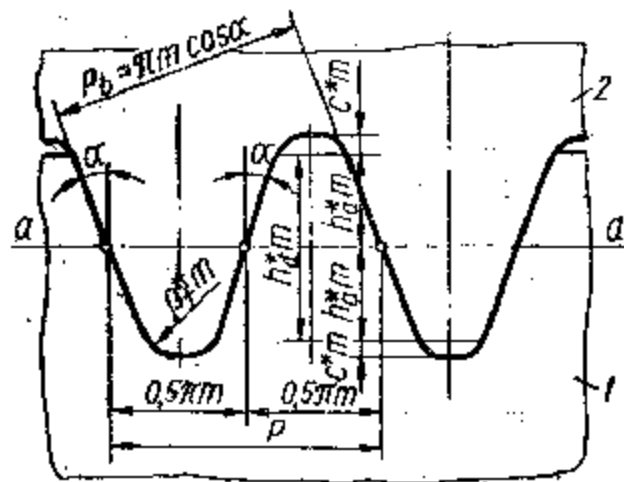


Рис. 10.9. Реечное зацепление

Рис. 10.10. Исходный контур

передаточным отношением. Следовательно, если в качестве профиля зуба звена 2, поступательно движущегося в направлении, перпендикулярном линии O_1O_2 , принять прямую линию, то получим зубчатую рейку. Сопреженным с эвольвентным профилем зуба колеса будет прямолинейный профиль зуба рейки с определенным углом наклона его относительно линии O_1O_2 , перпендикулярной к вектору скорости поступательного движения рейки. В зависимости от типа зубьев — прямых, косых, шевронных или криволинейных — контактные линии $K'K'$ будут иметь соответствующий вид: прямые, параллельные образующим B_1B_1 основного цилиндра, наклонные прямые к этим образующим и кривые.

10.8. Исходный контур

Для обеспечения сопряжения эвольвентных зубчатых колес, изготовленных в различных условиях, необходимо, чтобы любое колесо соответствовало требованиям стандарта, устанавливающего основные параметры зацепления. Стандарт на параметры зубчатой рейки установлен на основании свойства сопряженности прямолинейного профиля рейки с эвольвентой окружности. Реечный контур 1 (рис. 10.10), положенный в основу стандарта, т. е. принятый в качестве базового для определения теоретических форм и размеров зубчатых колес, называется теоретическим исходным контуром, или исходным контуром. Прямая $a-a$, перпендикулярная осям симметрии зубьев рейки, по которой их толщина равна ширине впадин, называется делительной. Расстояние между одноименными профилями, измеренное по делительной или любой другой параллельной ей прямой, называется шагом исходного контура P , а расстояние между этими же профилями, измеренное по нормали, — основным шагом P_b исходного контура. Они связаны соотношением

$$P_b = P \cos \alpha, \quad (10.4)$$

где α — угол профиля исходного контура (угол между прямолинейным профилем зубчатой рейки и перпендикуляром к средней линии).

Для того чтобы диаметры колес выражались рациональными числами, основу стандарта составляет модуль исходного контура, или просто модуль:

$$m = P/\pi. \quad (10.5)$$

Модуль измеряется в миллиметрах и его значения регламентированы ГОСТ 9563—60. Все размеры исходного контура определяются в долях модуля при использовании коэффициентов: высоты головки зуба $h_a^* = 1$; глубины захода зубьев $h_f^* = 2$; радиального зазора $c^* = 0,25$; радиуса закругления впадин $\rho_f^* = 0,38$. Эти коэффициенты называются параметрами исходного контура. Для зубчатых колес общемашиностроительного применения угол профиля стандартом установлен $\alpha = 20^\circ$.

Прямозубому колесу соответствует прямозубая рейка (рис. 10.11, а). Линии зубьев этой рейки перпендикулярны её торцовому сечению T и их профиль во всех сечениях плоскостью, парал-

лельной торцам, одинаков. У косозубой рейки (рис. 10.11, б), соответствующей косозубому колесу, образующие линии зубьев составляют угол β с перпендикуляром к её торцу; в нормальном сечении плоскостью N , перпендикулярной образующим, и торцовом сечении T профили зубьев различны. Поэтому параметрам профиля в нормальном сечении присваивают индекс n , а в торцовом сечении — индекс t . Стандартными являются параметры исходного

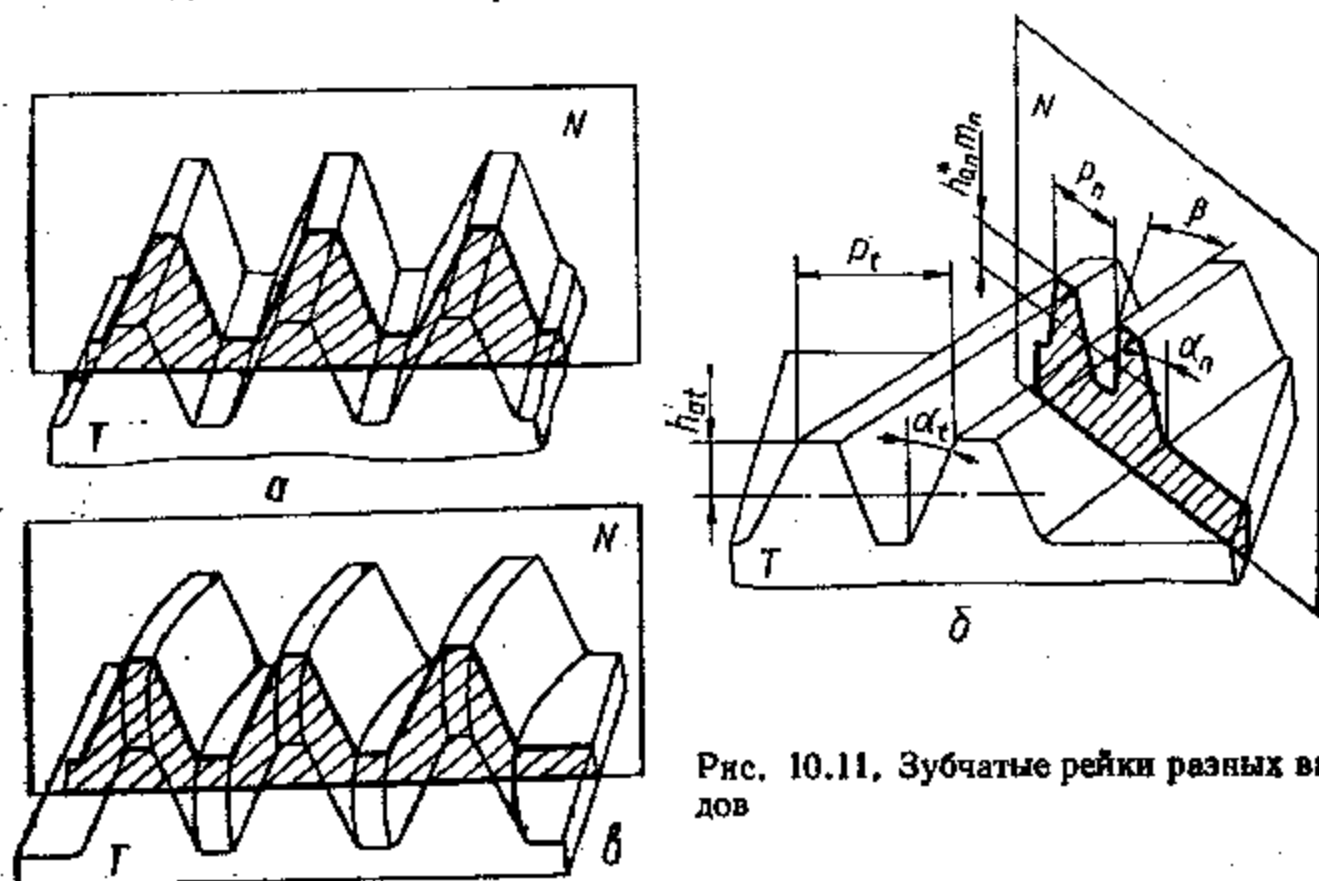


Рис. 10.11. Зубчатые рейки разных видов

контура в нормальном сечении. Параметры торцового сечения исходного контура выражаются через параметры нормального сечения посредством тригонометрических функций угла β :

$$\begin{aligned} P_t &= P_n / \cos \beta; & m_t &= m_n / \cos \beta; & h_{at}^* &= h_{an}^* \cos \beta; \\ c_t &= c_n^* \cos \beta; & \alpha_t &= \arctg(\tg \alpha_n / \cos \beta). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Колесу с криволинейными зубьями соответствует рейка с криволинейными зубьями (рис. 10.11, а). Чаще всего линии зубьев этих реек в зависимости от технологии изготовления выполнены по дугам окружностей или по участкам эллипсоид. Для реек, у которых линии зубьев представляют собой окружности, стандартным является профиль зубьев в сечении плоскостью N , проходящей через центры окружностей параллельно торцовой плоскости T .

10.9. Нарезание зубьев на заготовках колес

Заготовка цилиндрического колеса с внешними зубьями представляет собой цилиндр диаметром d_a . Зубчатый венец образуется за счет удаления материала из впадин при нарезании зубьев *способом копирования* или *способом обкатки*. При способе копирования профиль инструмента должен совпадать с профилем впадины между зубьями нарезаемого колеса. Инструментом могут быть модульная

(дисковая или пальцевая) фреза (рис. 10.12, а), строгальный или долбежный резец, протяжка, шлифовальный круг и др. После обработки каждой впадины (рис. 10.12, б) колесо, установленное в делительном приспособлении, поворачивается на угол $360^\circ/z$ для обработки следующей впадины. Недостатки способа копирования заключаются в том, что для каждого числа зубьев нужен новый инструмент, так как с изменением числа зубьев меняется профиль впадины. С целью экономии изготавливают наборы инструментов, каждый из которых используют для нарезания колес с определен-

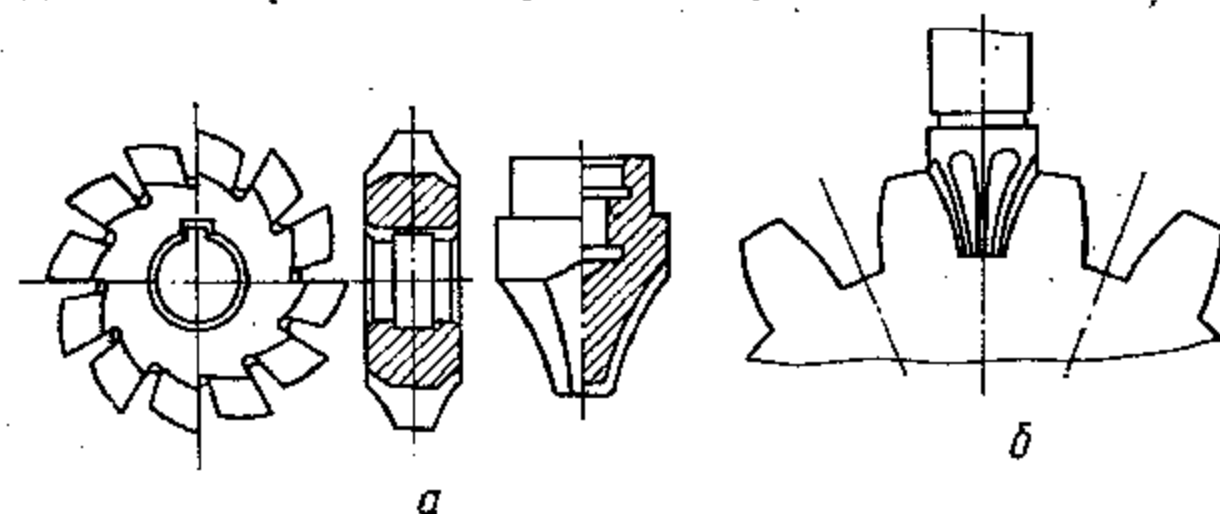


Рис. 10.12. Нарезание зубьев методом копирования

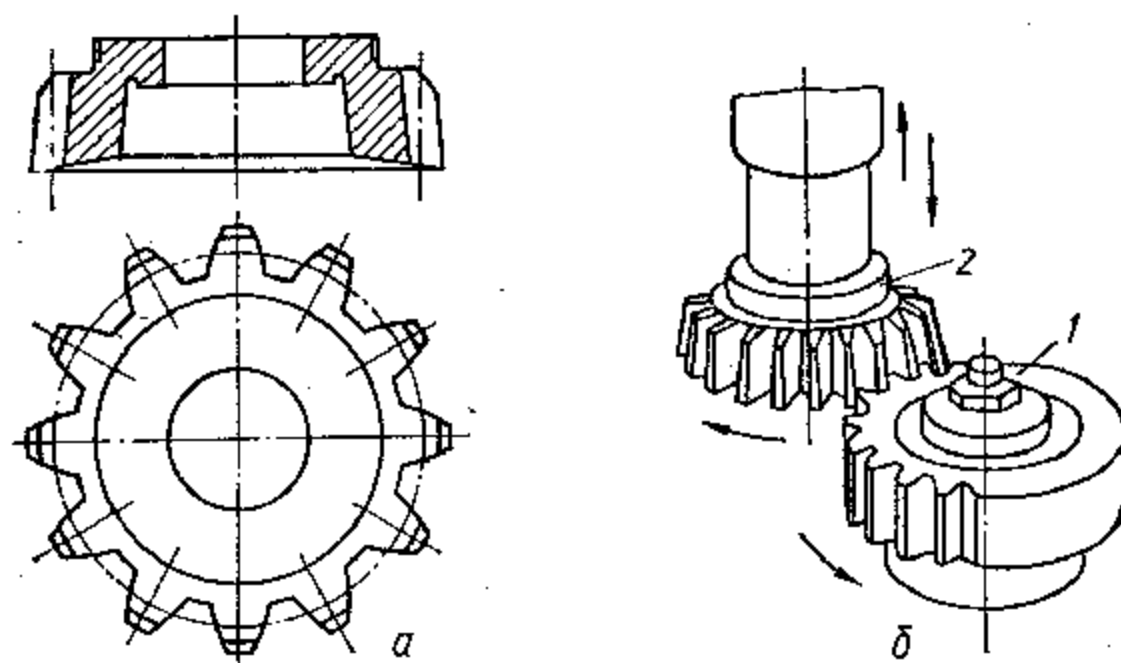


Рис. 10.13. Нарезание зубьев долбяком

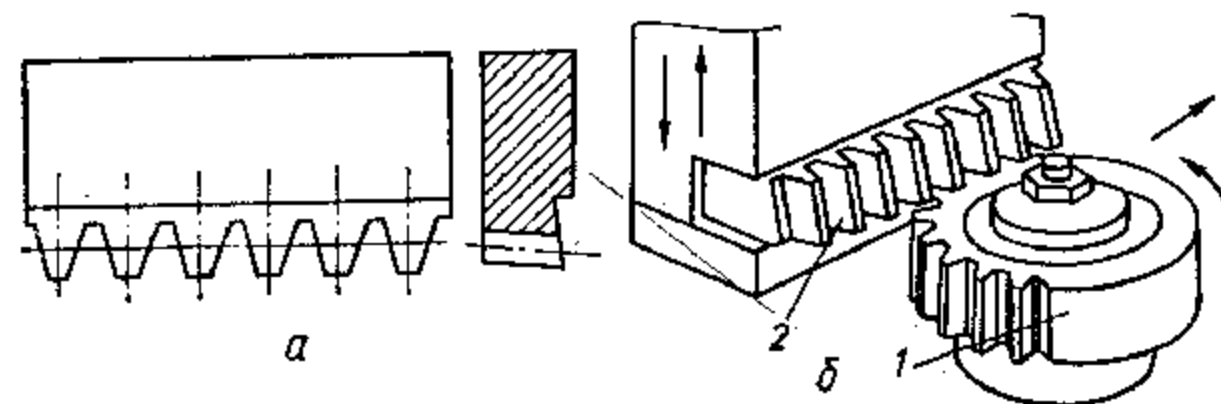


Рис. 10.14. Нарезание зубьев производящей рейкой

ными числами зубьев. Вследствие этого точность зацепления снижается. Кроме этого, режущий инструмент имеет криволинейные режущие кромки и при его изготовлении неизбежны погрешности, которые переносятся на нарезаемое колесо, а для реализации любого изменения в геометрии зубьев необходимо изготовить специальный инструмент, что трудоемко и неэкономично.

При способе обкатки боковые поверхности зубьев на заготовке образуются как огибающие семейства производящих поверхностей, содержащих режущие кромки инструмента. В качестве инструмен-

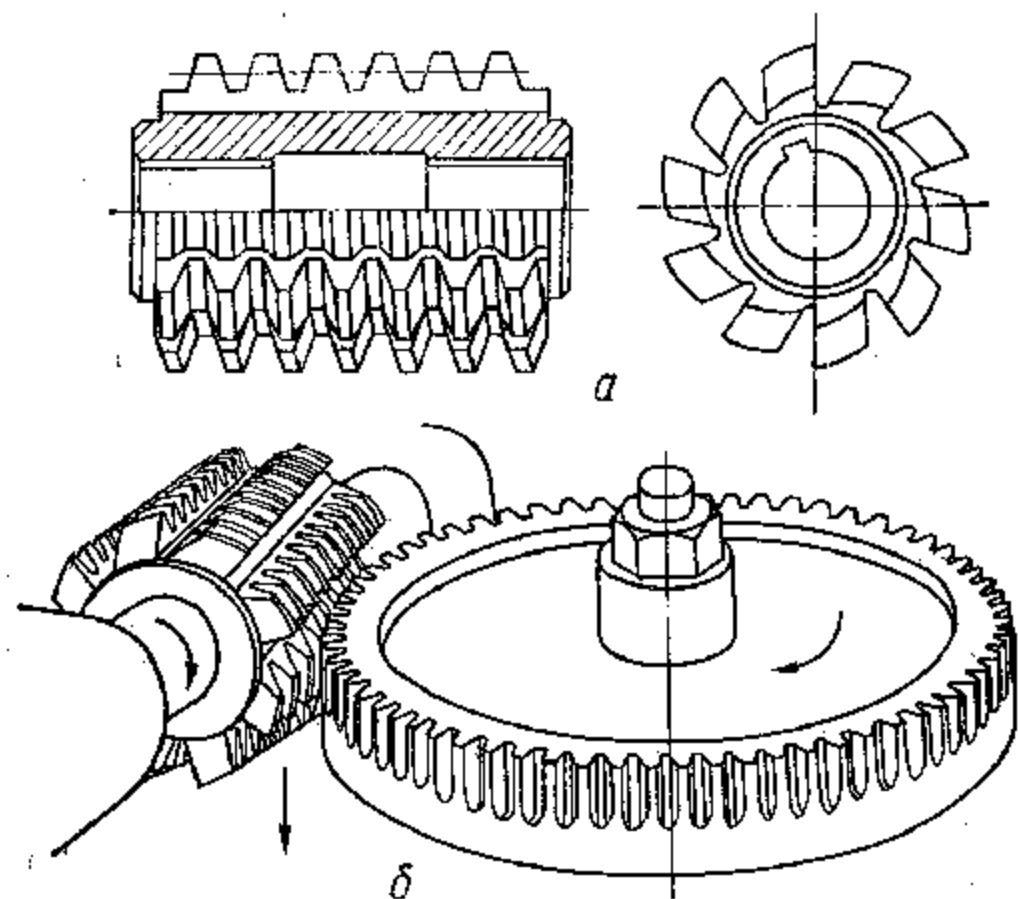


Рис. 10.15. Нарезание зубьев червячной фрезой

та применяется производящее колесо — долбяк (рис. 10.13, а), входящее в станочное зацепление с заготовкой. При работе станка воспроизводится перекачивание без скольжения центроиды нарезаемого колеса 1 (рис. 10.13, б) по центроиде производящего колеса 2. В другом случае применяется производящая рейка (рис. 10.14, а) с прямолинейным профилем зубьев и при станочном зацеплении этой рейки с заготовкой (рис. 10.14, б) производится перекачивание без скольжения центроиды нарезаемого колеса 1 по центроиде рейки 2. Сопряженность эвольвентного профиля вращающегося звена с прямолинейным профилем звена, движущегося поступательно, позволяет значительно упростить инструмент для обработки эвольвентных профилей, а значит, увеличить точность их изготовления. Инструмент реечного типа, соответствующий прямоочной производящей рейке, выполняют в виде зуборезной гребенки или червячной фрезы (рис. 10.15, а). В последнем случае нарезание происходит непрерывно, фреза осуществляет два движения — вращательное и поступательное вдоль образующей нарезаемого колеса (рис. 10.15, б).

Размеры инструментов реечного типа определяют по параметрам исходного производящего реечного контура 2 (см. рис. 10.10), имеющего очертания впадин теоретического исходного контура. При этом между линией впадин исходного производящего контура и линией вершин исходного контура сохраняется радиальный зазор c^*m для того, чтобы поверхность впадин инструмента не участвовала в процессе резания.

10.10. Определение координат точек профиля зуба

При нарезании зубьев эвольвентная часть профиля QG формируется прямолинейным участком K_2K_3 (рис. 10.16) профиля зубчатой рейки, а переходная кривая GF — участком K_1K_2 , являющимся окружностью радиусом ρ_f^*m . Общая точка G эвольвентного профиля и переходной кривой называется **граничной точкой**. Определение координат точек профилей зубьев необходимо при контроле их геометрии и разработке методик расчета зубчатых передач на прочность.

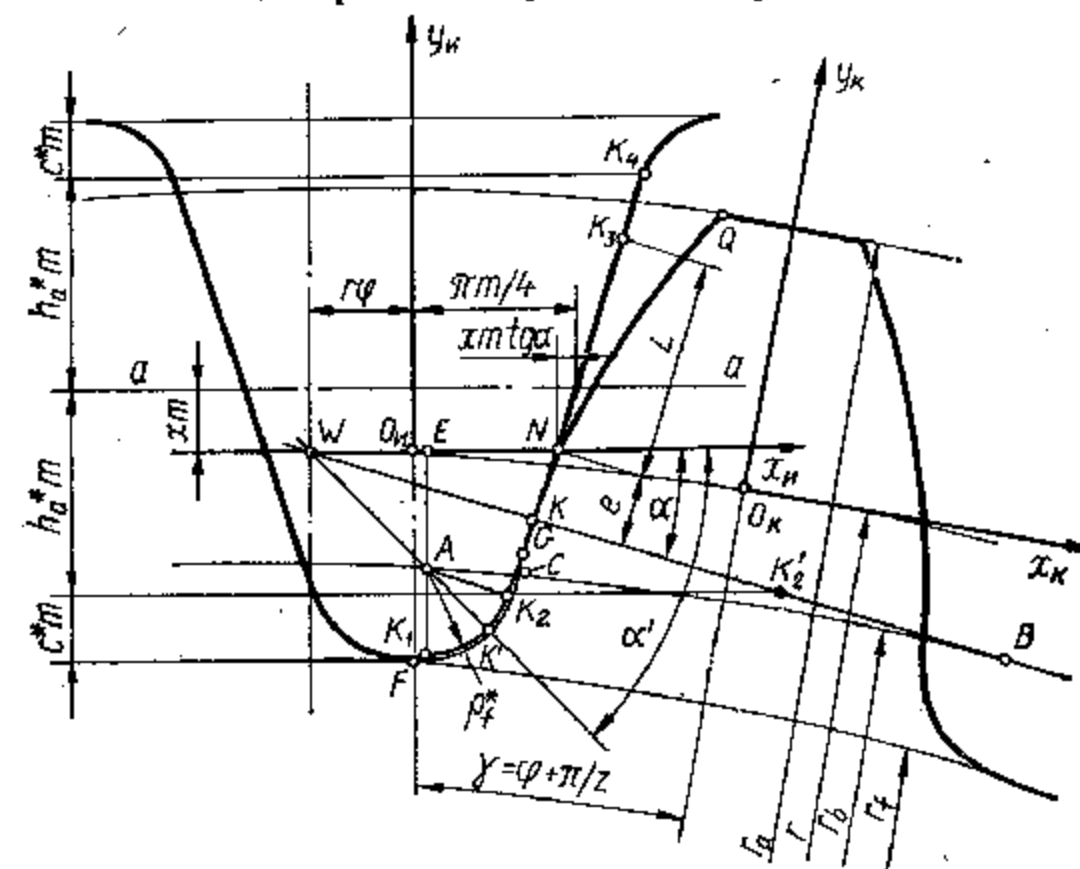


Рис. 10.16. Определение координат точек профиля зубьев

Рассмотрим формирование зубьев колеса при относительном расположении рейки, характеризуемом смещением xm . С зубом производящей рейки (инструмента) свяжем систему координат T_x таким образом, чтобы ось x_k совпала с ее центроидой в относительном движении, а ось y_k — с осью симметрии ее зуба. Тогда в этой системе координат уравнение линии K_1K_2 режущих кромок, очерченной по дуге окружности радиуса ρ_f^*m , в параметрической форме будет

$$\begin{aligned} x_k &= x_A + \rho_f^*m \cos \alpha'; \\ y_k &= y_A - \rho_f^*m \sin \alpha', \end{aligned} \quad (10.7)$$

для прямолинейного участка K_2K_3

$$\begin{aligned}x_n &= \pi m/4 - xm \operatorname{tg} \alpha + e \sin \alpha; \\y_n &= e \cos \alpha,\end{aligned}\quad (10.8)$$

где x_A, y_A — координаты центра кривизны A участка K_1K_2 ; α' — угол между осью x_n и линией AK' , проходящей через полюс W .

Координаты центра кривизны закругленного участка зуба рейки

$$\begin{aligned}x_A &= m(\pi/4 - h_a^* \operatorname{tg} \alpha - \rho_f^* \cos \alpha); \\y_A &= -m(h_a^* - x) + \rho_f^* m \sin \alpha.\end{aligned}\quad (10.9)$$

Изменяя параметр α' от α до $\pi/2$, получим координаты любой точки участка K_1K_2 , а изменяя параметр e от L до $-m(h_a^* - x)/\cos \alpha$ — координаты любой точки участка K_2K_3 , ограниченного точками K_2 и K_3 , контактирующей в процессе обкатки с точкой Q профиля зуба колеса.

Координаты точек нарезаемого профиля зуба колеса определим в системе координат T_K . В этой системе ось x_K совпадает с касательной к делительной окружности, а ось y_K — с осью симметрии зуба. Согласно условиям станочного зацепления углу φ поворота этой системы соответствует перемещение рейки на величину $r\varphi$. При $\varphi = 0$ оси y_n и y_K пересекаются с осью вращения колеса и ось y_n совпадает с осью симметрии впадины между зубьями, поэтому угол между осями y_n и y_K равен $\gamma = \varphi + \pi/z$. Для этого необходимо определить координаты точек контакта зуба с образующей рейкой и, воспользовавшись формулами преобразования координат, записать их в системе координат колеса. Так как общие нормали к профилям, проведенные через точки контакта, должны проходить через полюс зацепления W , то параметр α' , соответствующий точке K' контакта на участке K_1K_2 профиля образующей рейки, определим из треугольника WAE

$$\alpha' = \operatorname{arctg}(-y_A/(x_A + r\varphi)). \quad (10.10)$$

Параметр e , соответствующий контактной точке K на участке K_2K_3 , определим из треугольника WNK :

$$e = WN \sin \alpha = (WO_n + O_n N) \sin \alpha = (r\varphi + \pi m/4 - xm \operatorname{tg} \alpha) \sin \alpha. \quad (10.11)$$

Координаты точек профиля зуба в системе координат колеса определяются матричным уравнением

$$r_K = Mr_n, \quad (10.12)$$

где r_K — столбцевая матрица координат точек профиля зуба в системе координат колеса; r_n — столбцевая матрица координат контактных точек профиля образующей рейки; M — матрица преобразования координат.

Матрица преобразования координат будет

$$M = \begin{vmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & -r(\sin \gamma - \varphi \cos \gamma) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & r(\cos \gamma - 1 + \varphi \sin \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.13)$$

При $\varphi_F = -x_A/r$ из уравнения (10.12) можно найти координаты точки F профиля зуба, при $\varphi_G = -(y_A/\operatorname{tg} \alpha + x_A)/r$ — координаты граничной точки G , а при

$$\varphi_Q = (2x/z - \sqrt{1 + (4(h_a^* + x)(z + h_a^* + x))/z^2 \sin^2 \alpha + 1}) \operatorname{tg} \alpha - \pi/2z -$$

координаты точки Q .

Подставляя в уравнение (10.12) значения x_n и y_n из выражения (10.7) при $\varphi \in [\varphi_F; \varphi_G]$, получим координаты точек на переходной кривой FG . Подставляя значения x_n и y_n из выражения (10.8) при $\varphi \in [\varphi_G; \varphi_Q]$, получим координаты эвольвентной части профиля GQ .

Тангенс угла профиля в точке G

$$\operatorname{tg} \alpha_G = K_2B/OB = (WB - WK_2)/OB = \operatorname{tg} \alpha - WK_2/OB. \quad (10.14)$$

Так как $OB = r_b = (zm/2) \cos \alpha$ и

$$WK_2 = (h_a^* - x)m/\sin \alpha, \quad (10.15)$$

$$\text{то} \quad \operatorname{tg} \alpha_G = \operatorname{tg} \alpha - 4(h_a^* - x)/z \sin 2\alpha. \quad (10.16)$$

Определение координат точек профиля осуществляется операторной функцией

$$\operatorname{PROFZ}(z, N, m, \alpha, h_a^*, \rho_f^*, x; x_K, y_K), \quad (10.17)$$

где N — число точек профиля, которое требуется вычислить.

10.11. Определение геометрических размеров колес

В станочном зацеплении центроиды зубчатой рейки и нарезаемого колеса с z зубьями перекатываются друг по другу без скольжения, поэтому шаг P исходного производящего реечного контура должен разместиться по длине центроиды колеса z раз. Эту центриду, называемую делительной окружностью, принимают в качестве базовой для определения размеров зубчатых колес. Очевидно, что $\pi d = zP = \pi mz$, откуда диаметр делительной окружности

$$d = mz. \quad (10.18)$$

Диаметр основной окружности определяется углом профиля исходного производящего реечного контура $\alpha = 20^\circ$ в соответствии с формулой (10.4):

$$d_b = d \cos \alpha = mz \cos \alpha. \quad (10.19)$$

Так как у исходной производящей рейки шаг по любой прямой, параллельной делительной, одинаков, то в качестве центроиды в относительном движении принимают любую прямую, параллельную делительной. Относительное положение производящего контура рейки и колеса в станочном зацеплении определяется расстоянием делительной прямой рейки до делительной окружности. Это расстояние называется **смещением производящего контура рейки**. Если делительная прямая производящего контура не пересекает и не

касается делительной окружности (положение 1 на рис. 10.17), то смещение считается *положительным*, если касается (положение 2), то смещение считается равным нулю и называется *номинальным*. Если делительная прямая пересекает делительную окружность (положение 3), то смещение считается *отрицательным*. Смещение рейки определяется в долях модуля коэффициентом смещения x , который может быть соответственно положительным, равным нулю, и отрицательным.

В момент окончания нарезания зубьев (рис. 10.18) окружность впадин колеса в станочном зацеплении касается вершин инструмен-

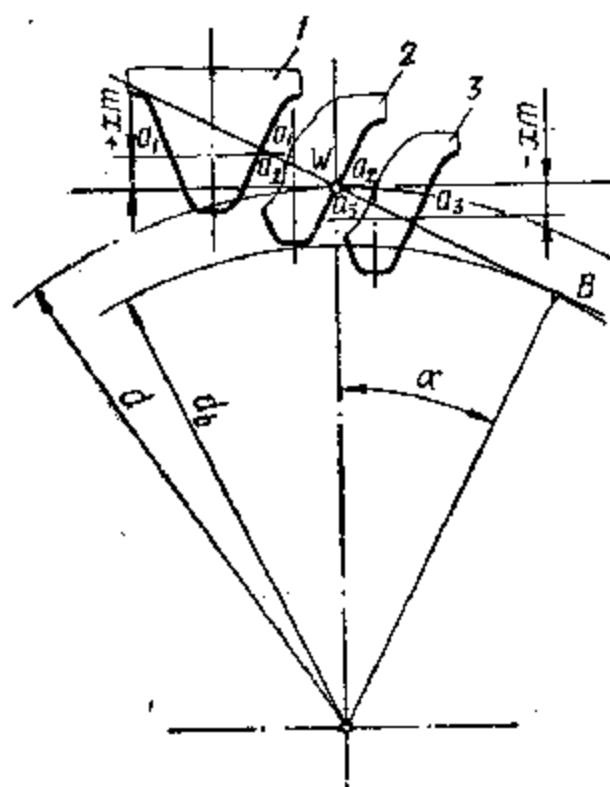


Рис. 10.17. Схема смещения исходного контура при нарезании зубьев

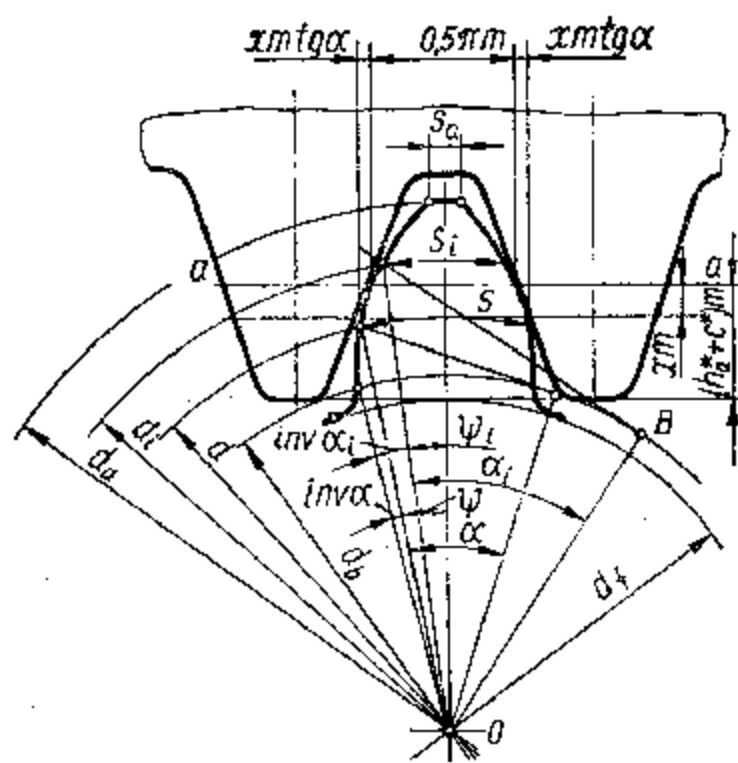


Рис. 10.18. Определение геометрических размеров зубчатого колеса

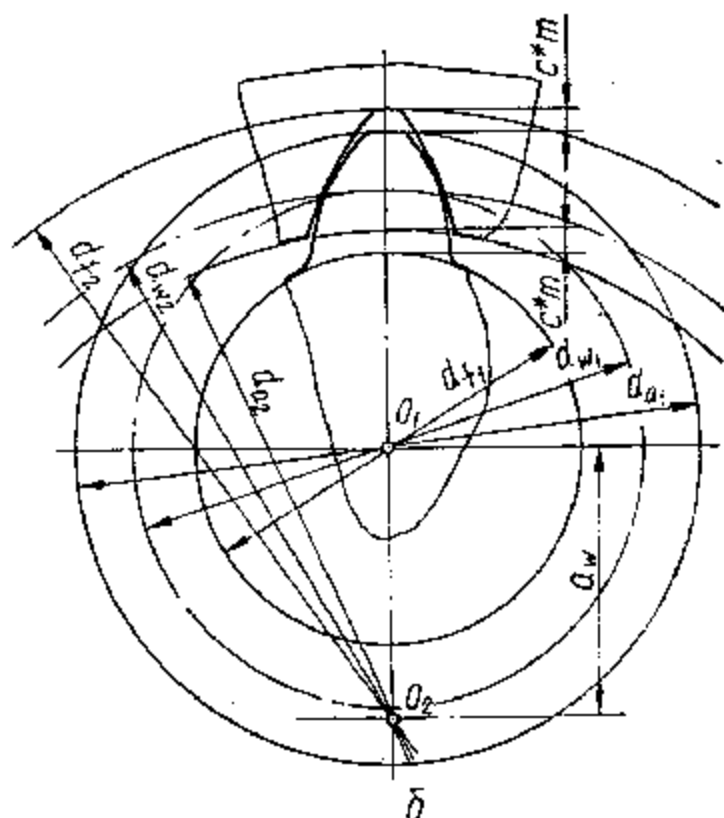
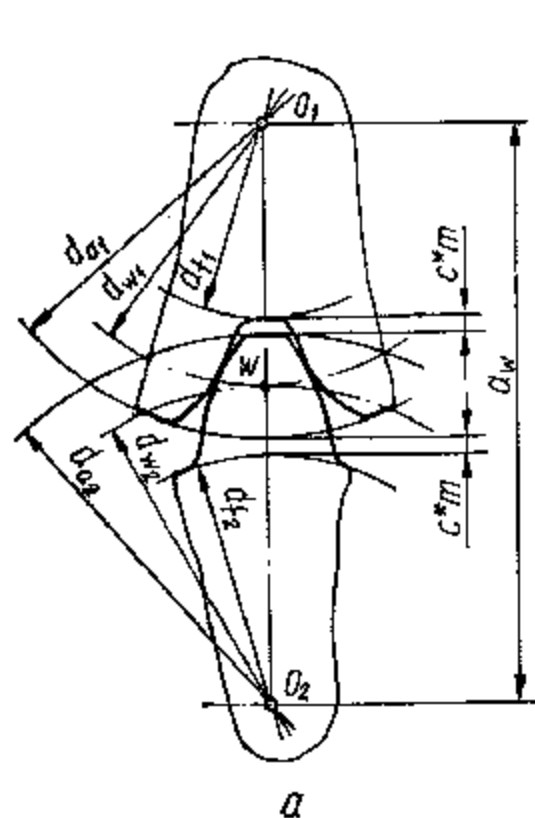


Рис. 10.19. Определение наружного диаметра зубчатых колес

та, поэтому

$$d_f = mz - 2m(h_a^* + c^* - x). \quad (10.20)$$

Толщина зуба s по дуге делительной окружности равна ширине впадины между зубьями производящей рейки по центроиде:

$$s = \pi m / 2 + 2xm \operatorname{tg} \alpha. \quad (10.21)$$

Толщина зуба по дуге окружности заданного диаметра d_i будет

$$s_i = d_i \psi_i, \quad (10.22)$$

где ψ_i — центральный угол в радианах, соответствующий половине искомой толщины.

Из рис. 10.18 следует, что

$$\psi_i = \psi + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_i. \quad (10.23)$$

Центральный угол, соответствующий половине толщины зуба по дуге делительной окружности,

$$\psi = s/d = (0.5\pi m + 2xm \operatorname{tg} \alpha)/mz = \pi/2z + (2x \operatorname{tg} \alpha)/z. \quad (10.24)$$

После соответствующих подстановок в формулу (10.22) получим

$$s_i = d_i (\pi/2z + 2x \operatorname{tg} \alpha/z + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_i). \quad (10.25)$$

Угол профиля α_i для точки эвольвенты на окружности диаметра d_i будет

$$\alpha_i = \arccos(d_b/d_i). \quad (10.26)$$

Толщина s_a зуба у его вершины определится из формулы (10.25) при подстановке в нее d_a вместо d_i и $\operatorname{inv} \alpha_a$ вместо $\operatorname{inv} \alpha_i$; угол α_a определится из формулы (10.26) при подстановке d_a вместо d_i .

Диаметр окружности вершин, выполняемый на заготовке, определяется из условия сохранения радиального зазора в зацеплении зубчатых колес (рис. 10.19) при любых коэффициентах смещения. При установленном межосевом расстоянии a_w для внешнего зацепления (рис. 10.19, а)

$$d_{a1} = 2a_w - d_{f2} - 2c^*m; \quad (10.27)$$

$$d_{a2} = 2a_w - d_{f1} - 2c^*m;$$

для внутреннего зацепления (рис. 10.19, б)

$$d_{a1} = d_{f2} - 2a_w - 2c^*m; \quad (10.28)$$

$$d_{a2} = 2a_w + d_{f1} + 2c^*m.$$

10.12. Свойства эвольвентного зацепления

Схема зацепления пары сопряженных колес представлена на рис. 10.20. Угол α_w между линией зацепления и перпендикуляром к линии, соединяющей центры колес, называется *углом зацепления*. В любом сечении колес, перпендикулярном осям, закономерности зацепления эвольвентных профилей одинаковы и, следовательно, обеспечивается условие постоянства передаточного отношения в каждом сечении. В косозубом, шевронном и криволинейном зацеплении

ввиду наклонной или кривой линии зуба контактирующие профили в соседних сечениях смещены друг относительно друга.

Так как передаточное отношение в эвольвентном зацеплении определяется отношением радиусов r_b основных окружностей взаимодействующих эвольвентных профилей, то оно не зависит от расстояния между осями вращения звеньев a_w — межосевого расстоя-

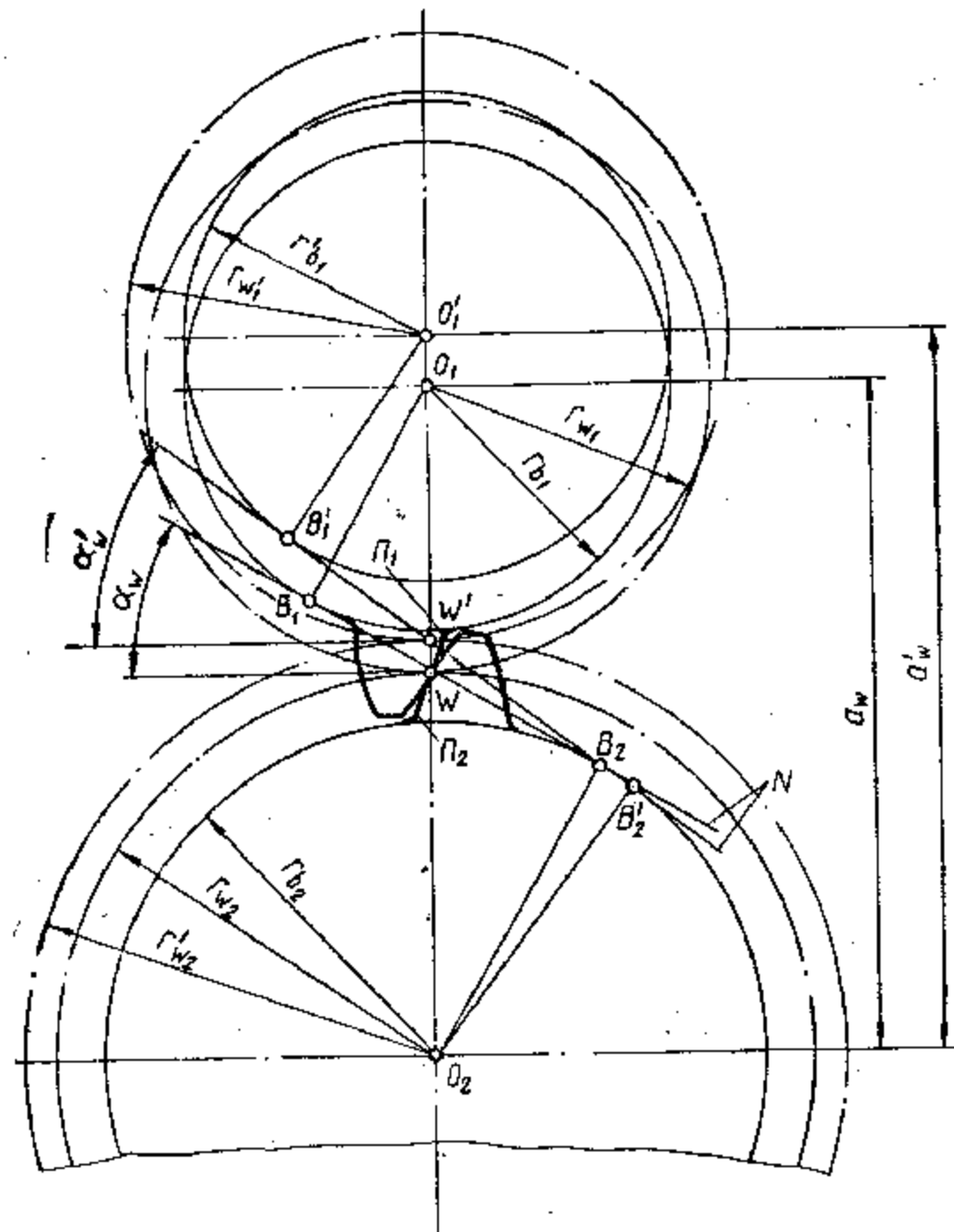


Рис. 10.20. Зацепление пары зубчатых колес

ния. Если изменить межосевое расстояние данной пары колес, дав ему новое значение a_w , то для существования кинематической пары необходимо довернуть профили Π_1 и Π_2 до контакта, в зацепление войдут другие участки эвольвент, но нормаль N все равно будет касаться окружностей радиусов r_b и r_{b2} , и как для прежнего положения центров $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = O_2W/O_1W = O_2B_2/O_1B_1 = r_{b2}/r_{b1}$, так и для нового их положения получим также $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = O_2W'/O_1W' = O_2B_2/O_1B_1 = r_{b2}/r_{b1}$.

Следовательно, передаточное отношение звеньев, имеющих эвольвентный профиль, зависит только от отношения радиусов

основных окружностей. При изменении межосевого расстояния изменяются $\angle WO_1B_1$ и $\angle WO_2B_2$. Следовательно, при $a_w \neq a_w'$ получим $\alpha_w' = \alpha_w$, так как $\angle W'O_1B_1' = \angle W'O_2B_2' = \alpha_w'$. При этом изменяются радиусы начальных окружностей r_{w1} и r_{w2} , но передаточное отношение i_{12} остается неизменным.

В реечном зацеплении изменение относительного положения колеса и рейки также не сказывается на передаточном отношении. Это свойство эвольвентного зацепления позволяет в определенных пределах снизить требования к точности изготовления элементов стойки в зубчатых механизмах.

Качественные показатели взаимодействия двух сопряженных колес определяются характеристиками зацепления — коэффициентом перекрытия, удельным скольжением, правильностью зацепления — отсутствием интерференции.

10.13. Коэффициент перекрытия

Для обеспечения непрерывности взаимодействия зубьев в зубчатом зацеплении необходимо, чтобы в момент окончания зацепления одной пары зубьев в контакте находилась хотя бы еще одна пара зубьев. На линии зацепления B_1B_2 (рис. 10.21) точка входа в зацепление пары зубьев 1 и 2 определится пересечением окружности вершин колеса 2 с линией зацепления в точке b_2 , а выхода из зацепления — пересечением окружности вершин колеса 1 с линией зацепления в точке b_1 . Углы φ_{a1} и φ_{a2} , на которые повернутся колеса с момента входа пары зубьев в зацепление до момента выхода их из зацепления, называют углами торцового перекрытия. За это время точка контакта пройдет по линии зацепления участок b_2b_1 , называемый активной линией зацепления. Еще до выхода из зацепления рассматриваемой пары профилей в действие должны вступить профили соседних зубьев. Это возможно, если угол торцового перекрытия будет больше углового шага $\tau = 2\pi/z$. Коэффициент торцового перекрытия, характеризующий это условие, определяется как отношение угла торцового перекрытия зубчатого колеса к его угловому шагу:

$$\varepsilon_\alpha = \varphi_{a1}/\tau_1 = \varphi_{a2}/\tau_2. \quad (10.29)$$

Коэффициент торцового перекрытия определяется и как отношение длины активной линии зацепления к основному шагу:

$$\varepsilon_\alpha = b_1b_2/P_b = (b_1W + Wb_2)/\pi m \cos \alpha. \quad (10.30)$$

Из треугольников $O_1B_1b_1$ и O_1B_1W , а также $\Delta O_2B_2b_2$ и ΔO_2B_2W следует, что

$$\begin{aligned} b_1W &= b_1B_1 - B_1W = r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_{a1} - r_{b1} \operatorname{tg} \alpha_w = \\ &= r_{b1} (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w); \\ Wb_2 &= B_2b_2 - WB_2 = r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_{a2} - r_{b2} \operatorname{tg} \alpha_w = \\ &= r_{b2} (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w), \end{aligned} \quad (10.31)$$

где α_{a1} и α_{a2} — углы профиля на окружности вершин — $\alpha_{a1,2} = \arccos(d_{b1,2}/d_{a1,2})$.

После подстановки в формулу (10.30) соответствующих значений из формул (10.31) и учтя, что $r_b = 0,5mz \cos \alpha$, получим

$$\varepsilon_\alpha = (z_1(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w))/2\pi. \quad (10.32)$$

В косозубой передаче (рис. 10.22) косые зубья входят в зацепление постепенно и также постепенно выходят из зацепления. В про-

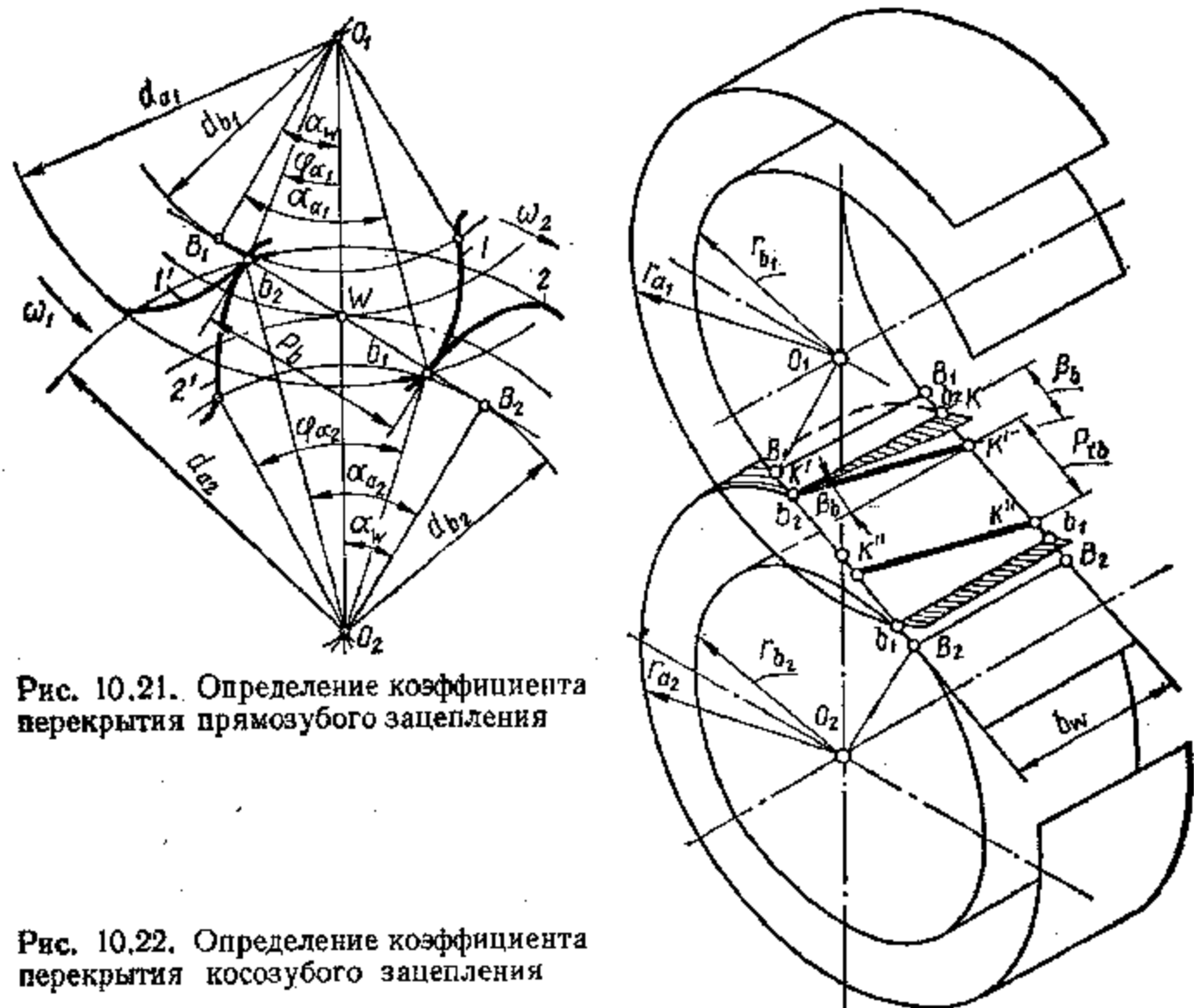


Рис. 10.21. Определение коэффициента перекрытия прямозубого зацепления

Рис. 10.22. Определение коэффициента перекрытия косозубого зацепления

цессе зацепления контактные линии $K'K'$ и $K''K''$ перемещаются по полю зацепления $b_2b_1b_1b_2$, ограниченному линиями пересечения плоскости зацепления с поверхностями вершин зубьев взаимодействующих колес. Контакт очередной пары зубьев начинается в точке K , совпадающей с точкой b_2 на одном торце, и прежде, чем возникнет контакт профилей этих зубьев в точке, совпадающей с точкой b_2 на противоположном торце, контактная точка K пройдет на поле зацепления путь $b_2K' = b_w \operatorname{tg} \beta$. Вследствие этого продолжительность зацепления данной пары зубьев характеризуется отрезком, большим расстояния b_2b_1 на величину b_2K' , и коэффициент перекрытия будет

$$\varepsilon_\gamma = (b_2b_1 + b_2K')/P_{tb}.$$

С учетом формулы (10.29) получим

$$\varepsilon_\gamma = b_2b_1/P_{tb} + b_2K'/P_{tb} = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta, \quad (10.33)$$

где ε_β — коэффициент осевого перекрытия.

Так как $P_{tb} = P_b/\cos \beta = \pi m \cos \alpha/\cos \beta$, а $\operatorname{tg} \beta_b = \operatorname{tg} \beta \cos \alpha$, то

$$\varepsilon_\beta = b_w \operatorname{tg} \beta_b/P_{tb} = b_w \sin \beta/\pi m. \quad (10.34)$$

Из формулы (10.34) следует, что чем больше угол наклона зубьев, тем больше коэффициент перекрытия, и следовательно, количество пар зубьев, одновременно участвующих в зацеплении (до 10 и больше); с увеличением коэффициента перекрытия растет плавность работы зацепления.

10.14. Удельное скольжение

Зубья зацепляющихся колес перекатываются и скользят друг по другу. Характеристикой степени скольжения является удельное скольжение λ — отношение скорости скольжения $\bar{v}_{12}$ в точке контакта K к тангенциальной составляющей этой скорости v_t (рис. 10.23, а). Скорость скольжения $\bar{v}_{12}$ профилей в точке контакта определяется как разность тангенциальных составляющих абсолютных скоростей v_{tK_1} и v_{tK_2} , а удельное скольжение для первого и второго колеса будет соответственно

$$\lambda_1 = (v_{tK_1} - v_{tK_2})/v_{tK_1} \text{ и } \lambda_2 = (v_{tK_2} - v_{tK_1})/v_{tK_2}. \quad (10.35)$$

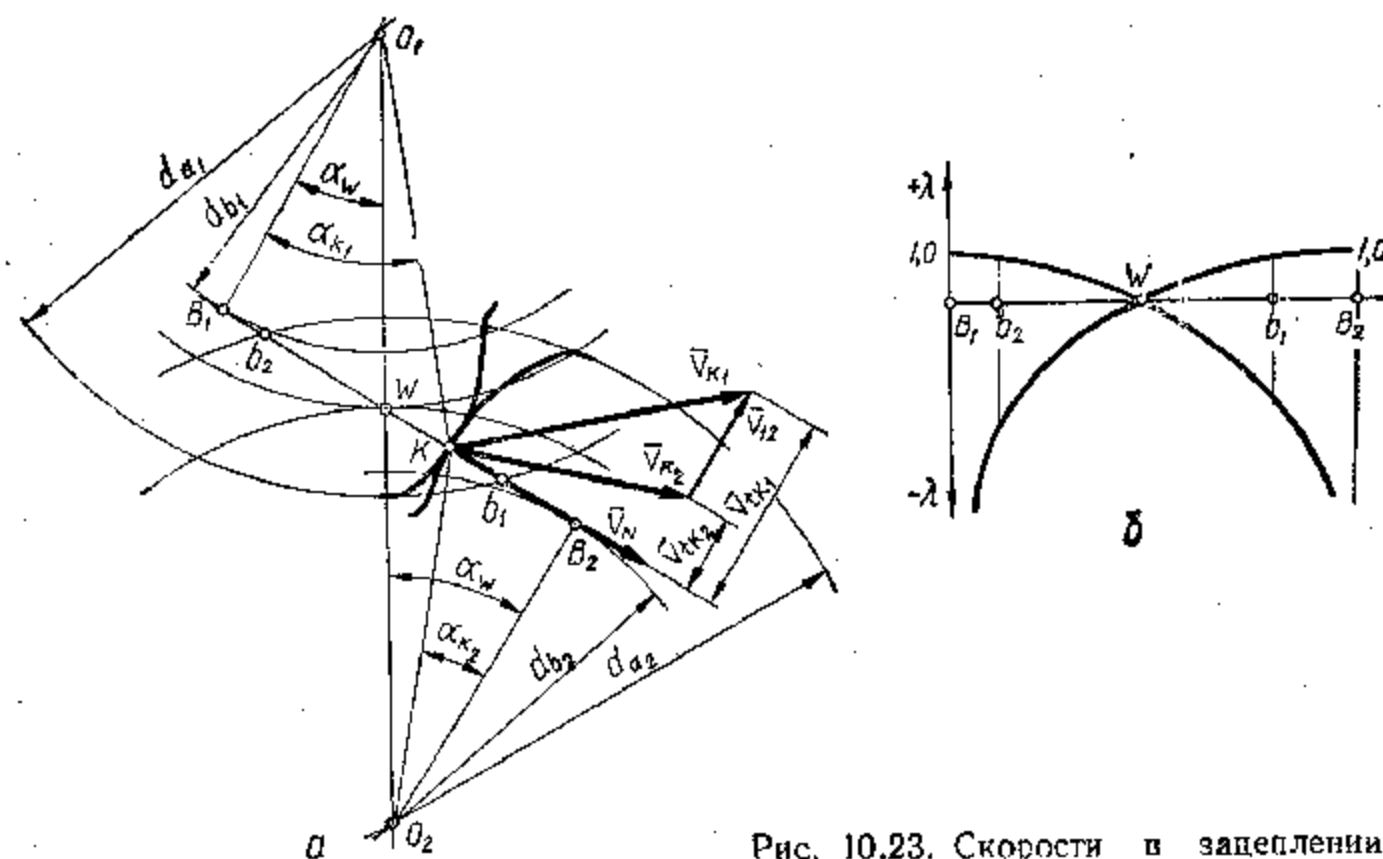


Рис. 10.23. Скорости в зацеплении

Так как в точке B_1 — $v_{tK_1} = 0$, то $\lambda_1 = -\infty$ и $\lambda_2 = 1$; в точке B_2 — $v_{tK_2} = 0$ и $\lambda_2 = -\infty$, а $\lambda_1 = 1$. В полюсе W имеем $v_{tK_1} = v_{tK_2}$ и, следовательно, $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$. Воспользовавшись этими и промежуточными значениями λ_1 и λ_2 для различных точек контакта зубьев на линии зацепления B_1B_2 , можно построить графики изменения этих величин (рис. 10.23, б). Чем больше удельное скольжение, тем сильнее возможное изнашивание профилей. Фактические

удельные скольжения ограничены значениями, соответствующими границам активной линии зацепления $b_1 b_2$. Из опыта эксплуатации следует, что удельное скольжение не должно быть больше $\lambda = |3|$.

10.15. Интерференция зубьев

Правильное зацепление зубчатых колес происходит лишь в том случае, если точка касания эвольвентных участков профиля взаимодействующих зубьев находится на линии зацепления. Поэтому должна быть устранена возможность касания этих профилей вне линии зацепления, что имеет место при *кромочном касании*, когда в работу вступают кромки зубьев (точки пересечения профилей

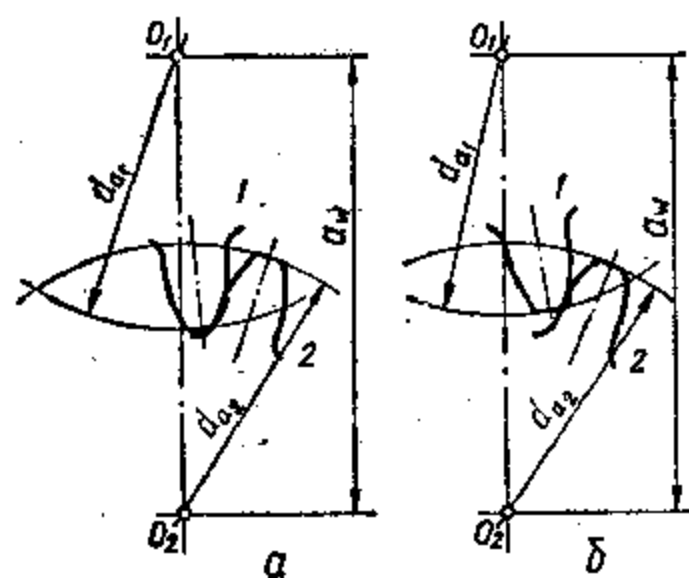


Рис. 10.24. Интерференция зубьев

зуба другого колеса. Это имеет место при работе пары зубчатых колес и обычно называется *внедрением* профилей, как и при нарезании методом обката, когда происходит *подрезание* зубьев обрабатываемого колеса.

При *профильной* интерференции (рис. 10.24, б) кромка зуба одного колеса внедряется в эвольвентную часть профиля зуба сопряженного колеса. При интерференции с *переходной кривой* (10.24, а) кромка зуба одного из зубчатых колес пересекает переходную поверхность другого зубчатого колеса. В случае нарезания зубьев методом обкатки интерференция кромки инструмента приводит к подрезанию зубьев колеса 2, а интерференция кромки зуба нарезаемого колеса с профилем инструмента приводит к срезу части профиля у головок зубьев колеса 1.

Профильная интерференция при взаимодействии зубчатых колес отсутствует, если выдержано условие (индекс 2 относится к большему колесу из пары)

$$d_{a2} \leq 2 \sqrt{a_w^2 \sin^2 \alpha_w + r_{b2}^2} \quad (10.36)$$

Интерференция с переходной кривой при взаимодействии пары зубчатых колес отсутствует, если (индекс 1 относится к меньшему

колесу из пары)

$$a_w \sin \alpha_w - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \geq r_{w1} \sin \alpha - (h_a^* + x_2) m / \sin \alpha. \quad (10.37)$$

В зацеплении с внутренними зубьями интерференция кромки зуба шестерни 1 с эвольвентной поверхностью внутренних зубьев колеса 2 возникает тогда, когда зуб шестерни вступает в кромочный контакт с этой поверхностью. При нарезании зубьев в этом случае происходит срезание их вершин зуборезным инструментом. Чтобы предупредить возникновение такой интерференции, необходимо соблюсти условие

$$d_{a2} \leq 2 \sqrt{(a_w \sin \alpha_w + \rho_{a1})^2 + r_{b2}^2}, \quad (10.38)$$

где ρ_{a1} — радиус кривизны профиля зуба шестерни по окружности граничных точек (см. рис. 10.16).

Иногда с этой же целью допускается изменение диаметра d_2 вершин зубьев колеса 2.

10.16. Влияние смещения на характеристики зацепления

На геометрию и качественные показатели зубчатого зацепления влияет положение режущего инструмента относительно заготовки при окончании процесса нарезания зубьев. От коэффициентов смещения, определяющих это положение, зависят коэффициент перекрытия, толщина зубьев у основания и вершины, радиусы кривизны рабочих участков профиля, наличие или отсутствие подрезания, т. е. факторы, влияющие на прочность зубьев. Выбором сочетаний коэффициентов смещения можно влиять на скорости скольжения и на удельные скольжения, т. е. на факторы, определяющие износостойкость.

При нарезании колес с малым числом зубьев для исключения возможного утонения зуба у основания применяют *положительное смещение* инструмента ($x > 0$). Увеличение коэффициентов смещения повышает прочность зубьев, но в то же время ведет к снижению коэффициента перекрытия и уменьшению толщины зубьев у вершины. Уменьшение толщины зуба до нуля называется *заострением* зуба. Предельный максимальный коэффициент смещения x , ограниченный условием $s_{a \min} = 0,2m$, определится из выражения (10.25)

$$d_a (\pi/2z + 2x \operatorname{tg} \alpha/z + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_a) \geq 0. \quad (10.39)$$

Предельный минимальный коэффициент смещения определится условием предотвращения *подреза* зуба. С уменьшением коэффициента x и числа зубьев z граничная точка G (рис. 10.16) стремится к предельной точке C эвольвенты. Для каждого числа зубьев z существует такой минимальный коэффициент смещения $x_{\min}$, при котором точка G совпадает с точкой C. В этом случае угол α_0 в формуле (10.16) должен быть равен нулю. Подставляя в эту формулу $\alpha_0 = 0$, получим

$$z \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = 4(h_a^* - x) = 2z \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$x_{\min} = h_a^* - (z \sin^2 \alpha)/2. \quad (10.40)$$

На рис. 10.25 показаны профили зубьев колеса с одним и тем же числом z , нарезанные с разными коэффициентами смещения. Эвольвентные участки профилей при различных смещениях являются эвольвентой одной и той же окружности. При коэффициенте смещения $x > x_{\min}$ граничная точка G выше предельной точки C , и переходная кривая и эвольвентный профиль зуба сопрягаются плавно без пересечения. Предельным случаем будет смещение, при кото-

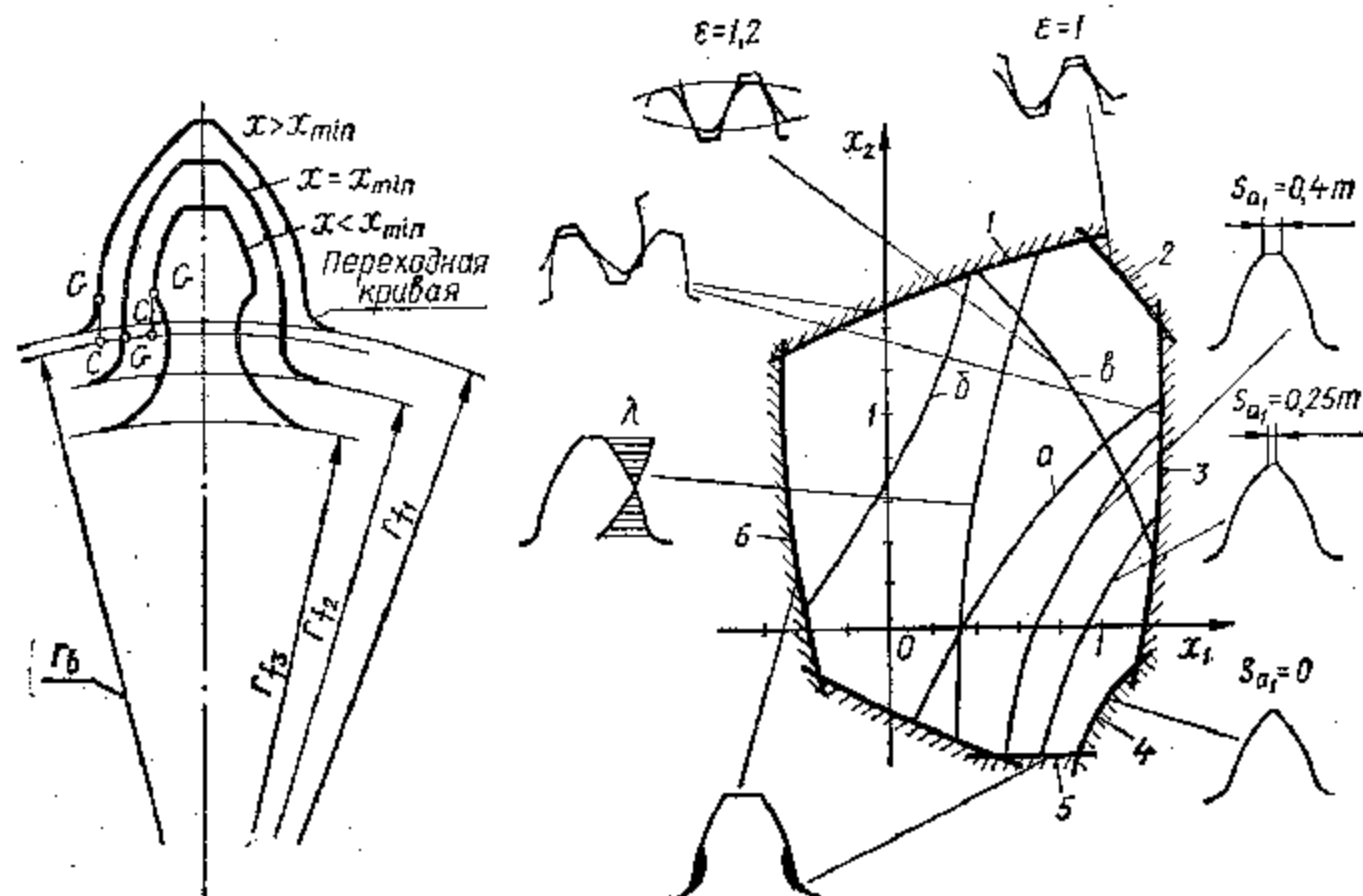


Рис. 10.25. Влияние смещения на профиль зубьев

ром точка G совпадает с предельной точкой C эвольвенты ($x = x_{\min}$). При дальнейшем уменьшении смещения ($x < x_{\min}$) переходная кривая и эвольвентный профиль зуба сопрягаются не плавно, а с пересечением, так как внутри основной окружности эвольвента не существует. Такое явление называется подрезом зуба, который нежелателен, так как значительно снижает его прочность. Если решить уравнение (10.40) относительно z , то получим наименьшее число зубьев, которое при данном коэффициенте смещения получают без подрезания

$$z_{\min} = 2(h_a^* - x)/\sin^2 \alpha. \quad (10.41)$$

Для стандартного инструмента, положив в этой формуле $h_a^* = 1$ и $\alpha = 20^\circ$, минимальное число зубьев, которое можно нарезать без подрезания зуба, при $x = 0$ будет $z = 17$.

Как указывалось выше, ограничения для значений коэффициентов x является не только подрезание зубьев. Поэтому задача выбора коэффициентов смещения для зубчатого зацепления реша-

ется как задача оптимизации двух параметров x_1 и x_2 при нескольких критериях в зависимости от конкретных требований к проектируемому зубчатому зацеплению. В этом случае область допустимых решений представляет собой плоскость, на которой в системе координат x_1 и x_2 (рис. 10.26) нанесены ограничения при выборе коэффициентов смещений: отсутствие подрезания и заострения зубьев, минимальные допустимые коэффициенты перекрытия и т. д. Эта область для определенного сочетания зубьев z_1 и z_2 называется *блокирующим контуром*. Граничные линии блокирующего контура относятся к предельным значениям параметров зацепления: 1 — граница интерференции на ножке зуба второго колеса; 2 — линия минимально допустимого коэффициента перекрытия; 3 — граница интерференции на ножке зуба первого колеса; 4 — граница заострения зуба на первом колесе; 5 и 6 — линии, определяющие подрезание эвольвентного профиля зацепляющихся зубьев. Для оптимального подбора коэффициентов смещений внутри блокирующего контура изображены линии, соответствующие наилучшим значениям качественных показателей зацепления: a — определяющие равную прочность зубьев обоих колес на изгиб при ведущем колесе 1; b — то же, при ведущем колесе 2; v — рекомендуемое значение коэффициента перекрытия $v = 1,2$.

10.17. Определение межосевого расстояния пары сопряженных колес

Межосевое расстояние в зубчатом механизме, составленном из двух зацепляющихся колес, определяется при *безазорном зацеплении*, когда колеса так собраны, что зуб одного колеса вводится во впадину другого до полного контакта с обеих сторон. Так как центроидами в относительном движении двух зубчатых колес являются начальные окружности, то при безазорном зацеплении толщина зуба s_{w1} одного колеса, измеренная по дуге начальной окружности диаметром d_{w1} , будет равна ширине впадины e_{w2} по дуге окружности диаметром d_{w2} (рис. 10.27, а), а также $s_{w2} = e_{w1}$. Толщина зубьев по начальным окружностям из формулы (10.25) с учетом, что $d_w = P_w z/\pi$,

$$\begin{aligned} s_{w1} &= P_{w1} (\pi/2 + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha + z_1 (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_w)); \\ s_{w2} &= P_{w2} (\pi/2 + 2x_2 \operatorname{tg} \alpha + z_2 (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_w)). \end{aligned} \quad (10.42)$$

Так как шаг зубьев обоих зубчатых колес по дугам начальных окружностей одинаков: $P_{w1} = P_{w2} = s_{w1} + e_{w2} = s_{w2} + e_{w1} = s_{w1} + s_{w2}$, то, из формул (10.42) для угла зацепления получим

$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2(x_1 + x_2) \operatorname{tg} \alpha / (z_1 + z_2) + \operatorname{inv} \alpha. \quad (10.43)$$

Значение угла α_w получается при использовании операторной функции $INVAL(z_1, z_2, x_1, x_2, \alpha; \alpha_w)$, реализующей итерационный процесс решения уравнения $\operatorname{tg} \alpha_w - \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha_w$.

Из $\triangle O_1 B_1 W$ и $\triangle O_2 B_2 W$ получим межосевое расстояние

$$a_w = O_1 W + W O_2 = O_1 B_1 / \cos \alpha_w + O_2 B_2 / \cos \alpha_w =$$

$$= mz_1 \cos \alpha / (2 \cos \alpha_w) + mz_2 \cos \alpha / (2 \cos \alpha_w) = \\ = (m(z_1 + z_2) \cos \alpha) / (2 \cos \alpha_w). \quad (10.44)$$

Для передачи с внутренним зацеплением (рис. 10.27, б) аналогично формулам (10.43) и (10.44) получим

$$\text{inv } \alpha_w = (2(x_2 - x_1) \tan \alpha) / (z_2 - z_1) + \text{inv } \alpha; \\ a_w = (m(z_2 - z_1) \cos \alpha) / (2 \cos \alpha_w).$$

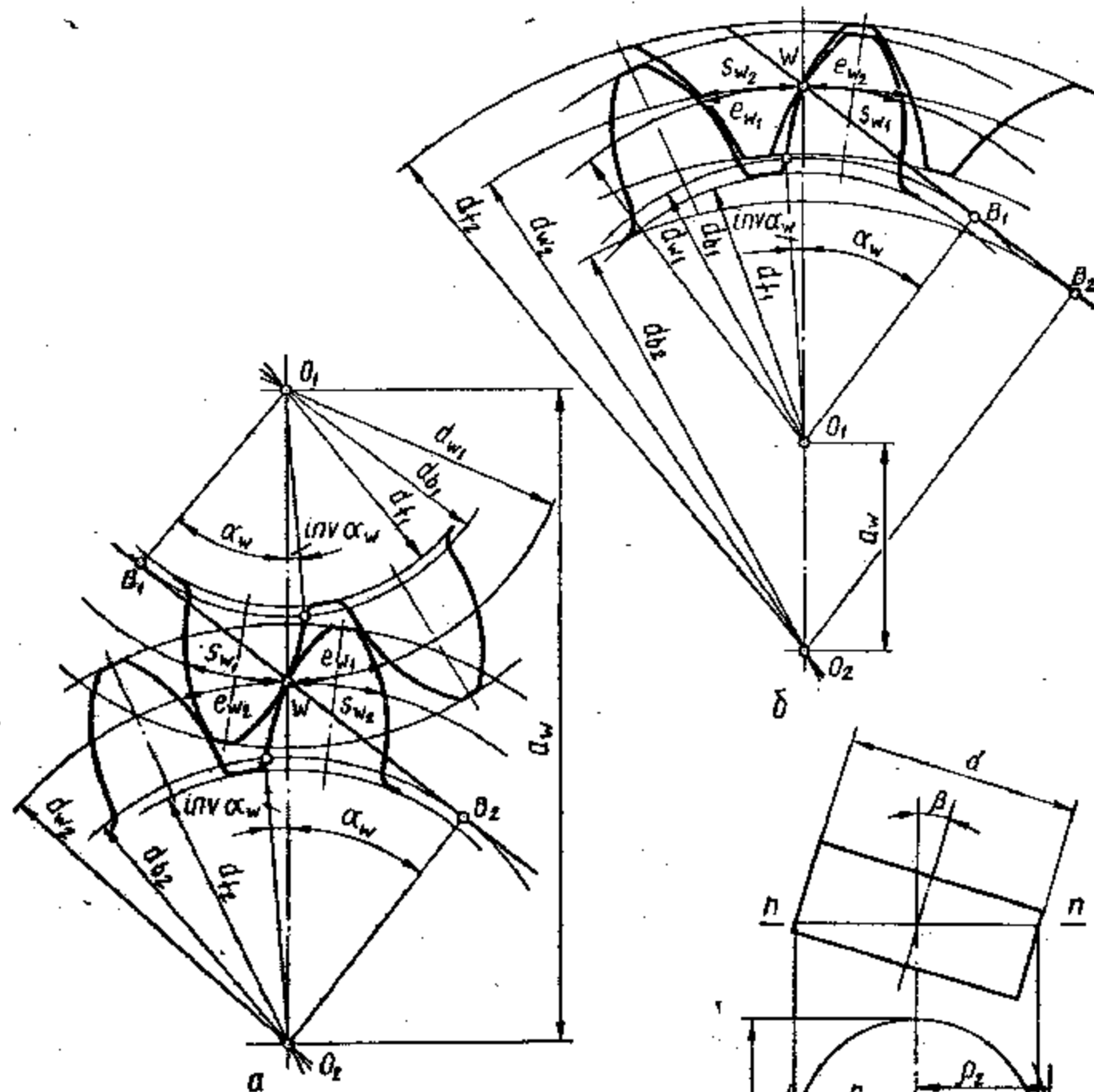


Рис. 10.27. Определение межосевого расстояния зубчатой передачи

Рис. 10.28. Эквивалентные колеса

При расчетах геометрии косозубых колес можно без изменений использовать формулы для прямозубых колес, подставляя в них параметры исходного контура в торцовом сечении. Геометрические параметры в нормальном сечении косозубого колеса характеризу-

ются параметрами зубьев эквивалентных прямозубых колес. В этом сечении получаем эллипс (рис. 10.28), у которого полуоси $\rho_1 = 0,5d$ и $\rho_2 = 0,5d/\cos \beta$. Как известно, радиус кривизны эллипса в точке, лежащей на делительной окружности, будет $r_0 = \rho_2^2/\rho_1 = d/(2\cos^2 \beta)$. Если выполнить колесо диаметром $d_0 = 2r_0 = 2d/\cos^2 \beta$, то на нем разместится z_0 прямых зубьев, имеющих модуль $m = m_n = m_t \cos \beta$. Из условий $d_0 = z_0 m$ и $d = z m_t$ с учетом сказанного получим

$$z_0 = d_0/m = d/m \cos^2 \beta = z m_t/m \cos^3 \beta = z/\cos^3 \beta. \quad (10.45)$$

Так как торцовый коэффициент смещения косозубого колеса будет

$$x_t = x \cos \beta, \quad (10.46)$$

то торцовый угол зацепления согласно формуле (10.43) с учетом, что $(x_{t1} + x_{t2}) \tan \alpha_t = (x_1 + x_2) \tan \alpha$, будет

$$\text{inv } \alpha_{wt} = (2(x_1 + x_2) \tan \alpha) / (z_1 + z_2) + \text{inv } \alpha, \quad (10.47)$$

Геометрические расчеты прямозубых и косозубых цилиндрических колес производятся операторной функцией

$$GCIL(z_1, z_2, m, \beta, h_a^*, c^*, \alpha, \rho_f^*, x_1, x_2, k; d_1, d_2, d_{b1}, d_{b2}, d_{f1}, d_{f2}, \\ a_w, d_{a1}, d_{a2}),$$

где $k = 1, 2$ — индексы, соответствующие внутреннему или внешнему зацеплению.

11. СИНТЕЗ ТОЧЕЧНЫХ КРУТОВИНТОВЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

11.1. Профилирование зубьев с точечным контактом

В эвольвентном зацеплении взаимодействие рабочих поверхностей зубьев происходит по прямой линии. Поэтому при неточности взаимного расположения колес или их деформации под нагрузкой плотность контакта зубьев становится неравномерной, что приводит к концентрации давлений на определенных участках контактных линий. Кроме того, радиусы кривизны рабочих поверхностей зубьев, которые определяют нагрузочную способность зубчатого механизма, зависят от диаметра основного цилиндра колеса: чтобы увеличить радиусы кривизны, нужно увеличивать диаметры колес. Для того, чтобы избежать указанных недостатков, применяют зацепление с теоретически точечным контактом взаимодействующих зубьев, который за счет придания зубьям соответствующей формы под нагрузкой превращается в контакт по площадке.

Для точечных систем зацепления используется множество различных пар сопряженных поверхностей, профили зубьев образуются различными плавными кривыми (циклоидальными, эвольвентными, эллиптическими и др.). В частности, очертание профилей зубьев выполняется по дуге окружности в торцовом или нормальном сечении зубьев. В таких зацеплениях заданная передаточная

функция обеспечивается соблюдением основного закона зацепления лишь в определенном сечении, поэтому в нем возможен только мгновенный контакт зубьев. При повороте колес условие постоянства передаточного числа обеспечивается в каждое мгновение контактом зубьев в новом поперечном сечении. Таким образом, теоретическая точка контакта за время зацепления данной пары зубьев перемещается от одного торца к противоположному.

11.2. Принцип образования зацепления с точечным контактом

Представление об образовании точечного зацепления может дать преобразованное *косозубое эвольвентное зацепление*. Предположим, что в торцовом сечении пары косозубых эвольвентных колес (рис. 11.1) профили зацепляющихся зубьев выше и ниже точки K контакта смещены в тело зубьев. Вследствие этого толщина зуба искаженной формы на всех радиусах, за исключением того, где рас-

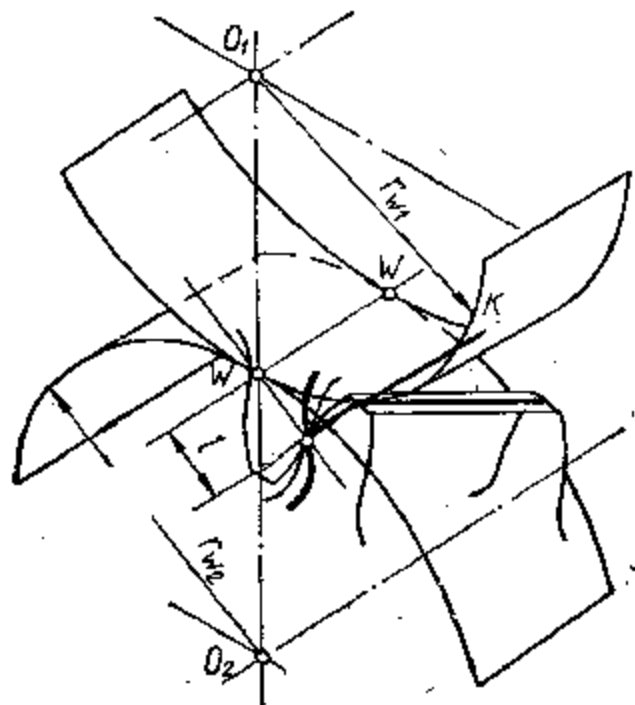


Рис. 11.1. Образование точечного зацепления

положена точка контакта, станет меньше толщины эвольвентного зуба правильной формы. Если такое искажение профиля выполнить по всей длине зуба, то при повороте ведущего зубчатого колеса на некоторый угол контакт между зубьями возникает в новом сечении. Во всех других сечениях вдоль образующих колес из-за преднамеренного искажения профилей контакта зубьев не будет. При дальнейшем вращении ведущего колеса точка контакта зацепляющихся зубьев перемещается вдоль осей от одного торцового сечения пары сопряженных колес к противоположному.

В этом искаженном эвольвентном косозубом зацеплении имеет место *точечный контакт*, линия зацепления KK будет параллельна осям колес передачи и расположена на расстоянии l от полюсной

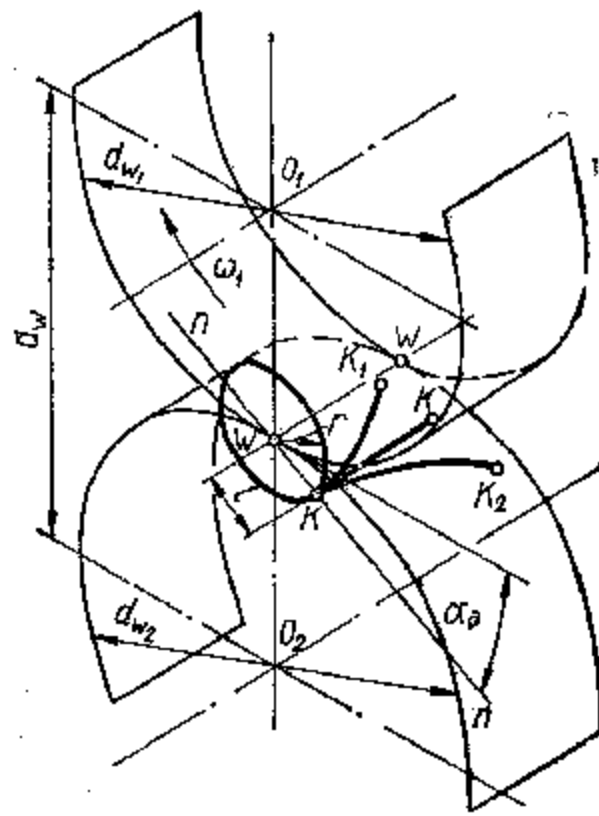


Рис. 11.2. Образование круговинтовых зубьев

линии WW . Постоянство передаточного отношения в таком зацеплении будет обеспечено, потому что основная теорема зацепления в *каждое мгновение* будет соблюдаться в новой плоскости контакта зубьев. Если подобное изменение профилей произвести на прямозубом колесе, то постоянство передаточного отношения нарушится, так как при малейшем повороте ведущего колеса в контакт вступят участки искаженной части профиля, что приведет к нарушению основного закона зацепления. Следовательно, точечное зацепление подобного вида возможно лишь с косозубыми колесами.

Для обеспечения возможности передачи значительных нагрузок необходимо при исходном точечном контакте зубьев создать условие распространения точечного контакта под нагрузкой на значительную площадку. Это достижимо, если контактировать будут не выпуклые профили зубьев (разные знаки радиусов кривизны), а выпуклые с вогнутыми (радиусы кривизны будут одинаковых знаков) в близких радиусах кривизны.

11.3. Образование зубьев круговинтового зацепления

В качестве сопряженных поверхностей зубьев, удовлетворяющих указанным условиям, целесообразно использовать поверхности, для которых технология их получения известными способами на существующем станочном оборудовании наиболее проста. К числу удовлетворяющих этим требованиям относятся прежде всего винтовые поверхности зубьев с постоянным или переменным углом закручивания винтовой линии. Линии поперечного сечения таких поверхностей с нормальной (к направлению зуба) или торцовой плоскостью являются дугами окружностей. Такие поверхности, называемые *круговыми винтовыми поверхностями*, и получили широкое распространение в качестве рабочих поверхностей зубьев.

Представим, что два начальных цилиндра диаметрами d_{w1} и d_{w2} (рис. 11.2) перекатываются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 без скольжения, обеспечивая постоянное передаточное отношение i_{12} при заданном межосевом расстоянии a_w . Выберем на линии nn , расположенной под углом $90^\circ - \alpha_d$ к линии центров O_1O_2 на расстоянии l от полюса W , точку K и проведем через нее параллельно осям колес линию зацепления KK . Примем скорость перемещения точки контакта зубьев вдоль линии зацепления постоянной. Тогда при постоянной скорости вращения начальных цилиндров точка контакта K опишет на вращающихся системах, связанных с начальными цилиндрами, винтовые линии KK_1 и KK_2 .

Возьмем в качестве образующей фигуры окружность радиуса $r = l$, расположенную на плоскости, перпендикулярной осям колес. Переместим эту окружность вдоль осей дважды так, чтобы постоянная точка образующей окружности, совпадающая с точкой контакта зубьев K , один раз перемещалась вдоль винтовой линии KK_1 , второй раз — вдоль линии K_1K_2 . Следы этой окружности образуют винтовые цилиндры. Часть одного винтового цилиндра, выступающая за пределы начального цилиндра шестерни, используется

как винтовой зуб шестерни, а часть второго винтового цилиндра, расположенная внутри начального цилиндра колеса, представляет собой впадину между зубьями колеса. Если такие выступы и впадины расположить по начальным цилиндрам на расстоянии шага, то вращение колесу от шестерни будет передаваться давлением выпуклого зуба на поверхность вогнутого зуба колеса, а контакт зубьев будет перемещаться вдоль колес.

В торцовом сечении описанного зацепления зубья имеют круговую форму, и контакт их будет происходить по дуге окружности. Это является существенным недостатком, так как на правильность контакта зубьев большое влияние будут оказывать погрешности механизма. При относительном смещении осей контакт зубьев будет локализоваться у вершины и ножки зубьев, т. е. он становится кромочным.

11.4. Образование зубчатого механизма с одной линией зацепления

Для устранения указанного недостатка поверхности зубьев образуются двумя окружностями различных радиусов, соприкасающимися в одной точке K на линии nn . Для очерчивания зубьев шестерни используют окружность радиуса $p_1 = l$ с центром в полюсе за-

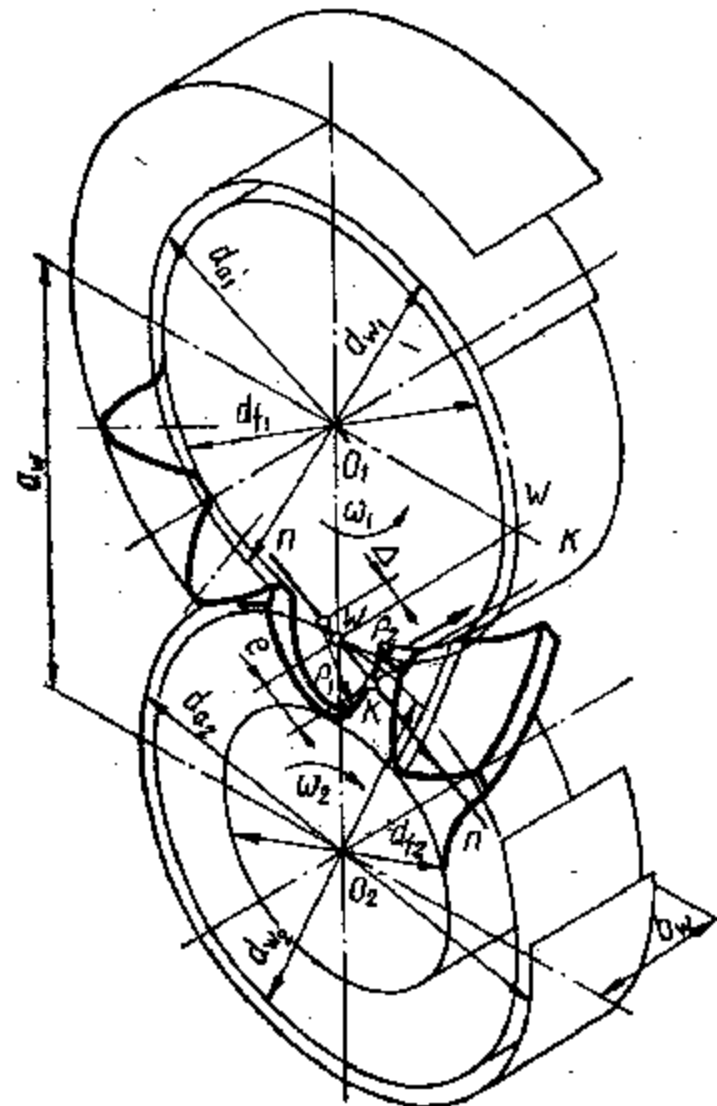


Рис. 11.3. Зубчатый механизм с одной линией зацепления

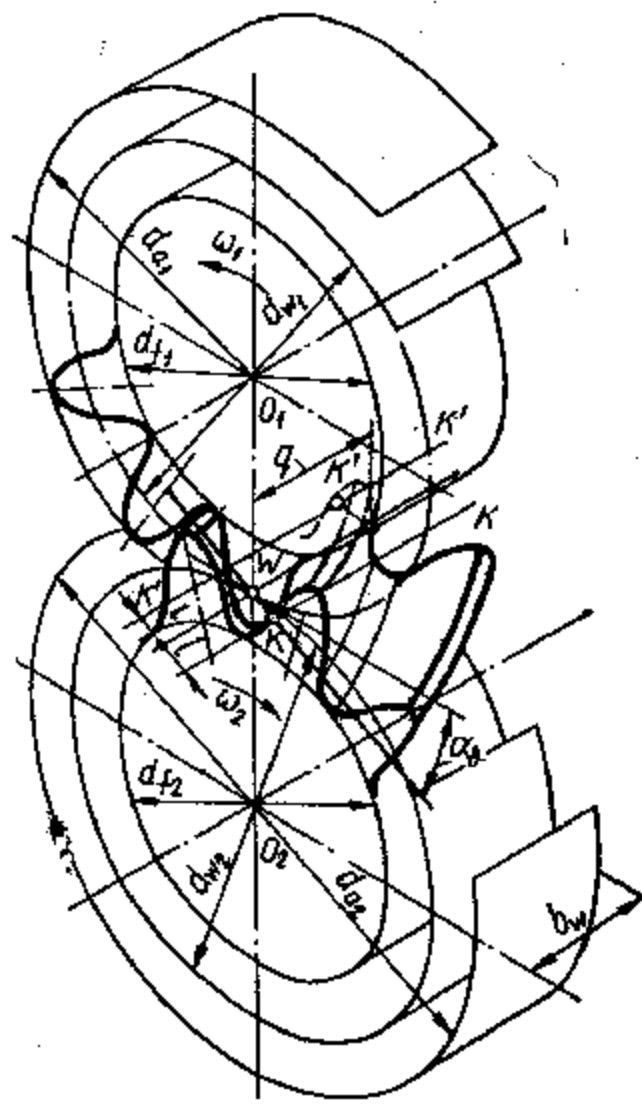


Рис. 11.4. Зубчатый механизм с двумя линиями зацепления

цепления W (рис. 11.3), для колеса — окружность радиуса $p_2 = l + \Delta$ с центром, расположенным за полюсом W на линии nn . В этом случае начальный контакт зубьев всегда будет точечным; из-за возможных погрешностей зацепления контакт будет находиться все же вблизи теоретической точки контакта K . Для выхода смазочного материала, устранения затруднений при сборке, обеспечения необходимой прочности зубья на неконтактирующих участках очерчиваются линиями, не совпадающими с контуром образующей окружности.

Рабочие поверхности зубьев начинают взаимодействовать в точке K , расположенной на одном торце зубчатых колес. При вращении зубчатых колес точка контакта K перемещается по линии зацепления KK , параллельной полюсной линии WW , являющейся линией касания начальных цилиндрических поверхностей радиусов $0,5d_w$ и $0,5d_w$, в направлении стрелки и зубья выходят из зацепления на противоположном торце. Поэтому рабочая часть линии зацепления равна ширине зацепления b_w .

Такие колеса образуют зацепление Новикова (см. прил.) с одной линией зацепления. Если зубья с выпуклым профилем располагаются на входном звене, а зубья с вогнутым — на выходном, то зацепление называется *заполюсным*, так как в нем линия зацепления находится за полюсом в направлении вращения входного звена. В другом варианте зацепления — *дополюсном* — профиль зубьев на входном звене может быть вогнутым, а на выходном — выпуклым; тогда линия зацепления будет находиться перед полюсом.

11.5. Образование зубчатого механизма с двумя линиями зацепления

С целью увеличения нагрузочной способности зацепления круговинтовые зубья на каждом колесе выполняют с головкой и ножкой. Винтовые поверхности таких зубьев образуются аналогично указанному выше с помощью окружностей, перемещающихся по винтовым линиям на начальных окружностях колес. Головки зубьев выполняют с выпуклым профилем, ножки — с вогнутым, которые связаны между собой небольшим участком, очерченным переходной кривой (рис. 11.4). В таком зацеплении контактирование зубьев происходит одновременно на головке и ножке зубьев каждого колеса пары. Благодаря этому увеличивается количество одновременно контактирующих зубьев. Точки контакта K и K' на головках и ножках зубьев сдвинуты друг относительно друга на некоторое расстояние q , зависящее от угла наклона зубьев β и угла давления α_d . В этом механизме образуются две линии зацепления. Одна линия $K'K'$ находится перед полюсом, другая KK — за полюсом. Каждая линия образуется перемещением общей точки контакта начальной ножки зуба одного зубчатого колеса с начальной головкой зуба парного зубчатого колеса. Этот вариант зацепления Новикова с двумя линиями зацепления называется *дозаполюсным*.

11.6. Исходные контуры и нарезание зубьев на заготовке колеса

Геометрия зубьев зацепления Новикова определяется исходным контуром зацепления. Параметры элементов исходных контуров, радиусы кривизны и другие размеры зубьев выбираются в таких соотношениях, чтобы обеспечить наивыгоднейшие условия работы зацепления и надлежащую прочность зубьев. Для цилиндрических

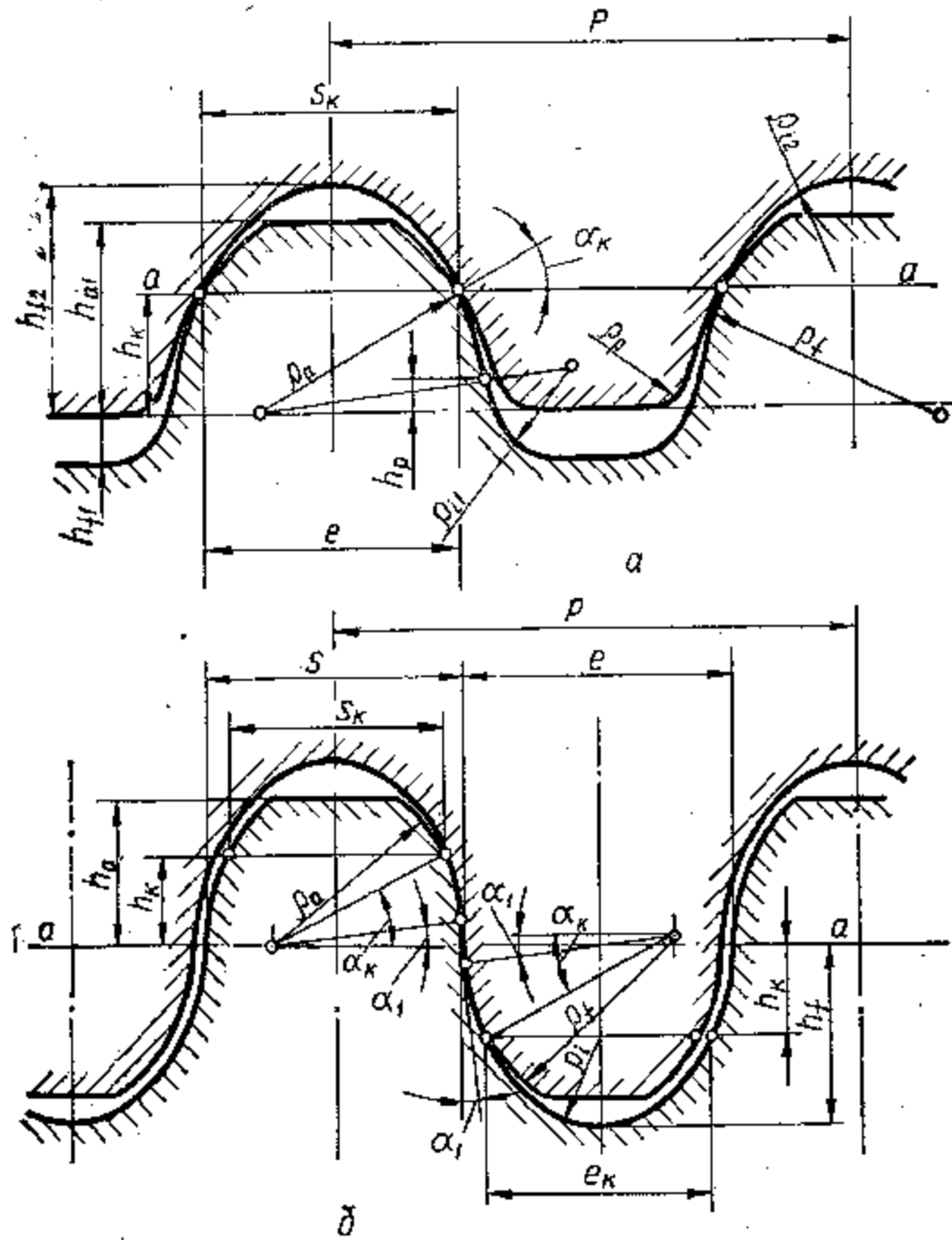


Рис. 11.5. Исходный контур зацепления Новикова

зубчатых колес Новикова исходным контуром является контур зубьев номинальной зубчатой рейки в нормальном сечении. Для зацепления Новикова с одной линией зацепления (рис. 11.5, а) необходимы два исходных контура: один — для выпуклых, другой — для вогнутых зубьев. Боковые стороны контура очерчены дугами окружности. Исходные контуры выпуклого и вогнутого профилей (контур зубьев рейки) по делительной прямой a — a образуют плотное сопряжение. Необходимый боковой зазор в зацеплении достигается за счет утонения выпуклого зуба.

Параметры исходного контура зацеплений Новикова с двумя линиями зацепления (рис. 11.5, б) регламентированы ГОСТ 15023—76. По этому стандарту дуги, образующие выпуклую и вогнутую части зуба, сопрягаются между собой небольшим прямолинейным участком. Как и в исходном контуре с одной линией зацепления, профили зубьев в нормальном сечении очерчены дугами окружности.

Геометрические параметры определяются через нормальный модуль m_n . Модули выбирают в соответствии со значениями, установленными в ГОСТ 14186—69 (от 1,6 до 50 мм в первом ряду, что предпочтительнее, и от 1,8 до 56 мм — во втором). Так как в торцовом сечении профиль зуба исходного контура очерчен дугой эллипса, то зубья на колесах имеют профиль, описанный кривой, являющейся огибающей к различным положениям дуги эллипса при движении ее относительно заготовки. Исследования показали, что профили таких зубьев в торцовом сечении незначительно отличаются от окружности, они хорошо прирабатываются, вследствие чего за короткий промежуток времени в течение начального периода работы профили зубьев приобретают оптимальную форму.

Цилиндрические зубчатые колеса с зацеплением Новикова изготавливаются на станках, предназначенных для нарезания зубчатых колес с эвольвентным зацеплением. Как и эвольвентное зацепление, выпукло-вогнутое круговинтовое зацепление можно получить методом обкатки. Но так как зубья в заполюзном зацеплении на одном колесе должны быть выпуклыми, а на другом — вогнутыми, то производящих реек должно быть две: одна — с вогнутыми, другая — с выпуклыми зубьями. Нарезание зубьев на шестерню и колесо с дозаполюзным зацеплением осуществляется одним инструментом, соответствующим исходному контуру по ГОСТ 15023—76, что является одним из его преимуществ.

11.7. Свойства зацепления Новикова

В зубчатом механизме с зацеплением Новикова основной закон зацепления, в отличие от эвольвентного, как уже указывалось ранее, соблюдается лишь в одном определенном сечении. Процесс зацепления начинается на одном торце и заканчивается на противоположном. Поэтому для непрерывности вращения ведомого колеса прежде, чем точка контакта данной пары зубьев дойдет до противоположного торца, в контакт должна вступить последующая пара зубьев.

Процесс зацепления в дозаполюзной передаче (рис. 11.6) начинается на торце 1 одной ножки зуба 2₁ с головкой парного зуба 2₂, образуя точку контакта K₂. В этот момент предшествующая пара зубьев 1₁ и 1₂ имеет контакт в двух точках: K₁ головки зуба 1₁ с ножкой зуба 1₂ и ножки с головкой этих зубьев в точке K₁'. Расстояние вдоль оси колеса между точками контактов на ножках зубьев 2 — 2 и 1 — 1 равно осевому шагу $P_x = \pi m_x$ (на таком же расстоянии находятся точки контакта на головках этих зубьев). Расстояние q между точками контакта на ножке K₁' и головке K₁ данного

зуба меньше осевого шага и зависит от радиусов ρ_1 и ρ_2 окружностей, очерчивающих профили ножки и головки зубьев, угла давления α_d и угла β наклона зубьев. В этот период контакт происходит в трех точках. При дальнейшем вращении колес точка контакта K_1' зубьев 1_1 и 1_2 , перемещаясь вдоль линии зацепления, дойдет до противоположного торца 2 и контакт головки зуба 1_1 с ножкой зуба 1_2 прекратится, но будет существовать еще в точке K_1 (ножке зуба 1_2 с головкой зуба 1_1). Затем некоторое время в контакте будут находиться зубья 1_1-1_2 и 2_1-2_2 , т. е. будут две контактные точки до того момента, пока на очередной паре зубьев 3_1-3_2 не возникает контакт, подобный контакту в точке K_1 , как указано ранее. Таким образом, в указанном случае в передаче существуют попеременно две и три контактные точки.

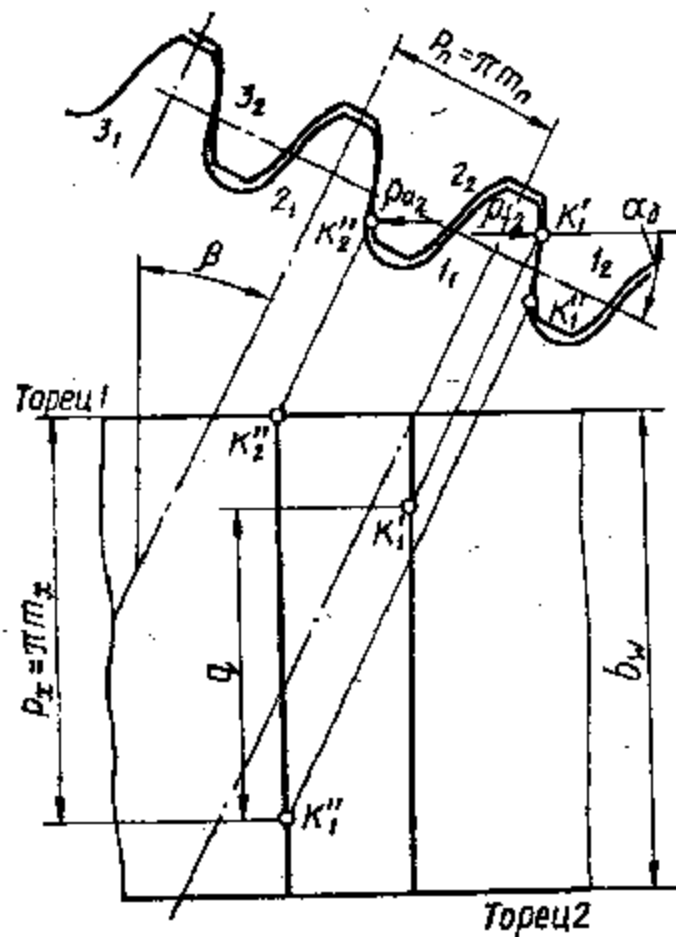


Рис. 11.6. Дозаполусное зацепление

Даже под небольшой нагрузкой точечный контакт распространяется по высоте зуба и располагается по полоске, почти перпендикулярной к направлению зуба. Благодаря большим радиусам кривизны поверхностей зубьев в плоскости, перпендикулярной к этой полоске, при действии значительных нагрузок пятно контакта распространяется вдоль зубьев, а длина его зависит от радиуса кривизны рабочих поверхностей в указанном сечении. Чем меньше угол наклона зубьев, тем больше эти радиусы.

11.8. Коэффициент перекрытия, скорости в зацеплении

Непрерывность вращения ведомого колеса обеспечивается за счет осевого перекрытия, что характеризуется коэффициентом перекрытия. В отличие от эвольвентного, в круговинтовом зацеплении имеется лишь *осевой коэффициент перекрытия*, являющийся отношением ширины зацепления b_w к осевому шагу P_x (рис. 11.6):

$$e_b = b_w / P_x = b_w \sin \beta / \pi m_n \quad (11.1)$$

В механизме с одной линией зацепления в контакте будут находиться то одна, то две пары зубьев. Двухпарное зацепление будет иметь место на участках зубьев, имеющих длину $b_w = \pi m_n$, расположенных вблизи торцов. Как видно из формулы (11.1), коэффициент осевого перекрытия зависит от ширины зубчатого зацепления и угла наклона зубьев. При малых углах β наклона зубьев для

обеспечения необходимого значения коэффициента перекрытия (рекомендуется $e_b = 1,15 \dots 1,35$) необходимо увеличивать ширину колес, что экономически невыгодно. Поэтому чаще всего принимают $\beta = 10 \dots 20^\circ$.

В дозаполусном зацеплении при коэффициенте осевого перекрытия $e_b = 1,15 \dots 1,20$ обеспечиваются как минимум две и более зоны контакта. Это позволяет ширину зубчатых колес делать в среднем на 30...40 % меньше, чем в зацеплении с одной линией зацепления.

Особенностью зацепления Новикова является теоретически полное отсутствие взаимного проскальзывания профилей. Однако вследствие распространения под нагрузкой контакта на большую поверхность в зоне контакта возникают упругие деформации, что приводит к относительному скольжению зубьев.

Скорость v_β перемещения контакта вдоль зубьев (рис. 11.7) больше окружной скорости v_t , благодаря чему обеспечивается устойчивая масляная пленка:

$$v_\beta = v_t \sin \beta. \quad (11.2)$$

Чем меньше угол β , тем больше скорость перемещения контакта. Так, например, при значении угла $\beta = 14^\circ$ скорость перемещения в точке контакта в 4 раза больше окружной скорости v_t . Скорость скольжения по высоте зубьев зависит от расстояния l между линией зацепления KK и мгновенной осью WW относительного вращения колес:

$$v_\alpha = l (\omega_1 + \omega_2). \quad (11.3)$$

11.9. Определение размеров зубчатых механизмов с зацеплением Новикова

При проектировании зубчатого механизма с параллельными осями задаются межосевое расстояние a_w , передаточная функция i_{12} и вариант зацепления. Для механизма, состоящего из пары колес с зацеплением Новикова с одной (рис. 11.3) и двумя линиями зацепления (рис. 11.4), диаметр делительного цилиндра, совпадающего с начальным,

$$d = m_n z / \cos \beta; \quad (11.4)$$

диаметр окружности вершин

$$d_a = d_1 + 2h_{a1}^* m_n \text{ и } d_a = d_2 + 2h_{a2}^* m_n; \quad (11.5)$$

диаметр окружности впадин

$$d_f = d_1 - 2h_{f1}^* m_n \text{ и } d_f = d_2 - 2h_{f2}^* m_n; \quad (11.6)$$

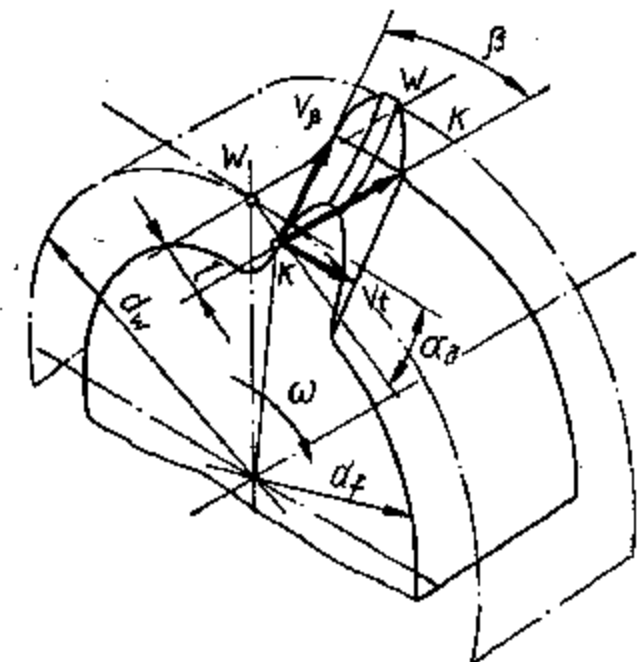


Рис. 11.7. Скорости в зацеплении

межосевое расстояние передачи

$$a_w = 0,5m_n(z_1 + z_2)/\cos \beta; \quad (11.7)$$

ширина зубчатого венца шестерни

$$b = b_w = P_x \varepsilon_\beta. \quad (11.8)$$

12. СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПРИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЯХ ВРАЩЕНИЯ

12.1. Пространственная эвольвентная функция

Сферической эвольвентой называется пространственная кривая CM (рис. 12.1), принадлежащая сферической поверхности радиуса R с центром в точке O , образуемая точкой M плоскости Q , перека-

Рис. 12.1. Сферическая эвольвента

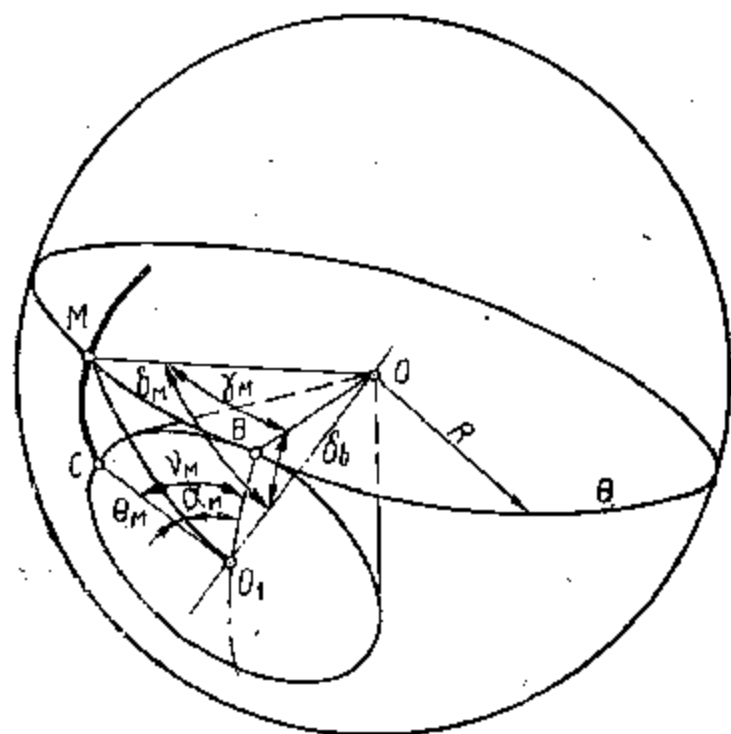
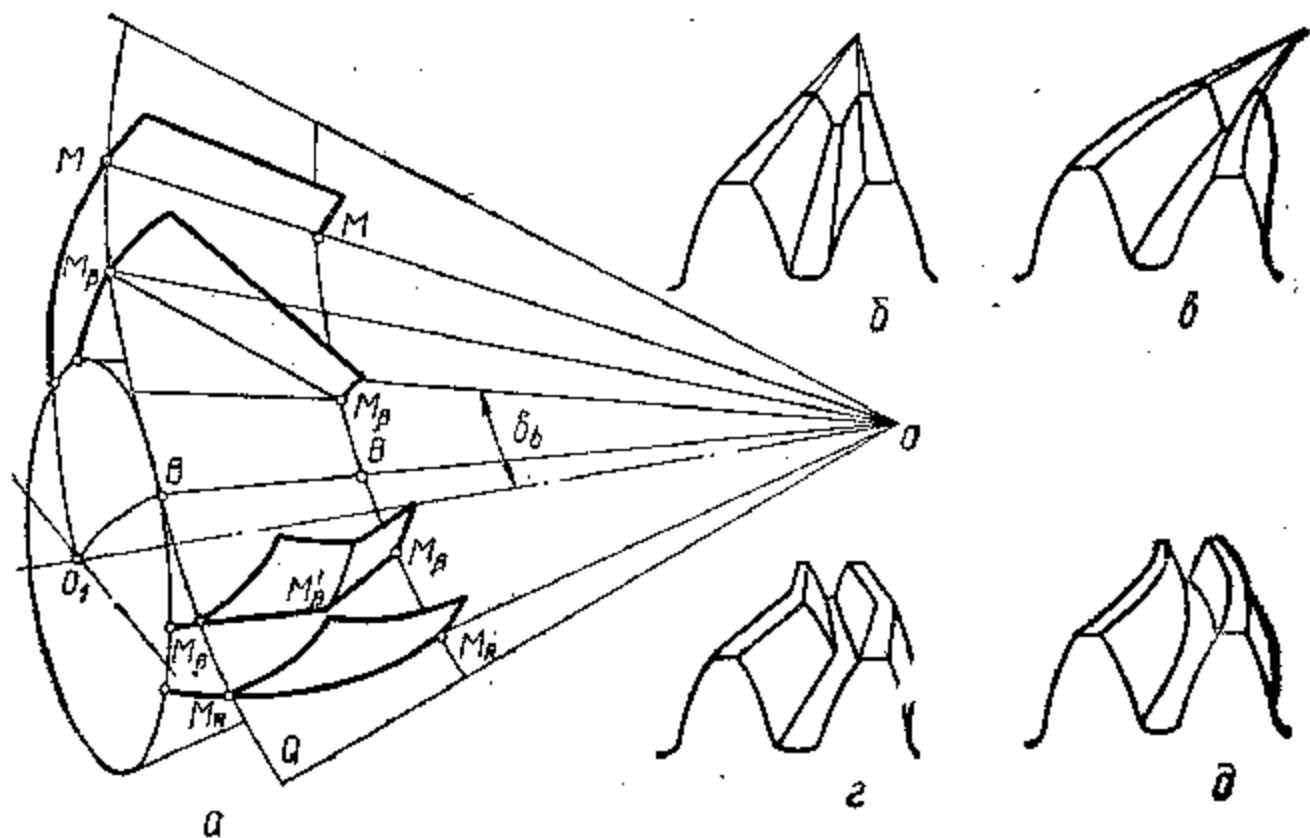


Рис. 12.2. Образование зубьев разных видов



тывающейся без скольжения по поверхности основного конуса с углом δ_b при вершине, расположенного в центре сферы. Основной конус и образующая плоскость касаются по радиусу сферы OB . Точка C начала сферической эвольвенты на поверхности образующего конуса называется *предельной*. Так как плоскость Q перекачивается по поверхности основного конуса без скольжения, то дуги $\overset{\frown}{CB}$ и $\overset{\frown}{MB}$ равны. Рассматривая сферические треугольники $СВО_1$ и $ВМО$ (O_1 — точка пересечения оси основного конуса со сферой), можно записать

$$\gamma_M = \nu_M \sin \delta_b, \quad (12.1)$$

где ν_M — угол развернутости сферической эвольвенты.

Определим параметры сферической эвольвенты в точке M . Из сферического треугольника $ВМО_1$ имеем

$$\cos \delta_M = \cos \delta_b \cdot \cos \gamma_M, \quad \sin \delta_M = \sin \delta_b / \cos \alpha_M, \quad \operatorname{tg} \alpha_M = \operatorname{tg} \gamma_M / \sin \delta_b.$$

Рис. 12.3. Сферическая эвольвентная поверхность

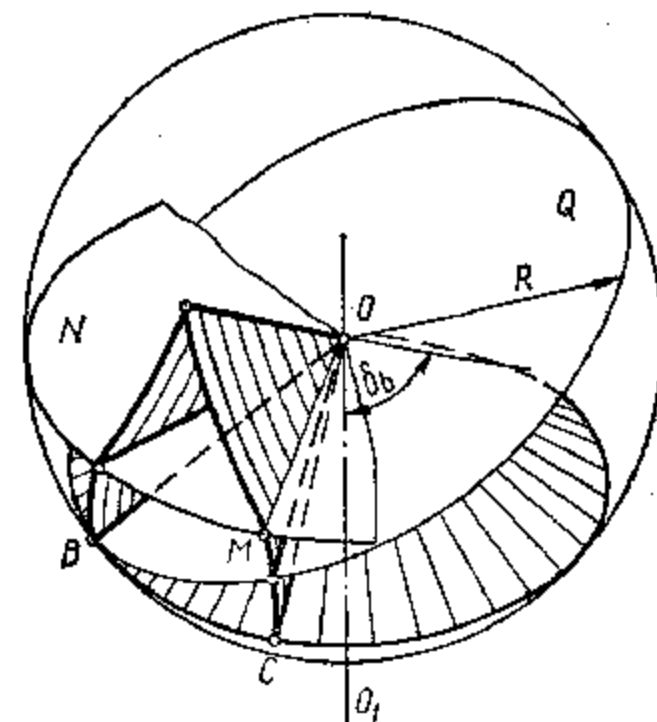
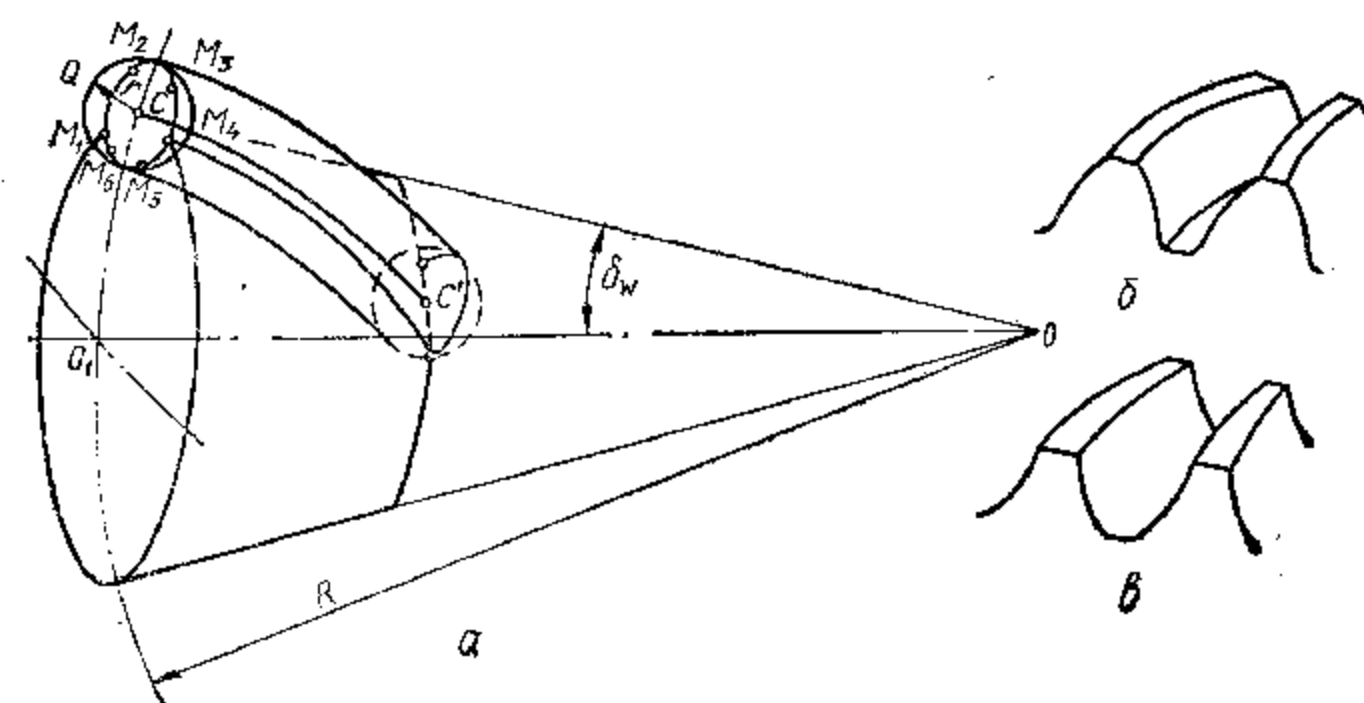


Рис. 12.4. Круговые профили конических зубьев



Так как $\theta_M = \gamma_M - \alpha_M$, то

$$\theta_M = \gamma_M / \sin \delta_b - \arctg (\tg \gamma_M / \sin \delta_b). \quad (12.2)$$

Выражения (12.1) и (12.2) представляют собой параметрические уравнения сферической эвольвенты с независимым параметром γ_M .

12.2. Эвольвентные профили конических зубьев

При пересекающихся осях вращения звеньев, вращающихся с постоянным передаточным отношением, в качестве сопряженных поверхностей выбирают конические эвольвентные поверхности. Они образуются линиями, расположенными на производящей плоскости Q (рис. 12.2, а), перекатывающейся без скольжения по основному конусу. Прямая $M-M$, проходящая через вершину основного конуса, описывает теоретическую поверхность прямого конического зуба (рис. 12.2, б), прямая $M_\beta-M_\beta$, не проходящая через вершину конуса, описывает теоретическую поверхность косого (рис. 12.2, в), ломаная линия $M_\beta M'_\beta M_\beta$ — шевронного (рис. 12.2, г), кривая M_R-M_R — теоретическую поверхность криволинейных конических зубьев (рис. 12.2, д). Линия $B-B$ касания производящей плоскости с основным конусом является мгновенной осью вращения этой плоскости относительно основного конуса и осью кривизны производимой поверхности. Плоскость Q нормальна к этой поверхности. Точки линий $M-M$, $M_\beta-M_\beta$ и M_R-M_R описывают сферические эвольвенты. Если обкатать производящую плоскость вокруг всей поверхности основного конуса, то сферическая эвольвентная поверхность будет состоять из «зубцов», симметричных плоскости N , перпендикулярной его оси (рис. 12.3). Кривизна эвольвентной конической поверхности при пересечении с этой плоскостью меняет знак, т. е. поверхность имеет перегиб

12.3. Круговые профили конических зубьев

В качестве незвольвентных рабочих поверхностей зубьев конических передач с точечным зацеплением распространение получили круговые винтовые поверхности Новикова, образованные отрезками дуг окружностей. На боковой поверхности начального конуса с углом при вершине δ_ψ (рис. 12.4) проведем винтовую линию CC' , установим в точке C образующую сферу Q с радиусом r и будем перемещать ее вдоль винтовой линии таким образом, чтобы центр C сферы все время находился на этой винтовой линии. Круговые винтовые поверхности будут огибающими семейства поверхностей сферы Q . Сечения поверхности начального конуса и винтовой круговой поверхности сферой радиусом R и центром в точке O представляют собой окружности, пересекающиеся в точках M_1 и M_4 . Для профилирования рабочих поверхностей зубьев можно взять участок $M_1 M_2$ и $M_3 M_4$ диаметральной окружности сферы Q (тогда получим коническое колесо с выпуклыми зубьями (рис. 12.4, б)) или участки $M_1 M_6$ и $M_4 M_5$ (тогда получим коническое колесо с вогнутыми зубьями (рис. 12.4, в)).

12.4. Образование конических зубьев различной формы

Для образования конических зубьев используются конические соосные поверхности, сферические эвольвентные и круговые винтовые поверхности. Поверхности вершин 1 (рис. 12.5), впадин 2 и поверхность 3 делительного конуса конического зубчатого колеса являются соосными коническими поверхностями, оси которых совпадают с осью зубчатого колеса OO_1 . В связи с этим различают углы делительного конуса δ , конуса вершин δ_a , конуса впадин δ_f , ножки зубьев θ_f , головки зубьев θ_a .

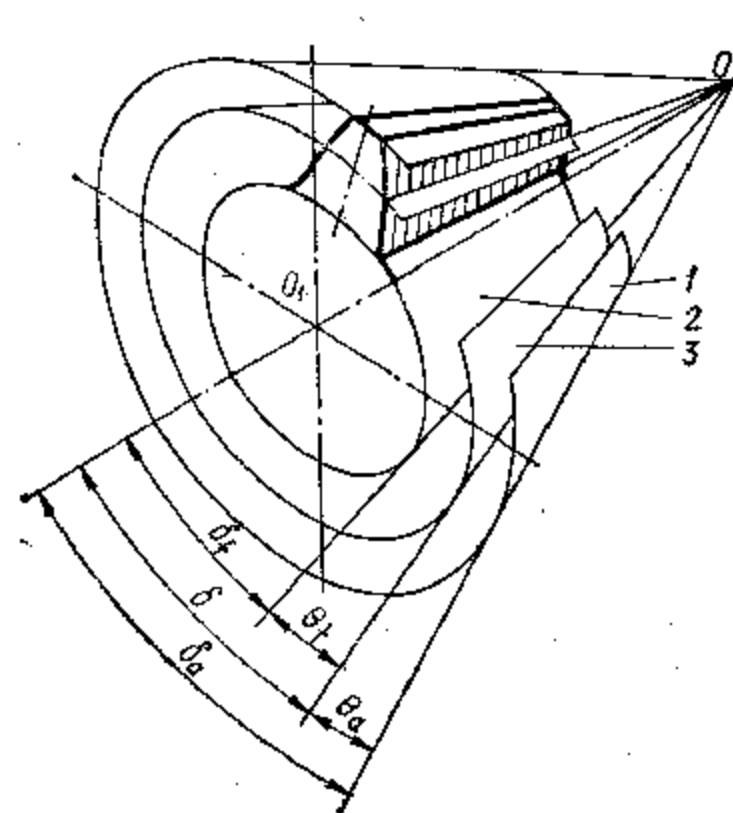


Рис. 12.5. Конические соосные поверхности

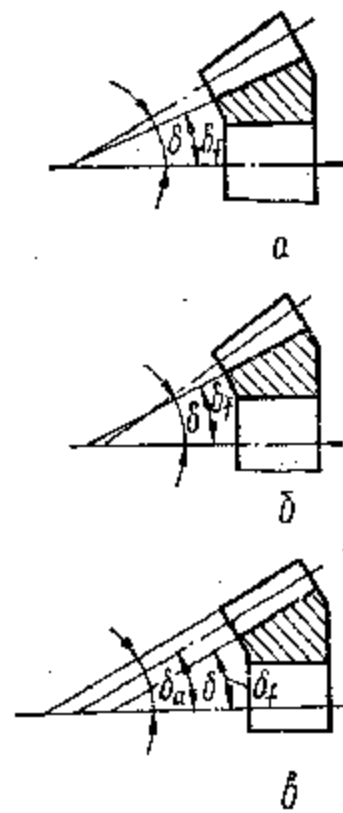


Рис. 12.6. Формы конических зубьев

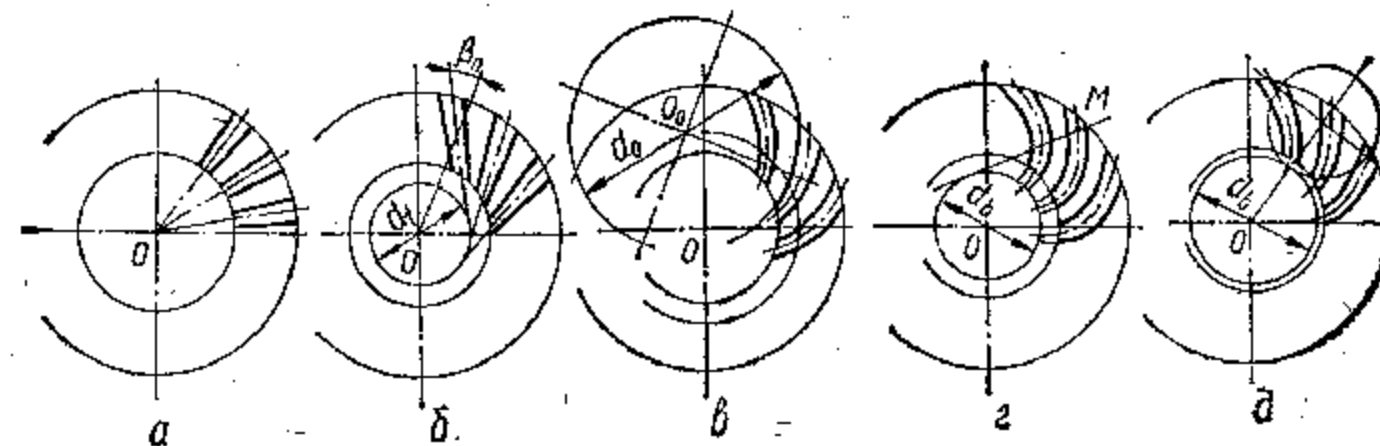


Рис. 12.7. Различные линии зубьев конических колес

В зависимости от взаимного расположения образующих и вершин конусов делительного, вершин и впадин (рис. 12.6) различают три формы зубьев в осевом сечении колес (ГОСТ 19325—73): форма I (рис. 12.6, а) — зубья прямые и круговые ($\beta_n = 0 \dots 45^\circ$), понижающиеся пропорционально конусному расстоянию при совпадении вершин конусов делительного и впадин; II (рис. 12.6, б) — зубья тангенциальные и круговые (β_n до 15°), понижающиеся при несовпадении

нии вершин конусов делительного и впадин; III (рис. 12.6, в) — зубья *круговые* ($\beta_n = 25...45^\circ$), *равновысокие*, когда образующие конусов делительного, впадин и вершин параллельны. Боковые поверхности конического зуба образуются сферическими эвольвентными или круговыми винтовыми поверхностями.

В зависимости от формы теоретической линии зубьев на развертке делительного конуса различают конические колеса с *прямыми* (рис. 12.7, а), *тангенциальными* (б), *круговыми* (в) зубьями, с *эвольвентной* (г) и *циклоидальной* (д) линией зуба. Наибольшее применение находят колеса с прямыми и круговыми зубьями. Последние удается выполнить с наибольшей точностью, их применяют при окружных скоростях, достигающих до 30 м/с.

12.5. Теоретические исходные и производящие зубчатые колеса

В конических зацеплениях в качестве исходного принимают коническое колесо с углом делительного конуса, равным 90° . Это колесо, *определяющее теоретическую форму и размеры зубьев семейства конических зубчатых колес, представителем которых оно является, называют теоретическим (номинальным) исходным плоским колесом*. Число зубьев теоретического исходного плоского колеса для ортогонального зацепления ($\Sigma = 90^\circ$)

$$z_c = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}. \tag{12.3}$$

Контур зубьев условной рейки, идентичный развертке на плоскость торцового сечения исходного плоского колеса, называется *торцовым теоретическим исходным контуром*. Различают внешний, средний и внутренний теоретические исходные контуры. В качестве стандартного для прямозубых конических колес применяют *внешний торцовый исходный контур*, параметры которого установлены ГОСТ 13754—81: угол профиля $\alpha = 20^\circ$; коэффициенты — высоты головки зуба $h_a^* = 1$, радиального зазора $c^* = 0,2$, радиуса кривизны переходной кривой $\rho^* = 0,2...0,3$. Для колес с круговыми зубьями стандартным является *средний нормальный теоретический исходный контур* (по ГОСТ 13754—81). **Нормальным контуром называют контур зубьев условной рейки, у которой профиль и высотные размеры зубьев идентичны одноименным элементам зубьев исходного плоского колеса в нормальном сечении.**

Для профилирования зубьев конических колес используют **теоретическое производящее плоское колесо**, которое заполняет впадины теоретического исходного колеса. При этом между поверхностью вершин теоретического исходного колеса и поверхностью впадин производящего колеса предусматривается радиальный зазор. Для получения сопряженных поверхностей зубьев колес, составляющих зубчатую пару, производящие колеса, используемые для нарезания каждого из этих зубчатых колес, должны быть совпадающими, т. е. станочные аксоиды обоих производящих колес должны совпа-

дать и при этом зубья одного из них должны входить во впадины второго, так же как контршаблон входит в шаблон.

Наряду с плоскими производящими колесами (рис. 12.8, а) применяют и другие: *конусные* (б), *плосковершинные* (г) и *плоские плосковершинные* (в).

Для образования сферических эвольвентных колес торцовое сечение зубьев производящего плоского колеса имеет криволиней-

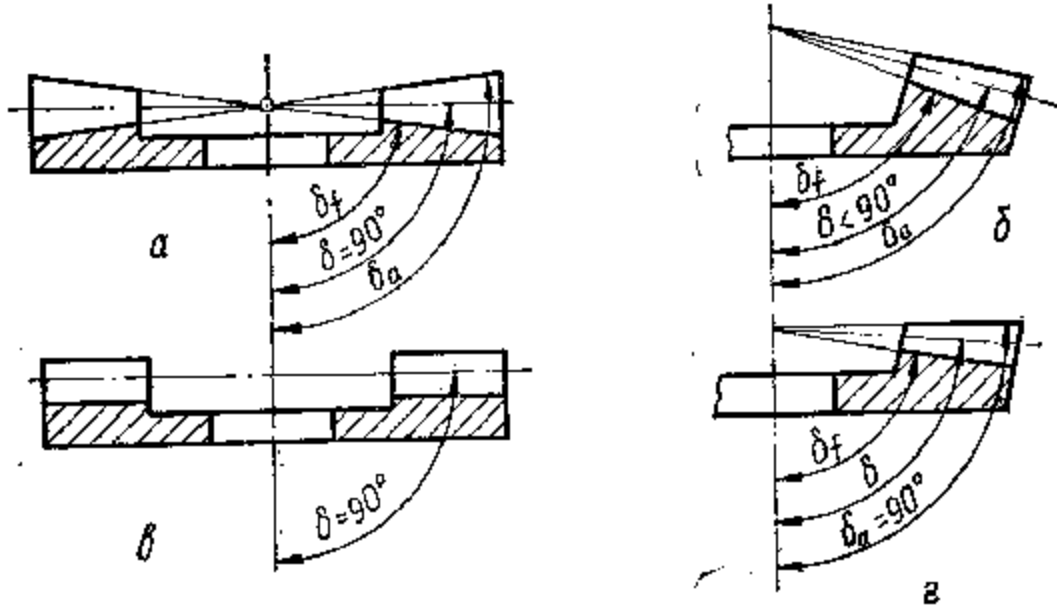


Рис. 12.8. Производящие зубчатые колеса

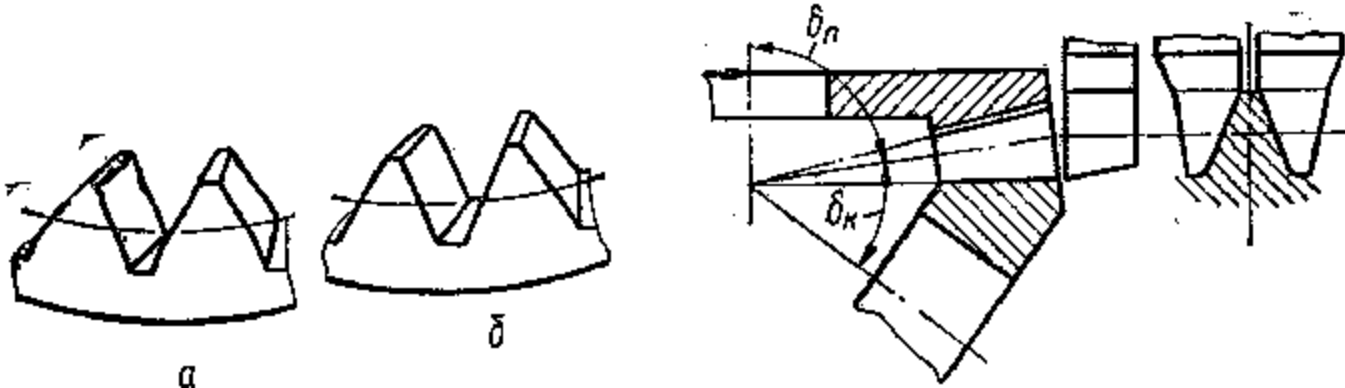


Рис. 12.9. Торцовое сечение зубьев производящего колеса

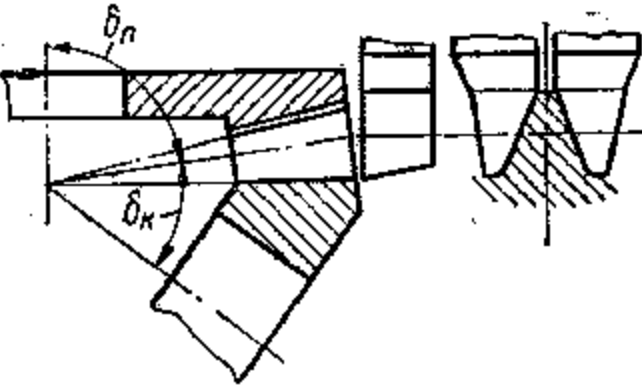


Рис. 12.10. Образование профиля зубьев исходного контура

ную форму (рис. 12.9, а) в соответствии с рис. 12.3, что представляет сложности при изготовлении. Обычно используют производящие колеса с плоской боковой поверхностью зубьев (рис. 12.9, б), которые образуются движением прямолинейных кромок двух зубострогальных резцов, работающих в соседних впадинах нарезаемого колеса. Кромки резцов (рис. 12.10) расположены так, что профиль зубьев производящего колеса совпадает с профилем исходного контура.

12.6. Нарезание зубьев на заготовках колес

Заготовка конического колеса представляет собой усеченный конус с углом при вершине $2\delta_a$. Зубья образуются за счет удаления материала заготовки из впадин. Как и при нарезании цилиндрических колес при нарезании конических колес используют **два способа: копирования и обкатки**. При способе копирования применяют фасон-

ный инструмент, профиль которого совпадает с профилем впадины нарезаемого колеса и копируется на колесе. Нарезание производится с помощью *дисковых* (рис. 12.11, а) и *пальцевых модульных фрез* (б) или протягиванием специальными круговыми протяжками (в). Этот способ нарезания зубьев не обеспечивает высокой точности зацепления.

Рис. 12.11. Нарезание зубьев методом копирования

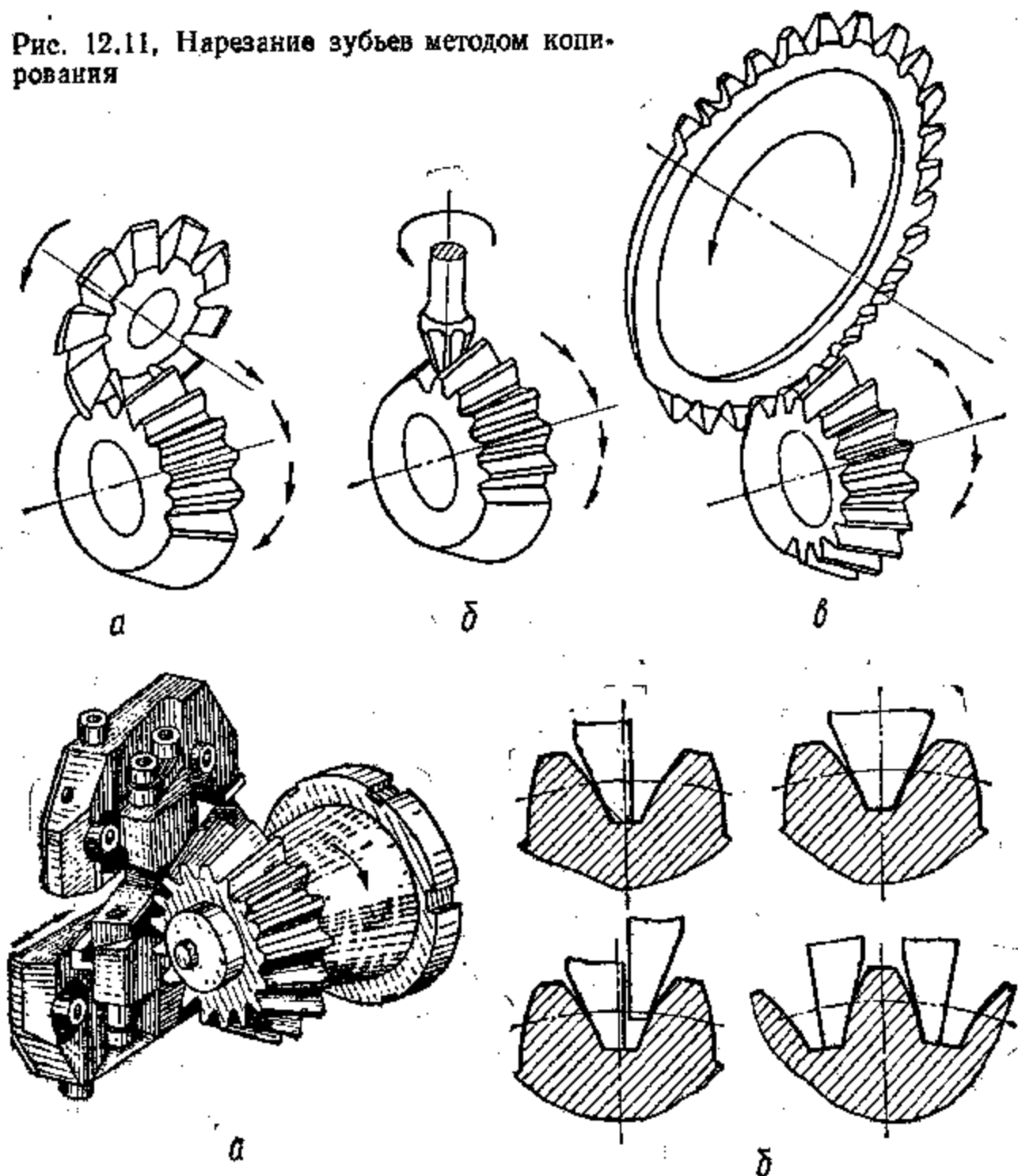


Рис. 12.12. Нарезание зубьев методом обкатки

При способе обкатки заготовка вводится в зацепление с производящим колесом, и им сообщают такое же относительное движение, какое эти колеса имели бы в зацеплении друг с другом. В процессе нарезания воспроизводится перекатывание без скольжения аксоида нарезаемого колеса по аксоиду инструмента. *Зацепление нарезаемого колеса с производящим называют станочным.*

Конструктивно производящее колесо оформлено в виде планшайбы (люльки) зубострогального станка, по которой движутся *резцо-*

вые салазки (рис. 12.12, а). Обработку ведут одним или двумя резцами, кромки которых при движении воспроизводят боковые стороны зуба или впадины производящего колеса (рис. 12.12, б). Для нарезания круговых зубьев используют *зуборезные головки*. Выбор диаметра d_0 ее (см. рис. 12.7, в) осуществляется по таблицам в зависимости от заданных параметров зацепления.

Коническое колесо, нарезанное со смещением инструмента, характеризуется тем, что в плотном зацеплении с исходным плоским

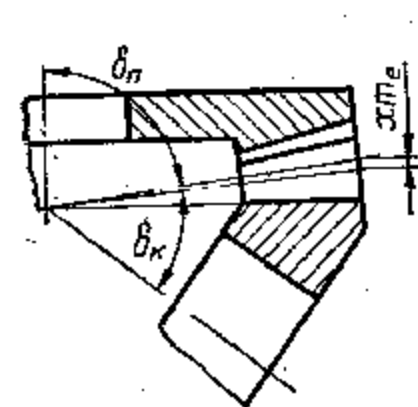


Рис. 12.13. Смещение производящей поверхности

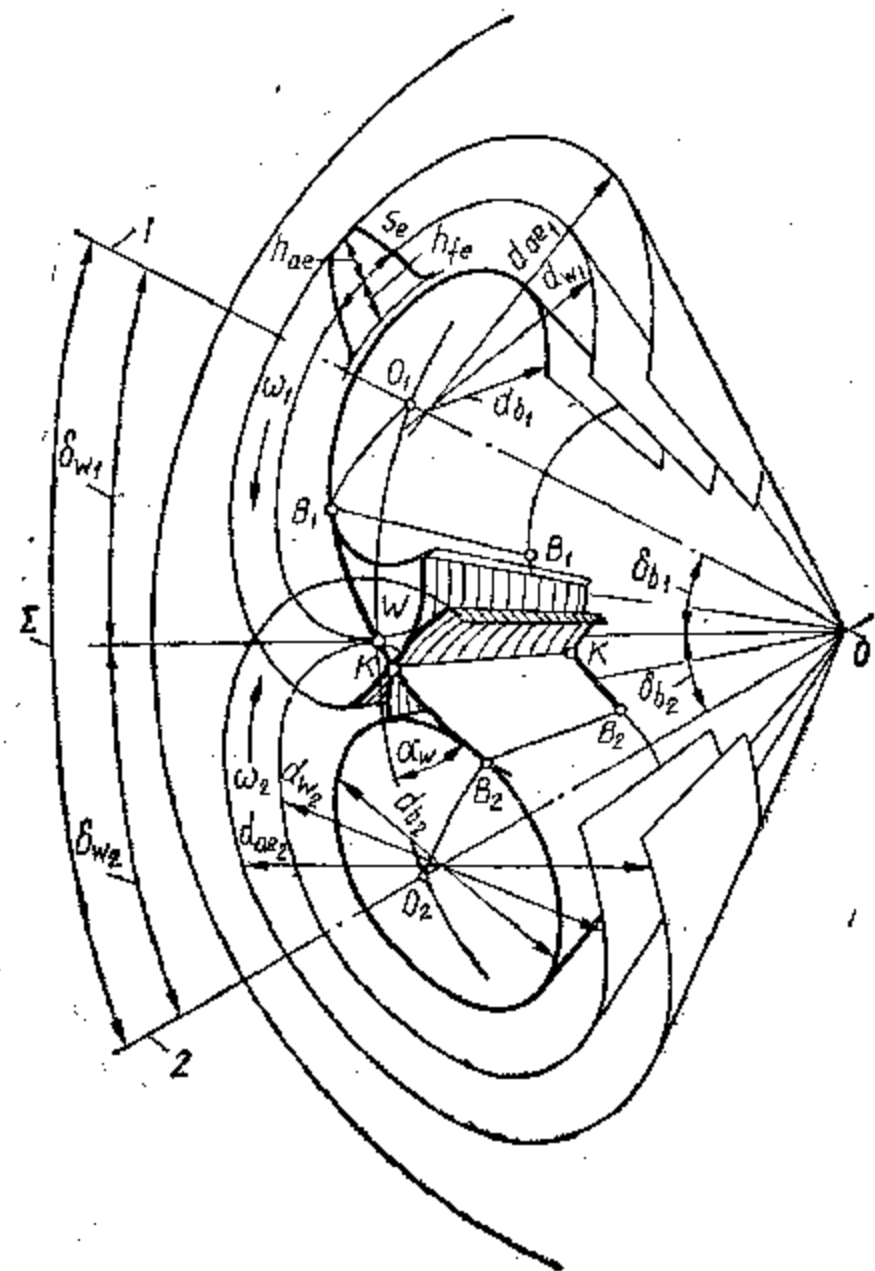


Рис. 12.14. Основные параметры механизма с коническими зубчатыми колесами

колесом его делительный конус не касается делительной плоскости или делительного конуса исходного производящего колеса (рис. 12.13). Смещением производящей поверхности называют расстояние x_m между делительным конусом конического зубчатого колеса и делительным конусом (делительной плоскостью) производящего колеса, измеренное в плоскости, содержащей их оси. Смещение считается положительным, если делительные конусы производящего и нарезаемого колеса не пересекаются, и наоборот. Отношение смещения производящей поверхности к модулю называют *коэффициентом смещения* x . Коэффициент смещения конического колеса идентичен коэффициенту смещения эквивалентного цилиндрического колеса.

12.7. Свойства конического эвольвентного зацепления

Коническое зацепление пары зубчатых колес определяется их относительным положением, зависящим от угла Σ между осями вращения 1 и 2 (рис. 12.14). Взаимодействие конических колес характеризуется зацеплением профилей зубьев, ограниченных concentрическими окружностями, являющимися линией пересечения со сферой соосных конусов — вершин и впадин. Пересечение со сферой других конусов (делительного и начального) образует окружности — делительную и начальную. Диаметры этих окружностей определяют диаметры конического колеса. Они различаются также в зависимости от положения сферы, на которой располагаются соответствующие окружности, что обозначается соответствующим индексом: d — средний делительный диаметр; d_e — внешний делительный диаметр; d_{ae} — внешний диаметр вершин зубьев; d_w — средний начальный диаметр и т. п.

Модуль, высота и толщина зубьев (за исключением равновысоких круговых) монотонно уменьшаются к вершине конуса. Аналогично диаметрам колес различают модули m , высоты зубьев h (и их частей — головок h_a и ножек h_f) и толщины s зубьев — *внешние* — $m_e, h_e, h_{ae}, h_{fe}, s_e$, *средние* — m, h, h_a, h_f, s , *внутренние* — $m_i, h_i, h_{ai}, h_{fi}, s_i$.

Процесс зацепления колес происходит в плоскости зацепления $B_1B_1B_2B_2$, наклоненной под углом зацепления α_w , на которой располагаются контактные линии KK . На основании свойств зубчатых зацеплений (см. гл. 10) передаточное отношение пары конических колес будет

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2 = O_2W/O_1W = r_{W2}/r_{W1} = z_2/z_1 = \sin \delta_{W2}/\sin \delta_{W1}. \quad (12.4)$$

При заданном передаточном отношении и произвольно выбранном угле основного конуса одного звена угол основного конуса второго звена определяется однозначно из соотношения (12.4) и из подобия сферических треугольников WB_1O_1 и WB_2O_2 :

$$i_{12} = \sin \delta_{W2} / \sin \delta_{W1} = O_2 B_2 / O_1 B_1 = \sin \delta_{b1} / \sin \delta_{b2},$$

откуда

$$\sin \delta_{b2} = \sin \delta_{b1} \cdot \sin \delta_{W2} / \sin \delta_{W1}. \quad (12.5)$$

Так как передаточное отношение в эвольвентном сферическом зацеплении определяется отношением синусов углов при вершинах основных конусов, то оно не зависит от межосевого угла. Если изменить межосевой угол, дав ему новое значение, то изменятся углы при вершинах начальных конусов и угол зацепления α_w . Передаточное отношение при этом остается неизменным. Это свойство эвольвентного конического зацепления позволяет снизить требование к точности изготовления стойки в зубчатых механизмах с коническими колесами. Достоинством сферического эвольвентного зацепления, кроме указанного, является постоянное положение в пространстве плоскости зацепления.

Если угол $\varepsilon_{\text{ш}}$ одного из звеньев равен 90° , то начальный конус превращается в плоскость, и такое звено называется **плоским ко-**

лесом или конической рейкой. Зубья такой рейки, в отличие от зубьев рейки, сопряженной с эвольвентными цилиндрическими поверхностями, имеют криволинейный профиль: боковая поверхность зуба выше начального конуса вогнута, а ниже выпукла (см. рис. 12.3). Если боковую поверхность зубчатой рейки сделать плоской, то она образует с коническим эвольвентным колесом не-сопряженную зубчатореечную пару.

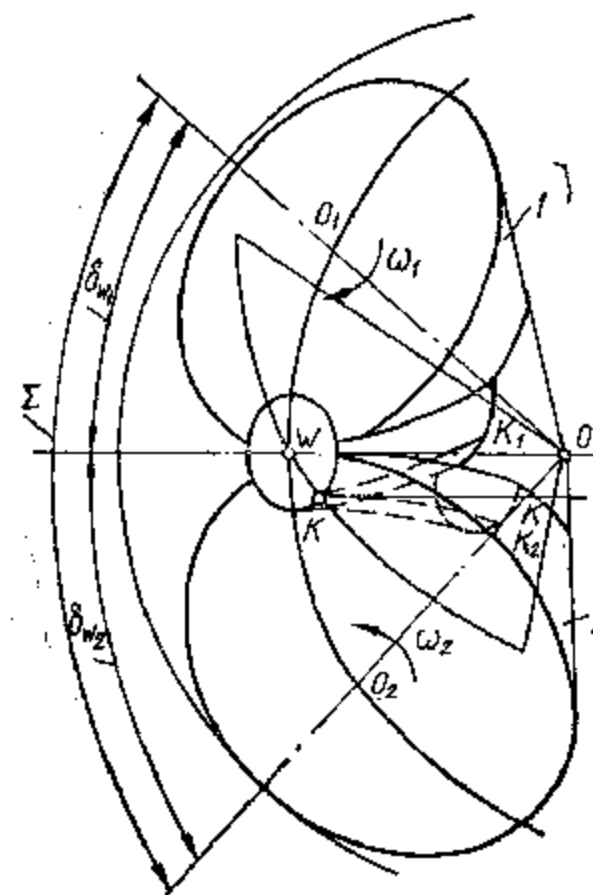


Рис. 12,15. Схема конического зацепления Новикова

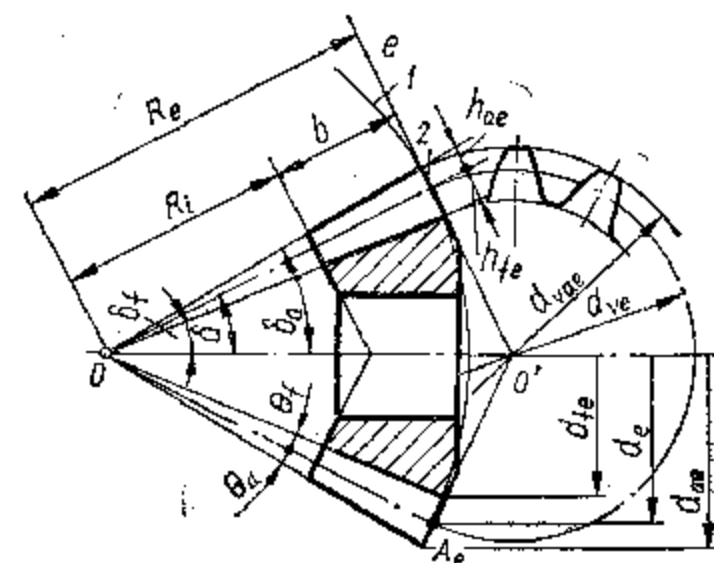


Рис. 12.16. Цилиндрические колеса, эквивалентные прямозубым коническим

Поверхность зуба конического колеса, взаимодействующего с плоской поверхностью зуба конической рейки, называют *квазиэвольвентной*. В квазиэвольвентном зацеплении линия зацепления не совпадает с дугой большого круга сферы, а лишь касается его в полюсе. По форме линия зацепления напоминает расположенную на сфере восьмерку. При любом угле $\alpha \neq 0$ квазиэвольвента отклоняется от сферической эвольвенты. Однако так как эти отклонения соизмеримы с допусками на изготовление зубьев, то в большинстве случаев ими можно пренебречь. Конические эвольвентные зацепления очень чувствительны к несовпадению осей вращения звеньев. Они должны пересекаться в точке, совпадающей с вершинами начальных конусов.

Схема конического зацепления Новикова показана на рис. 12.15. Колесо 1 выполнено с выпуклыми, а колесо 2 — с вогнутыми зубьями; их контакт происходит в точке K . Нормаль к профилям зубьев в этой точке пересекает линию WO касания начальных конусов с углами при вершинах δ_{W_1} и δ_{W_2} в точке W . При вращении конусов точка контакта K перемещается вдоль линии KK — линии зацепления, параллельной линии WO , и нормаль к профилям в этой точке постоянно пересекает линию WO . На боковых поверхностях зубьев траектория точки контакта соответствует винтовым линиям KK_1 и KK_2 .

12.8. Эквивалентные цилиндрические и конические зацепления

Строгий геометрический расчет зубьев конических колес достаточно сложен вследствие того, что профили зубьев располагаются на поверхности сферы. Исходя из того, что высотные размеры h зубьев невелики по сравнению с радиусом R_s сферы (рис. 12.16), в геометрических расчетах заменяют участок поверхности сферы 1, содержащей профили зубьев, поверхностью дополнительного конуса 2 с вершиной в точке O и пренебрегают отличием профиля квазиэвольвентного зуба от плоской эвольвенты. При этом расчет пространственного конического зацепления заменяют расчетом обычного плоского зацепления цилиндрических эвольвентных колес (гл. 10). **Дополнительным конусом** называют соосный конус, образующая которого перпендикулярна образующей делительного конуса. В зависимости от положения относительно вершин **делительные** дополнительные конусы разделяют на *внешние* (наиболее удаленные от вершины), *внутренние* (наименее удаленные от вершины), *средние* (находящиеся на равном расстоянии от внешнего и внутреннего дополнительных конусов). Параметрам внешних дополнительных конусов присваивают индекс e , внутренних — i , средних — m . **Сечение конического колеса** одним из дополнительных конусов называют **торцовым**.

Эвольвентное цилиндрическое зацепление, размеры и форма зубьев которого идентичны размерам и форме зубьев конического зацепления на поверхностях ее дополнительных конусов, называют **эквивалентным цилиндрическим зацеплением**. На развертке дополнительного конуса конического колеса видно, что длина образующей дополнительного конуса $O'A_e$ является радиусом $0,5d_{os}$ делительной окружности эквивалентного цилиндрического колеса. Диаметры начальных окружностей цилиндрических эквивалентных колес для расчетного конусного расстояния

$$d_{wot} = d_w / \cos \delta_w; \quad (12.6)$$

делительных окружностей —

$$d_{ot} = d / \cos \delta. \quad (12.7)$$

Длина полной делительной окружности эквивалентного колеса будет равна $\pi d_o = \pi d / \cos \delta$ или $z_o \cdot P_o = z \cdot P / \cos \delta$. Так как шаги конических и эквивалентных цилиндрических колес $P = P_o$, то **эквивалентное число зубьев**

$$z_o = z / \cos \delta, \quad (12.8)$$

где z — число зубьев конического колеса.

В общем случае эквивалентное число зубьев является дробным и в процессе расчета округлению не подлежит. Для зацепления пары колес с непрямыми зубьями аналогом являются **бизэквивалентные цилиндрические колеса** с диаметрами делительных окружностей d_{on} , которые имеют размеры и форму зубьев, идентичные одноименным элементам в нормальном сечении эквивалентных цилиндри-

ческих колес с прямыми зубьями (рис. 12.17). С учетом формул (10.45) и (12.8) получим

$$z_{on} = z_{ot} / \cos^3 \beta_n = z / (\cos \delta \cdot \cos^3 \beta_n). \quad (12.9)$$

Передаточное отношение эквивалентной цилиндрической передачи для ортогональной конической передачи ($\Sigma = 90^\circ$) будет с учетом формул (12.4) и (12.8)

$$i_o = z_o / z_o = (z_2 / z_1) (\cos \delta_1 / \cos \delta_2) = i^2. \quad (12.10)$$

Одна и та же цилиндрическая пара зацепляющихся колес эквивалентна для разных конических зацеплений с углом между осями $\Sigma \neq 90^\circ$. Это дает возможность коническую пару с углом $\Sigma \neq 90^\circ$ привести к эквивалентной ортогональной ($\Sigma = 90^\circ$) конической паре сопряженных колес. Из формулы (12.10) следует,

что $i = \sqrt{i_o}$. На основании этого при условии, что $\delta_1 + \delta_2 \neq 90^\circ$, получим передаточное отношение эквивалентной ортогональной пары конических колес, выраженное через передаточное отношение конической пары при $i_{\Sigma \neq 90^\circ} = i = z_2 / z_1$

$$i_{\Sigma \neq 90^\circ} = \sqrt{i} (\cos \delta_1 / \cos \delta_2). \quad (12.11)$$

Понятиями об эквивалентных числах зубьев и передаточном числе эквивалентной цилиндрической передачи пользуются при исследовании геометрии зубчатых зацеплений конических колес с применением зависимостей для цилиндрических эвольвентных колес (см. гл. 10).

12.9. Коэффициент перекрытия

Как и в цилиндрическом зацеплении, для непрерывности взаимодействия зубьев в коническом так же необходимо, чтобы каждая очередная пара зубьев вступала в зацепление раньше, чем из зацепления выйдет предыдущая. Это условие в конических зацеплениях характеризуется **суммарным коэффициентом перекрытия** ε_γ :

$$\varepsilon_\gamma = \sqrt{\varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\beta^2}, \quad (12.12)$$

где ε_α — коэффициент торцового перекрытия (отношение длины линии зацепления к шагу на развертке дополнительного конуса).

Коэффициент ε_β равен коэффициенту перекрытия эквивалентных цилиндрических колес во внешнем торцовом сечении. Используя выражение для коэффициента торцового перекрытия цилиндрического эвольвентного зацепления (см. гл. 10) и подставляя значение

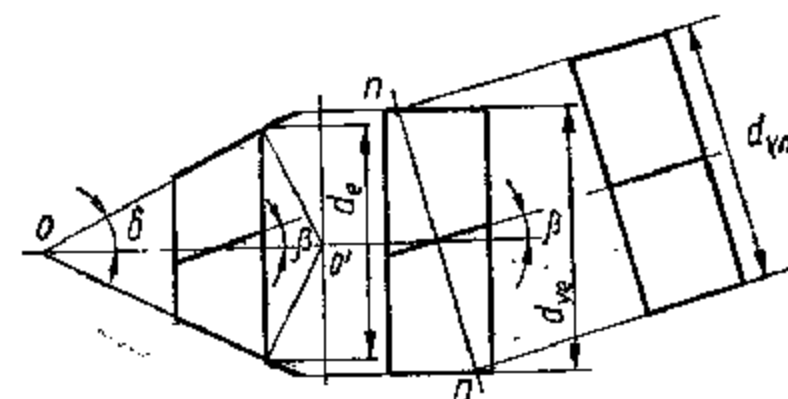


Рис. 12.17. Цилиндрические колеса, эквивалентные коническим с непрямыми зубьями

эквивалентного числа зубьев z_e из формулы (12.8), получим

$$\varepsilon_\alpha = ((z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{ae1} - \operatorname{tg} \alpha_w) / \cos \delta_{w1}) + (z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{ae2} - \operatorname{tg} \alpha_w) / \cos \delta_{w2})) / 2\pi. \quad (12.13)$$

В коническом зацеплении, в отличие от цилиндрического, торцовый коэффициент перекрытия для передач с постоянным радиальным зазором по всей длине зуба в разных торцовых сечениях будет различным: по мере приближения к внутреннему торцовому сечению ε_α уменьшается. Для прямозубых конических передач наименьшее значение ε_α должно быть больше единицы. Коэффициент осевого перекрытия конических колес с тангенциальными и круговыми зубьями приближенно будет

$$\varepsilon_\beta = b \cdot \sin \beta_n / (\pi m_n), \quad (12.14)$$

где β_n — угол наклона средней линии зубьев.

Минимальный коэффициент осевого перекрытия рекомендуется иметь в пределах $\varepsilon_\beta = 1,5 \dots 1,8$. Увеличения коэффициента осевого перекрытия достигают увеличением угла наклона линии зуба и ширины зубчатого венца, а также уменьшением модуля при соответствующем увеличении числа зубьев.

12.10. Влияние смещения на характеристики зацепления

Нарезание конических колес со смещением существенно влияет на геометрию и качественные показатели зубчатого зацепления. С увеличением коэффициентов смещения растут радиусы кривизны боковых поверхностей зубьев, что благоприятно для прочностных характеристик, но в то же время снижается коэффициент перекры-

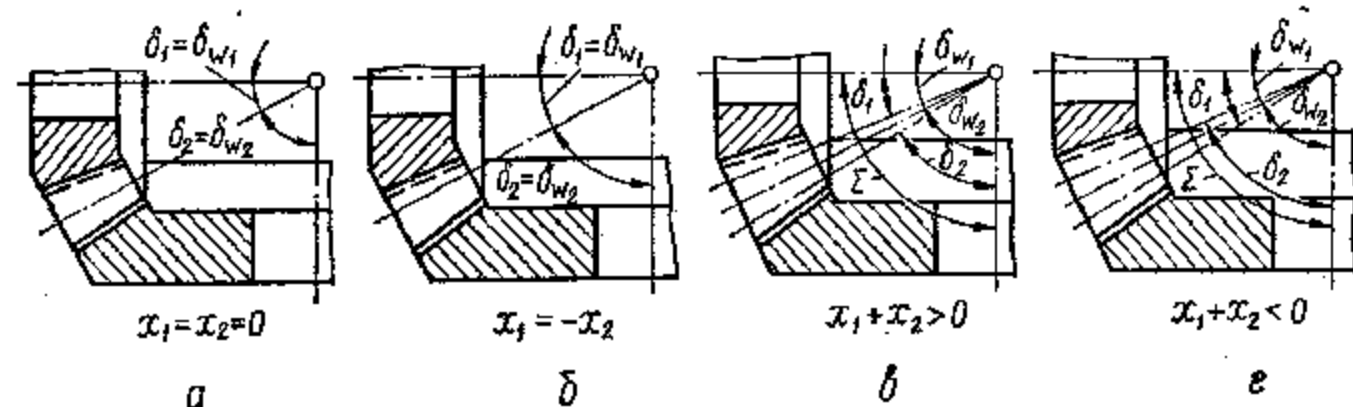


Рис. 12.18. Конические зацепления со смещением

тия, растет опасность заострения и интерференции зубьев. Для колес, нарезаемых резцами с прямолинейной режущей кромкой на базе плосковершинного производящего колеса, при больших коэффициентах смещения увеличивается несопряженность поверхностей зубьев.

По аналогии с цилиндрическими различают конические зацепления без смещений (нулевые), при $x_1 = x_2 = 0$ и угле между осями $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$ (рис. 12.18, а), *равносмещенные* (наиболее распространенные) — оба колеса передачи имеют равные по величине, но обратные по знаку смещения, $x_1 = -x_2$, угол $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$ (рис. 12.18, б);

положительные — сумма коэффициентов обоих колес положительна, т. е. $x_1 + x_2 > 0$ и $\Sigma = \delta_{w1} + \delta_{w2} > \delta_1 + \delta_2$ (рис. 12.18, в), и *отрицательные* — при $x_1 + x_2 < 0$ и $\Sigma < \delta_1 + \delta_2$ (г).

Для каждой пары зацепляющихся колес коэффициенты смещения назначают индивидуально с учетом условий ее работы и предъявляемых к ней требований. Это позволяет улучшить те характеристики, которые являются для данных условий наиболее важными и незначительно повлиять на остальные.

Для конических зацеплений, которые составлены из колес, нарезанных зубострогальными резцами с прямолинейной режущей кромкой, воспроизводящими при движении впадину исходного реечного контура, коэффициенты смещения выбирают по блокирующим контурам, построенным для цилиндрических передач внешнего зацепления (см. гл. 10), по эквивалентным числам зубьев.

12.11. Определение геометрических размеров зацепления конических колес

Базой для определения элементов зубьев и их размеров является **делительный конус** — соосная коническая поверхность с углом у вершины δ . Угол делительного конуса шестерни и колеса

$$\delta_1 = \operatorname{arctg} (1/i_{12}) \quad \text{и} \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1. \quad (12.15)$$

Угол конуса вершин шестерни и колеса

$$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1} \quad \text{и} \quad \delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2}. \quad (12.16)$$

Угол θ_a головки зуба зависит от принятой системы назначения радиальных зазоров. Наибольшее распространение получила система, при которой радиальный зазор постоянен по всей ширине зубчатого венца и угол θ_a головки зуба данного колеса равен углу θ_f ножки зуба сопряженного колеса:

$$\theta_{a1} = \theta_{f2} \quad \text{и} \quad \theta_{a2} = \theta_{f1}; \quad (12.17)$$

угол ножки зуба (см. рис. 12.16)

$$\theta_f = \operatorname{arctg} (h_{fe}/R_e). \quad (12.18)$$

Внешняя высота ножки зуба

$$h_{fe} = m_e (h_a^* + c^* - x); \quad (12.19)$$

внешняя высота головки зуба

$$h_{ae} = m_e (h_a^* + x); \quad (12.20)$$

внешняя высота зуба

$$h_e = h_{ae} + h_{fe} = m_e (2h_a^* + c^*). \quad (12.21)$$

Внешнее конусное расстояние (для ортогональных зацеплений)

$$R_e = 0,5m_e \cdot z_e; \quad (12.22)$$

среднее делительное конусное расстояние

$$R = R_e - 0,5b; \quad (12.23)$$

внутреннее конусное расстояние

$$R_i = R_e - b = R - 0,5b. \quad (12.24)$$

Расстояние между внешним и внутренним торцовыми сечениями является шириной зубчатого венца b (см. рис. 12.16). Выбор ширины зубчатого венца, в отличие от цилиндрических зацеплений, связан с ограничениями, налагаемыми технологией нарезания и инструментом, и определяется коэффициентом ширины зубчатого венца $k_{be} = b/R_e$ и расчетным модулем. Для колес с прямыми зубьями принимают $k_{be} \leq 0,3$ ($b \leq 10m_e$); с тангенциальными — $k_{be} \leq 0,25$ ($b \leq 8m_{te}$); с круговыми — $k_{be} \leq 0,3$ ($b \leq 14m_n$).

В качестве расчетного модуля (из стандартного ряда) для прямых зубьев принимают внешний окружной модуль m_e по внешнему делительному диаметру, для тангенциальных зубьев — m_{te} — внешний нормальный модуль по этому диаметру.

Внешний окружной модуль для колес с тангенциальными зубьями

$$m_{te} = m_{ne} / \cos \beta_{ne}; \quad (12.25)$$

средний окружной модуль

$$m_m = m_e \cdot R/R_e; \quad (12.26)$$

средний нормальный модуль

$$m_n = m_{ne} \cdot R \cdot \cos \beta_n / (R_e \cdot \cos \beta_{ne}). \quad (12.27)$$

Средний делительный диаметр

$$d = m_n z / \cos \beta_n; \quad (12.28)$$

внешний делительный диаметр

$$d_e = m_e \cdot z; \quad (12.29)$$

внешний диаметр вершин зубьев

$$d_{ae} = d_e + 2h_{ae} \cos \delta. \quad (12.30)$$

Алгоритм расчета геометрических размеров прямозубых конических передач реализуется операторной функцией

$$GCON(z_1, z_2, m_e, R_e, b, \Sigma, h_a^*, c^*, \alpha; \delta_1, \delta_{a1}, \delta_{fe1}, \delta_{fe2}, d_{ae1}, d_{ae2}).$$

Геометрический расчет конических колес с круговыми равновысокими и равноширокими зубьями производится так же, как и геометрический расчет колес с прямыми зубьями. В качестве расчетного принимается внешний окружной модуль m_{te} для зубьев с осевой формой I и III и средний нормальный модуль m_n для зубьев по форме II. Особенность расчета заключается в выборе диаметра d_o зуборезной головки, расчете среднего угла наклона линии зуба β_n и подборе коэффициента χ смещения исходного контура. Определение отдельных параметров — угла ножки и головки зубьев — зависит от их осевой формы — I, II или III. Диаметр зуборезной головки выбирается по специальным таблицам в зависимости от параметров R_e и m_{te} . Средний угол наклона линии зуба определяется по выбранному номинальному диаметру зуборезной головки и коэффициенту ширины зубчатого венца.

13. СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПРИ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ОСЯХ ВРАЩЕНИЯ

13.1. Гиперболоидное зацепление и его модификации

Аксоидами в относительном движении звеньев со скрещивающимися под любым углом осями (рис. 13.1, а) являются гиперболоиды (см. гл. 9), контактирующие по образующей — мгновенной оси вращения и скольжения KK , наклоненной к осям гиперболоидов под углами β_1 и β_2 . Если в качестве начальных поверхностей принять эти гиперболоиды и на звеньях нарезать зубья, то получим гиперболоидный механизм с зубьями, контактирующими по линии.

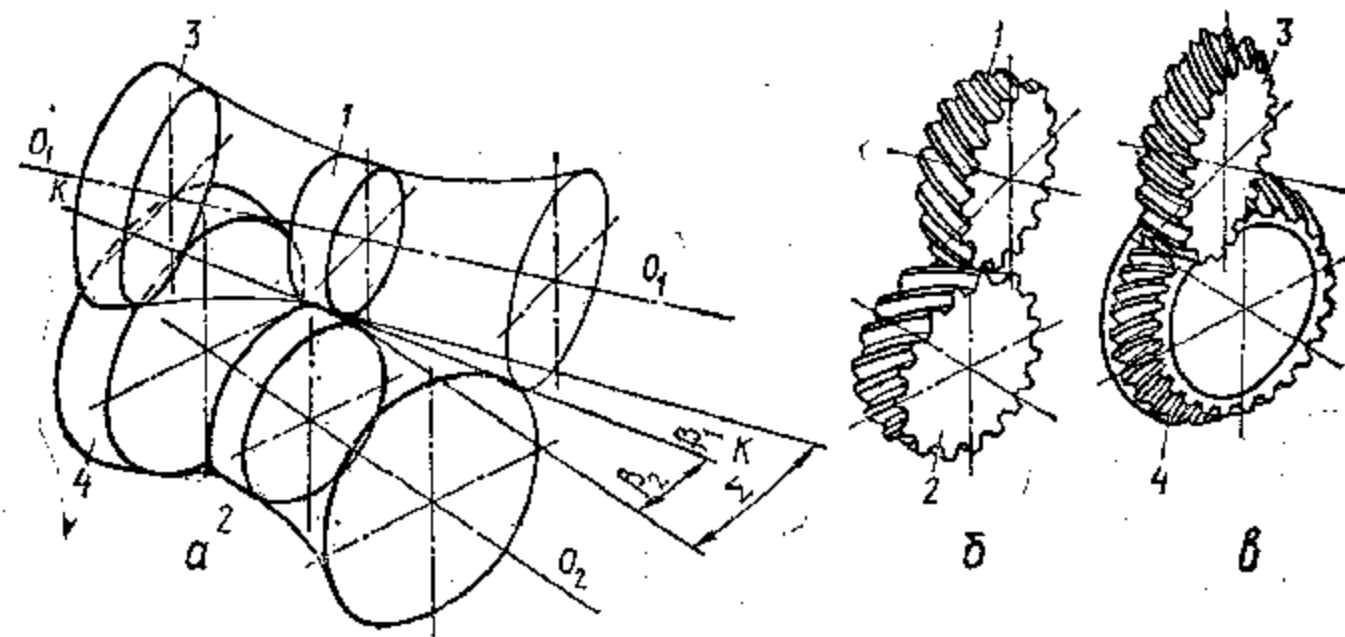


Рис. 13.1. Аксоиды зубчатых механизмов со скрещивающимися осями

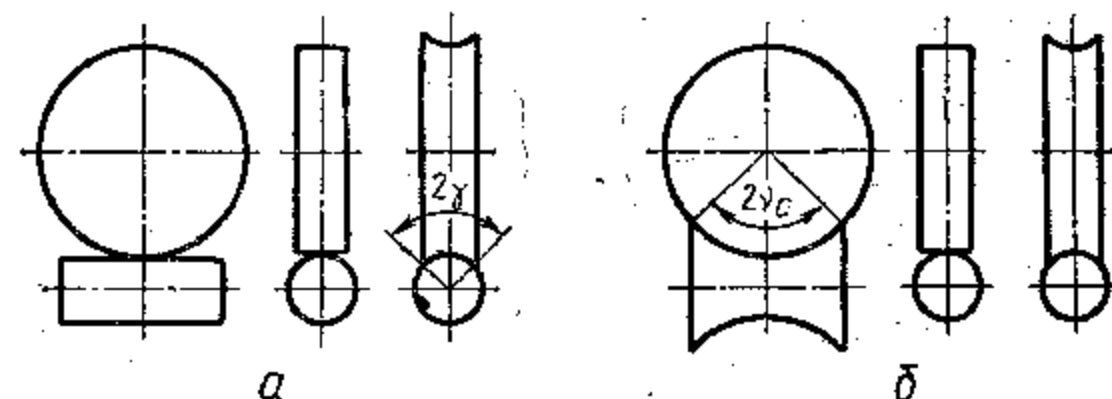


Рис. 13.2. Начальные поверхности

В процессе зацепления эти зубья перекатываются и скользят вдоль профиля по высоте зубьев и в направлении линий зубьев.

Такие зацепления не нашли применения ввиду сложности изготовления их элементов. При постоянном числе зубьев и переменном по длине звеньев диаметре начальных окружностей шаг, а значит, и модуль зацепления должны увеличиваться от горловины гиперболоида в обе стороны по оси. Вместо них применяют зацепления, у которых начальные поверхности представляют собой цилиндры 1, 2, вписанные в горловины гиперболоидов, или конусы 3, 4, расположенные на удаленных от горловины участках гиперболоидов.

Касание таких начальных поверхностей, не совпадающих с аксоидными, — *точечное*, поэтому и контакт зубьев в зацеплениях тоже переходит в *точечный*. Такие механизмы с цилиндрическими начальными поверхностями (рис. 13.1, б) называются *винтовыми*, *зубчатыми*, а с коническими поверхностями (рис. 13.1, в) — *гипоидными*.

Для обеспечения в зацеплении линейного контакта применяют специальные способы нарезания зубьев. Для увеличения суммарной длины контактных линий и улучшения условий работы зацепления начальным поверхностям придают форму, способствующую увеличению взаимного охвата их (рис. 13.2). В червячной паре (рис. 13.2, а) цилиндрический червяк охватывается червячным колесом в пределах дуги 2γ , в *глобоидной* (рис. 13.2, б) — кроме того, колесо охватывается *глобоидным червяком* в пределах дуги $2\gamma_c$. Однако особенностью всех этих зацеплений независимо от вида контакта элементов зацепления — точечного или линейчатого — остается скольжение их в направлении мгновенной оси вращения.

13.2. Винтовое зацепление

В качестве сопряженных в точечном зацеплении применяются любые профили. Для образования винтового зубчатого зацепления (рис. 13.3) используют эвольвентные цилиндрические косозубые колеса. Начальные цилиндры этих колес радиусами r_{w1} и r_{w2} кон-

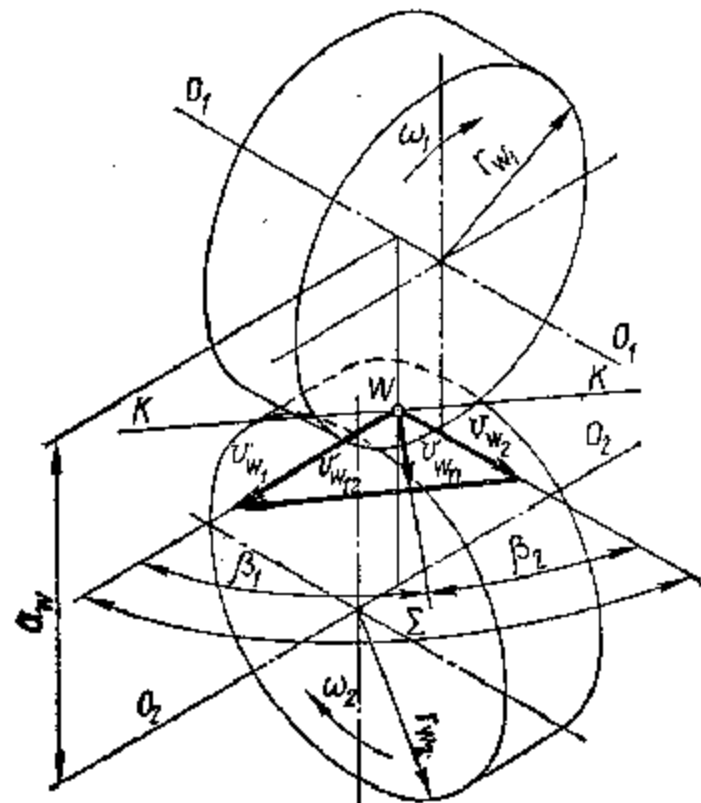


Рис. 13.3. Винтовое зацепление

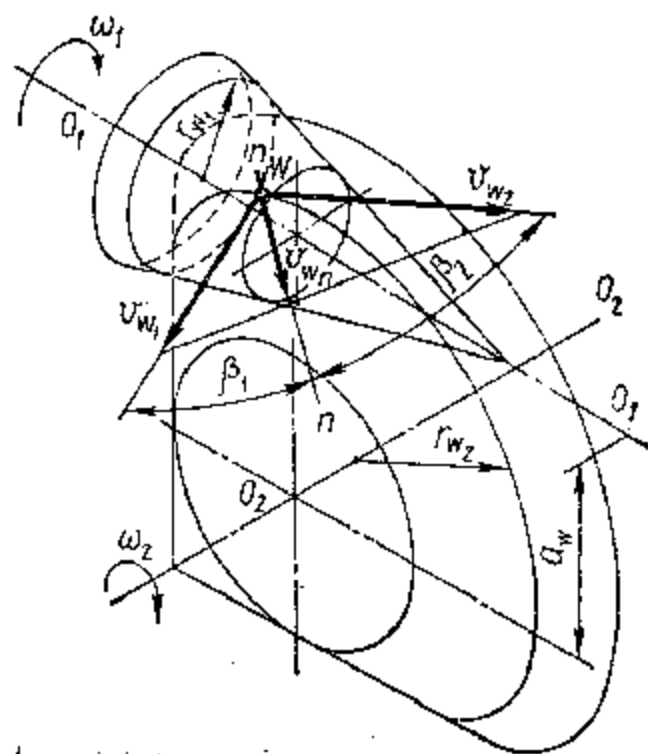


Рис. 13.4. Гипоидное зацепление

тактируют в полюсе зацепления W . Кратчайшее расстояние между скрещивающимися осями — межосевое расстояние $a_w = r_{w1} + r_{w2}$. Чаще всего применяют передачи с углом между скрещивающимися осями $\Sigma = 90^\circ$. Из условия, что в полюсе W скорости точек контакта в направлении нормали к линиям зубьев должны быть одинаковыми: $v_{wn1} = v_{wn2} = v_{wn}$, получим $v_{wn} \cos \beta_1 =$

$$= v_{w2} \cos \beta_2, \text{ откуда } \omega_1 r_{w1} \cos \beta_1 = \omega_2 r_{w2} \cos \beta_2, \text{ следовательно,} \\ i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = r_{w2} \cos \beta_2 / r_{w1} \cos \beta_1, \quad (13.1)$$

где ω_1 , ω_2 и β_1 , β_2 — угловые скорости и углы наклона линий зубьев колес 1 и 2.

Косозубые колеса, находящиеся в зацеплении, имеют одинаковый нормальный шаг $P_{n1} = P_{n2} = P_n$. Следовательно, при торцовых шагах P_{t1} и P_{t2} соблюдается условие $P_{t1} \cos \beta_1 = P_{t2} \cos \beta_2$, а радиусы начальных окружностей, выраженные через зубья колес z_1 и z_2 , будут

$$r_{w1} = z_1 \cdot P_n / 2\pi = z_1 P_n / 2\pi \cos \beta_1; \\ r_{w2} = z_2 P_n / 2\pi = z_2 P_n / 2\pi \cos \beta_2.$$

После подстановки значения радиусов r_{w1} и r_{w2} в формулу (13.1) получим

$$i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1, \quad (13.2)$$

т. е. передаточное отношение сопряженной пары винтовых колес выражается через числа зубьев точно так же, как и в цилиндрическом зацеплении с косозубыми колесами.

Из зависимости (13.1) следует, что передаточное отношение пары винтовых колес зависит не только от отношения радиусов r_{w1} и r_{w2} , как это имело место в механизме с параллельными осями, но и от углов наклона зубьев на начальных цилиндрах: заданное передаточное отношение i_{12} осуществляют, варьируя одним из углов β и соответствующим отношением радиусов r_{w2} / r_{w1} . Из возможных решений следует выбирать те, которые наилучшим образом удовлетворяют качественным показателям зацепления.

13.3. Гипоидное зацепление

Если за начальные поверхности колес принять конусы (рис. 13.4), оси которых скрещиваются под углом Σ с кратчайшим расстоянием между ними a_w , а образующие касаются в точке W , то получим *гипоидное зацепление*. Абсолютные скорости $v_{w1} = \omega_1 r_{w1}$ и $v_{w2} = \omega_2 r_{w2}$ точек W_1 и W_2 , принадлежащих гипоидным зубчатым колесам, будут лежать в плоскости, касательной к обоим начальным конусам. Проекции этих скоростей на направление нормали $n-n$ к линии зубьев в этой касательной плоскости должны быть равны $v_{wn1} = v_{wn2} = v_{wn}$, где β_1 и β_2 — углы спирали зубьев гипоидных колес.

Для контакта гипоидных колес справедливо соотношение (13.2), т. е. передаточное отношение гипоидных колес выражается через числа зубьев так же, как и винтовых зубчатых колес. В качестве сопряженных профилей в гипоидном зацеплении применяются любые, в том числе и эвольвентные, криволинейные поверхности конических зубчатых колес. Касание гипоидных колес в точке и большое скольжение в процессе зацепления вызывают необходимость применения в силовых механизмах специальных смазочных материалов для улучшения условий контактирования зубьев.

13.4. Образование линейчатых зацеплений

Для улучшения характеристик зацеплений между перекрещивающимися осями применяют различные способы замены точечного контакта линейчатым. Так, используя специальные методы нарезания зубьев и инструменты, получают гипоидные зацепления с линейчатым локализованным контактом.

Применением ведущей шестерни с малым числом зубьев, вплоть до $z_1 = 1$, и нарезанием зубьев парного колеса с помощью инструмента, точно соответствующего параметрам этой шестерни, получают зацепление с криволинейчатым контактом. Ведущая шестерня с малым числом зубьев приобретает вид винта, зубья — витков и называется червяком, а механизм — червячным. Для увеличения длины контактных линий поверхностям вершин зубьев придают вогнутую форму, благодаря чему колесо охватывает червяк.

Последующие изменения параметров зацепления червячного механизма заключаются в создании лучших условий контакта его элементов. Они направлены на уменьшение зазоров между зубьями и витками и на более благоприятное взаимное положение контактных линий и векторов относительных скоростей. Это достигается отказом от эвольвентных профилей и использованием вогнутых профилей витков червяков, благодаря чему контактируют элементы с одинаковым знаком кривизны. Число зубьев (заходов) обычно принимается в диапазоне $z_1 = 1 \dots 4$. Шаг винтовой линии по делительному цилиндру называют *ходом зуба* и обозначают через P_x . Расстояние между одноименными линиями соседних винтовых зубьев по линии пересечения осевой плоскости с делительным цилиндром называется *осевым шагом* P_x . Ход и осевой шаг зуба связаны с зависимостью $P_z = P_x z_1$.

Другое изменение зубчатого механизма между скрещивающимися осями направлено на увеличение числа зубьев колеса, одновременно зацепляющихся с червяком, и обеспечение почти взаимно перпендикулярного расположения контактных линий и векторов его окружной скорости. Увеличение числа зубьев в зоне контакта достигается приданием червяку формы *глобоида*, поэтому механизм называется *глобоидным*.

13.5. Образование червяков различных типов

Известны линейчатые (геликоидные) и нелинейчатые цилиндрические червяки. Винтовая поверхность червяков первого типа образуется вращением вокруг и одновременным движением вдоль оси червяка прямой линии. Благодаря этому боковые поверхности витков червяка содержат прямолинейные образующие. Во втором типе червяков боковые поверхности витков представляют собой огибающие производящего конуса или тора.

Червяки в общем случае являются конволютными — боковые поверхности их витков образуются движением прямой l (рис. 13.5, а),

касающейся основного цилиндра в точках винтовой линии 2, составляющей постоянный угол α_b с касательной к ней, и расположенный под углом $\gamma_b \neq \alpha_b$. Сечение зуба такого червяка плоскостью, касательной к основному цилиндру, дает прямолинейный профиль, а плоскостью перпендикулярной оси червяка — *удлиненную эвольвенту*. Если образующая прямая касается винтовой линии на основном цилиндре червяка при условии, что $\alpha_b = \gamma_b$ (рис. 13.5, б), то такой червяк называется *эвольвентным*; в торцовом

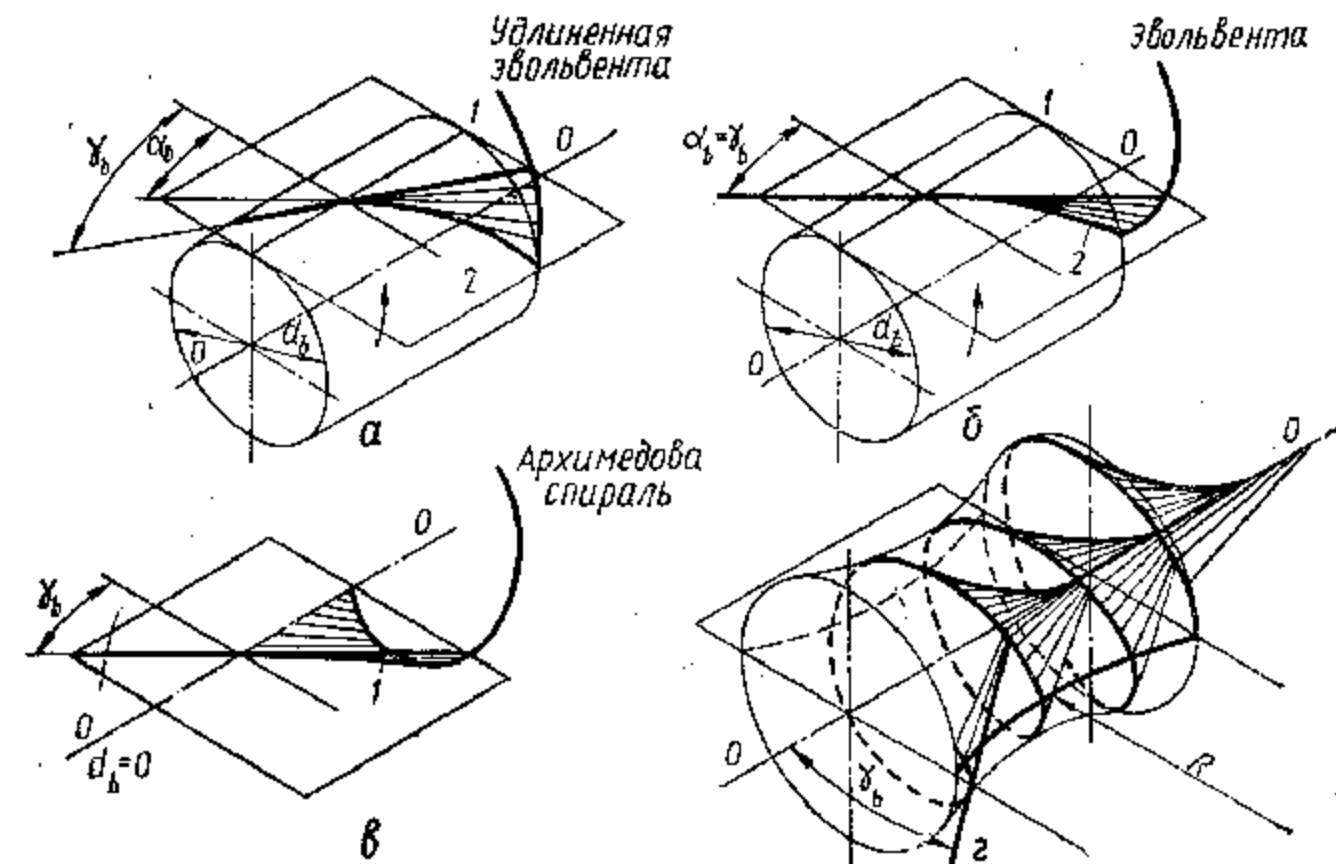


Рис. 13.5. Образование винтовых поверхностей разных видов

сечении профиль его витка очерчен эвольвентой основной окружности радиуса $0,5d_b$. Если радиус основного цилиндра равен нулю, то образующая линия пересекает ось червяка, и такой червяк называется *архимедовым* (рис. 13.5, в). Боковая поверхность витка линейчатая винтовая, в сечении торцовой плоскостью профиль витка является *архимедовой спиралью*, в осевом сечении он очерчен прямыми линиями.

Разновидности нелинейчатых червяков отличаются профилем витков, которые зависят от формы и размеров инструмента и технологии нарезания. Червяки обозначают двумя буквами: Z и буквой, характеризующей особенности образования профиля витков, например, ZI — эвольвентный, ZA — архимедов, ZK — конволютный и т. д.

Глобоидная форма червяка (рис. 13.5, г) образуется вращением дуги окружности R , лежащей в плоскости, проходящей через ось червяка, вокруг этой оси. Преимущественно применяют глобоидные червяки с прямолинейным профилем витка в осевом сечении. Боковая поверхность такого витка образуется так же, как и у архимедовых червяков, но образующая прямая составляет переменный

Нарезание зубьев колес производится методом радиальной, тангенциальной или комбинированной подачи. В первом случае (рис. 13.8, а) фрезе сообщается движение обката и радиальная подача. Во втором случае (рис. 13.8, б) применяются червячные фрезы в сборной части, расстояние между осью фрезы и заготовкой остается неизменным, но помимо вращения фрезе сообщается переме-

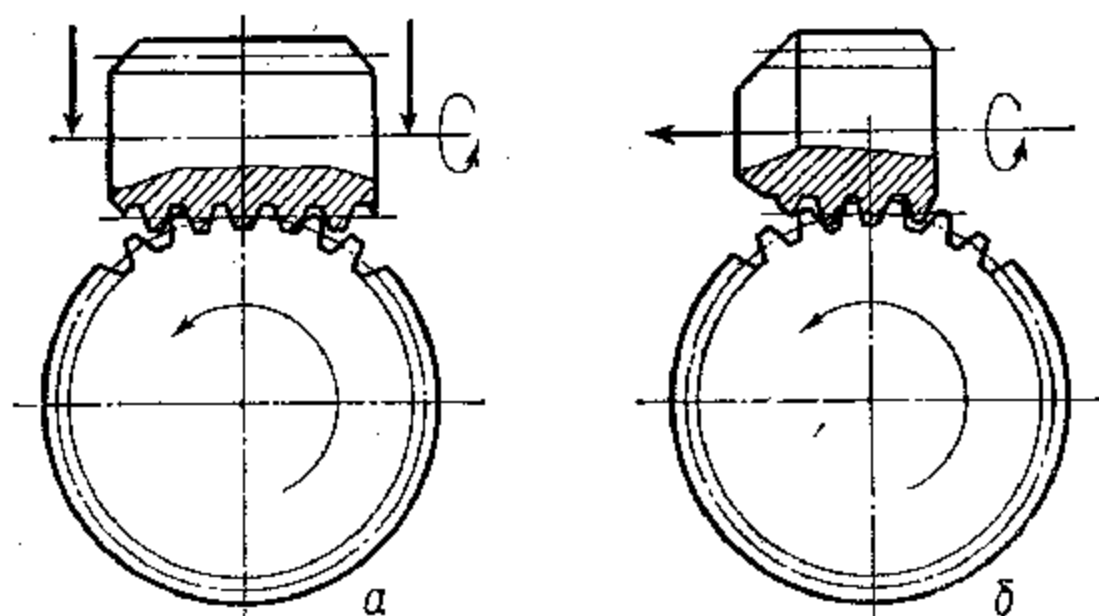


Рис. 13.8. Нарезание зубьев на червячном колесе

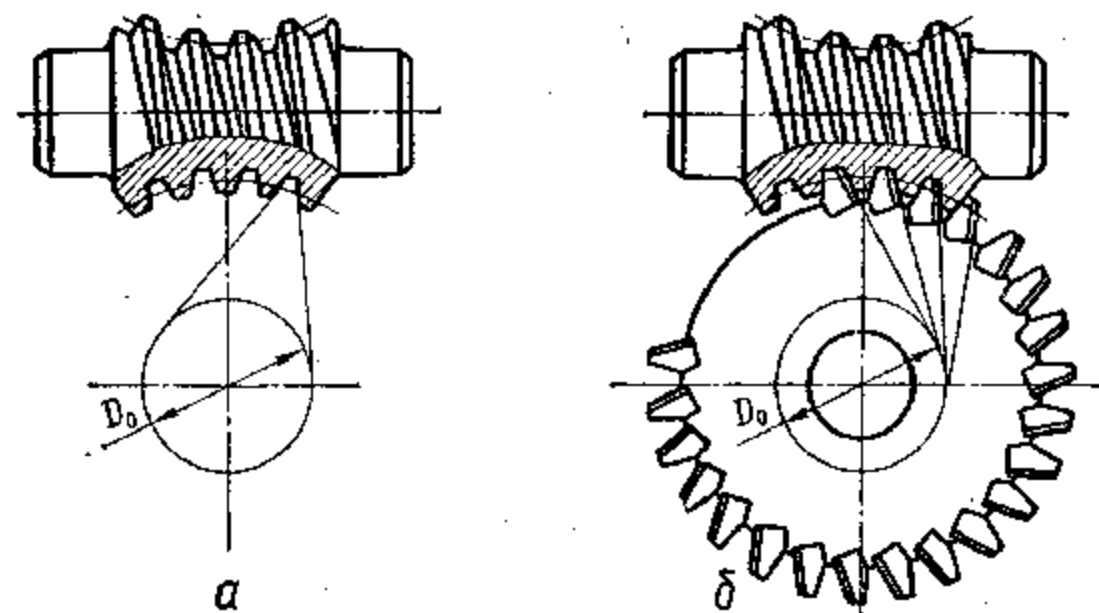


Рис. 13.9. Нарезание витков на глобоидном червяке

щение в направлении ее оси. При комбинированной подаче фреза сначала осуществляет радиальное движение, а затем — тангенциальное.

Колесо нарезается со смещением и без смещения. Смещением x производящего колеса, определяемым коэффициентом смещения x и модулем m , называется расстояние по межосевой линии между делительными поверхностями производящего червяка и обрабатываемого червячного колеса при окончании нарезания. Если указанные делительные поверхности соприкасаются, то червячное колесо получается без смещения. Колесо выполняется глобоидной формы, с вогнутой поверхностью вершин зубьев, образующей вращением вокруг его оси дуги окружности, лежащей в средней плоскости парного червяка.

Нарезание витков на заготовках глобоидных червяков осуществляют на универсальных зубофрезерных станках: заготовка устанавливается в инструментальном шпинделе, а инструмент — на столе станка (рис. 13.9, а). Инструментом могут служить двух- и многолезцовые головки или специальные протяжки (б). Нарезание

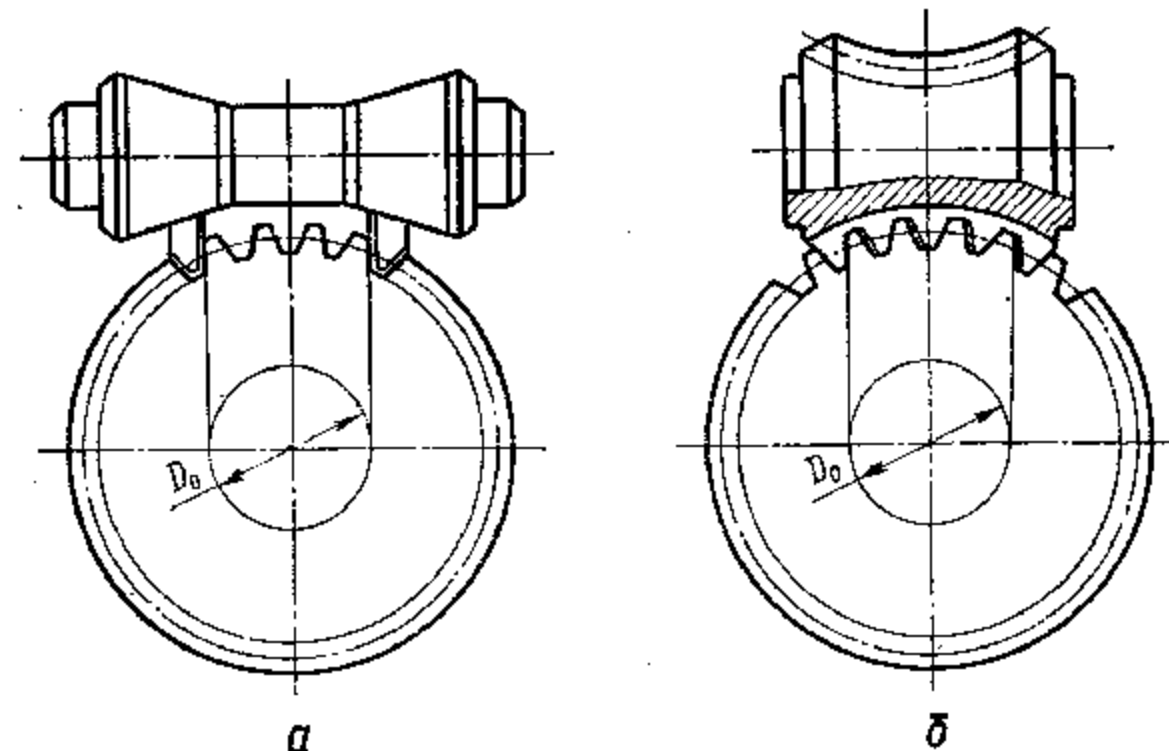


Рис. 13.10. Нарезание зубьев на глобоидном колесе

зубьев на заготовках глобоидных колес (рис. 13.10) производится летучими резцами (рис. 13.10, а) или червячной глобоидной фрезой (рис. 13.10, б), геометрические параметры которой должны соответствовать параметрам исходного производящего глобоидного червяка.

13.8. Определение геометрических размеров червячного механизма

Геометрические размеры червячного механизма определяются межосевым расстоянием a_w , которое зависит от диаметров червяка и колеса (рис. 13.11). Главными параметрами червяка являются модуль m и число q . Модулем червяка называется линейная величина, в π раз меньшая расчетного шага червяка. Расчетным шагом червяка P является делительный осевой шаг витков. У одновиткового червяка расчетным шагом является делительный ход витка, равный расстоянию между одноименными профилями данного витка по образующей делительного цилиндра. Число q называется коэффициентом диаметра червяка и равняется отношению делительного диаметра червяка d_1 к его модулю. Модули и коэффициенты диаметра червяка регламентируются стандартом по ГОСТ 19672—74 (СТ СЭВ 267—76).

Окружности, определяющие размеры червяка в средней торцовой плоскости, называются средними концентрическими. Различают окружности: делительную, диаметром d_1 , начальную — d_{w1} , вершин

витков — d_{a1} , впадин — d_{f1} , принадлежащие соответственно поверхностям делительной, начальной, вершин витков и впадин.

Углом подъема линии витка называется острый угол между касательной в данной точке к линии витка и плоскостью торцового сечения червяка. Различают делительный γ и начальный γ_w углы подъема, соответствующие делительной и начальной линиям витка, углы подъема вершин витка γ_a и впадин γ_f , соответствующие линиям вершин и линиям впадин. Угол подъема на начальном цилиндре и ход P_z связаны зависимостью

$$\gamma_w = \arctg(P_z/\pi d_w) \approx \arctg(z_1/q). \quad (13.3)$$

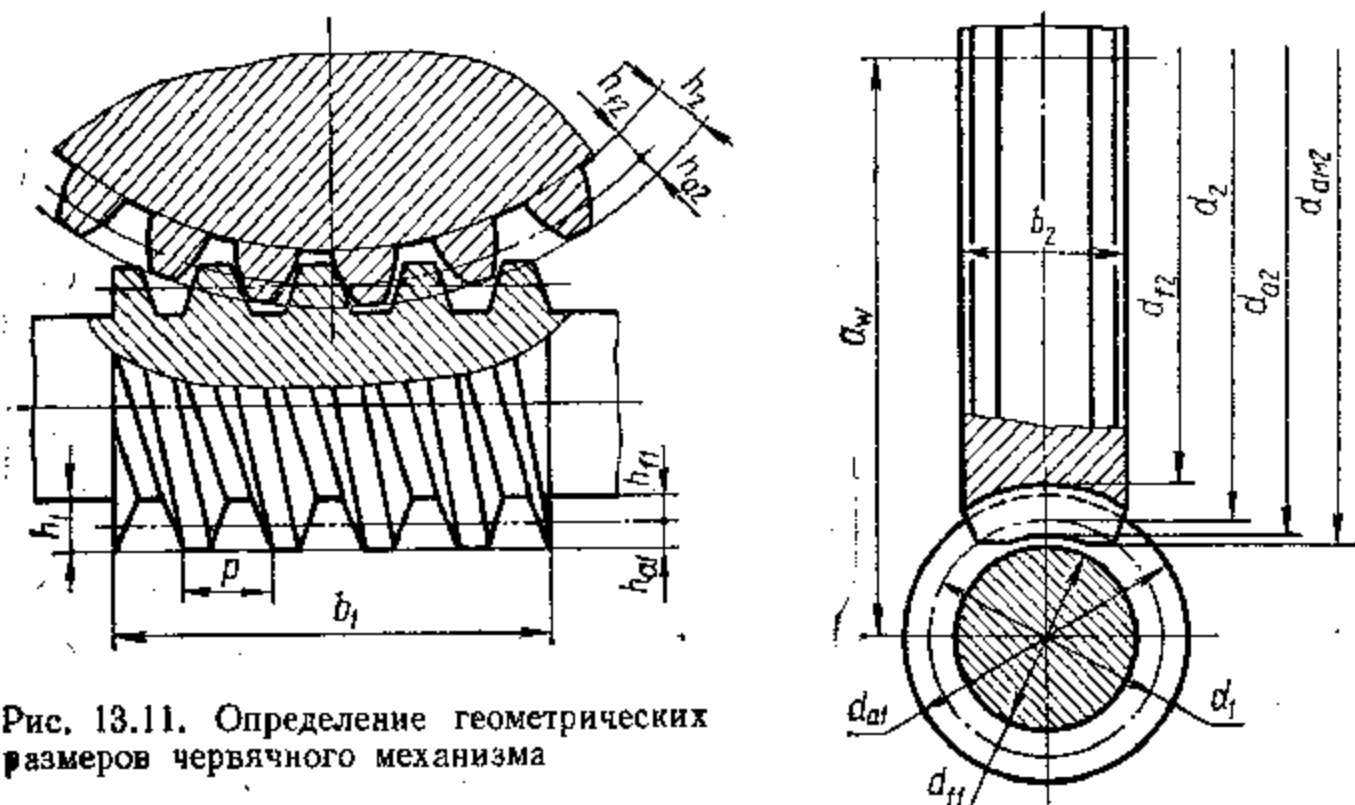


Рис. 13.11. Определение геометрических размеров червячного механизма

Высотой витка h_1 называется расстояние между окружностями вершин витков и впадин червяка. Делительная осевая номинальная толщина витка s равна половине расчетного шага червяка и измеряется на делительной высоте h_{a2} . Длина b_1 нарезанной части червяка соответствует наибольшему расстоянию между торцами витков по линии, параллельной его оси.

Размеры червячного колеса определяются в средней торцовой плоскости, перпендикулярной оси колеса, в которой находится межосевая линия. Окружности, определяющие размеры червячного колеса в этой плоскости, называются средними концентрическими. Различают окружности: делительную — диаметром d_2 , начальную — d_{w2} , вершин зубьев — d_{a2} , впадин — d_{f2} , принадлежащие соответствующим поверхностям — делительной, начальной, вершин и впадин. Наибольший диаметр d_{am2} червячного колеса определяет поверхность вершин зубьев в сечениях, параллельных средней торцовой плоскости. Высота зуба червячного колеса определяется расстоянием между окружностями вершин и впадин его зубьев в средней торцовой плоскости.

Если червячное зацепление выполнено без смещения, то делительные диаметры червяка и червячного колеса равны начальным

метрам и межосевое расстояние будет

$$a_w = 0,5(d_{w1} + d_{w2}) = a = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5m(q + z_2). \quad (13.4)$$

В передачах, нарезанных со смещением x , делительные цилиндры червяка и червячного колеса не касаются друг друга и межосевое расстояние будет отличаться на величину смещения xm :

$$a_w = 0,5(q + z_2 + 2x)m, \quad (13.5)$$

где x — коэффициент смещения червяка, который может принимать положительные или отрицательные значения.

Алгоритм расчета геометрических параметров червячного механизма с цилиндрическим червяком реализуется операторной функцией

$$GCHER(m, q, z_1, z_2, \alpha_x, h^*, h_a^*, s^*, h_f^*, x; a_w, d_1, d_2, \gamma, \gamma_m, \gamma_b, d_b, h_1, h_{a1}, d_{a1}, d_{a2}, d_{am2}). \quad (13.6)$$

13.9. Свойства червячного зацепления

В червячном зацеплении с архимедовым червяком в осевом сечении червяка плоскостью Q , перпендикулярной оси колеса, получается зубчатая рейка с прямолинейным профилем зубьев (рис. 13.12, а). Так как при вращении червяка этот профиль не изменяется, то свойства червячного зацепления изучают на основе эквивалентного реечного зацепления, считая, что постоянный профиль червяка перемещается вдоль его оси. В этом случае сопряженным с профилем поступательно движущейся прямоочной рейки будет эвольвентный профиль зубьев червячного колеса, а линией зацепления будет прямая $n-n$. В сечениях, параллельных плоскости Q , профиль

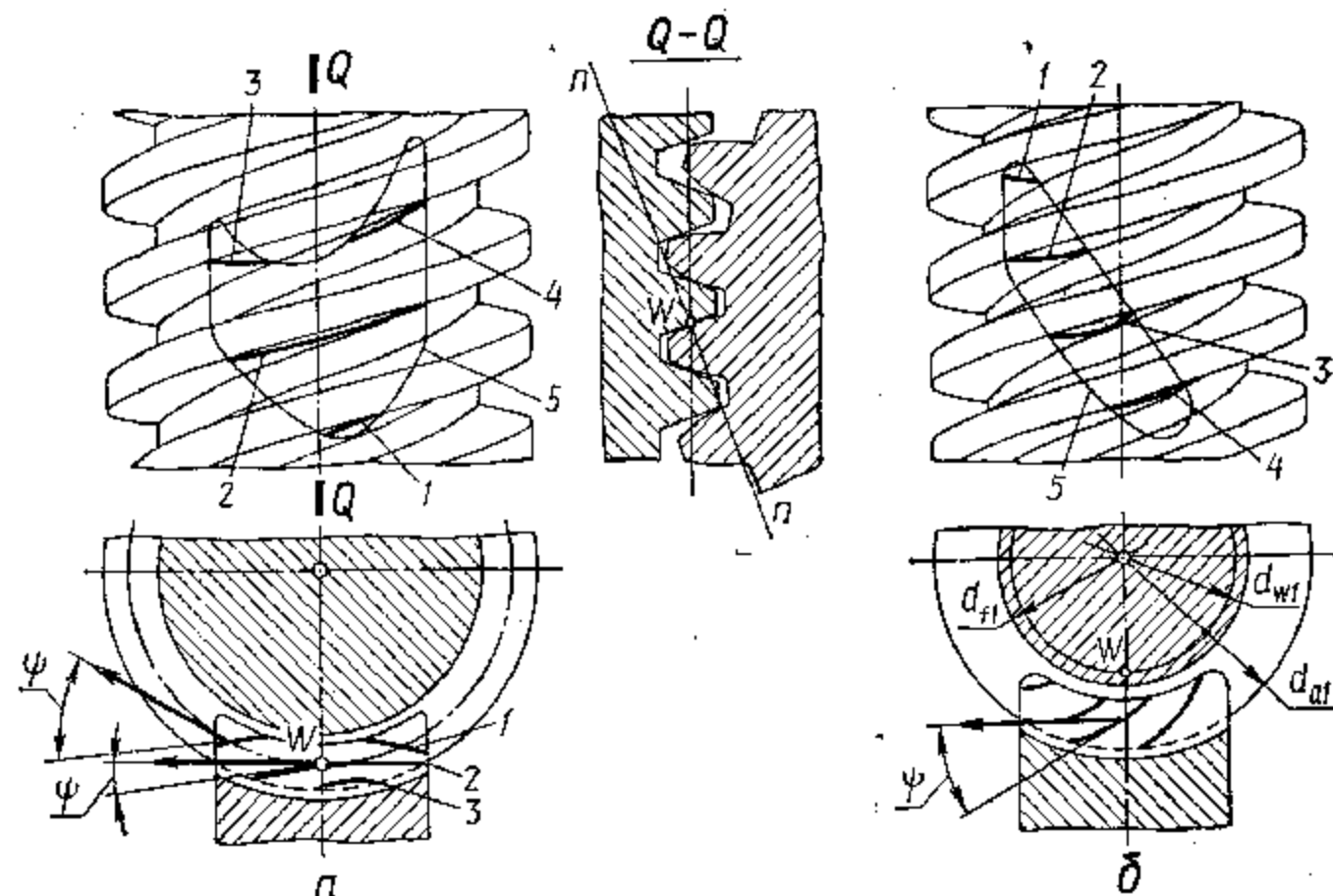


Рис. 13.12. Червячное зацепление

зубьев колеса отличается от эвольвентного, а витков червяка — от прямолинейного, поэтому линии зацепления будут кривыми. Совокупность точек пересечения линий зацепления в параллельных плоскостях с рабочей поверхностью зубьев червячного колеса образуют контактные линии 1, 2, 3, 4. Геометрическое место контактных линий в неподвижной системе координат образует поверхность зацепления 5. Коэффициент перекрытия в червячной паре определяется так же, как и для косозубых колес. Однако так как ширина

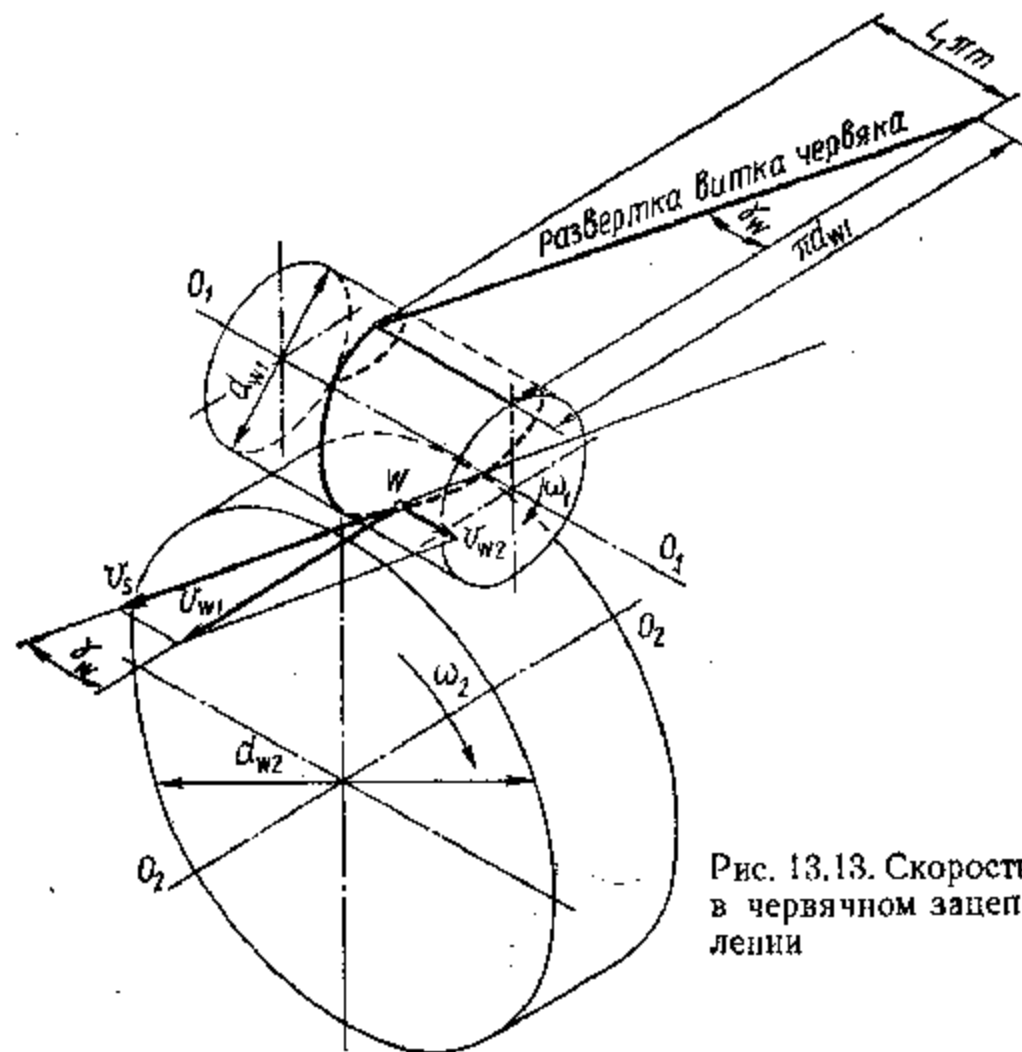


Рис. 13.13. Скорости в червячном зацеплении

колес невелика, то полный коэффициент перекрытия ε_γ приближенно равняется коэффициенту ε_α для реечного зацепления (см. гл. 10).

Свойства червячных зацеплений в значительной мере определяются условиями образования масляного слоя, отделяющего поверхности витков червяка от зубьев червячного колеса. Эти условия зависят от угла ψ между направлением контактных линий и скоростью относительного движения контактирующих элементов. Чем ближе этот угол к $\pi/2$, тем лучше условия для возникновения масляного клина. Для разных точек на поверхности зубьев углы ψ отличаются весьма значительно. Так, вблизи средней торцевой плоскости червячного колеса угол ψ близок к нулю и, следовательно, условия для образования масляного клина в этой зоне неблагоприятны. Это является недостатком передач с цилиндрическим червяком.

Для определения скорости скольжения вдоль зубьев разложим окружную скорость v_{w1} вдоль линии витка на начальном цилиндре и вдоль оси червяка (рис. 13.13). Тогда

$$v_s = v_{w1} / \cos \gamma_w. \quad (13.7)$$

Так как $v_{w1} = 0,5 \cdot 10^{-3} d_w \omega_1 \approx 0,5 q m \omega_1 \cdot 10^{-3}$; $\cos \gamma_w \approx \pi m q / \sqrt{(\pi m q)^2 + (\pi m z_1)^2}$, то после подстановки этих значений в формулу (13.7) получим

$$v_s = 0,5 \cdot 10^{-3} \omega_1 m \sqrt{q^2 + z_1^2}. \quad (13.8)$$

Удельное скольжение в торцевой средней плоскости червячного колеса приближенно можно определять так же, как и для зубчатого зацепления колеса и рейки.

13.10. Влияние смещения на характеристики червячного зацепления

Возможность нарезания червячных колес со смещением позволяет образовывать червячные механизмы с различными свойствами. При необходимости вписывания червячной пары в заданное межосевое расстояние a_w необходимый коэффициент смещения определяется из условия

$$x = (a_w - a) / m. \quad (13.9)$$

При одном и том же инструменте и заданном межосевом расстоянии получают различные значения передаточных отношений. Число зубьев червячного колеса при неизменном межосевом расстоянии a_w из формулы (13.9) будет

$$z_2 = 2a_w / m - q - 2x. \quad (13.10)$$

Обычно коэффициент x выбирают в пределах $-1 \leq x \leq +1$, ограничивая его условиями подрезания и заострения зубьев. При этом преследуется цель вписывания в стандартное межосевое расстояние таких комбинаций чисел зубьев колес, чтобы при одном и том же червяке получить разные передаточные отношения (например, при $z_1 = 1$ и $z_2 = 42; 41; 40; 39; 38$ и, следовательно, $x = -1; -0,5; 0; +0,5; +1$ получим $i_{12} = 42; 41; 40; 39; 38$).

Смещением в червячной паре добиваются исключения из зацепления участков контактных линий с неблагоприятными условиями возникновения масляного клина. Наиболее неблагоприятна в этом отношении точка W касания начальных цилиндров червяка и червячного колеса. Если при смещении обеспечить $d_{a1} \leq d_w$ или $d_{f1} > d_w$ (см. рис. 13.12, б), то зона вокруг этой точки будет из зацепления исключена, что приведет к улучшению формы и положения контактных линий. При этом изменяется поле зацепления 5. У червячной пары со смещением создаются лучшие условия образования масляного клина, благодаря лучшей форме линий контакта поверхностей витков червяка и зубьев колеса, располагающихся под большими углами к векторам относительной скорости.

13.11. Определение геометрических размеров глобоидного механизма

Геометрические размеры глобоидной пары (рис. 13.14) определяются в средней торцевой плоскости глобоидного колеса. Как и в механизме с цилиндрическим червяком, главными параметрами червяка, характеризующими его диаметр в средней торцевой плоскости, являются модуль m и коэффициент q . Диаметры d_1 , d_{w1} , d_{a1} и d_{f1} червяка определяются в средней торцевой плоскости червяка — плоскости, перпендикулярной его оси. Расчетный шаг глобоидного червяка P измеряется по дуге — образующей делительного глобоида — и равен осевому шагу витков червяка.

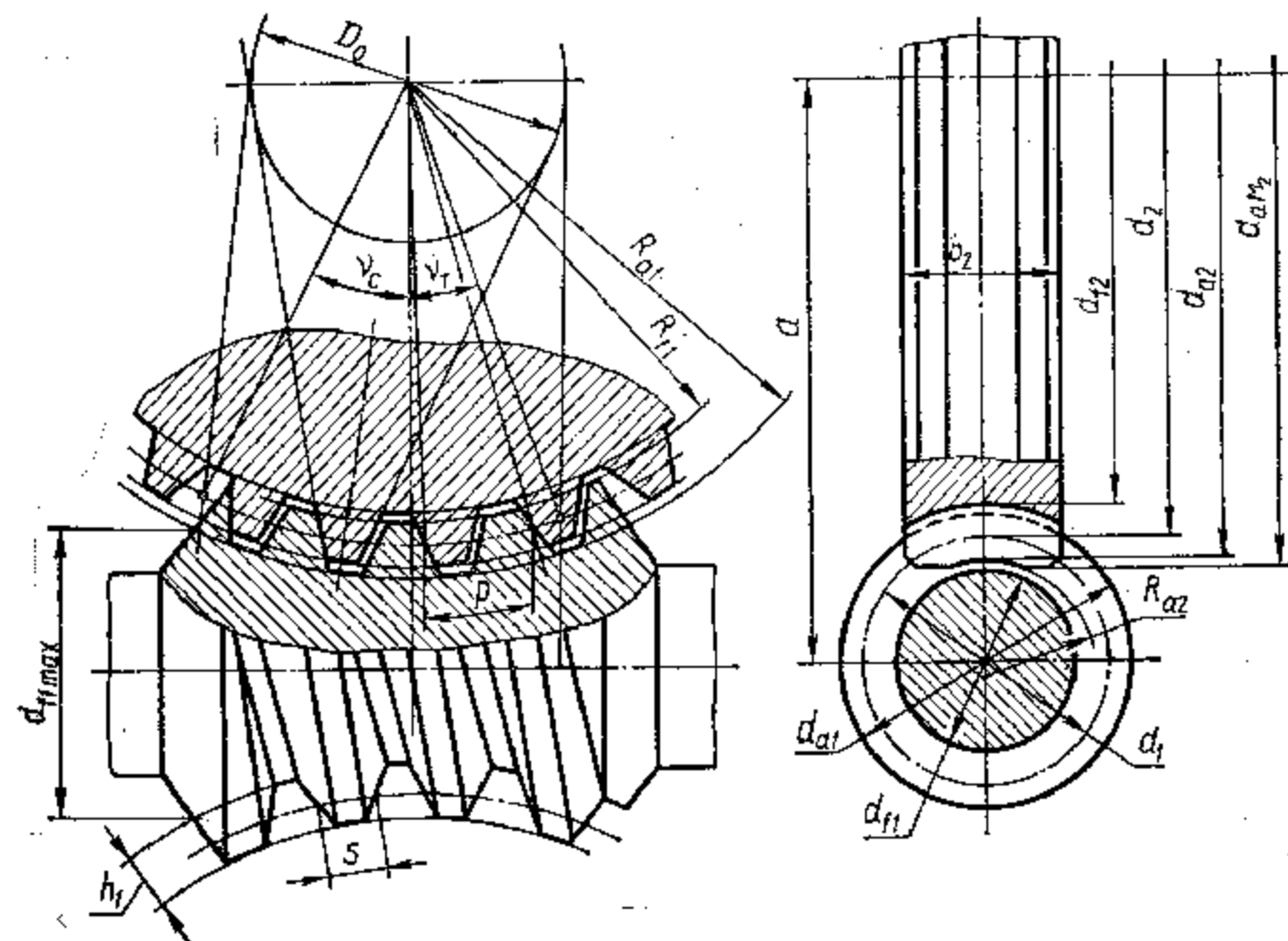


Рис. 13.14. Определение геометрических размеров глобоидного зацепления

Высотой h_1 витка червяка называется расстояние между поверхностями вершин витков и впадин червяка. Делительная осевая номинальная толщина витка s равна половине расчетного шага червяка и измеряется на делительной высоте до хорды витка.

Длина дуги, образующей окружность делительного глобоида, определяется центральным углом — *углом теоретического обхвата* $2\gamma_t$, заключенным между лучами из центра профильной окружности в точке пересечения касательных к этой окружности с делительной окружностью червяка. Длина нарезанной части червяка ограничивается торцовыми коническими поверхностями и определяется углом расчетного обхвата $2\gamma_c$, который зависит от расчетного обхвата червяка $k_c = z_2/10$ с округлением до значений $k_c = 3,5; 4,5; 5,5$ и

числа зубьев колеса z_2 :

$$\gamma_c = 180^\circ k_c / z_2. \quad (13.11)$$

В отличие от цилиндрического червяка, в котором угол подъема витка изменяется только по высоте профиля, в глобоидном угол подъема изменяется также по его длине и имеет максимальное значение в горловине, где диаметр червяка минимальный. Различают *делительный максимальный угол подъема витка* — γ , *начальный* — γ_{w1} , *вершин* — γ_{a1} и *впадин* — γ_{f1} в точках пересечения соответствующих линий витка со средней плоскостью червяка. Делительный угол определяется зависимостью

$$\gamma = \arctg(z_1/q). \quad (13.12)$$

Колесо глобоидной пары по поверхности вершин зубьев выполняется глобоидной формы, т. е. вогнутой, образованной вращением вокруг его оси дуги окружности с радиусом $R_{a2} \geq 0,53d_{f1\max}$. Высота зуба глобоидного колеса — расстояние между окружностями вершин и впадин его зубьев — измеряется в средней торцевой плоскости колеса. Диаметры колеса: *делительный* — d_2 , *начальный* — d_{w2} , *вершин* — d_{a2} и *впадин* — d_{f2} , определяют в той же плоскости.

Межосевое расстояние глобоидной пары будет

$$a = 0,5(d_1 + d_2). \quad (13.13)$$

Алгоритм расчета геометрических параметров глобоидной передачи реализуется операторной функцией

$$GGLOB(q, z_1, z_2, c, a, i_{12}, \Delta; d_1, d_2, m, k_a, k_t, v_t, \gamma_c, D_o, h_{a1}, h_{a2}, R_{f1}, d_{a1}, d_{a2}; R_{a1}, d_{f1}, d_{f2}, e, R_{a2}). \quad (13.14)$$

13.12. Свойства глобоидного зацепления

На поверхности зуба (рис. 13.15, а) глобоидного колеса можно выделить три характерные части. На участке II поверхность зуба является *огibaющей поверхностью витка червяка*, на ней располагаются контактные линии. На участках I и III поверхность зуба является линейчатой и воспроизводится режущей кромкой инструмента; контактные линии на этих участках отсутствуют. Линия АВ, общая для участков II и III, смыкание которых происходит с перегибом, находится в средней торцевой плоскости Q. В этой плоскости все зубья червячного колеса, охватываемые червяком, контактируют с червяком по этой линии на всей рабочей высоте витков. Часть зубьев червячного колеса, охватываемых червяком, помимо касания в главной плоскости имеет еще одну контактную линию, перемещающуюся по участку II поверхности зуба (некоторые положения этой линии 1, 2, 3 показаны на рис. 13.15, а). Все контактные линии располагаются в направлении к центру колеса, вследствие чего векторы скорости скольжения образуют с ними углы ψ , близкие к 90° , что способствует образованию устойчивого масляного клина и определяют по сравнению с цилиндрическими червячными механизмами более высокую работоспособность. Геометрическое

место контактных линий глобoidной пары в неподвижной системе координат будет представлять сложную пространственную поверхность, состоящую из *основного 1'* и *дополнительного 2'* полей зацепления.

Для улучшения условий работы глобoidной пары предусматривается модификация червяка; в этой целью на начальных участ-

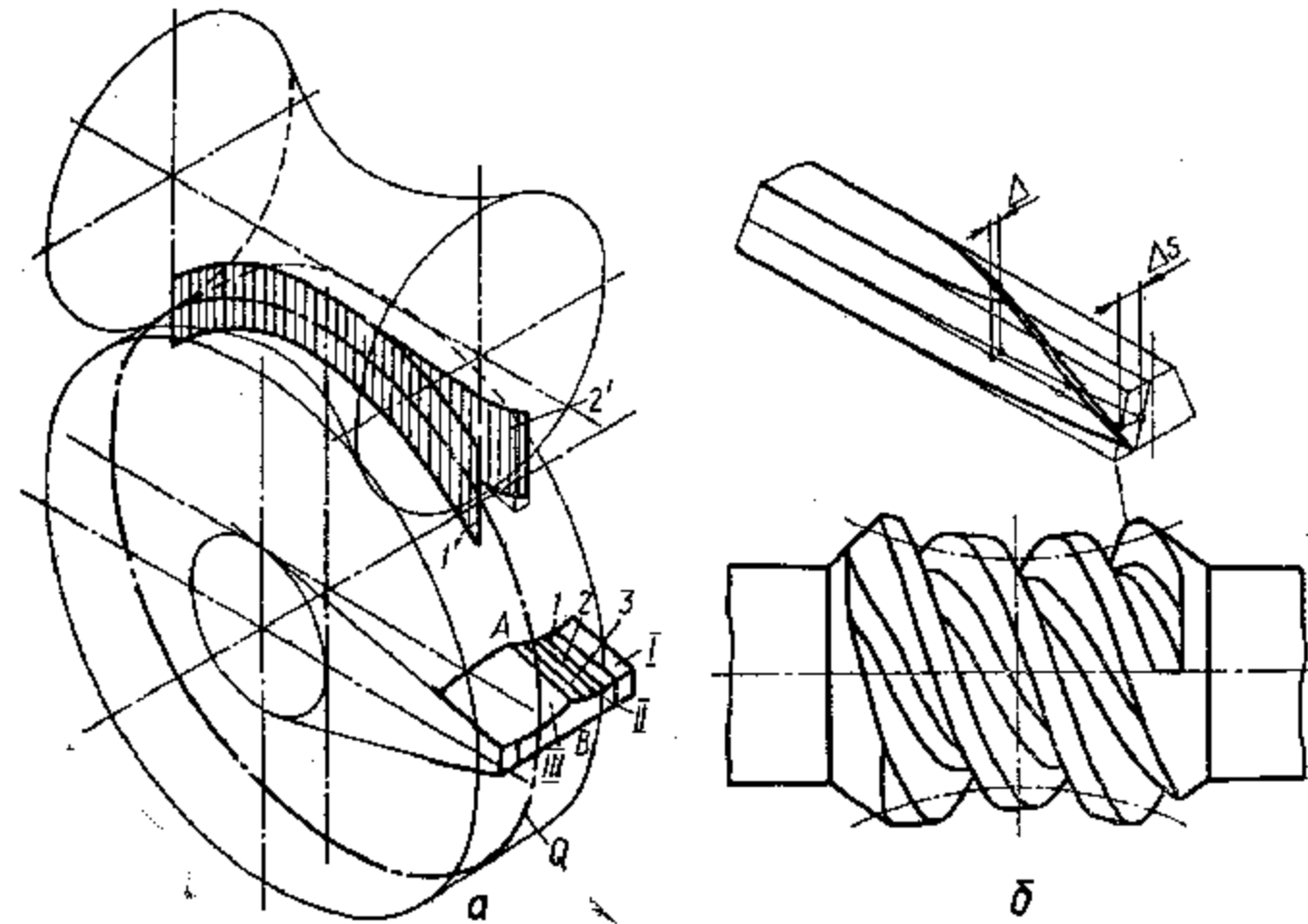


Рис. 13.15. Глобoidное зацепление

ках витков образуют скосы (рис. 13.15, б). Отличие номинальной поверхности модифицированного червяка заключается в отклонении линии его витка на делительном глобоиде от теоретической. Отклонение характеризуется *глубиной модификации Δ*, которая в пределах угла $2\nu_c$ выполняется в форме квадратной параболы:

$$\Delta = \Delta_s (0,3 + 0,7\nu/\nu_c)^2, \quad (13.15)$$

где Δ_s — наибольшая расчетная глубина модификации на расчетной крайней прямой, образующей поверхности витка; ν — текущее значение угла $\nu_c < \nu < -\nu_c$.

14. СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

14.1. Задачи синтеза зубчатых механизмов

При синтезе передаточных зубчатых механизмов необходимо удовлетворить ряд частных критериев, определяющих: точность воспроизведения заданной передаточной функции, особенности геометрии зубчатых зацеплений, технологичность изготовления и сборки механизма и т. п. При структурном синтезе определяется тип

механизма и его схема. Тип механизма выбирается исходя из требований к коэффициенту полезного действия и относительному положению входных и выходных звеньев. При этом целесообразно использовать в механизме минимум звеньев и кинематических пар, обеспечив отсутствие избыточных связей. Следующим этапом является определение геометрических и кинематических параметров механизмов: чисел зубьев колес, их модулей, смещения исходного контура и др.

В большинстве случаев выбор параметров синтеза производится по доминирующему показателю, каким прежде всего является точность воспроизведения заданного передаточного отношения $i = \omega_{вх}/\omega_{вых}$, формализуемому целевой функцией

$$\Phi = |i - f(z_i)|, \quad (14.1)$$

где $f(z_i)$ — передаточная функция, зависящая от схемы механизма и чисел зубьев колес, входящих в состав его, и определяющая действительное передаточное отношение.

Для простейшего трехзвенного зубчатого механизма передаточная функция имеет следующий вид (см. гл. 19):

$$f(z_i) = i_{12} = \mp (z_2/z_1). \quad (14.2)$$

При подборе чисел зубьев z_1 и z_2 колес требуется определить такие их сочетания, при которых целевая функция имеет минимум. Область допускаемых решений при поиске этого минимума ограничивается необходимостью вписаться в заданное межосевое расстояние, типом применяемого инструмента, значениями модулей и параметрами принятого производящего контура. В более сложных механизмах, состоящих из большого количества зубчатых колес, передаточная функция зависит от большого числа параметров, и задача синтеза зубчатого механизма из двухпараметрической превращается в многопараметрическую. К перечисленным ограничениям при синтезе некоторых механизмов добавляются условия *соседства* зубчатых колес и *сборки* зубчатого механизма.

При синтезе механизмов со ступенчато-изменяющимся передаточным отношением необходимо обеспечить несколько их значений посредством включения управляющих устройств. Поэтому при синтезе таких механизмов необходимо удовлетворить несколько частных показателей, формализуемых целевыми функциями вида (14.1), и выбор параметров синтеза производится по комплексному показателю, формализуемому *комплексной целевой функцией*

$$\Phi = \sum_{k=1}^n q_k \Phi_k = \sum_{k=1}^n (q_k |i_k - f(z_i)|), \quad (14.3)$$

где Φ_k — целевая функция, формализующая требование осуществления k -го передаточного отношения — i_k ; n — число заданных ступенчато-изменяющихся передаточных отношений; $f(z_i)$ — передаточная функция механизма от комбинации i -х зубчатых колес, определяемой управляющими устройствами при реализации k -го передаточного отношения; q_k — весовой коэффициент, определяю-

Таблица 14.1. Одноступенчатые зубчатые механизмы

№ п/п	Схема механизма	Передаточная функция	Пере- доч- ное от- ноше- ние i	Ориен- тиро- вый КПД
1		$i_{12} = -z_2/z_1$	0,2	0,99
2		$i_{13}^2 = 1 + z_2 z_3 / z_1 z_2$	7	0,98
3		$i_{31}^3 = 1 - z_1 z_2' / z_2 z_3$	25... 300	0,9... 0,4
4		$i_{h1} = 1 / (1 - z_2 z_3 / z_1 z_2)$	30... 300	0,9... 0,4
5		$i_{h1} = z_2 / (z_3 - z_2)$	7... 70	0,94... 0,8
6		$i_{h1} = z_2 / (z_3 - z_2)$	50... 400	0,9... 0,7

щий требования к точности заданного k -го передаточного отношения механизма.

Коэффициент q_k назначается в соответствии с требованиями к точности воспроизведения k -го передаточного отношения, определяемой условиями функционирования машины. Чем точнее должна быть осуществлена реализация k -го значения, тем выше соответствующий ему коэффициент q_k . Численные значения коэффициентов q_k выбираются таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{k=1}^n q_k = 1. \quad (14.4)$$

Так как количества зубьев зубчатых колес должны быть целыми числами, подбор их значений при использовании целевых функций (14.1) и (14.2) производится методами целочисленного программирования, которые отличаются от обычных методов многопараметрической оптимизации тем, что на соответствующие решения накладываются условия целочисленности.

Постановку задачи целочисленного программирования рассмотрим на примере простейшего трехзвенного механизма (табл. 14.1, п. 1), целевая функция для которого представлена в виде условия (14.1). Сначала находят предварительное решение, соответствующее минимуму этой целевой функции, при которой в общем случае числа зубьев z_1^* и z_2^* не будут целые числа. Затем налагаются дополнительные условия целочисленности, заключающиеся в установлении границ выбора фактических значений ближайших чисел зубьев:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{1б} \text{ и } z_2 = z_{2б}; & z_1 &= z_{1м} \text{ и } z_2 = z_{2м}; \\ z_1 &= z_{1б} \text{ и } z_2 = z_{2м}; & z_1 &= z_{1м} \text{ и } z_2 = z_{2б}, \end{aligned} \quad (14.5)$$

где $z_{1б}$, $z_{2б}$ и $z_{1м}$, $z_{2м}$ — ближайшие большие и меньшие целые числа относительно полученных значений z_1^* и z_2^* .

Из условия (14.5) выбирается вариант, удовлетворяющий заданным ограничениям по межосевому расстоянию, диапазону выбора коэффициентов смещения x_1 и x_2 из условий прочности, износостойкости, предотвращения интерференции при нарезании зубьев и их взаимодействии, которому соответствует минимальное значение целевой функции. Для более сложных механизмов число вариантов увеличивается, и подбор чисел зубьев по заданному передаточному отношению является сложной задачей, требующей применения ЭВМ.

14.2. Рядовые зубчатые механизмы

Рядовые одноступенчатые механизмы, состоящие из пары зубчатых колес одного из рассмотренных зацеплений, являются простейшими представителями многочисленного семейства зубчатых механизмов. Они применяются чаще всего при передаточных отношениях $i \leq 8$, так как при больших передаточных отношениях их габаритные размеры, масса, а, следовательно, и стоимость больше, чем у более сложных зубчатых механизмов.

Для получения больших передаточных отношений при минимальных диаметральных габаритных размерах используются механизмы, составленные из нескольких последовательно соединенных одноступенчатых рядовых механизмов. В табл. 14.2, п. 1 показан составной механизм с двумя зубчатыми зацеплениями. В этом механизме передаточное отношение от звена 1 к звену 2

$$i_{12} = \omega_1/\omega_2; \quad (14.6)$$

от звена 2 к звену 3

$$i_{23} = \omega_2/\omega_3. \quad (14.7)$$

Перемножая правые и левые части этих уравнений, получим

$$i_{12} \cdot i_{23} = \omega_1/\omega_3.$$

Так как $\omega_1/\omega_3 = i_{13}$, то общее передаточное отношение зубчатого механизма равно произведению передаточных отношений пар зубчатых колес, входящих в его состав:

$$i_{13} = i_{12} i_{23}. \quad (14.8)$$

Зацепление одной пары зубчатых колес в таком механизме называется *ступенью*. При n ступенях общее передаточное отношение будет

$$i_{1n} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{24} \cdot \dots \cdot i_{n-1,n} = \prod_{k=1}^n i_k. \quad (14.9)$$

При синтезе зубчатых механизмов, состоящих из нескольких ступеней, критериями при выборе передаточных отношений отдельных ступеней являются минимальные габаритные размеры, масса, унификация зубчатых колес. Если передаточные отношения в многоступенчатом несоосном механизме (табл. 14.2, п. 1) выбраны, то подбор чисел зубьев отдельных ступеней производится так же, как и для одноступенчатых механизмов. В соосных рядовых многоступенчатых зубчатых механизмах (табл. 14.2, п. 2) необходимо обеспечить условие соосности

$$a_{w_{12}} = a_{w_{23}} = \dots = a_{w_{(n-1),n}}, \quad (14.10)$$

которое для прямозубых колес определяется следующим выражением (знак «+» относится к внешнему, а знак «-» — к внутреннему зацеплению):

$$\begin{aligned} (z_1 \pm z_2) m_{12}/\cos \alpha_{w_{12}} &= (z_2' \pm z_3) m_{2'3}/\cos \alpha_{w_{2'3}} = \\ &= (z_{(n-1)'} \pm z_n) m_{(n-1)'n}/\cos \alpha_{w_{(n-1)'n}}, \end{aligned} \quad (14.11)$$

где $m_{12}, m_{23}, \dots, m_{(n-1)'n}$ — модули пар зубчатых колес 1, 2, n -й ступеней; $\alpha_{w_{12}}, \alpha_{w_{2'3}}, \dots, \alpha_{w_{(n-1)'n}}$ — углы зацепления зубчатых колес соответствующих ступеней.

При косозубых колесах условие соосности будет следующим:

$$\begin{aligned} (z_1 \pm z_2) m_{12}/\cos \alpha_{t_{w_{12}}} &= (z_2' \pm z_3) m_{2'3}/\cos \alpha_{t_{w_{2'3}}} = \\ &= (z_{(n-1)'} \pm z_n) m_{(n-1)'n}/\cos \alpha_{t_{w_{(n-1)'n}}}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Таблица 14.2. Составные зубчатые механизмы

№ п/п	Схема механизма	Передаточная функция	Передаточное отношение i	Ориентировочный КПД
1		$i_{13} = z_2 z_3 / z_1 z_2'$	5...64	0,98
2		$i_{15} = z_2 z_3 z_4 z_5 / z_1 z_2' z_3' z_4'$	15...625	0,96 0,92
3		$i_{14} = -(z_2/z_1) (1 + z_4/z_2')$	6...128	0,98 0,96
4		$i_{14} = (1 + z_3/z_1) (1 + z_3/z_2')$	6...100	0,8 0,94
5		$i_{14} = (1 + z_3/z_1) / (1 - z_2 z_3 / z_4 z_1)$	20...500	0,9... 0,7
6		$i_{14} = (1/(1 + z_1/z_3)) (1 - z_4/z_3) + (1/(1 + z_3/z_1)) (1 - z_4/z_1)$		

14.3. Планетарные зубчатые механизмы

Большим разнообразием схем отличаются планетарные механизмы (табл. 14.2, п. 3...6). Эти механизмы содержат *сателлитные колеса* (см. гл. 2), перемещающиеся совместно с водилом h относительно центральных колес, оси которых неподвижны. Из-за особенностей кинематики с помощью этих механизмов получают значительно больший диапазон изменения передаточных отношений. Однако следует иметь в виду, что с изменением передаточного отношения меняются эксплуатационные характеристики механиз-

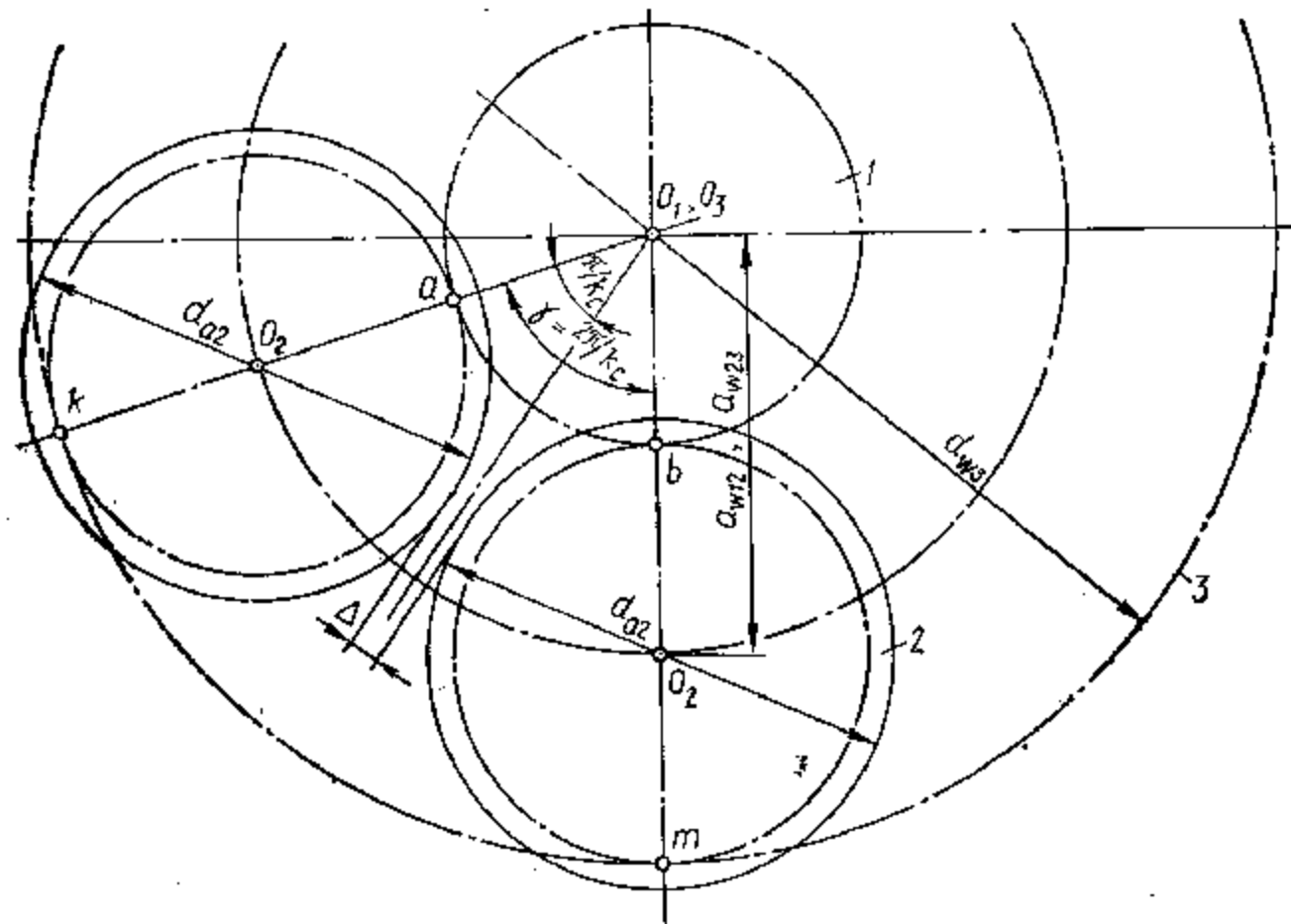


Рис. 14.1. Условие соседства и сборки в сателлитном механизме

мов. Например, при увеличении значения i коэффициент полезного действия некоторых механизмов (табл. 14.1, п. 5) существенно уменьшается.

Подбор чисел зубьев планетарных передач производится с использованием целевой функции (14.1) при ограничениях по условию соосности, рассмотренному для рядовых соосных передач. Для зацеплений сателлитов с центральными колесами выполняется условие

$$a_{w12} = a_{w23}. \quad (14.13)$$

Кроме этого, в планетарных многосателлитных передачах на числа зубьев зубчатых колес накладываются ограничения по условиям соседства и сборки. Условие соседства заключается в обеспечении зазора Δ между окружностями выступов сателлитов (рис. 14.1), определяемого потерями на вентиляцию и перемешивание смазочного материала:

$$\Delta \geq 2a_w \sin(\pi/k_c) - d_{a2}, \quad (14.14)$$

где a_w — межосевое расстояние в зацеплении центрального колеса с сателлитами; k_c — число сателлитов; d_{a2} — диаметр окружности выступов сателлитов.

Условие сборки обеспечивает одновременность зацепления всех сателлитов с центральными колесами. Несобираемость передачи объясняется следующим образом. Первый смонтированный сателлит полностью определяет взаимное положение центральных колес и водила. Монтаж уже второго сателлита определяется положением одного из центральных колес и водила, и при равномерном расположении сателлитов по окружности может быть невыполним, так как зуб сателлита оказывается не против впадины между зубьями центрального колеса, а против зуба одного из этих колес.

Условие сборки для случая, когда оси сателлитов равномерно расположены по окружности, т. е. углы γ между радиусами-векторами центров сателлитов одинаковы и равны $2\pi/k_c$ (рис. 14.1), обеспечивается при совпадении осей симметрии зубьев центрального колеса и осей симметрии впадин между зубьями сателлитов. Это достигается в том случае, когда участок ab делительной окружности колеса 1 должен быть кратным окружному шагу P , т. е. $l_{ab}/P = C$ (C — любое целое число). Так как $l_{ab} = \pi d_1/k_c$, а $\pi d_1 = z_1 P$, то $\pi d_1/k_c P = C$ и

$$z_1 = Ck_c. \quad (14.15)$$

Такое же условие можно записать для зацепления сателлитов с центральным колесом 3, рассматривая участок km , делительной окружности колеса 3

$$z_3 = Ck_c. \quad (14.16)$$

Так как сателлиты 2 входят одновременно в два зацепления, то, рассматривая совместно условия (14.15) и (14.16), получим

$$z_1 = z_3 = Ck_c. \quad (14.17)$$

Для передач с сателлитами, состоящими из двух зубчатых венцов с нерегулируемым угловым положением, простейший расчет и сборка обеспечиваются в случае, если каждое из значений z_1 и z_3 кратно k_c .

При малой разности Δz чисел зубьев центрального колеса с внутренними зубьями и сателлита можно получить большое передаточное отношение. Обычно в таком механизме (табл. 14.1, п. 5) входным звеном при неподвижном звене 3 является водило h , а выходным — звено 1, связанное с осью сателлита 2 двойной муфтой. Однако конструировать и изготавливать такую передачу при малой разности зубьев колес сложно из-за несоосности колес 3 и 2. Эти трудности устраняются при использовании *волнового зацепления* (см. гл. 2). В таком механизме, называемом *волновым* (табл. 14.1, п. 6), сателлит 2 выполняют в виде тонкого деформируемого стакана, связанного со звеном 1. Под воздействием *генератора волн*, установленного на водиле h , зубья на стакане входят в зацепление с зубьями центрального колеса 3. КПД волновой передачи, в отличие от передач с жесткими звеньями, может быть одинаково высок

при передаточных отношениях $i = 70 \dots 400$, в связи с чем эффективность применения их тем выше, чем больше передаточное отношение.

Задача синтеза планетарных направляющих механизмов (рис. 14.2) формулируется в следующем виде. Задана некоторая кривая $x = x(y)$, которую должна воспроизводить точка k сателлита 2, взаимодействующего с центральным колесом 3 внутреннего зацепления. Параметрами синтеза являются радиус водила r_h , радиус

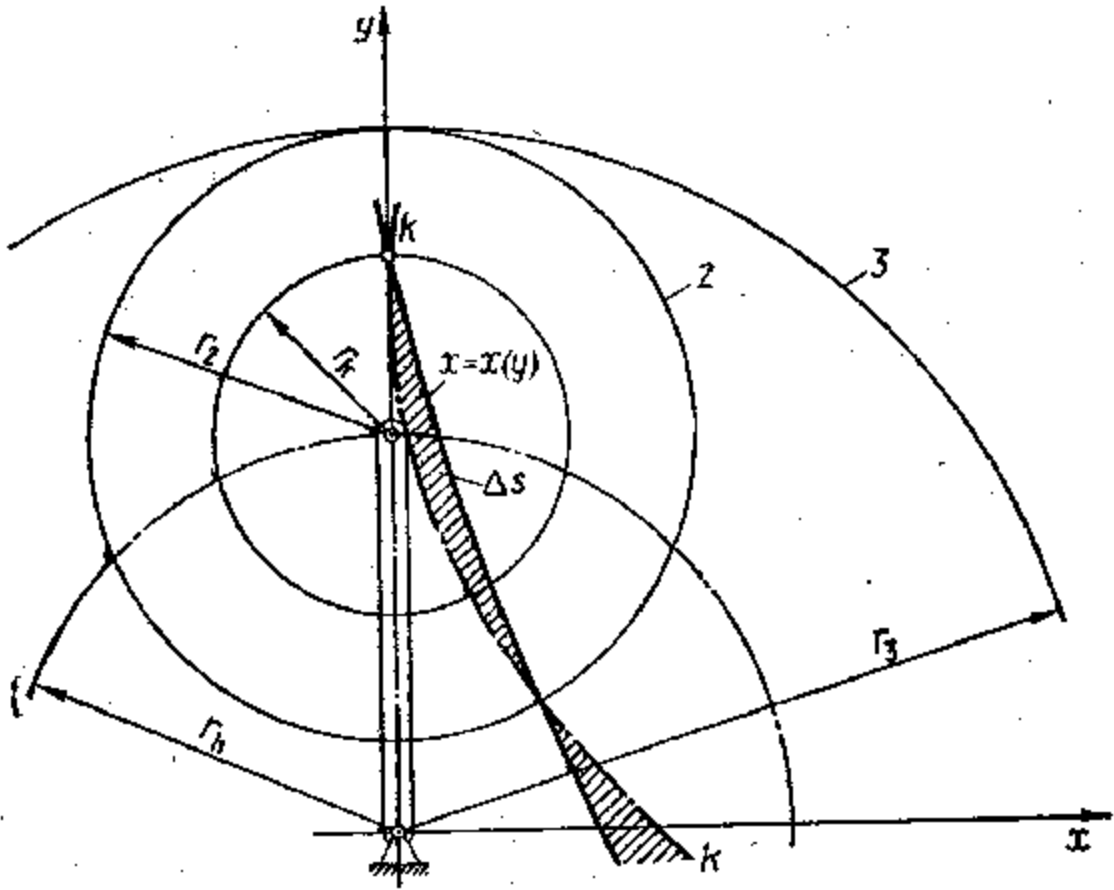


Рис. 14.2. Синтез планетарных направляющих механизмов

r_k точки k сателлита и передаточное отношение $i_{23}^h = z_3/z_2$. Целевая функция определяется выражением

$$\Phi = |S_1 - S_2|, \tag{14.18}$$

где S_1 — площадь, ограниченная заданной кривой $x = x(y)$ и осями x, y ; S_2 — площадь, ограниченная кривой KK , являющейся траекторией точки K и этими же осями.

Функция (14.18) выражает условие минимума площади ΔS , заключенной между заданной и воспроизводимой кривой. Траектория точки K в параметрической форме при начальном условии, соответствующем углу поворота водила $\varphi = 0$ и положению точки K на оси y , описывается уравнениями

$$x = x(r_h, r_k, r_2, r_3, \varphi); \quad y = y(r_h, r_k, r_2, r_3, \varphi). \tag{14.19}$$

В зависимости от формы заданной кривой на описываемые параметры механизма вводятся определенные ограничения. Отношение r_3/r_2 определяет семейство кривых, описываемых точкой K . При $r_3/r_2 = 1$ кривая представляет собой эллипс (табл. 14.3). При $r_3/r_2 = 2$ получим фигуру с тремя осями симметрии; при $r_3/r_2 = 3$ —

с четырьмя осями и т. д. Число осей у описываемых фигур на единицу больше отношения r_3/r_2 .

Отношение $q = r_h/r_2$ определяет форму воспроизводимой кривой: при $q = 1$ (когда $r_h = r_2$) воспроизводимые точкой K кривые представляют собой гипоциклоиды и при $r_3/r_2 = 1$ механизм будет точно прямолинейно направляющим. С уменьшением q гипоциклоиды становятся укороченными и в пределе при q , стремящемся к нулю, приближаются к окружности радиуса r_3 . Наоборот, с увеличением q получаются удлиненные гипоциклоиды, образующие петли тем

Таблица 14.3. Кривые воспроизводимые точкой K сателлита направляющего планетарного механизма

r_3/r_2	$q=0,5$	$q=1$
1		
2		
3		

больших размеров, чем больше значение q . После определения параметров r_h, r_k, r_2, r_3 подбор чисел зубьев производится так же, как и в передаточных планетарных механизмах.

14.4. Составные зубчатые механизмы

В зависимости от требований к механизму выбирается схема одноступенчатого рядового, планетарного, волнового зубчатого механизма либо их комбинаций. При последовательном соединении нескольких механизмов общее передаточное отношение равно произведению передаточных отношений отдельных механизмов, поэтому составные зубчатые механизмы отличаются не только сравнительно большими передаточными отношениями, но и возможностью более точного воспроизведения заданного передаточного отношения, так как передаточная функция определяется числами зубьев сравнительно большого числа зубчатых колес. Например, зубчатый механизм, составленный из рядовой и планетарной зубчатых передач (табл. 14.2, п. 3), будет иметь передаточное отношение

$$i_{1h} = i_{12} \cdot i_{2h} \tag{14.20}$$

и при предельных значениях передаточных отношений этих механизмов $i_{12} = 8$ и $i_{2h} = 16$ получим $i_{1h} = 128$. Большое распространение получили двухступенчатые планетарные механизмы (табл. 14.2, п. 4), передаточная функция которых определяется выражением

$$i_{1h_2} = i_{1h_1} \cdot i_{1h_2} \tag{14.21}$$

Сравнительно большие передаточные отношения можно получить в замкнутых дифференциальных механизмах путем введения кинематических связей в виде рядовых или планетарных передач, устанавливающих соотношение между угловыми скоростями центральных зубчатых колес или угловыми скоростями одного из центральных колес и водила. Замкнутый дифференциальный механизм, полученный введением дополнительной кинематической связи в виде двухступенчатого рядового механизма, состоящего из зубчатых колес $1', 4, 4', 3'$ (табл. 14.2, п. 6), обеспечивает $i = 20$. Ограничениями на подбор чисел зубьев в этой передаче являются условия соосности, сборки и соседства для зубчатых колес дифференциала и условия соосности для зубчатых колес замыкающего двухступенчатого зубчатого механизма.

14.5. Зубчатые механизмы со ступенчато изменяющимся передаточным отношением

Механизмы со ступенчато изменяющимся передаточным отношением могут быть созданы на базе рядовых и дифференциальных зубчатых передач. Примером таких механизмов могут служить коробки передач (рис. 14.3). В данном случае соосный трехзвенный зубчатый механизм состоит из входного звена I с расположенным на нем зубчатым колесом 1 , входящим в зацепление с зубчатым колесом 2 ,

промежуточного звена II , с жестко закрепленными зубчатыми колесами $2', 2'', 2'''$, количество которых определяется числом заданных передаточных отношений. Зубчатые колеса $2', 2''$ и $2'''$ постоянно зацепляются с зубчатыми колесами $3', 3'', 3'''$, свободно вращающимися на выходном звене III . Коробка передач снабжена управляемыми муфтами a и b , которые могут осуществлять соединение соответствующих зубчатых колес с звеном III или соединять звенья I и III непосредственно, образуя прямую передачу. Целевая функция

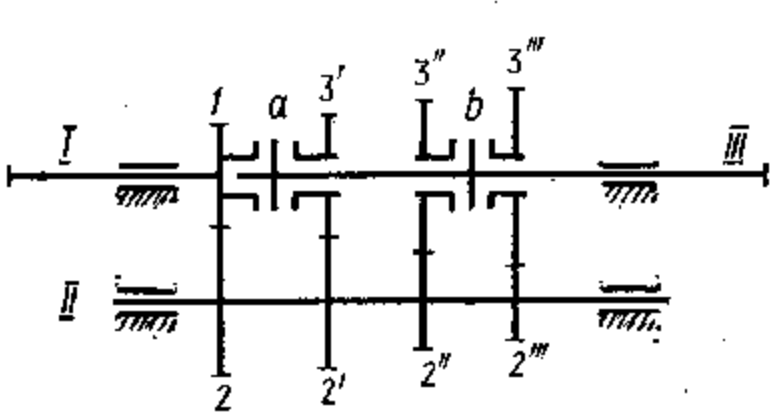


Рис. 14.3. Схема коробки передач

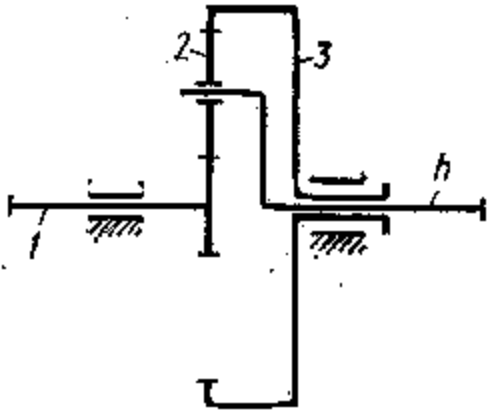


Рис. 14.4. Схема зубчатого дифференциала

Рис. 14.5. Схема механизма с двумя зубчатыми дифференциалами

для подбора чисел зубьев зубчатых колес этого механизма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi = & q(i_1 - z_2 z_{3''} / z_1 z_{2''}) + \\ & + q_2(i_2 - z_2 z_{3''} / z_1 z_{2''}) + \\ & + q_3(i_3 - z_2 z_{3''} / z_1 z_{2''}), \end{aligned} \tag{14.22}$$

где i_1, i_2 и i_3 — заданные передаточные отношения.

Область допускаемых решений при подборе чисел зубьев зубчатых колес ограничивается условием соосности

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) m_{1,2} / \cos \alpha_{12} &= (z_2' + z_3') m_{2',3'} / \cos \alpha_{12',3'} = \\ &= (z_2'' + z_3'') m_{2'',3''} / \cos \alpha_{12'',3''} = (z_2''' + z_3''') m_{2''',3'''} / \cos \alpha_{12''',3'''} \end{aligned} \tag{14.23}$$

Зубчатый механизм с тремя разными передаточными отношениями получают при помощи зубчатого дифференциала (рис. 14.4), путем остановки одного из его звеньев — $1, 3$ или h . Однако в таком механизме необходимо каждый раз изменять входные и выходные звенья. Четыре передаточных отношения, одно из которых $i = 1$, при неизменных выходных и входных звеньях можно получить при последовательном соединении двух дифференциальных механизмов (рис. 14.5). Первое передаточное отношение получим при остановке звена 5 и соединении звеньев 1 и 3, второе — при остановке звена 3 и соединении звеньев 6 и 5, третье — при остановке колес 3 и 5 и четвертое — при прямой передаче от звена 1 к 6-му звену.

Целевая функция для определения чисел зубьев для этого механизма имеет следующий вид

$$\Phi = q_1(i_1 - i_{46}^{(5)}) + q_2(i_2 - i_{14}^{(3)}) + q_3(i_3 - i_{12}^{(3)} \cdot i_{46}^{(5)}), \quad (14.24)$$

где $i_{46}^{(5)}$, $i_{14}^{(3)}$ — передаточные функции планетарных передач (см. гл. 19).

Область допускаемых решений при подборе чисел зубьев зубчатых колес ограничивается условием соосности и сборки.

15. СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

15.1. Основные характеристики и параметры

Основными характеристиками кулачкового механизма являются закон движения ведомого звена, величина и закон изменения усилия, которое может воспринимать это звено. В зависимости от назначения механизма может быть задан только ход выходного звена — максимальное перемещение толкателя или угол качания коромысла. При этом не учитывается закон изменения скорости и ускорения в пределах заданных перемещений. В других случаях кроме хода выходного звена предъявляется определенное требование к закону изменения его скорости или ускорения.

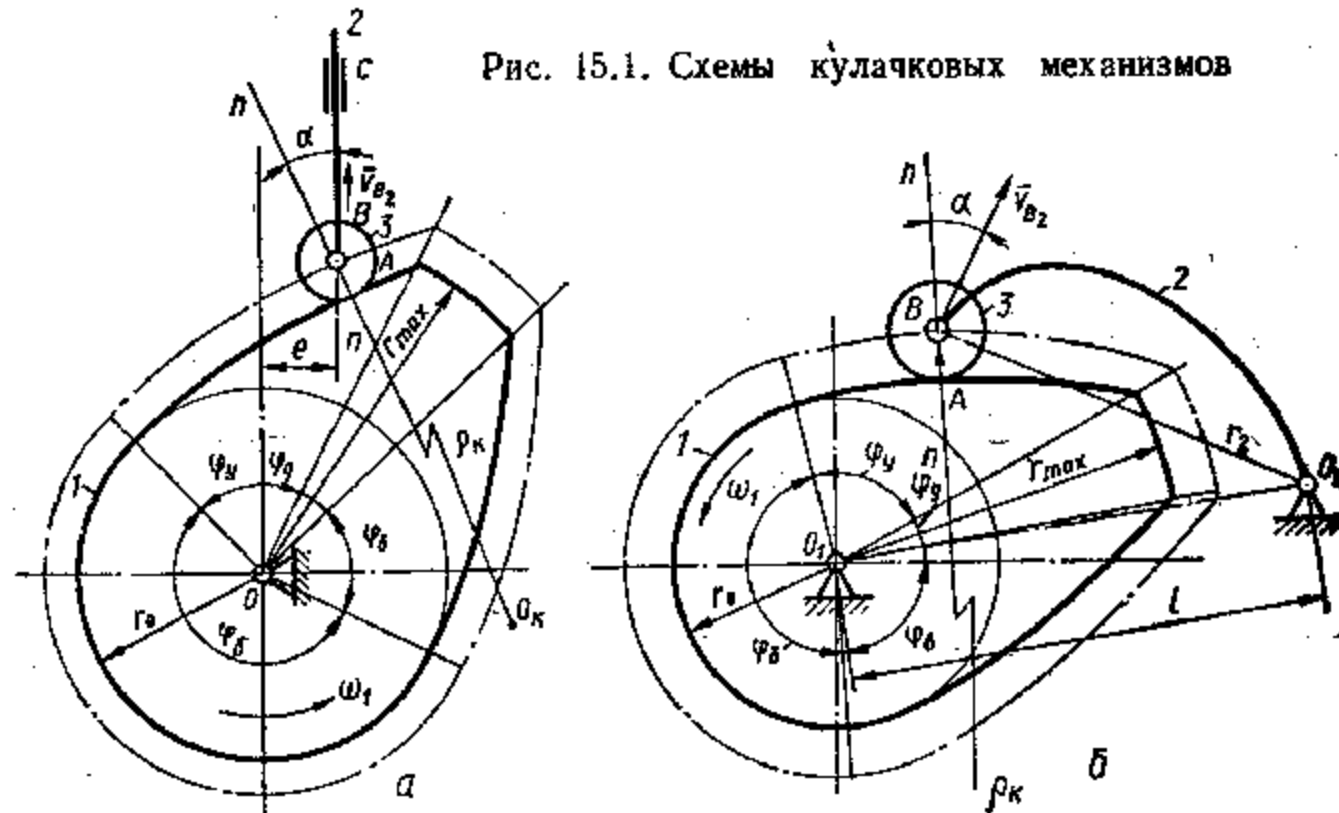


Рис. 15.1. Схемы кулачковых механизмов

Закон движения выходного звена должен быть таким, чтобы динамические усилия, возникающие при движении ведомого звена 2 (рис. 15.1), не сказались на точности воспроизведения передаточной функции и на долговечности механизма. Это требование относится к фазам удаления и возвращения выходного звена при повороте кулачка 1 соответственно на углы φ_y и φ_v . Если при его движении возникают резкие изменения скорости, соответствующие разрыву непрерывности ее функции, то ударные нагрузки в паре А кулачок — выходное звено теоретически возрастают до бесконечности, что неблагоприятно скажется на точности воспроизведения пере-

даточной функций. Плохо сказываются на характере движения и скачки функции ускорений выходного звена, приводящие к резким изменениям сил инерции, что приводит к возникновению динамических нагрузок, особенно характерных на участках перехода профиля от фазы выстоя φ_6 , φ_d к фазам движения φ_y , φ_v .

При проектировании кулачковых механизмов соблюдаются следующие условия: для поступательно движущегося толкателя (рис. 15.1, а) при положении кулачка, характеризуемого углом поворота его $\varphi_1 = 0$, перемещение толкателя $s_2 = s_{2min}$ и скорость его

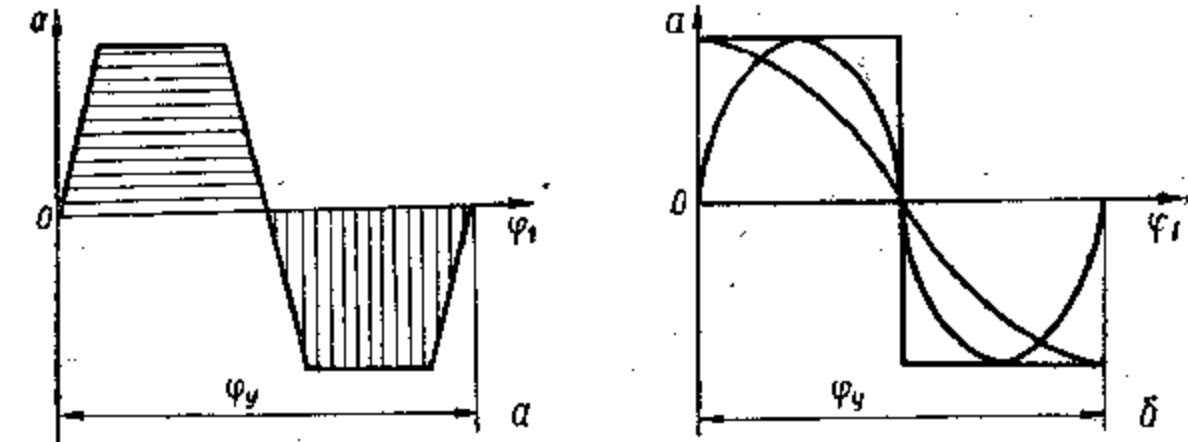


Рис. 15.2. Графики ускорений выходных звеньев в кулачковых механизмах

$v_2 = 0$; при повороте на фазовый угол $\varphi_1 = \varphi_y$, $s_2 = s_{2max}$, $v_2 = 0$; для качательного движения коромысла (б) при $\varphi_1 = 0$ угловое перемещение коромысла $\varphi_2 = \varphi_{2min}$, $\omega_2 = 0$ и при $\varphi_1 = \varphi_y$, $\varphi_2 = \varphi_{2max}$, $\omega_2 = 0$. Условия для скорости перемещения ведомого звена в начальный и конечный моменты его движения налагают определенные ограничения на функцию ускорения. Например, для поступательно движущегося толкателя $dv_2 = a(\varphi_1) dt = (1/\omega_1) \times \times a(\varphi_1) d\varphi_1$ и, следовательно,

$$v_2 = (1/\omega_1) \int_0^{\varphi_y} a(\varphi_1) d\varphi_1 = 0, \quad (15.1)$$

где ω_1 — угловая скорость кулачка.

Из формулы (15.1) следует, что при $0 < \varphi_1 < \varphi_y$ среднее интегральное значение функции $v_2(\varphi_1)$ равняется нулю, а график функции $a_2(\varphi_1)$ отсекает относительно оси абсцисс равные площади в системе координат $\varphi_1 O a$ (рис. 15.2, а). Таким образом, для уменьшения динамических нагрузок в качестве исходного целесообразно принимать закон изменения ускорений выходного звена, удовлетворяющий зависимости (15.1). На рис. 15.2, б приведены графики некоторых функций ускорений движения толкателя, обеспечивающие безударную его работу.

Функция перемещения толкателя получается интегрированием закона изменения ускорений. Например, если закон изменения ускорений толкателя на фазе его удаления при $\varphi_y/\pi = k$ описывается функцией $a(\varphi_1) = a \cdot \cos(\varphi_1/k)$, то $v_2 = (a/\omega_1) \int_0^{\varphi_y} \cos(\varphi_1/k) d\varphi_1 =$

$$= (ak/\omega_1) \sin(\varphi_1/k); \quad s_2 - s_{20} = \int_0^t v_2 dt = \int_0^{\varphi_1} (v_2/\omega_1) d\varphi_1 = \int_0^{\varphi_1} (ak/\omega_1^2) \times \\ \times \sin(\varphi_1/k) d\varphi_1 = (ak^2/\omega_1^2) (1 - \cos(\varphi_1/k)).$$

В ряде случаев закон движения толкателя задается сложной функцией, аналитическое интегрирование которой затруднительно. В этом случае закон перемещения толкателя получается применением операторной функции *INTGR* (см. гл. 5).

Еще одним условием, обеспечивающим нормальные условия работы механизма, является соблюдение допустимого угла давления α_d для данного типа механизма за весь цикл работы. Под углом давления понимают угол между нормалью ($n - n$) к профилю кулачка и вектором v_{B2} скорости движения ведомого звена в точке их контакта (рис. 15.1, а, б). При увеличении угла давления α возможно заклинивание. Для каждого типа механизмов с учетом материалов контактирующих элементов высшей пары существуют диапазоны допустимых значений α , исходя из которых определяют размеры звеньев механизма r_0 , $r_{\max}$, e , l , r_2 во избежание заклинивания.

Для обеспечения точного воспроизведения заданных характеристик кулачкового механизма необходимо соблюсти также условие постоянного и однозначного контакта кулачка и ведомого звена. Указанные исходные условия создают определенные ограничения при выборе параметров механизма и профиля контактирующих элементов высшей кинематической пары. Из всех возможных вариантов сочетания параметров необходимо выбрать такие, чтобы были обеспечены наименьшие габаритные размеры механизма.

15.2. Определение размеров кулачкового механизма с заостренным толкателем

При проектировании кулачковых механизмов необходимо удовлетворить различные требования минимума габаритных размеров контактных напряжений и потерь на трение, исключения возможности заклинивания при работе и др. Для снижения материалоемкости обычно стремятся к уменьшению габаритных размеров. Так как угол давления определяется направлениями вектора скорости выходного звена и нормали к профилю кулачка, то, следовательно, выбор геометрических размеров механизма определяет и его эксплуатационные свойства. Для всего диапазона изменения передаточной функции необходимо обеспечить значение угла давления, меньшее минимально допустимого α_d . Размеры, полученные из условия обеспечения требуемых качественных характеристик и определяющие габаритные размеры механизма, называют *основными*.

Установим связь между углом давления и геометрическими размерами механизма с толкателем. Аналитическое выражение передаточной функции определится из подобия треугольников, образованных векторами скорости $\bar{v}_{A_1}$, $\bar{v}_{A_2}$, $\bar{v}_{A_1A_2}$ на плане скоростей (рис. 15.3) и ΔO_1AB на схеме механизма:

$$v_{A_2}/v_{A_1} = O_1B/O_1A = (ds_2(t)/dt)/(\omega_1 OA),$$

откуда передаточная функция

$$(ds_2(t)/dt)/\omega_1 = ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 = O_1B. \quad (15.2)$$

Угол между линией, параллельной оси ординат, проходящей через точку A , и линией AB будет равен углу давления для данного положения кулачка. Выражая угол давления α через геометрические размеры механизма, а учетом зависимости (15.2) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \Delta/(r_0 + s_2(\varphi_1)) = (O_1B - e)/(r_0 + s_2(\varphi_1)) = \\ &= (ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 - e)/(r_0 + s_2(\varphi_1)). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Рис. 15.3. Скорости в кулачковом механизме с поступательно движущимся толкателем

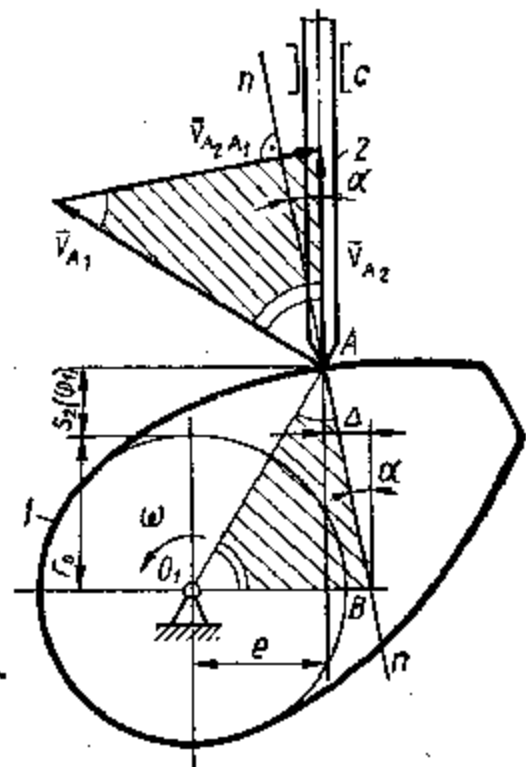
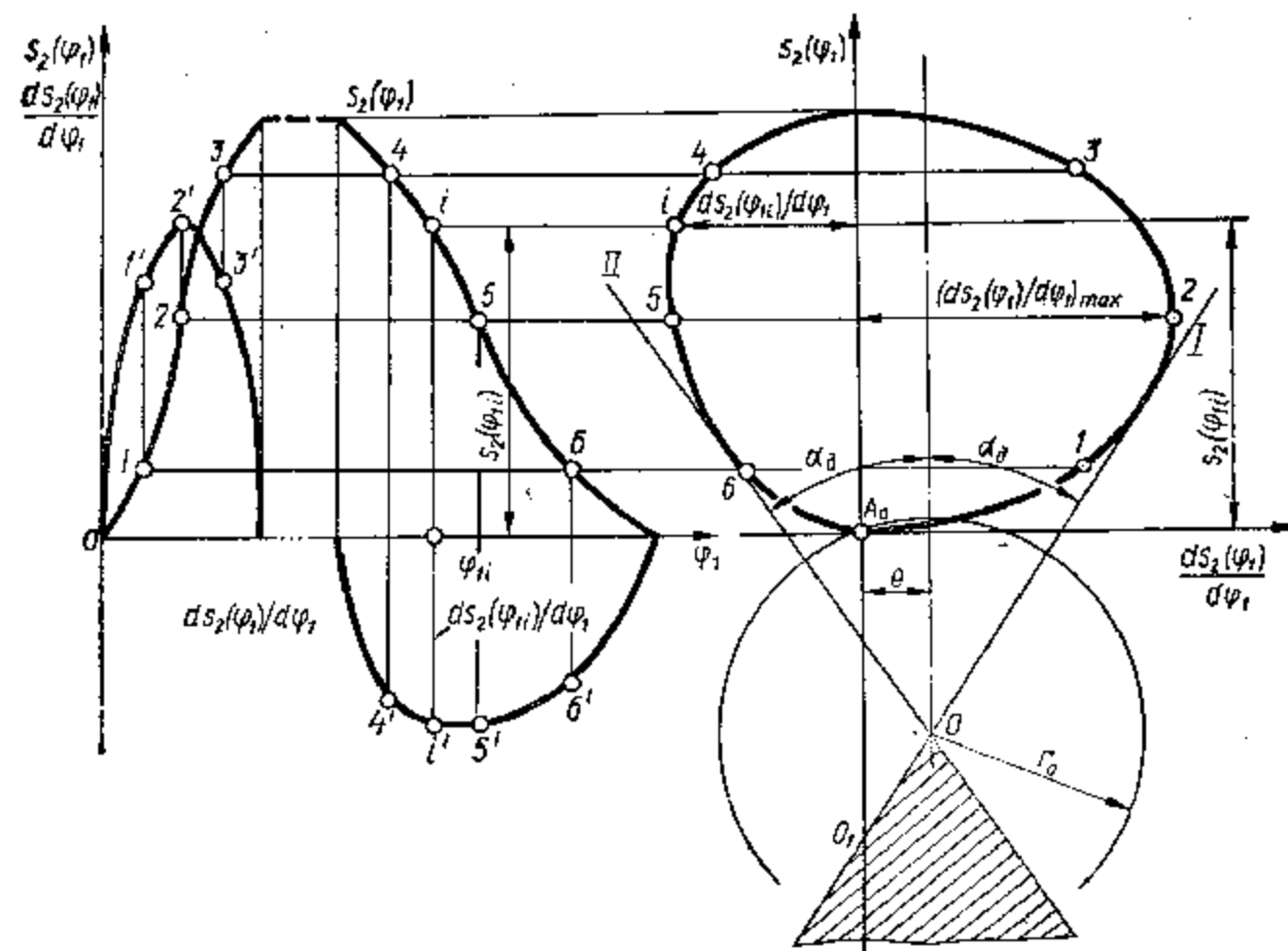


Рис. 15.4. Передаточная диаграмма и определенные центры вращения кулачка



Зависимость перемещения толкателя $s_2(\varphi_1)$ (рис. 15.4, а) от передаточного отношения механизма характеризуется передаточной диаграммой $s_2(\varphi_1) = \Phi(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)$ — замкнутой кривой в общем произвольной формы (рис. 15.4, б) в системе координат $(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1, s_2(\varphi_1))$. Фазе удаления толкателя соответствуют участки диаграммы справа от оси ординат, а фазе возвращения — слева, так как в этих случаях передаточная функция $ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1$ имеет разные знаки. Каждая точка этой диаграммы соответствует определенному углу поворота φ_1 кулачка. Если принять допустимое для данного типа механизмов значение угла давления α_d , то для каждой точки диаграммы по зависимости (15.3) можно определить величины эксцентриситета e и минимального радиуса r_0 , соответствующие этому значению. Очевидно, что значение e и r_0 , обеспечивающие условие $\alpha \leq \alpha_d$ для всех точек передаточной диаграммы, будут находиться в области между касательными I и II, проведенными под углом α_d к участкам графика, характеризующим подъем — $ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 > 0$ и опускание — $ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1 < 0$ толкателя. Центр вращения кулачка может находиться в любой точке заштрихованной зоны между касательными, а точка O определяет минимально возможные значения e и r_0 .

При аналитическом и численном решении задачи необходимо определить точки соприкосновения касательных с передаточной диаграммой. Это вызывает затруднения, если функция $s_2(\varphi_1) = \Phi(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)$ не задана аналитически. В этих случаях целесообразно воспользоваться предположением о малом влиянии на основные размеры кулачкового механизма отклонений угла давления от оптимального значения. Это дает возможность проводить под углом α_d прямую, проходящую через точки диаграммы, соответствующие $(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)_{\max}$, а не касательную к передаточной диаграмме (рис. 15.5). Центр кулачка должен находиться на этой прямой. Если требуется получить механизм с $e = 0$, то центром вращения будет точка O_1 . С целью уменьшения размеров кулачка обычно принимают $e \neq 0$.

Минимальный радиус кулачка получим, если примем эксцентриситет $e = O'M$, т. е. если центр кулачка будет находиться в точке пересечения прямой AO_1 и перпендикуляра, опущенного на эту прямую из точки A_0 — начальной точки передаточной диаграммы, соответствующей углу поворота кулачка $\varphi_1 = 0$. Однако тогда сильно возрастает угол давления на фазе возвращения толкателя либо при перемене направления вращения кулачка. Поэтому обычно для материалов общемашиностроительного применения центр вращения кулачка выбирают на пересечении прямой AO_1 и прямой, проведенной из точки A_0 под углом $\beta = 0,6 \dots 0,75\alpha_d$. Тогда

$$r_0 = ((ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)_{\max} / \operatorname{tg} \alpha_d - s_2(\varphi_1)_{(ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1)_{\max}} \sin \alpha_d / \sin(\alpha_d + \beta) \quad (15.4)$$

$$e = r_0 \sin \beta. \quad (15.5)$$

Выражения (15.4) и (15.5) могут быть реализованы операторной функцией

$$\sim KLCHK(N, s_2(N), i_2(N), \alpha_d, \beta; r_0, e), \quad (15.6)$$

где N — размерность массивов перемещений $s_2(\varphi_1)$ и передаточных отношений $i_2(\varphi_1) = ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1$.

15.3. Определение размеров кулачкового механизма с плоским толкателем

Для кулачкового механизма с плоским толкателем (рис. 15.6) угол давления постоянен и равен нулю, если рабочая плоскость толкателя перпендикулярна к направлению его движения, или $\alpha = \pi/2$ — β , если эта плоскость составляет с направлением движения угол β . Случай $\alpha \neq 0$ встречается редко. Применение эксцентриситета при использовании плоского толкателя нецелесообразно, так как приводит к росту габаритов механизма.

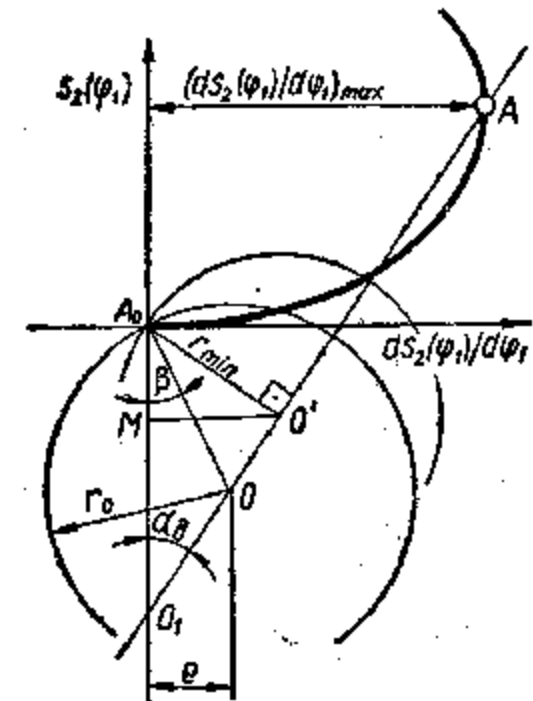


Рис. 15.5. Определение минимального радиуса кулачка

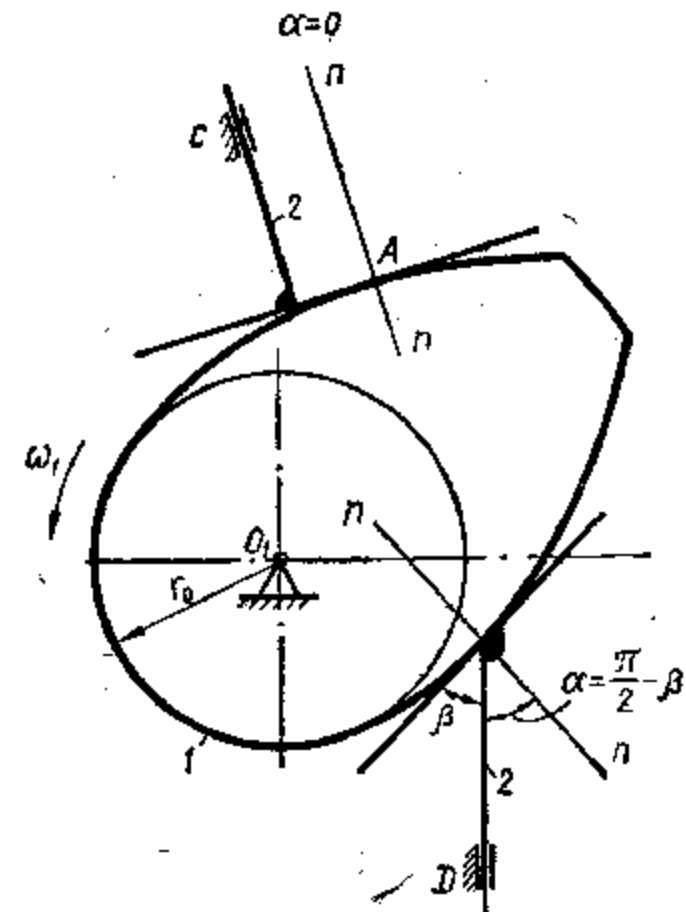


Рис. 15.6. Кулачковый механизм с плоским толкателем

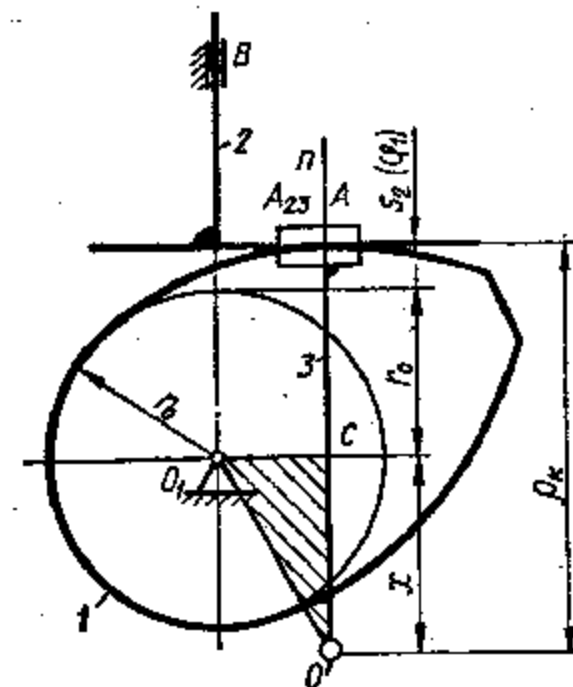


Рис. 15.7. Определение диаметра кулачковой шайбы механизма с плоским толкателем

В основе определения размера радиуса кулачковой шайбы лежит условие выпуклости профиля кулачка, так как для плоского толкателя нельзя использовать профиль кулачка двойкой кривизны. Для произвольной точки A_1 профиля кулачка (рис. 15.7) условие выпуклости можно записать в виде

$$\rho_k = s_2(\varphi_1) + r_0 + x \geq 0,$$

где ρ_k — радиус кривизны профиля кулачка в этой точке; $s_2(\varphi_1)$ — перемещение толкателя для текущего значения угла поворота кулачка φ_1 ; x — неизвестная составляющая ρ_k .

Для определения отрезка x построим заменяющий механизм. Для этого вместо высшей пары введем дополнительное звено 3 в вращательной паре в центре O' кривизны профиля кулачка в точке A_1 и поступательной парой A , образованной со звеном 2 (толкателем).

План ускорений заменяющего механизма $O_1O'AB$, соответствующий векторному уравнению $\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{O'} + \bar{a}_{A_2O'}^n + \bar{a}_{A_2O'}^t$, можно представить в виде $\Delta O'O_1C$, в котором $a_{O'} = O'O_1 \cdot \mu_a$. Тогда масштаб плана ускорений будет $\mu_a = a_{O'}/O'O_1$. Так как при этом $O_1C \cdot \mu_a = a_{A_2O'}^t$, то $a_{A_2O'}^n = 0$; $O'C = x = a_{A_2}/\mu_a = (d^2s_2(t)/dt^2)/\omega_1^2 = d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2$. Следовательно, отрезок $O'C$ численно равен значению второй производной от функции закона движения толкателя в данный момент времени. На основании этого получим

$$\rho_k = s_2(\varphi_1) + r_0 + d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2 \geq 0, \quad (15.7)$$

откуда $r_0 + s_2(\varphi_1) \geq -d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2$ или $-(d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2)/(r_0 + s_2(\varphi_1)) \leq 1$.

Так как $1 = \tan 45^\circ$, то

$$-(d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2)/(r_0 + s_2(\varphi_1)) \leq \tan 45^\circ. \quad (15.8)$$

Определение минимального радиуса кулачка с использованием этого неравенства производится следующим образом. Строится диаграмма (рис. 15.8), по оси абсцисс которой откладываются значения второй производной функции положения $d^2s_2(\varphi_1)/d\varphi_1^2$ толкателя, а на оси ординат — значения функции $s_2(\varphi_1)$. В соответствии с неравенством (15.8) к отрицательной ветви диаграммы проводится касательная под углом 45° . В области, лежащей ниже этой прямой, можно выбрать положение центра вращения кулачка, например, в точке O_1 , так как в этом случае угол касательной γ всегда меньше 45° .

Операторная функция, реализующая указанный алгоритм, имеет вид

$$KLCHPL(s_{2\min}, (d^2s_2/d\varphi_1^2)_{\min}, \gamma; r_0) = (d^2s_2/d\varphi_1^2)_{\min}/\tan \gamma - s_{2\min}. \quad (15.9)$$

$s_{2\min}$ и $(d^2s_2/d\varphi_1^2)_{\min}$ задаются для φ_1 , соответствующего минимальному значению функции ускорений толкателя.

15.4. Определение размеров кулачкового механизма с коромыслом

Для механизма с качающимся выходным звеном 2 (рис. 15.9) скорость $\bar{v}_A = \bar{v}_A + \bar{v}_{A_2A}$, точки A_2 на коромысле (вектор $\bar{v}_A$, направлен перпендикулярно O_1A , вектор $\bar{v}_A$ перпендикулярен O_2A , вектор $\bar{v}_{A_2A}$ скорости относительного движения направлен по касательной к профилю кулачка в точке A). Передаточное отношение определится из подобия треугольника скоростей и ΔO_1AB , сторонами которого являются O_1A , участок AB нормали $n-n$ к профилю кулачка в точке A , участок O_1B перпендикуляра из O_1 на линию

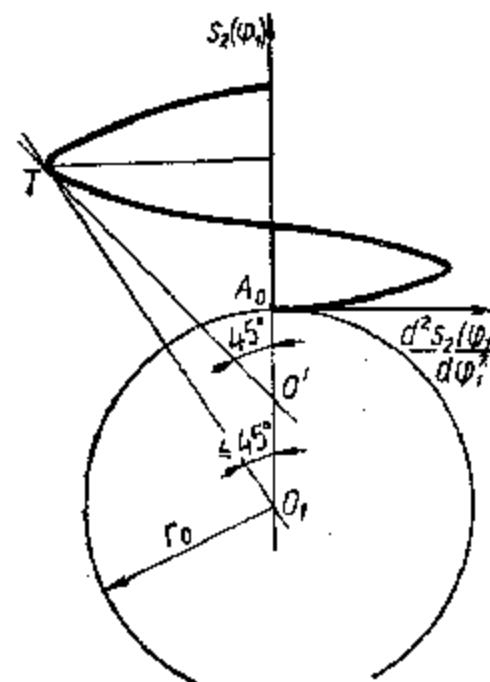


Рис. 15.8. Определение минимального радиуса кулачка

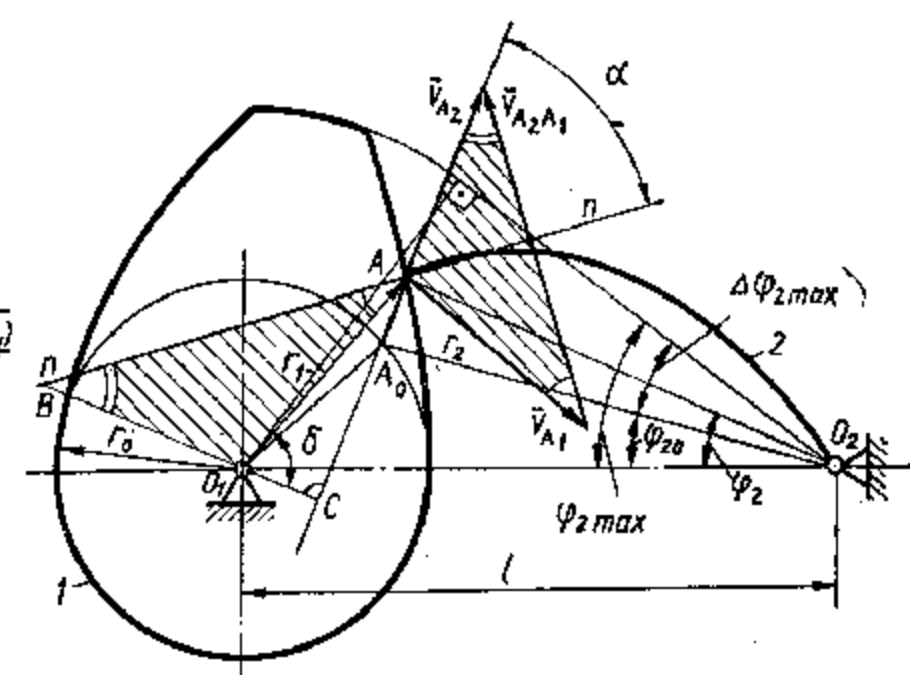
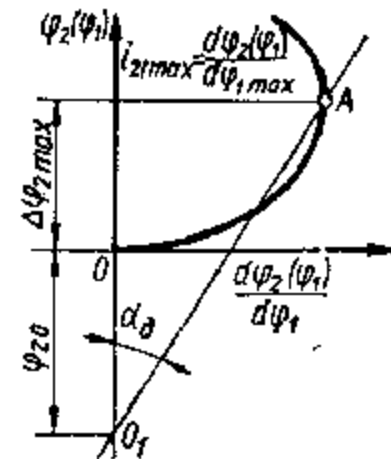


Рис. 15.9. Скорости в кулачковом механизме с качающимся выходным звеном

Рис. 15.10. Передаточная диаграмма



действия вектора $\bar{v}_{A_2}$. Обозначив $r_1/r_2 = \lambda$ и учтя, что $\omega_2/\omega_1 = d\varphi_2(\varphi_1)/d\varphi_1 = i_{21}(\varphi_1)$, получим $v_{A_2}/v_A = O_1B/O_1A = \omega_2r_2/\omega_1r_1 = (\omega_2/\omega_1)/\lambda = (d\varphi_2(\varphi_1)/d\varphi_1)/\lambda = i_{21}(\varphi_1)/\lambda$.

Угол давления α определится из выражения

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan \angle ABC = BC/AC = (BO_1 + O_1C)/AC = \\ &= (i_{21}(\varphi)/\lambda + \cos \delta)/\sin \delta. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Выражения (15.10) и (15.3) аналогичны по смыслу. Построив передаточную диаграмму (рис. 15.10) $\varphi_2(\varphi_1) = \Phi(i_{21}(\varphi_1))$ и определив точку, для которой $i_{21}(\varphi_1) = (i_{21}(\varphi_1))_{\max} = i_{21\max}$, проведем

через эту точку под углом α_d к оси ординат прямую. Тогда при начальном угле положения коромысла φ_{20} и максимальном передаточном отношении полный угол его поворота (рис. 15.9)

$$\varphi_{2 \max} = \varphi_{20} + \Delta\varphi_{2 \max} = i_{21 \max} / \operatorname{tg} \alpha_d,$$

откуда

$$\varphi_{20} = i_{21 \max} / \operatorname{tg} \alpha_d - \Delta\varphi_{2 \max}. \quad (15.11)$$

Из $\Delta O_1 A_0 O_2$ (рис. 15.9) по теореме косинусов получим

$$O_1 A_0 = r_0 = l \sqrt{1 + (r_2/l)^2 - 2(r_2/l) \cos \varphi_0}.$$

Так как $r_2/l = \cos \varphi_{2 \max}$, то

$$r_0 = l \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_{2 \max} (\cos \varphi_{2 \max} - 2 \cos \varphi_{20})}. \quad (15.12)$$

Зависимости (15.10), (15.11), (15.12) реализуются операторной функцией

$$KLCHK(N, \varphi_2(N), i_{21}(N), \alpha_d, l; \varphi_{20}, r_0). \quad (15.13)$$

Функции $\varphi_2(N)$ и $i_{21}(N)$ задаются массивами чисел для N значений φ_1 .

15.5. Построение профиля кулачка плоского механизма с толкателем

Определение формы и размеров кулачка выполняется аналитическим, численным или графическим способами. Чаще используют аналитический и численный способы, которые могут быть проиллюстрированы графически. Применим к кулачковому механизму (рис. 15.11) метод обращения движения. Тогда для системы координат xO_1y , в которой звенья механизма совершают движения, поворот кулачка на определенный угол равносильен повороту оси толкателя на такой же угол в противоположном вращению кулачка направлении. При повороте кулачка на угол φ_1 толкатель переместится на величину $s_2(\varphi_1)$. Из условия $\overline{O_1 A} = \overline{O_1 C} + \overline{CA}$ найдем радиус-вектор текущей точки A

$$\bar{r}_1 = \bar{e} + (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s_2(\varphi_1)),$$

в координаты точки A , как проекции радиуса-вектора $\bar{r}_1$ на координатные оси, будут

$$\begin{aligned} x_A &= e \sin((\varphi_1 + \gamma) - \pi/2) + (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s_2(\varphi_1)) \sin((\varphi_1 + \gamma) - \pi/2); \\ y_A &= e \cos((\varphi_1 + \gamma) - \pi/2) + (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s_2(\varphi_1)) \cos(\varphi_1 + \gamma) - \pi/2. \end{aligned} \quad (15.14)$$

Если механизм имеет плоский толкатель (рис. 15.12), то радиус-вектор точки A касания толкателя и кулачка будет

$$\bar{r}_1 = \overline{O_1 A} = \overline{O_1 E} + \overline{EA}. \quad (15.15)$$

Вектор $\overline{O_1 E}$ равен по величине $(r_0 + s_2(\varphi_1))$; вектор $\overline{EA}$ определится из рассмотрения треугольника скоростей $\bar{v}_A = \bar{v}_A + \bar{v}_{A, A_1}$.

Из подобия $\Delta O_1 EA$ и векторного треугольника скоростей получим

$$v_A/v_{A_1} = O_1 A/EA,$$

откуда

$$EA = O_1 A \cdot v_A/v_{A_1} = r_1 (ds_2(\varphi_1)/dt)/(\omega_1 r_1) = ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1.$$

Проецируя векторы уравнения (15.15) на оси координат, получим

$$\begin{cases} x_A = (r_0 + s_2(\varphi_1)) \sin \varphi_1 + (ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1) \cos \varphi_1; \\ y_A = (r_0 + s_2(\varphi_1)) \cos \varphi_1 - (ds_2(\varphi_1)/d\varphi_1) \sin \varphi_1. \end{cases} \quad (15.16)$$

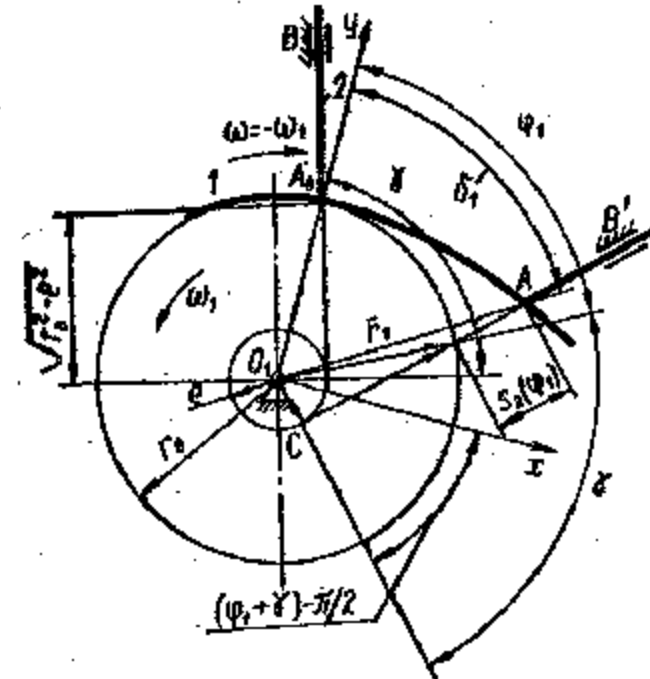


Рис. 15.11. Синтез профиля кулачка механизма с остроконечным толкателем

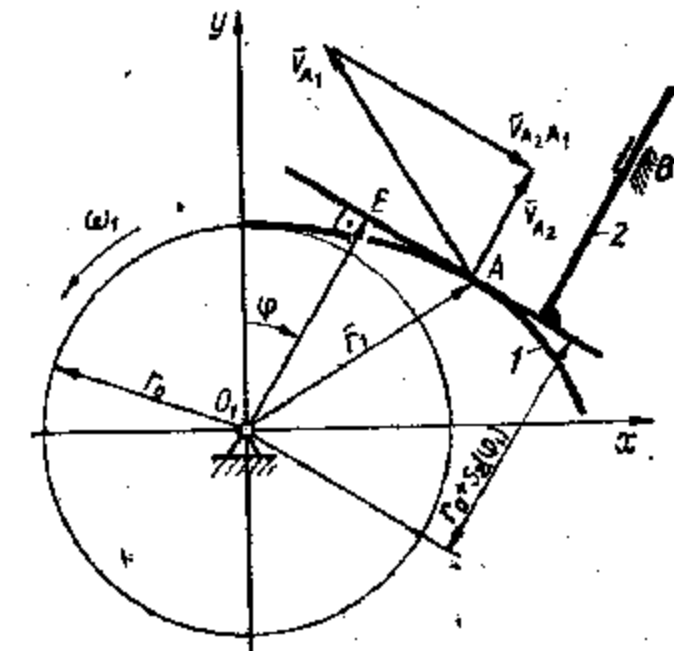


Рис. 15.12. Синтез профиля кулачка механизма с плоским толкателем

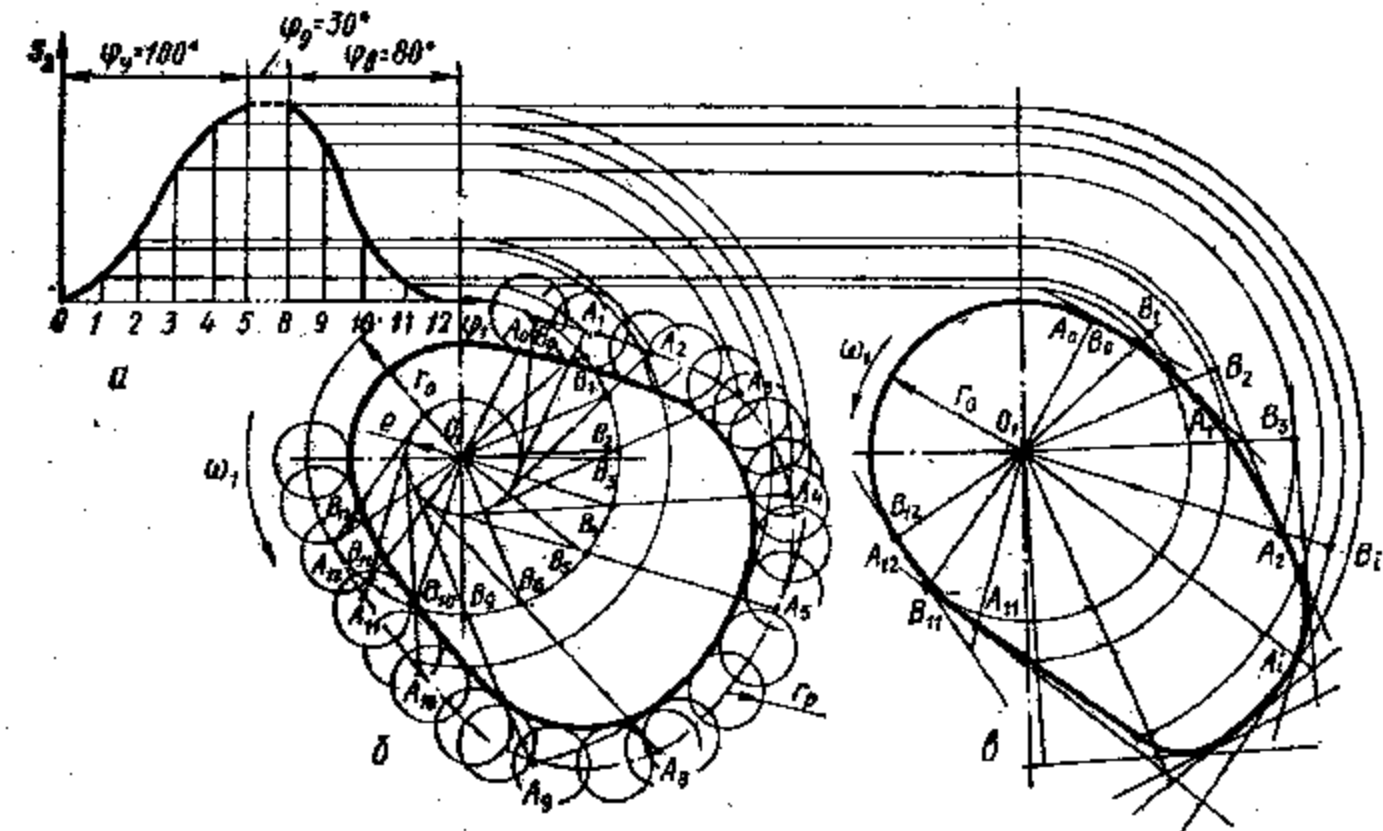


Рис. 15.13. Построение профиля кулачка для поступательно движущегося толкателя

Если закон движения толкателя задан графически (рис. 15.13, а) и даны основные размеры механизма — r_0 и e , то профиль кулачка может быть построен графическим способом. Из центра O_1 (рис. 15.13, б) вращения кулачка проводим окружности радиусами r_0 и e и произвольно выбираем на окружности радиуса r_0 точку A_0 начала движения толкателя. Начальное положение оси толкателя определяется касательной, проведенной из точки A_0 к окружности радиуса e , начальное положение теоретического профиля зафиксируем радиусом O_1A_0 . Для построения точки A_i профиля от радиуса O_1A_0 отложим угол поворота кулачка φ_{1i} в направлении, противоположном его вращению, и получим точку B_i . На продолжении радиуса O_1B_i отложим перемещение s_{2i} , соответствующее φ_{1i} , и получим точку A_i контакта острия толкателя с профилем кулачка. Последовательно соединяя точки A_i , полученные при изменении φ_{1i} до $\varphi_1 = 2\pi$, получим теоретический профиль кулачка. Действительный профиль кулачка для механизма толкателя с роликом получим как огибающую окружностей радиусом r_p с центрами, расположенными на теоретическом профиле.

Если механизм имеет плоский толкатель (рис. 15.13, в), то профиль кулачка получается как огибающая семейства прямых, перпендикулярных радиусу O_1B_i и касающихся профиля в точках A_i .

15.6. Построение профиля кулачка плоского механизма с коромыслом

В механизме с коромыслом (рис. 15.14) поворот кулачка на угол φ_1 , в соответствии с принципом обращения движения, равносильен перемещению центра O_2 вращения коромысла в положение O'_2 . При этом коромысло из начального положения O_2A_0 переместится в положение O'_2A . Тогда $\vec{O_1A} = \vec{O_1O'_2} + \vec{O'_2A}$. В координатной системе xO_1y , жестко связанной с кулачком, координаты точки A будут

$$\left. \begin{aligned} x_A &= l \cos \varphi_1 - r_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2); \\ y_A &= -l \sin \varphi_1 - r_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned} \right\} \quad (15.17)$$

Рассмотрим графический способ проектирования профиля кулачка (рис. 15.15). В зафиксированном начальном положении линии O_1O_2 проведем окружность радиусом r_0 с центром в O_1 . Радиусом r_2 проведем из O_2 дугу окружности, на пересечении которой с окружностью радиуса r_0 получим точку A_0 . Прямая A_0O_2 соответствует положению коромысла в начальный момент движения. По заданному закону движения коромысла (рис. 15.15, а) под углами φ_{2i} , соответствующими углам поворота кулачка φ_{1i} , от линии O_2A_0 проводим линии до пересечения с дугой окружности r_2 . Через полученные точки пересечения A_i из центра O_1 проводим дуги окружностей.

При обращении движения кулачкового механизма точка O_2 (рис. 15.15, б) перемещается по окружности радиусом l в направлении, противоположном вращению кулачка. От линии O_1O_2 в направлении, противоположном вращению кулачка, отложим углы

Рис. 15.14. Синтез профиля кулачка механизма с качающимся ведомым звеном

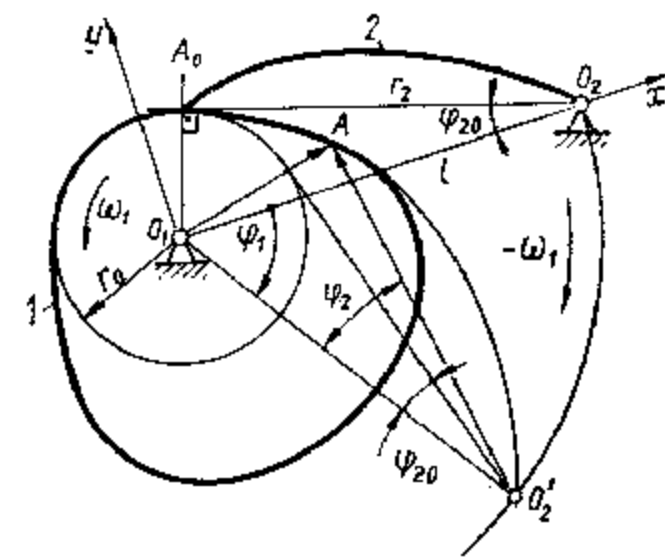
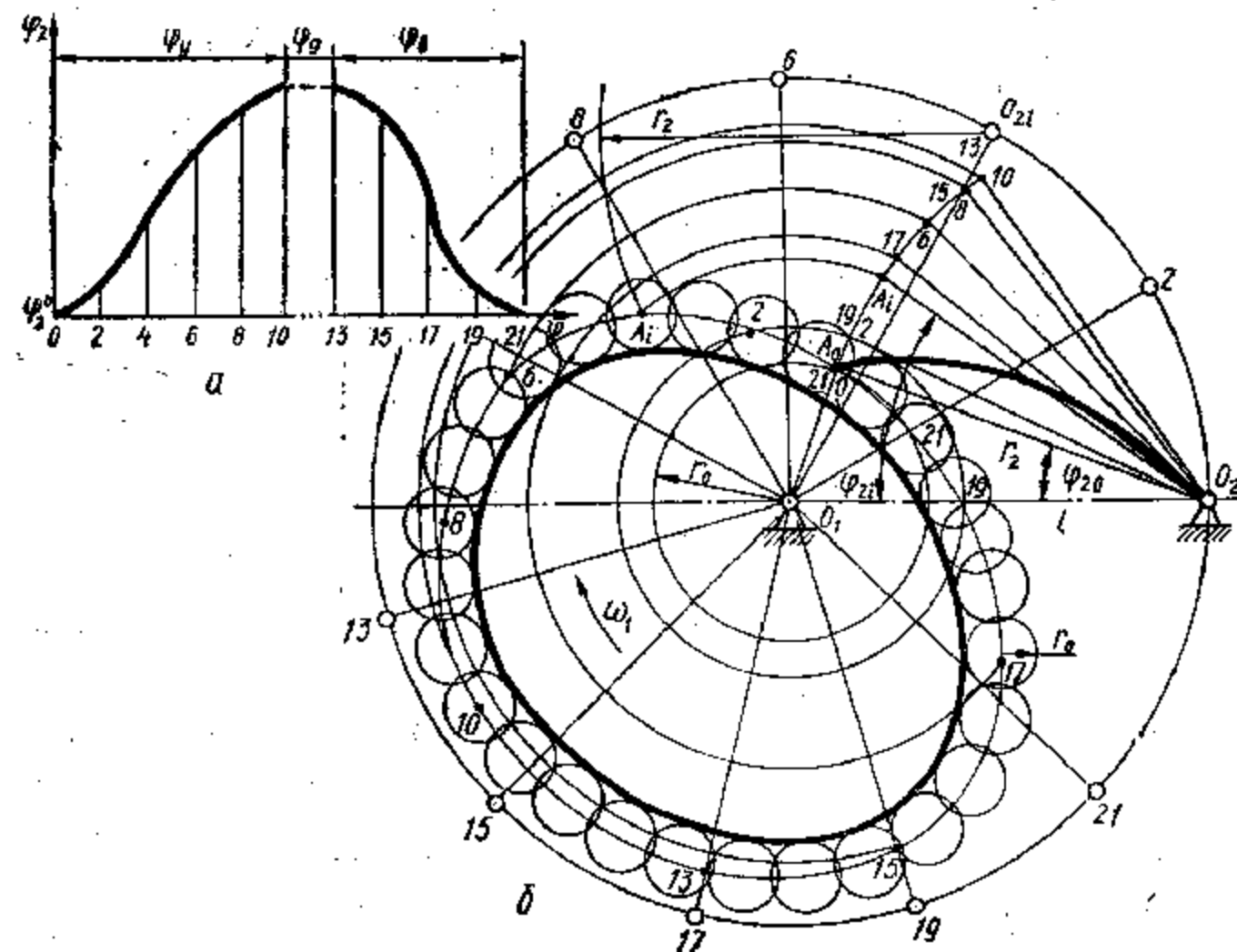


Рис. 15.15. Построение профиля кулачка для качающегося ведомого звена



φ_{1i} и на окружности радиуса $l = O_1O_2$ зафиксируем точки O_{2i} . Точки теоретического профиля кулачка получим на пересечении дуг окружностей, проведенных из центров O_{2i} радиусом r_2 , и окружностей радиусов O_1A_i , проведенных из центра O_1 . Действительный профиль кулачка при наличии ролика получим как огибающую окружностей радиусом r_p с центрами на теоретическом профиле кулачка.

15.7. Построение профиля кулачка пространственных механизмов

На рис. 15.16, а изображен профиль пространственного кулачка 1 с толкателем 2 в начальном положении A_0 . Направим координатную ось Oz вдоль оси вращения кулачка вертикально вверх, а ось y —