

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-
ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт за темою «Центр ваги твердих тіл» з дисципліни «Теоретична механіка»
для студентів всіх спеціальностей

Затверджено
методичною
радою університету,
протокол № від

Харків 2024

Укладач Красніков С.В.

Кафедра «Деталей машин та теорії механізмів і машин»

ВСТУП

"Методичні вказівки" до контрольних робіт складені відповідно програмі курсу "Теоретична механіка" і призначені для студентів всіх спеціальностей.

Ціль контрольних робіт - закріпити й поглибити теоретичні знання студентів з окремих розділів теоретичної механіки, а саме по темі центр ваги твердого тіла.

Необхідні інструкції із проведення контрольних робіт оголошуються викладачем, що веде заняття по предметі, усно.

Звіти по контрольних і практичних роботах оформляються згідно до загальних правил щодо оформлення цих робіт.

Перед виконанням кожної контрольної й практичної роботи студент зобов'язаний ознайомитися з її змістом за справжніми "Методичними вказівками" і з відповідним розділом теоретичної механіки, записавши у звіт зміст стандартної форми з порядком її виконання, де зробити відповідний малюнок і по необхідності таблицю.

Під керівництвом викладача студент повинен провести необхідні контрольні практичні роботи й внести у звіт отримані дослідницькі дані відповідно до стандарту його оформлення. Варто пам'ятати, що після виконання необхідних розрахунків крім заповнення стандартної форми потрібно позначити на схемі знайдені результати.

За результатами роботи потрібно записати відповідь. Типово результат виконаної роботи за цими методичними вказівками є частиною загального завдання в межах курсу даної для кожного студента.

ЗМІСТ

1	Теоретичні відомості про центр ваги твердого тіла	5
2	Методи визначення центра ваги	6
2.1	Метод розбивки.....	6
2.2	Метод інтегрування	7
2.3	Метод симетрії для однорідних тіл	9
2.4	Питання для самоконтролю	9
3	Приклади виконання завдань	10
3.1	Приклад 1	10
3.2	Приклад 2	11
3.3	Приклад 3	12
4	Завдання для контрольної роботи	14
5	Список літератури	44

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА

Поняття центра ваги тіла й більше загальне поняття центра мас тіла або системи твердих тіл широко використовується в техніку, інженерних розрахунках. Зокрема, рішення багатьох завдань динаміки твердого тіла істотно спрощується, якщо початок рухливої координатної системи зв'язувати із центром ваги тіла. При рішенні завдань теоретичної механіки, опору матеріалів і інших технічних дисциплін важливо вміти знаходити центри ваги й статичні моменти плоских перетинів елементів різних конструкцій.

Для рішення завдань по визначенню центрів ваги твердого тіла необхідно:

- 1) одержати знання по теорії для ознайомлення із прийомами визначення центрів ваг;
- 2) знати відповіді на контрольні питання;
- 3) знати типові послідовності рішення завдань на основі прикладів типових завдань;
- 4) вирішити завдання з наведених нижче 60 варіантів методами розбивки, доповнення (негативних ваг), симетрії й інтегрування.

Центром ваги твердого тіла називається центр паралельних сил від всіх сил ваги, що діють на всі частки тіла. Розглянемо основні методи визначення центрів ваги твердих тіл.

2 МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЦЕНТРА ВАГИ

2.1 Метод розбивки

Якщо тіло можна розбити на окремі частини, ваги яких P_K і координати ваг x_K, y_K, z_K ($K= 1, 2, \dots, n$) відомі, то координати центра ваги тіла визначаються по формулах:

$$x_c = \sum_{K=1}^n P_K x_K ; y_c = \sum_{K=1}^n P_K y_K ; z_c = \sum_{K=1}^n P_K z_K . \quad (1)$$

де P – вага всього тіла (або механічної системи), що є сумою ваг її частин.

Для однорідного тіла вага P будь-якої його частини пропорційний об'єму V_K цієї частини

$$P_K = \rho V_K , \quad (2)$$

а вага P усього тіла пропорційний об'єму цього тіла , тобто

$$P = \rho V , \quad (3)$$

де ρ - вага одиниці об'єму. Підставляючи значення у формули (1) одержимо:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum_{K=1}^n V_K x_K ; y_c = \frac{1}{V} \sum_{K=1}^n V_K y_K ; z_c = \frac{1}{V} \sum_{K=1}^n V_K z_K . \quad (4)$$

де P - вага всього тіла.

У цьому випадку точка x_c , координати якої визначаються по формулах (4), називається центром ваги об'єму.

Для однорідної плоскої пластини постійної товщини за аналогією з формулою (4) можна записати наступне:

$$x_c = \frac{1}{S} \sum_{K=1}^n S_K x_K; \quad y_c = \frac{1}{S} \sum_{K=1}^n S_K y_K, \quad (5)$$

де S – площа всієї пластинки; S_K – площі її частин.

Чисельники цих виражень називаються статичними моментами площі щодо осей Y і X

$$S_Y = \sum_{K=1}^n S_K x_K; \quad S_X = \sum_{K=1}^n S_K y_K. \quad (6)$$

Точку, координати якої визначаються формулами (7), називають центром ваги площі однорідної плоскої фігури.

Для координат центра ваги фігури однорідної лінії (фігура зі стрижнів) формули (4) здобувають наступний вид:

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{K=1}^n L_K x_K; \quad y_c = \frac{1}{L} \sum_{K=1}^n L_K y_K; \quad z_c = \frac{1}{L} \sum_{K=1}^n L_K z_K, \quad (7)$$

де L – довжина всієї лінії, L_K – довжини окремих стрижнів (ліній).

Точку, координати якої визначаються формулами (8), називають центром ваги лінії L (фігури зі стрижнів).

При методі доповнення (негативних ваг) порожнини у вигляді об'ємів, площ і ліній (стрижнів) мають негативні значення (ваги), що складаються у формулах (4), (5), (7).

2.2 Метод інтегрування

Якщо тіло не можна розбити на кілька частин, положення центрів ваги яких відомі, то тіло розбиваємо на гранично малі довільні об'єми, для яких записуємо формули, аналогічні (5). Переходячи в цих об'ємах до межі близькому до нуля, одержуємо:

$$x_c = \frac{1}{V} \int x_K dV; \quad y_c = \frac{1}{V} \int y_K dV; \quad z_c = \frac{1}{V} \int z_K dV. \quad (8)$$

У випадку, коли інтегрування виконується для визначення координат центрів ваг площ і ліній одержуємо аналогічно формулам (5) і (7):

$$x_c = \frac{1}{S} \int x_K dS; \quad y_c = \frac{1}{S} \int y_K dS. \quad (9)$$

$$x_c = \frac{1}{L} \int x_K dL; \quad y_c = \frac{1}{L} \int y_K dL; \quad z_c = \frac{1}{L} \int z_K dL. \quad (10)$$

2.3 Метод симетрії для однорідних тіл

Для тіл, які мають площина симетрії або вісь симетрії центр ваги лежить відповідно в цих площинах і на цих осях. При наявності декількох площин симетрії або осей симетрії центр ваги твердого тіла перебуває в крапці перетинання цих площин або осей симетрії.

2.4 Питання для самоконтролю

1. Що називається центром ваги твердого тіла?
2. Як записуються формули для координат центра ваги твердого тіла?
3. Як записуються формули для координат центра ваги об'єму?
4. Як записуються формули для координат центра ваги площі?
5. Як записуються формули для координат центра ваги лінії?
6. У чому полягає метод симетрії?
7. У чому полягає метод розбивки?
8. У чому полягає метод доповнення?
9. У чому полягає метод негативних ваг?
10. Як записуються формули для статичного моменту площі щодо осі?

3 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

3.1 Приклад 1

Методом розбивки знайти координати центра ваги площі поперечного перерізу плоскої фігури - нерівнобічного косинця (рис. 1)

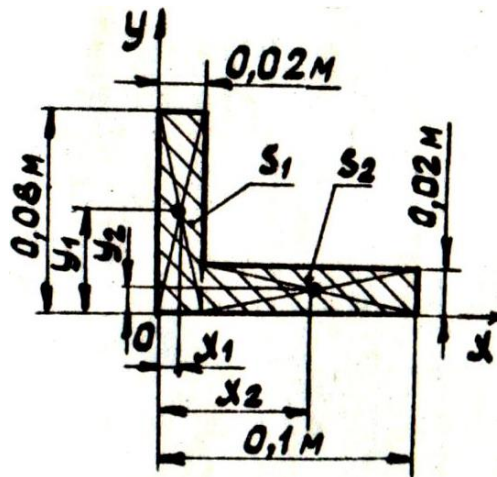


Рисунок 3.1 - Умови та вирішення задачі.

Розіб'ємо нашу фігуру (косинець) на два прямокутники, площі яких рівні:

$$S_1 = 0,02 * 0,08 = 0,0016 \text{ м}^2;$$

$$S_2 = 0,08 * 0,02 = 0,0016 \text{ м}^2.$$

Координати центра ваги першого прямокутника:

$$x_1 = 0,01 \text{ м}, y_1 = 0,04 ,$$

координати центра ваги другого прямокутника

$$x_2 = 0,06 \text{ м}, y_2 = 0,01 ,$$

На підставі (5) формули для координат центра ваги косинця мають вигляд:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{0,01 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} + 0,06 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-3} + 1,6 \cdot 10^{-3}} = 3,5 \cdot 10^{-2}$$

$$y_c = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{0,04 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} + 0,01 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-3} + 1,6 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^{-2}$$

Відповідь:

$$x_c = 3,5 \cdot 10^{-2}$$

$$y_c = 2,5 \cdot 10^{-2}$$

3.2 Приклад 2

Методом негативних ваг знайти координати центра ваги однорідного диска з радіусом 0,1 м и с круглим отвором з радіусом 0,05 м.

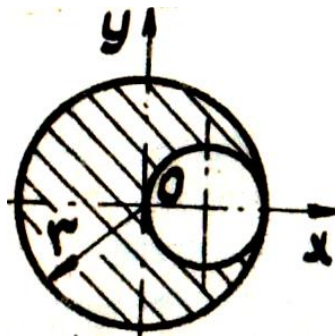


Рисунок 3.2 - Умови задачі.

Рішення.

Центр ваги фігури перебуває на осі X, що є віссю симетрії. Із цього треба, що $y_c=0$. Координату центра ваги фігури по осі X визначимо по формулі:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2}$$

Визначимо площі фігур 1 і 2 і їхні центри ваги:

$$S_1 = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 3,14 \cdot 10^{-2} \quad S_2 = \pi \cdot \frac{r^2}{4} = 3,14 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,785 \cdot 10^{-2}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{r}{2} = 0,05$$

Тоді після підстановки одержимо:

$$x_c = \frac{0,05 \cdot 0,0584 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 10^{-2} - 0,0785 \cdot 10^{-2}} = 1,67 \cdot 10^{-2}$$

Відповідь:

$$x_c = 0,0167 \text{ м}, \quad y_c = 0 \text{ м}.$$

3.3 Приклад 3

Методом інтегрування знайти формули для визначення координати центра ваги площі, що обмежена прямими й параболою $y = ax^2$ з вершиною в точці О, якщо $h = 0,04$ м, $d = 0,02$ м (рис. 3).

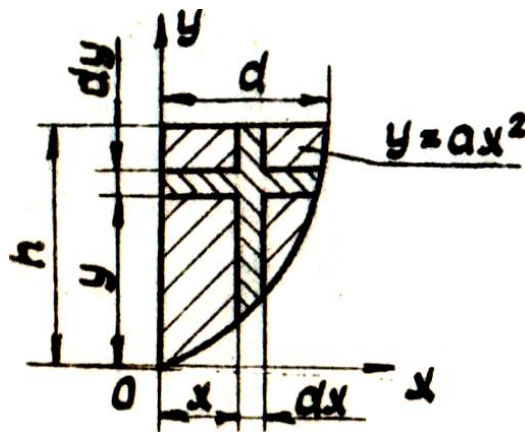


Рисунок 3.3 - Умови та вирішення задачі.

Рішення. Для площі фігури застосуємо наступну формулу:

$$S = \int_0^a (h - ax^2) dx = hd - \frac{ad^3}{3}$$

Координату x обчислимо, скориставшись формулами (9). Таким чином:

$$dS = (h - ax^2) dx,$$

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(s)} x dS = \frac{1}{S} \int_0^a x(h - ax^2) dx = \left(hd^2 - \frac{ad^4}{3} \right) \frac{1}{S}$$

При обчисленні другої координати центра ваги елемент площі зручно представити у вигляді:

$$dS = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{y} dy,$$

тоді на підставі формул (9):

$$y_c = \frac{1}{S} \int_{(s)} y dS = \frac{1}{S} \int_0^a y \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{y} dy = \left(\frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{a}} h^2 \sqrt{h} \right) \frac{1}{S}$$

З рівняння параболи можна побачити, що

$$a = \frac{h}{d^2}$$

Враховуючи це співвідношення, отримаємо:

$$y_c = \frac{2dh^2}{5S}$$

Відповідь:

$$x_c = \left(hd^2 - \frac{ad^4}{3} \right) \frac{1}{S} \qquad y_c = \frac{2dh^2}{5S}$$

4 ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Визначити координати центра ваги фігур відносно позначених осей координат. Розміри задані в метрах.

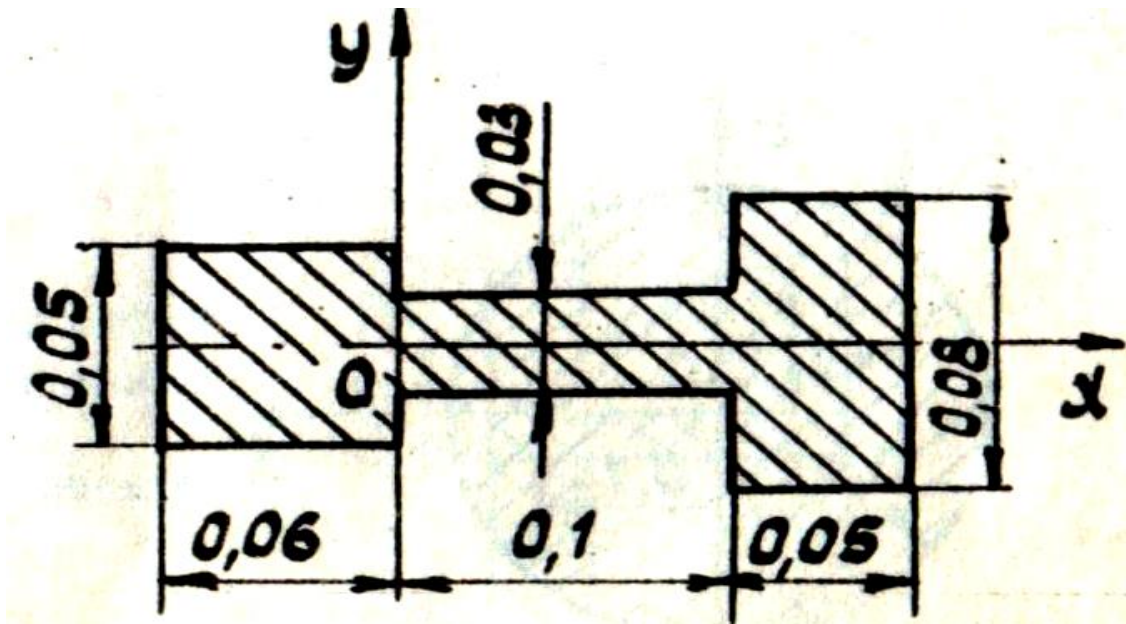


Рисунок 4.1 – Завдання для варіанта 1

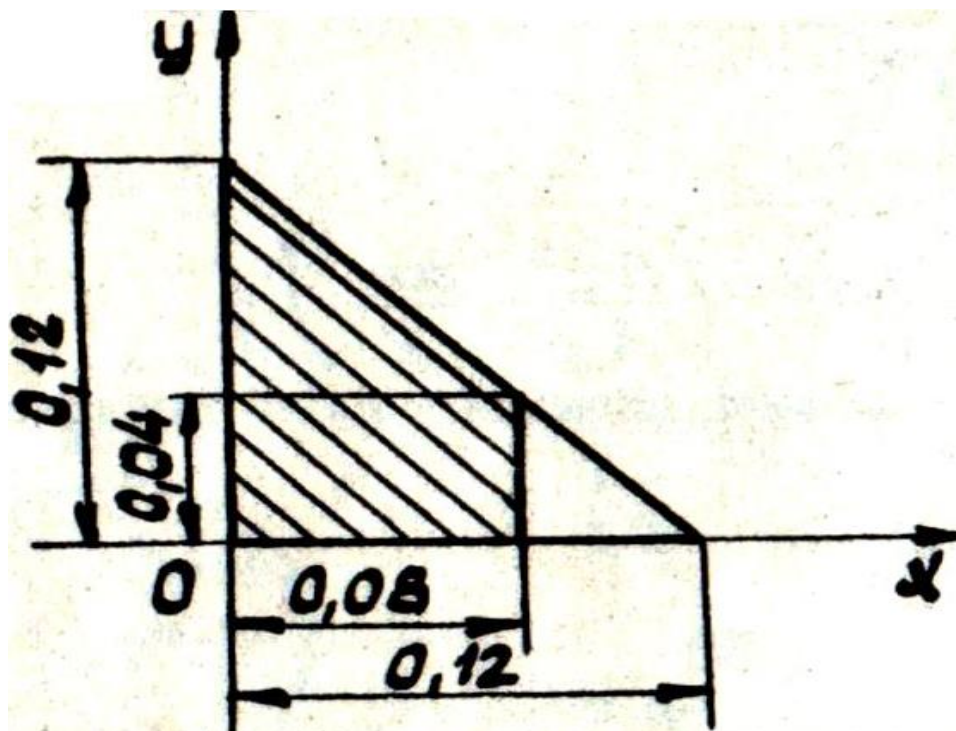


Рисунок 4.2 – Завдання для варіанта 2

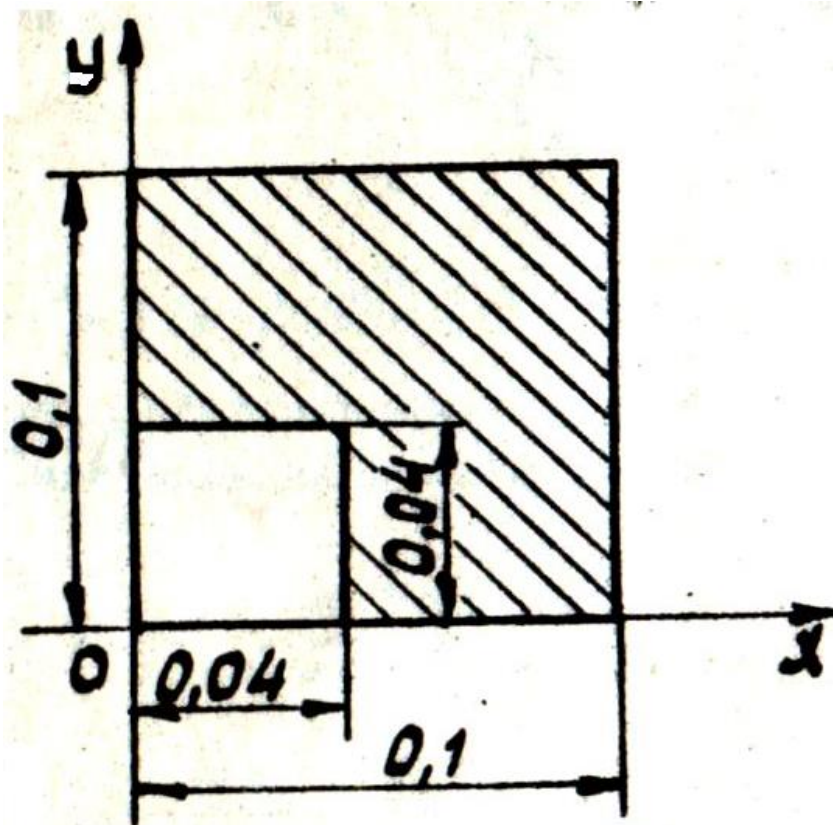


Рисунок 4.3 – Завдання для варіанта 3

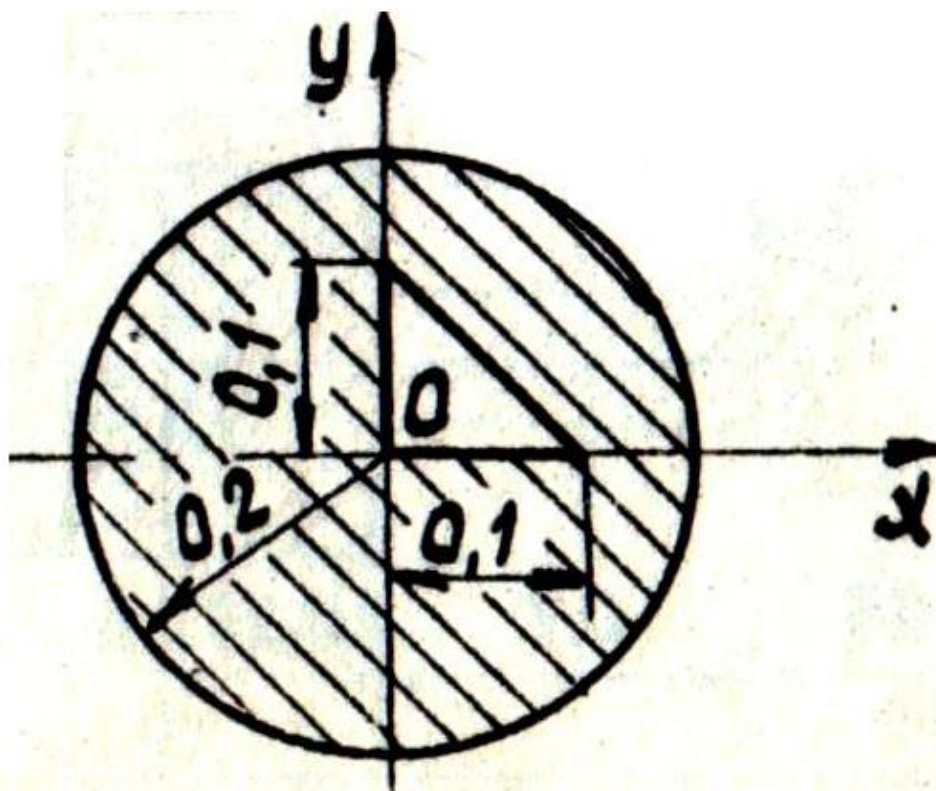


Рисунок 4.4 – Завдання для варіанта 4

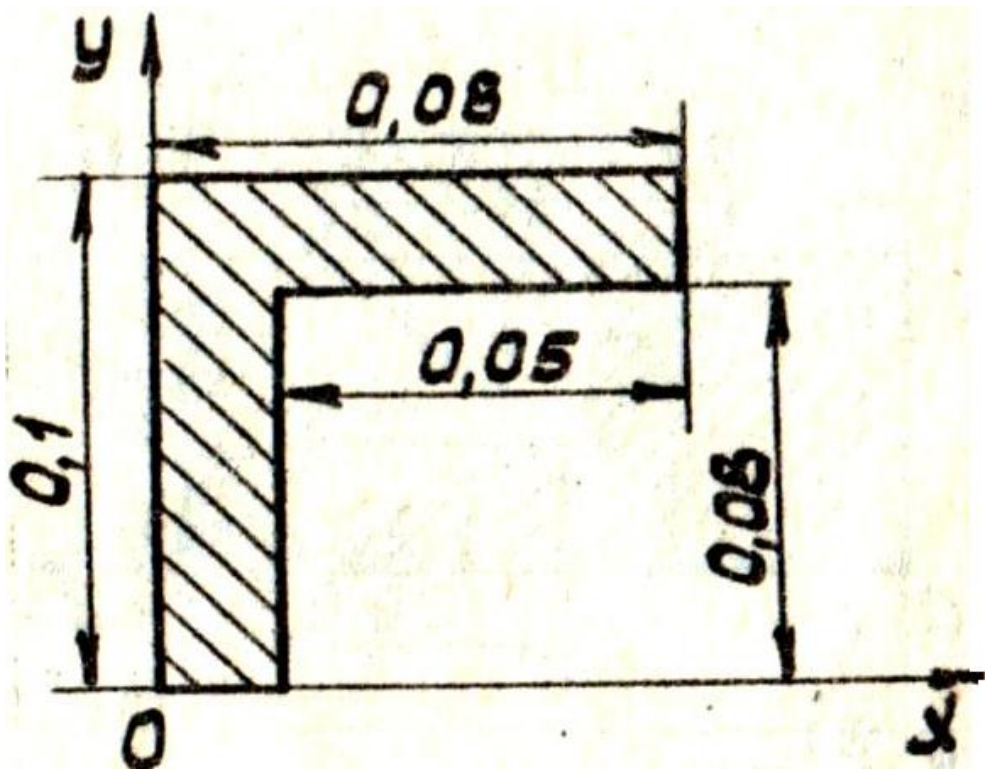


Рисунок 4.5 – Завдання для варіанта 5

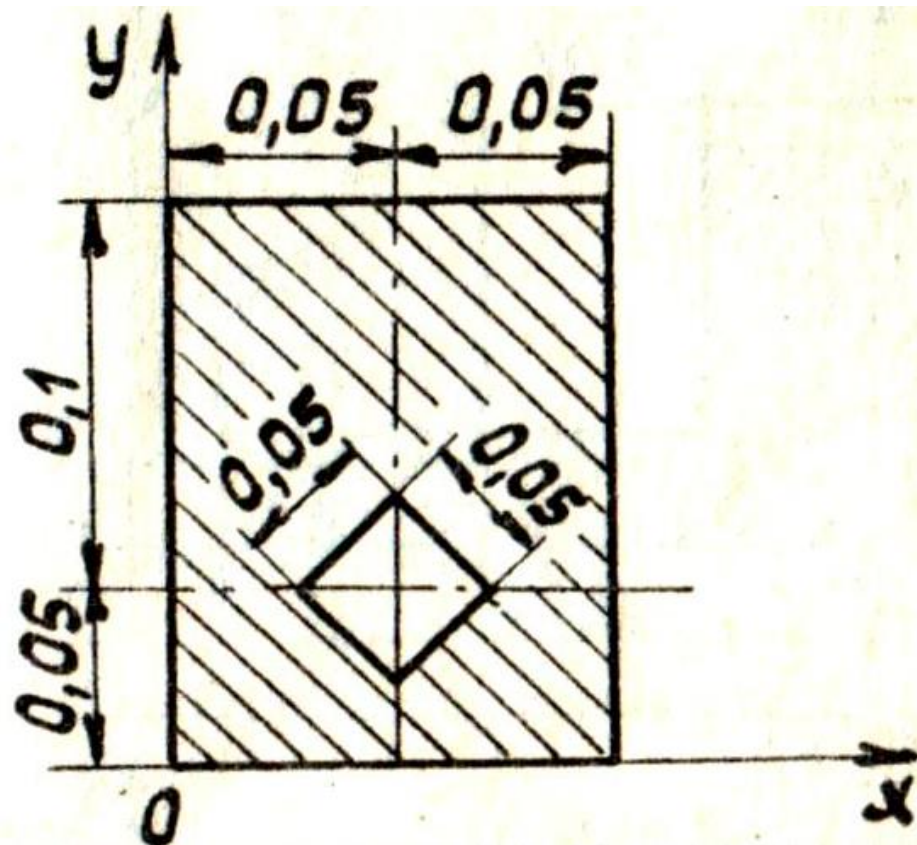


Рисунок 4.6 – Завдання для варіанта 6

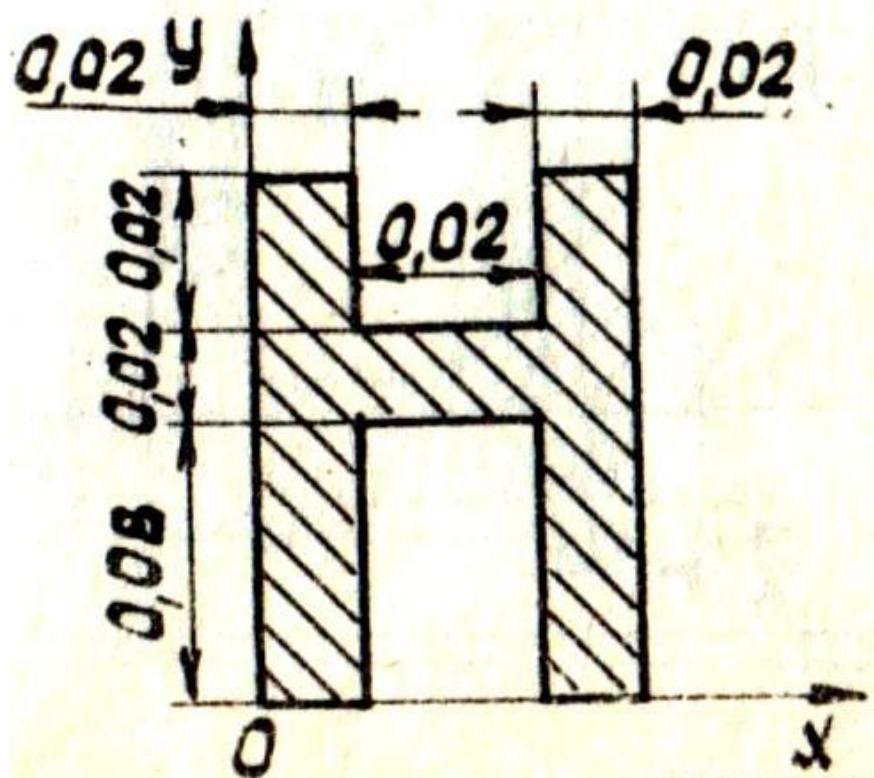


Рисунок 4.7 – Завдання для варіанта 7

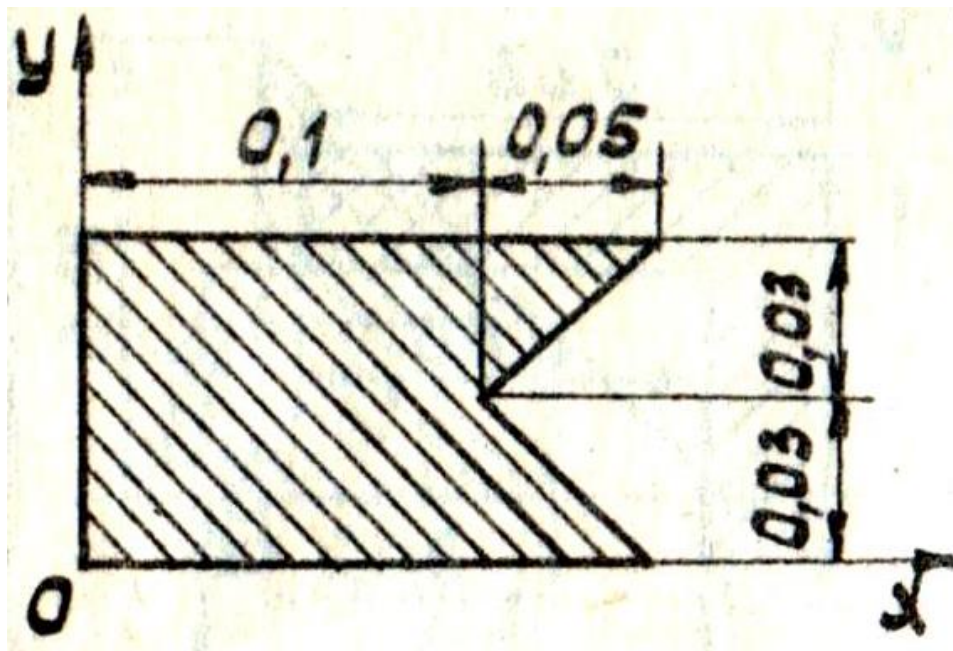


Рисунок 4.8 – Завдання для варіанта 8

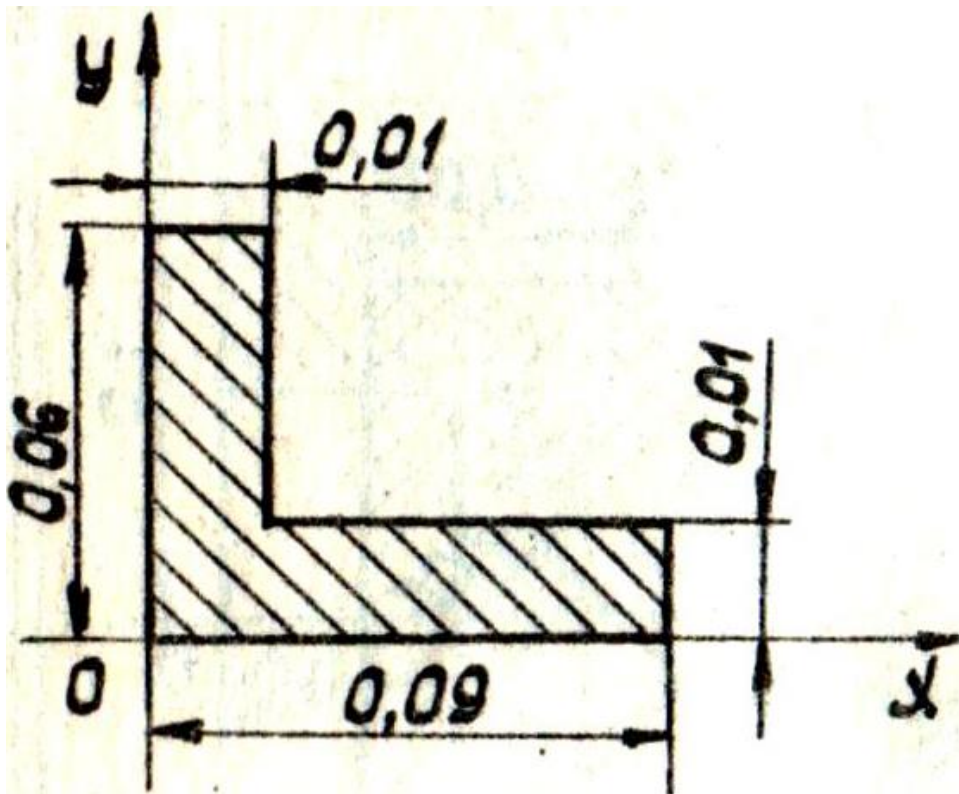


Рисунок 4.9 – Завдання для варіанта 9

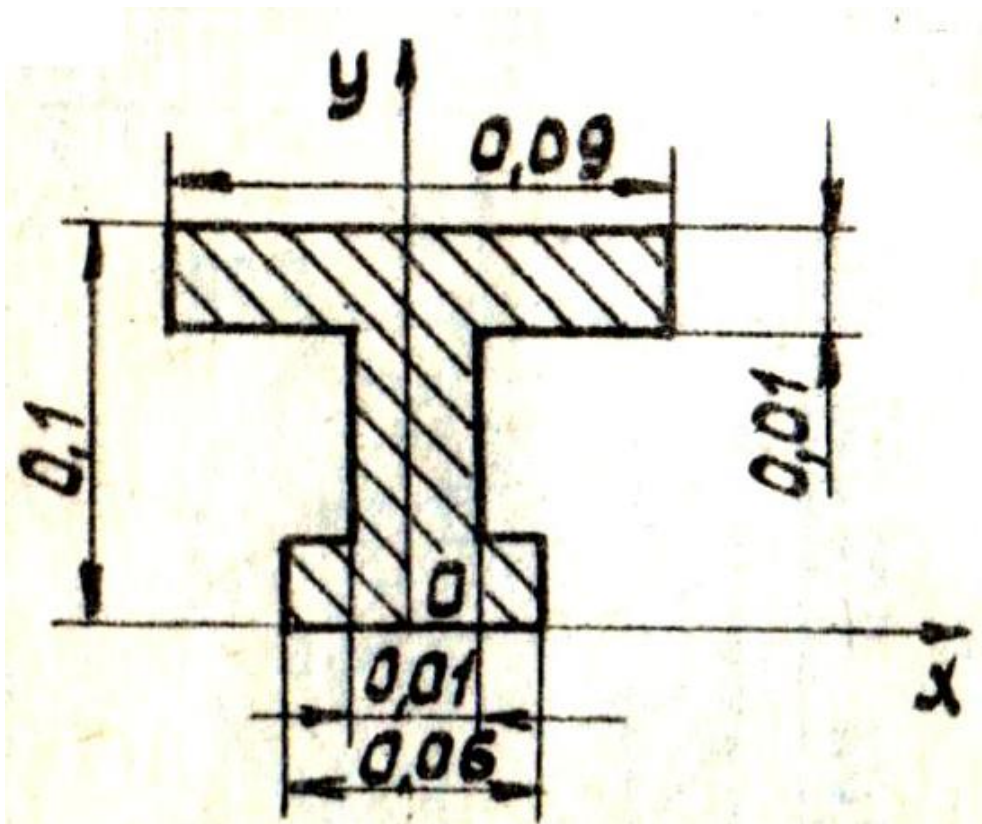


Рисунок 4.10 – Завдання для варіанта 10

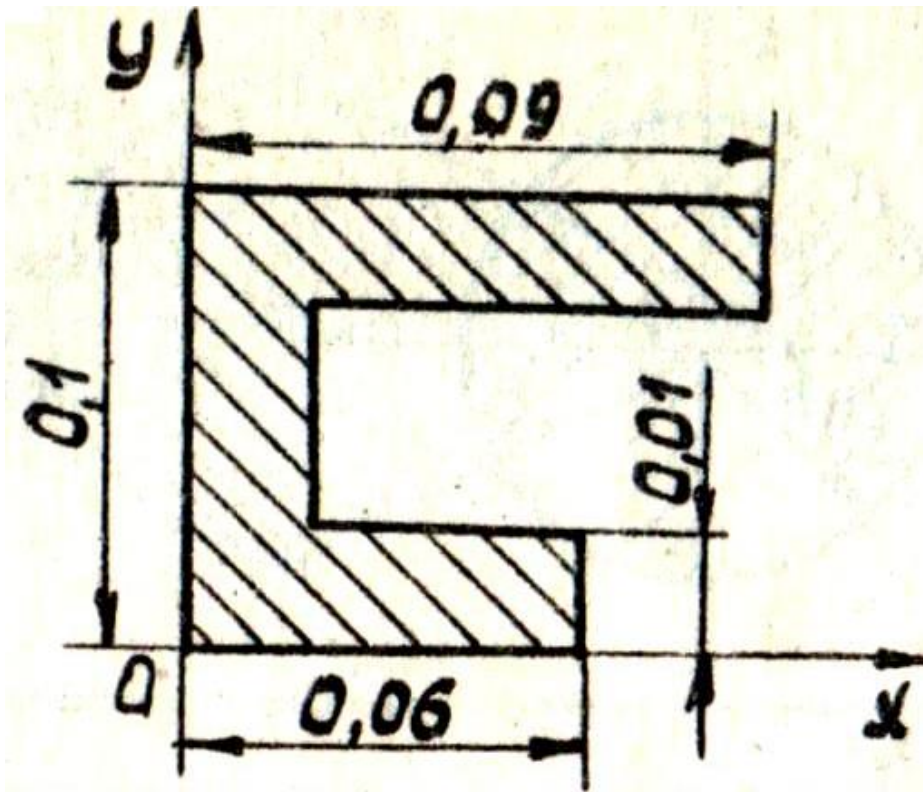


Рисунок 4.11 – Завдання для варіанта 11

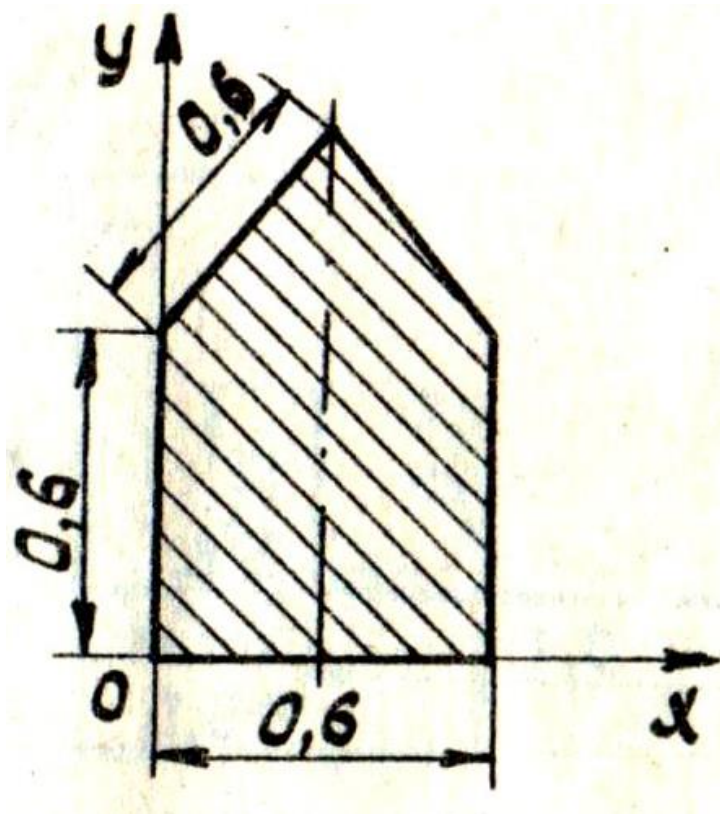


Рисунок 4.12 – Завдання для варіанта 12

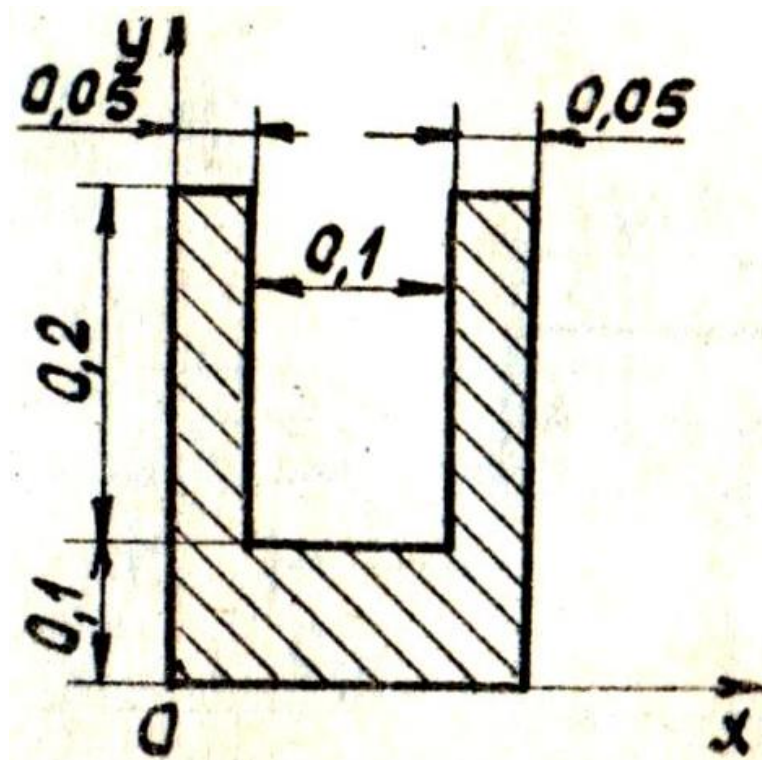


Рисунок 4.13 – Завдання для варіанта 13

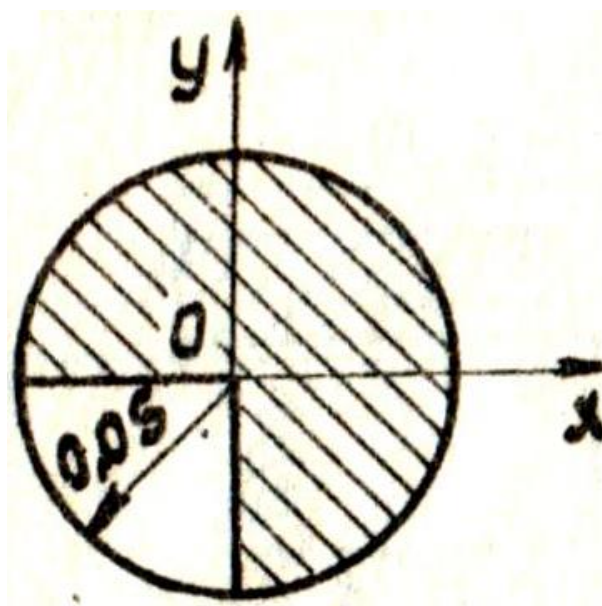


Рисунок 4.14 – Завдання для варіанта 14

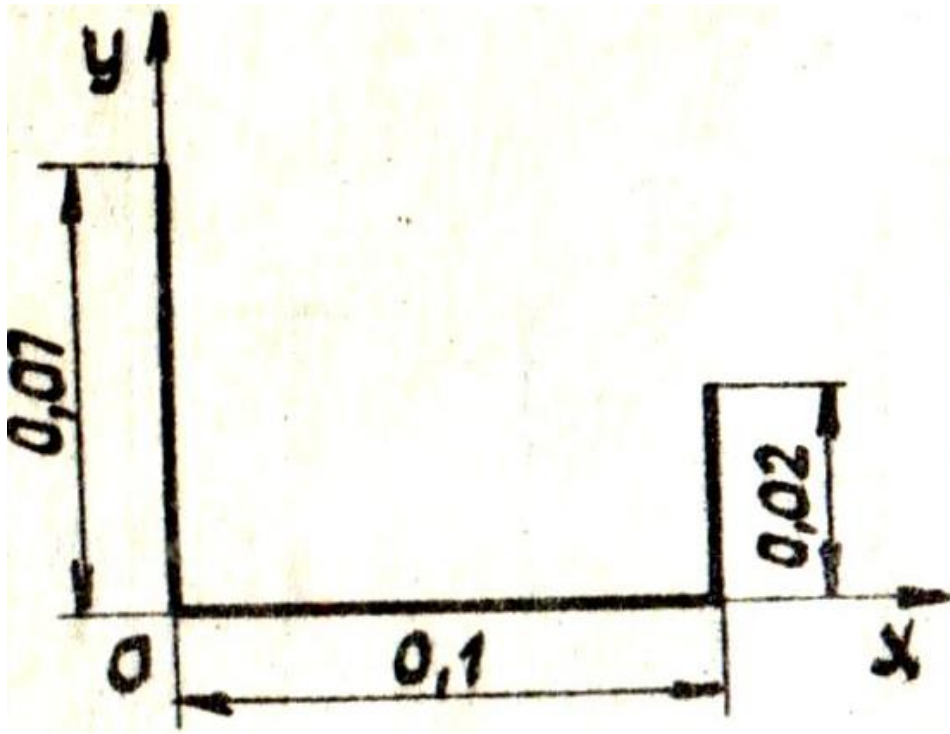


Рисунок 4.15 – Завдання для варіанта 15

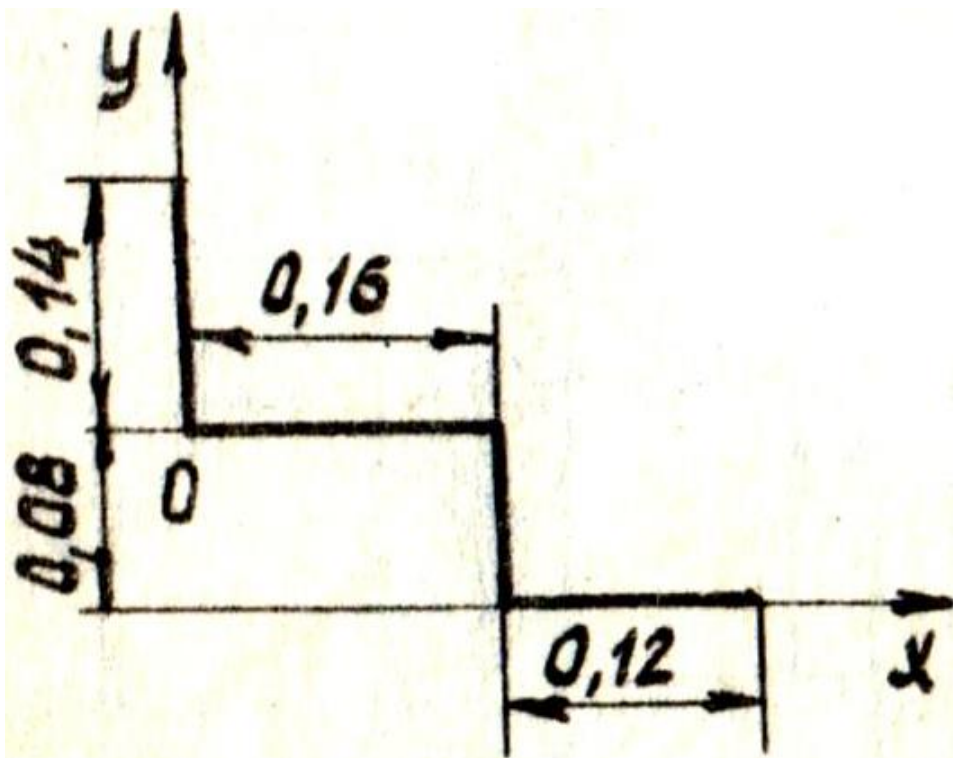


Рисунок 4.16 – Завдання для варіанта 16

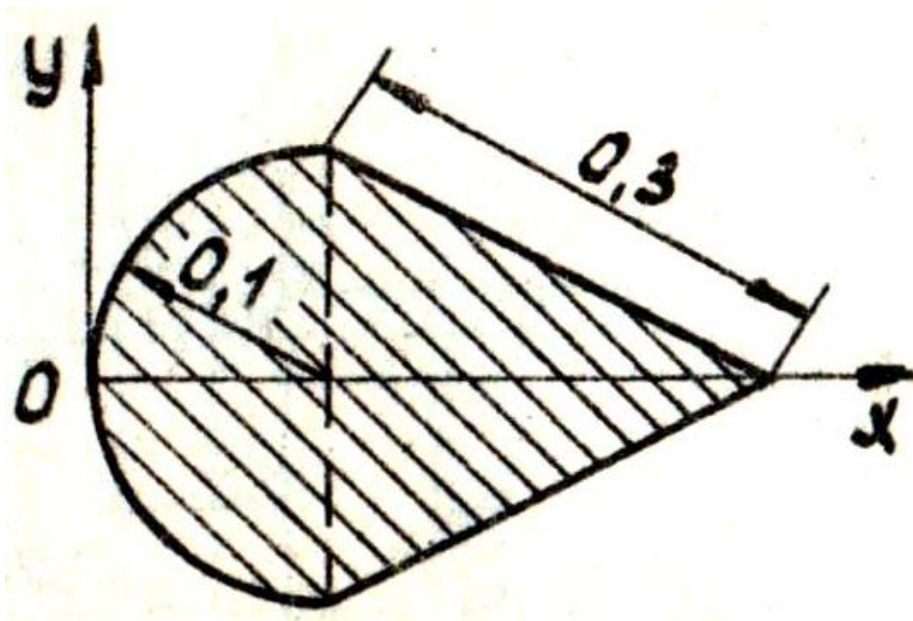


Рисунок 4.17 – Завдання для варіанта 17

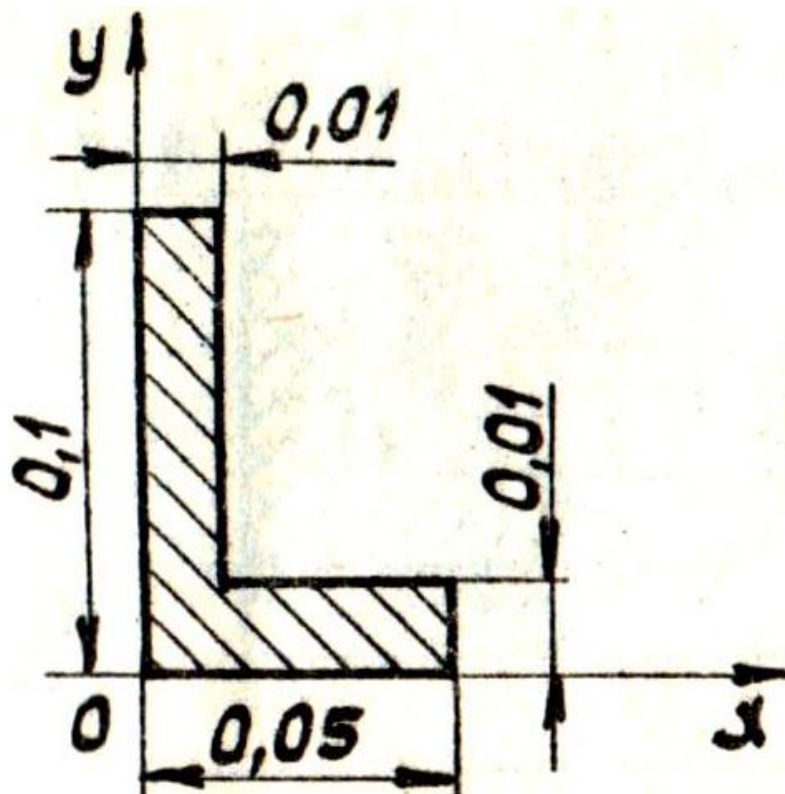


Рисунок 4.18 – Завдання для варіанта 18

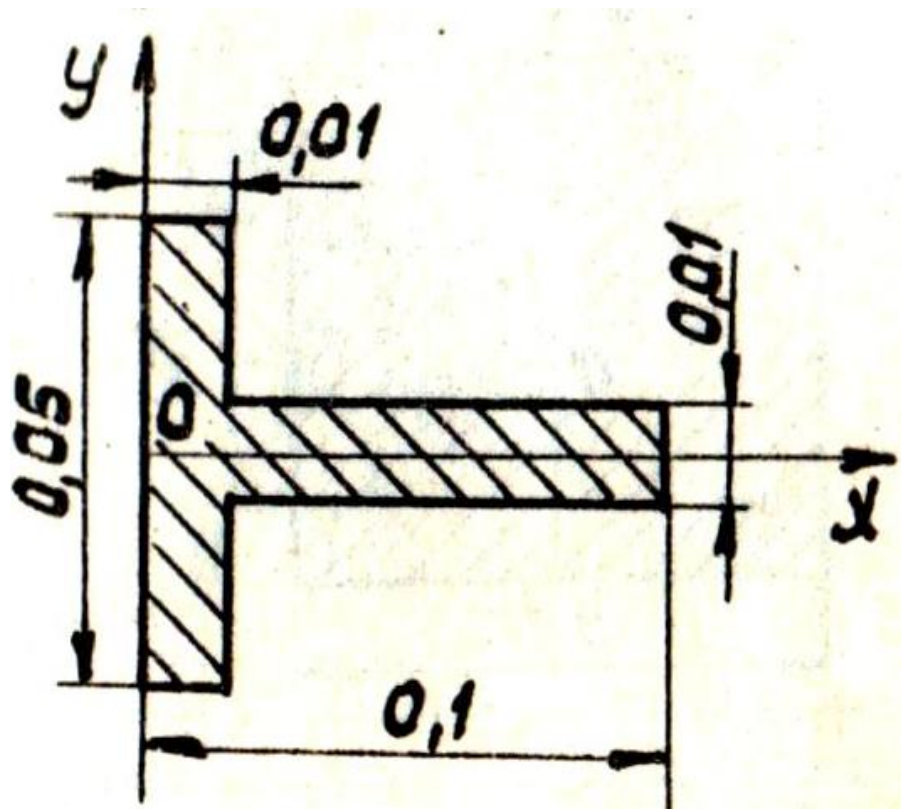


Рисунок 4.19 – Завдання для варіанта 19

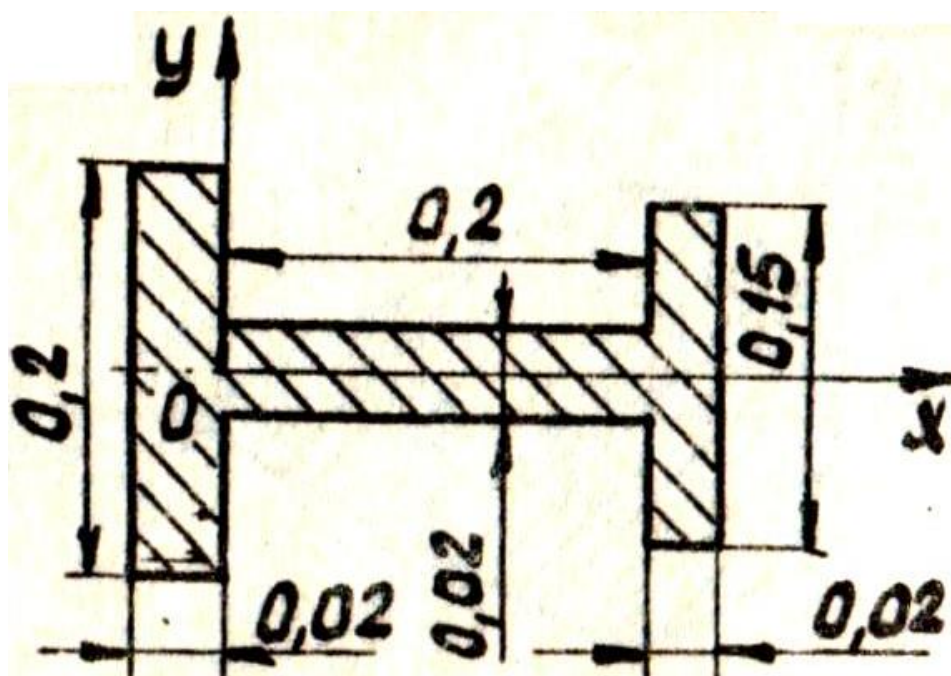


Рисунок 4.20 – Завдання для варіанта 20

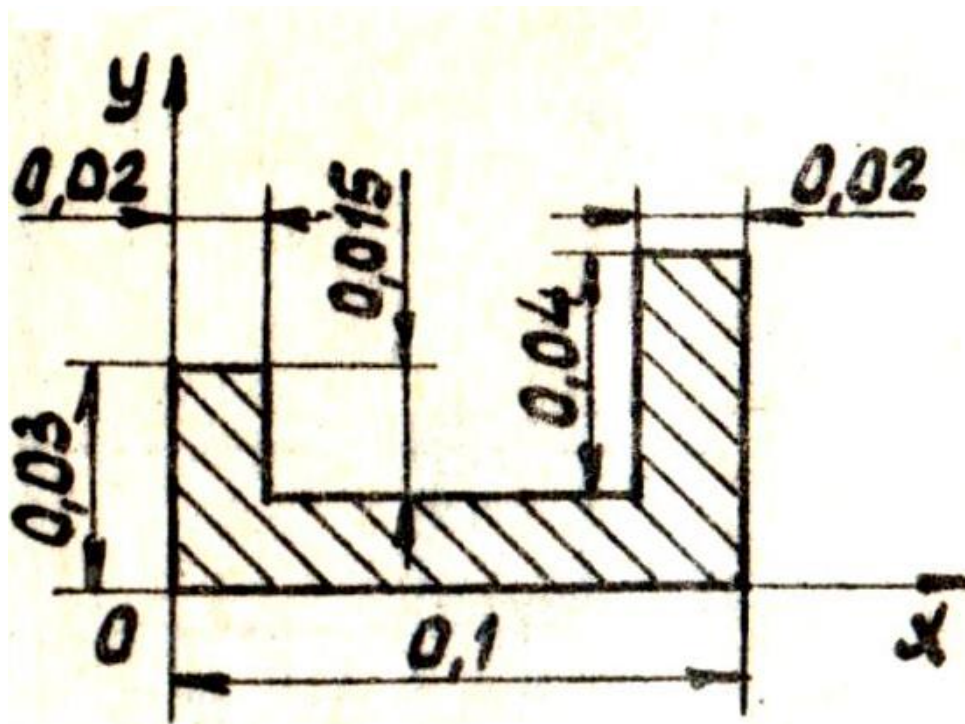


Рисунок 4.21 – Завдання для варіанта 21

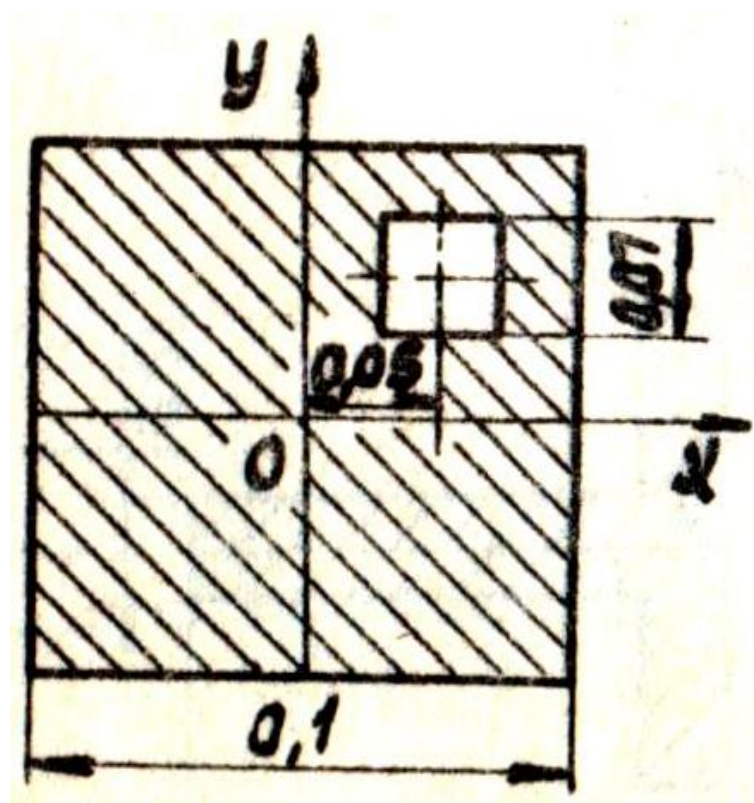


Рисунок 4.22 – Завдання для варіанта 22

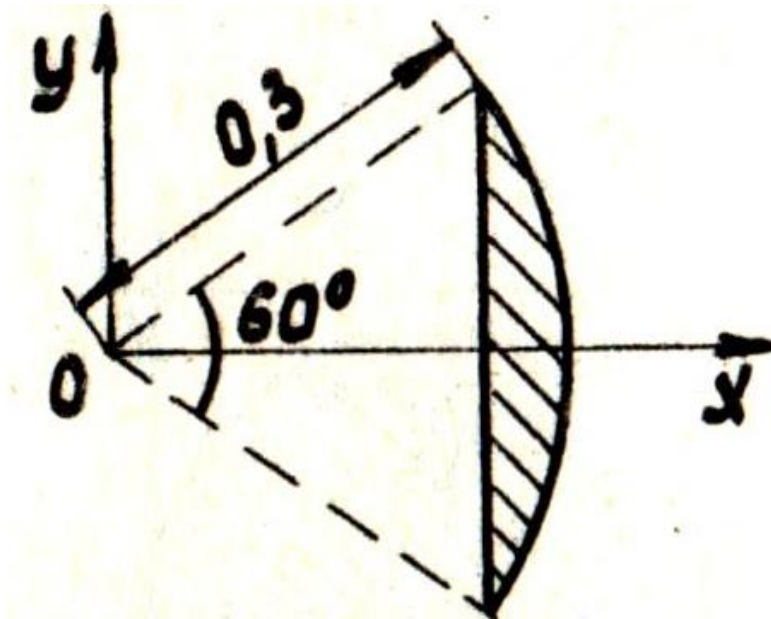


Рисунок 4.23 – Завдання для варіанта 23

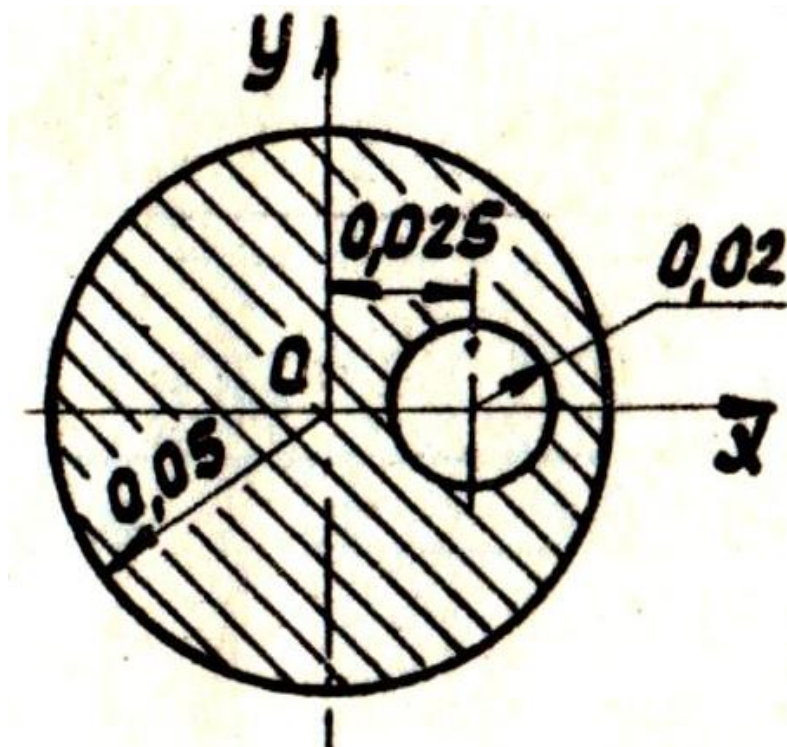


Рисунок 4.24 – Завдання для варіанта 24

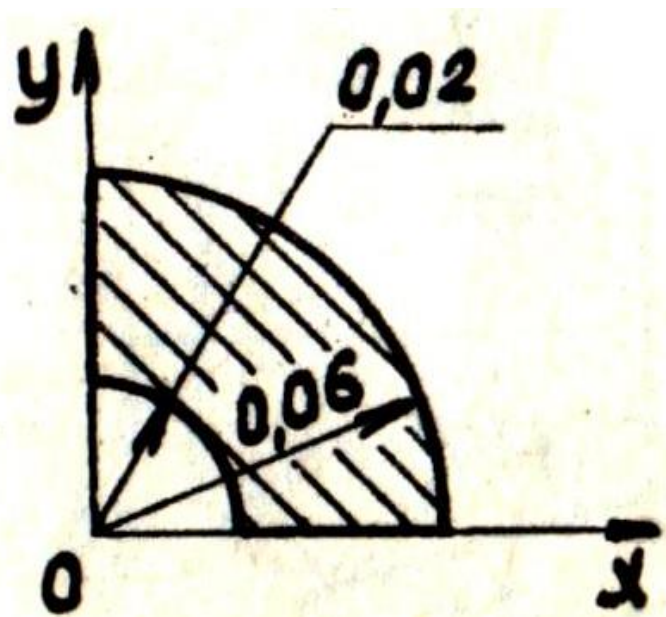


Рисунок 4.25 – Завдання для варіанта 25

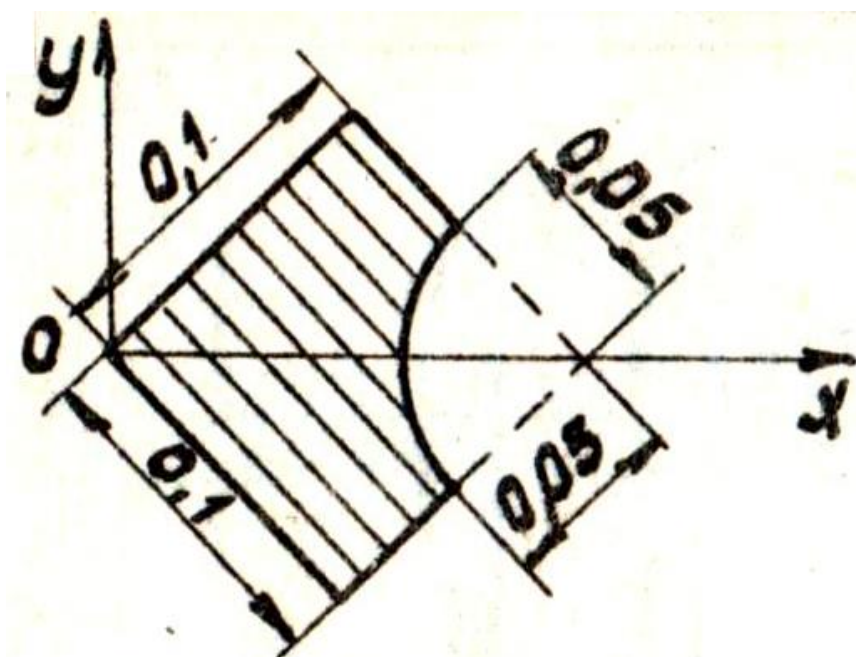


Рисунок 4.26 – Завдання для варіанта 26

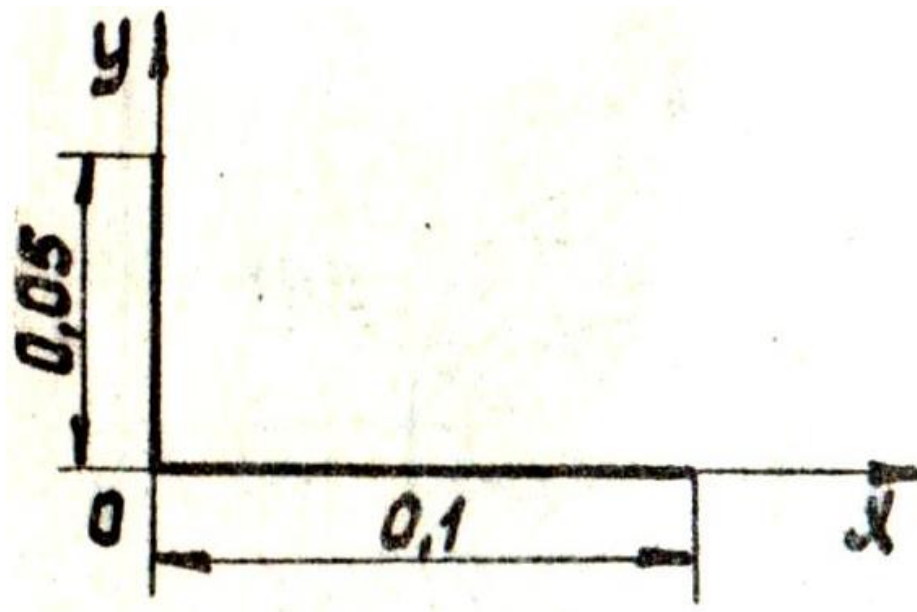


Рисунок 4.27 – Завдання для варіанта 27

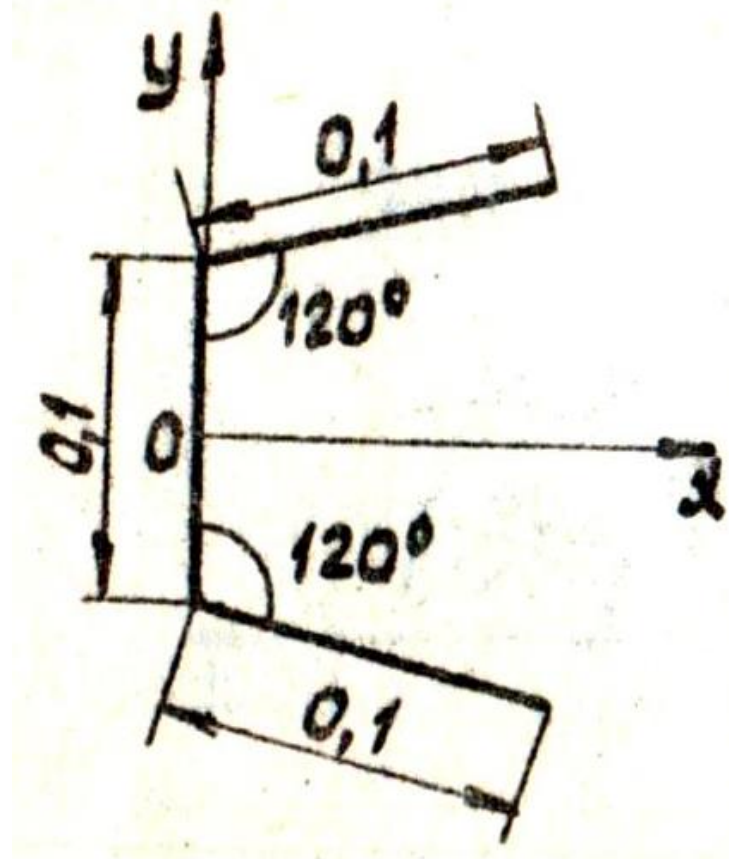


Рисунок 4.28 – Завдання для варіанта 28

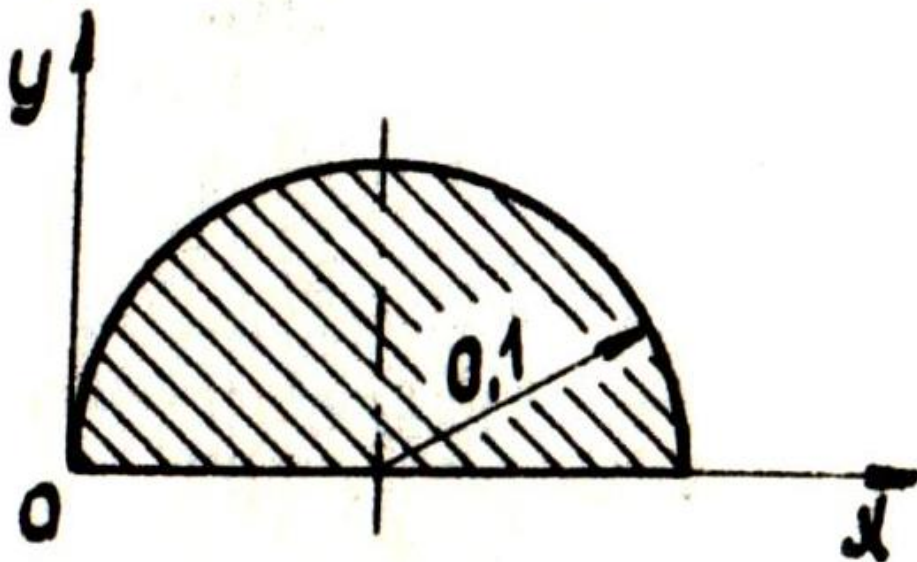


Рисунок 4.29 – Завдання для варіанта 29

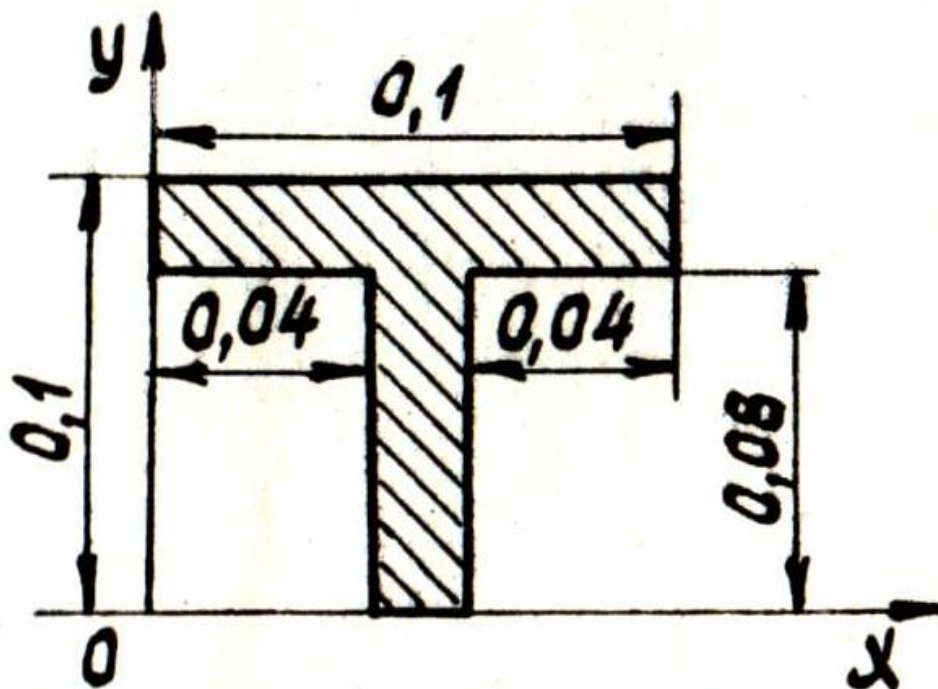


Рисунок 4.30 – Завдання для варіанта 30

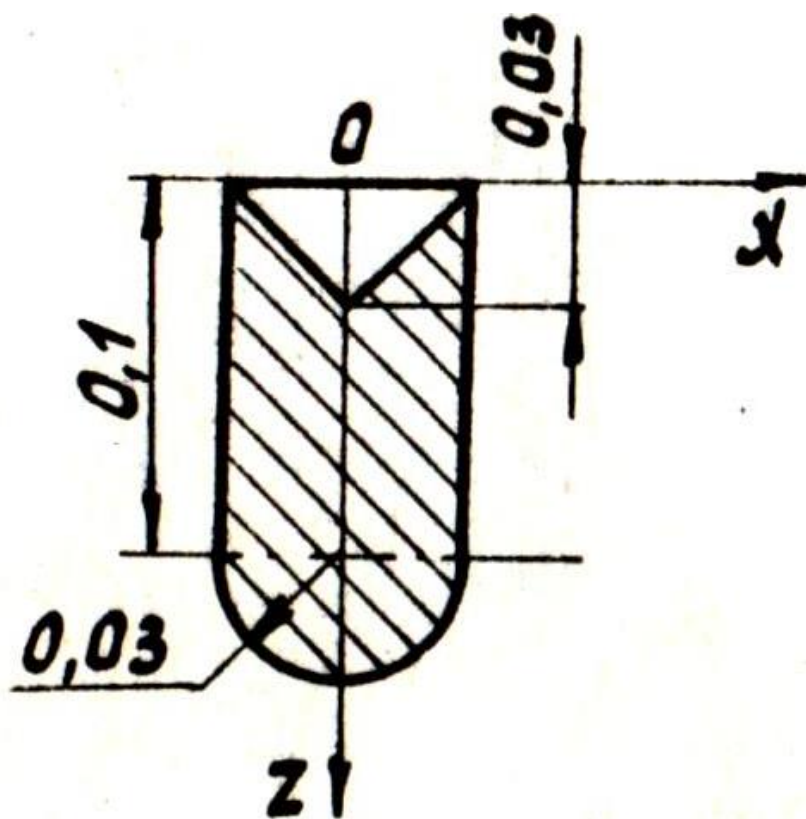


Рисунок 4.31 – Завдання для варіанта 31

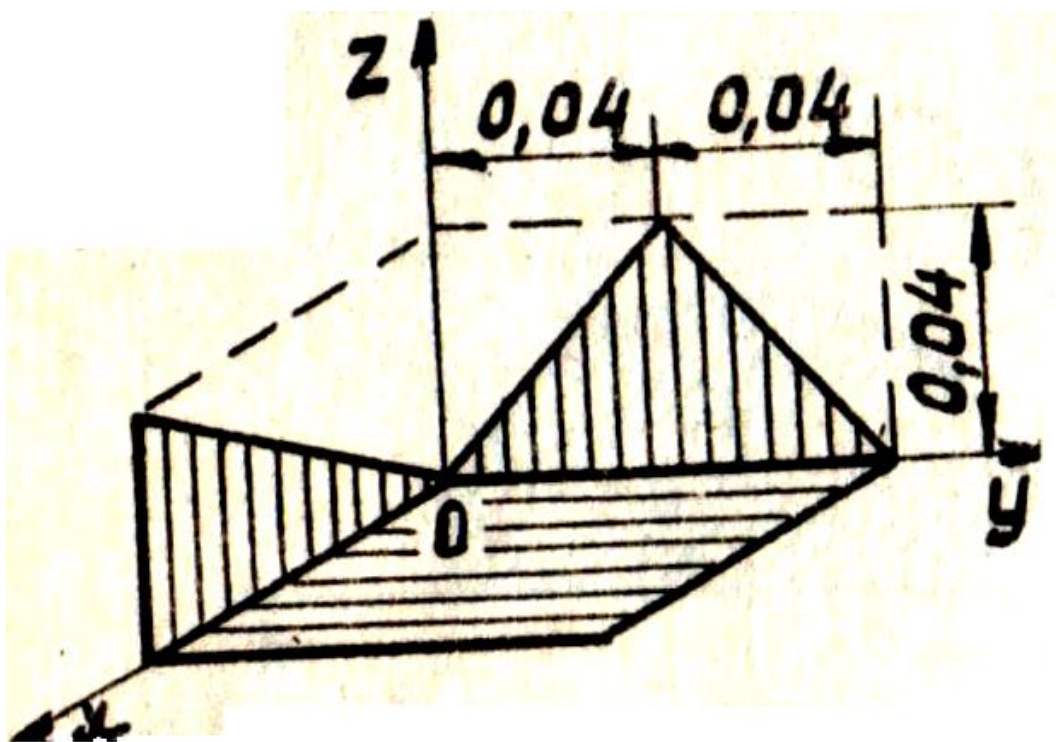


Рисунок 4.32 – Завдання для варіанта 32

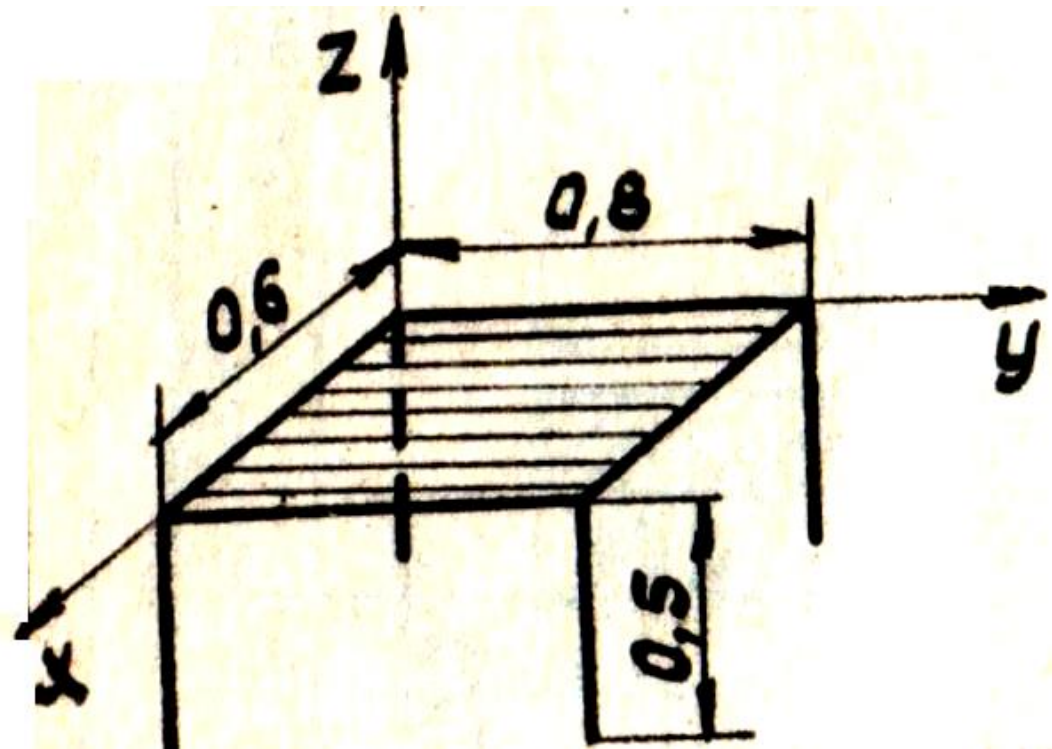


Рисунок 4.33 – Завдання для варіанта 33. Вага кожної ножки дорівнює 10 Н, вага дошки – 40 Н.

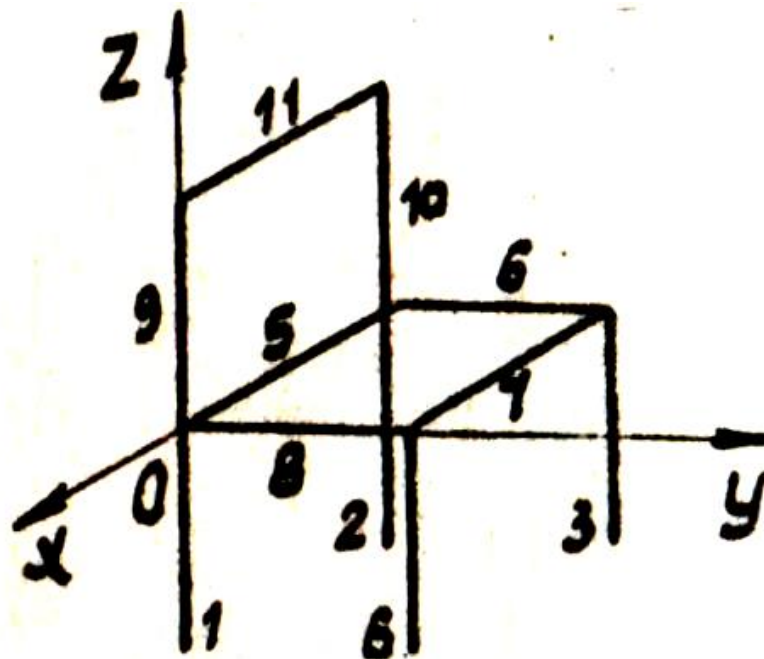


Рисунок 4.34 – Завдання для варіанта 34. Довжина кожного стрижня дорівнює 0,44 м.

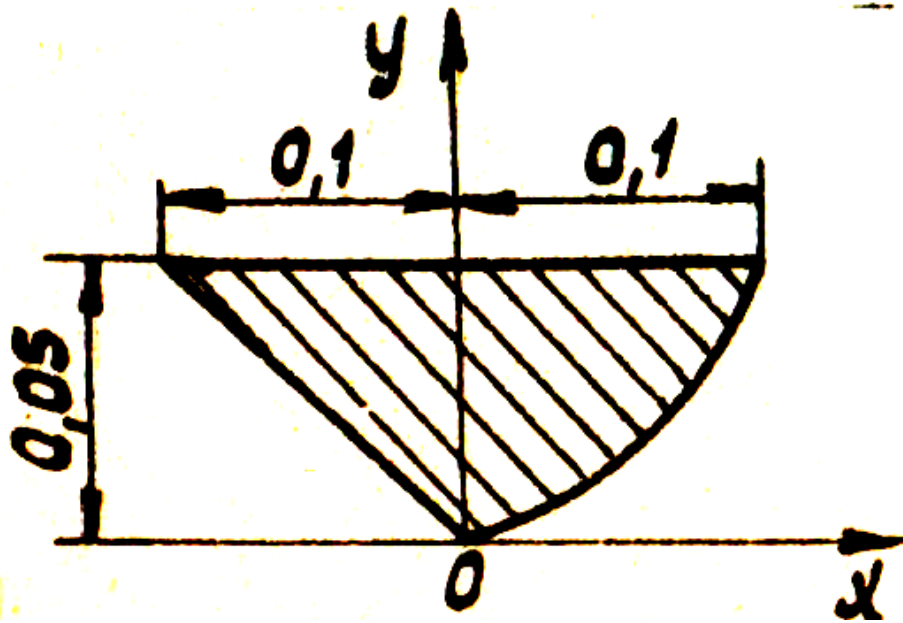


Рисунок 4.35 – Завдання для варіанта 35. Ліворуч на рисунку квадратна парабола

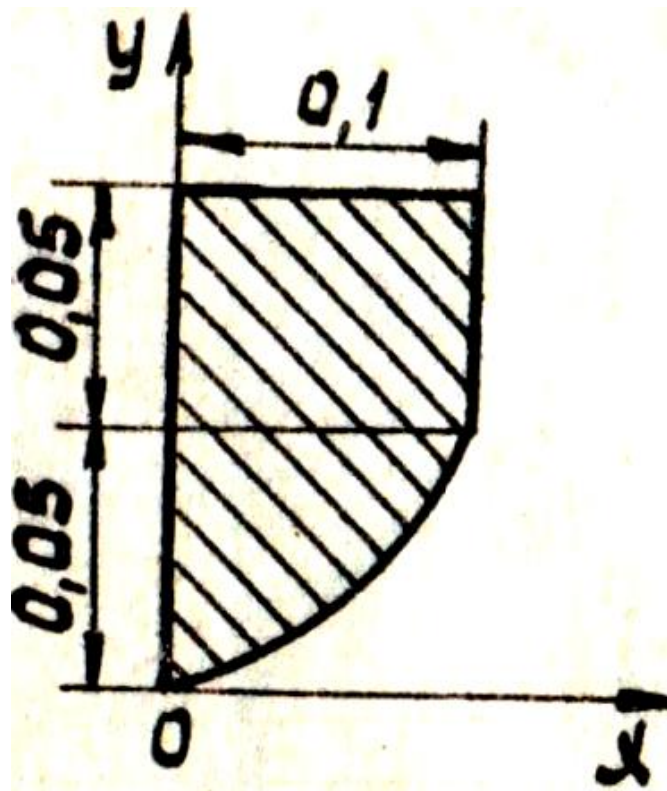


Рисунок 4.36 – Завдання для варіанта 36, на рисунку знизу знаходиться квадратна парабола

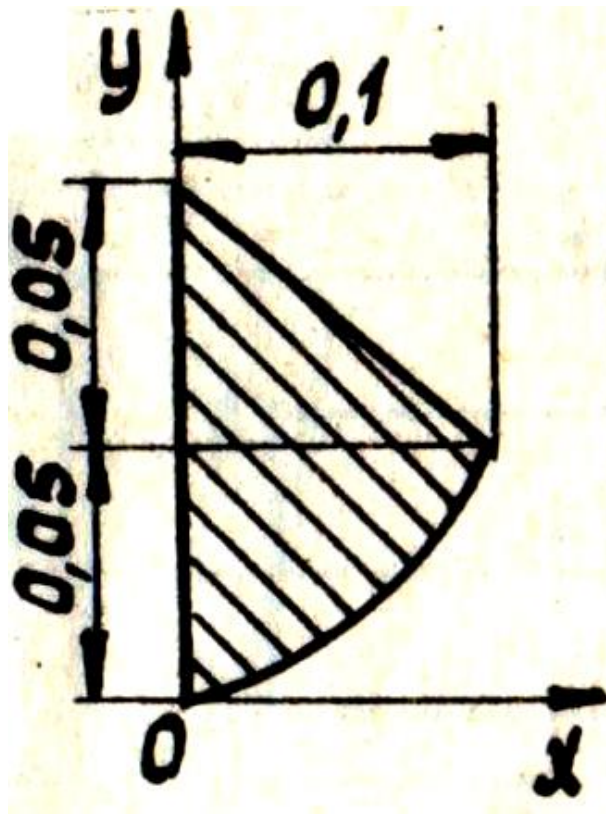


Рисунок 4.37 – Завдання для варіанта 37, на рисунку квадратна парабола

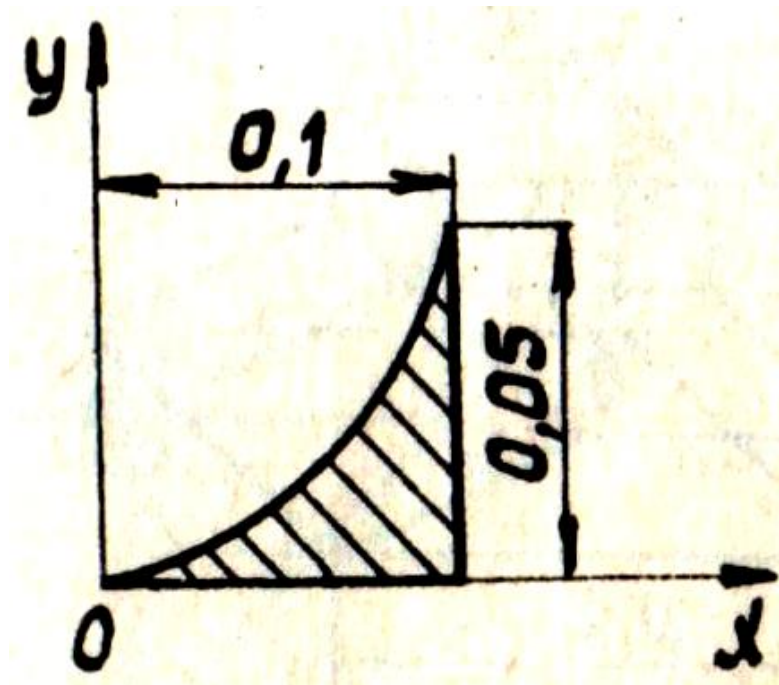


Рисунок 4.38 – Завдання для варіанта 38, на рисунку квадратна парабола

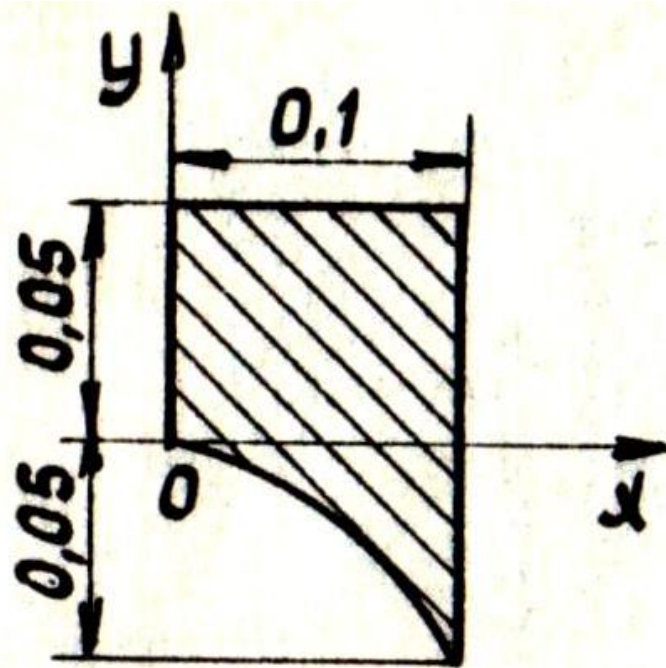


Рисунок 4.39 – Завдання для варіанта 39, на рисунку квадратна парабола

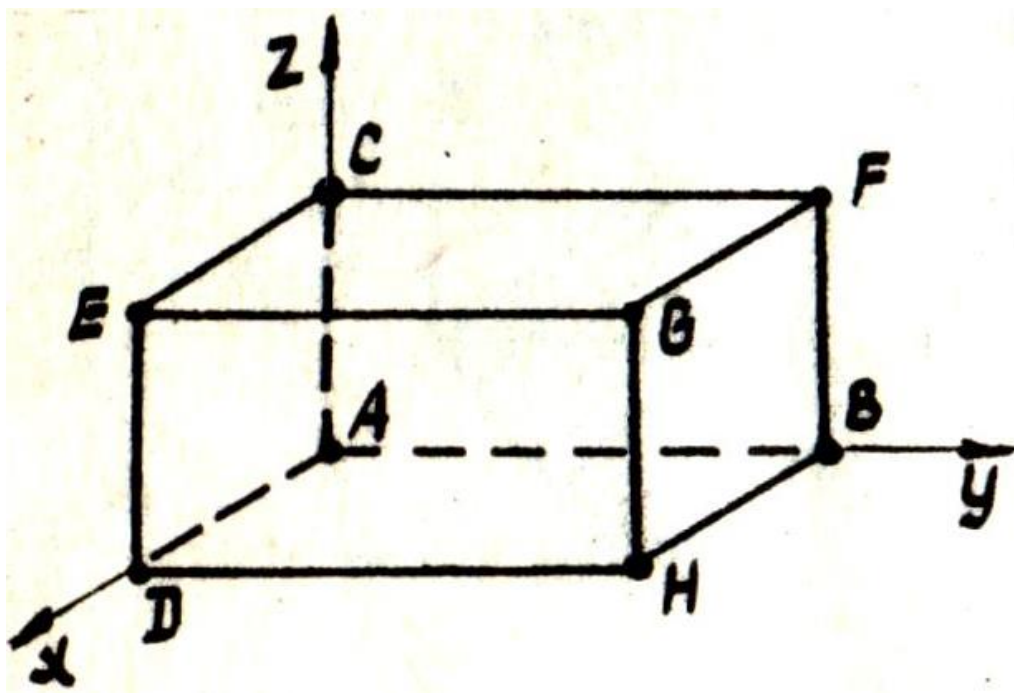


Рисунок 4.40 – Завдання для варіанта 40. Довжини ребрів: $AB = 0,2$ м, $AC = 0,05$ м. Вага вантажів у вершинах А, В, С, D, E, F, G, H відповідно дорівнюють 1 Н, 2 Н, 3 Н, 4 Н, 5 Н, 3 Н, 4 Н, 3 Н.

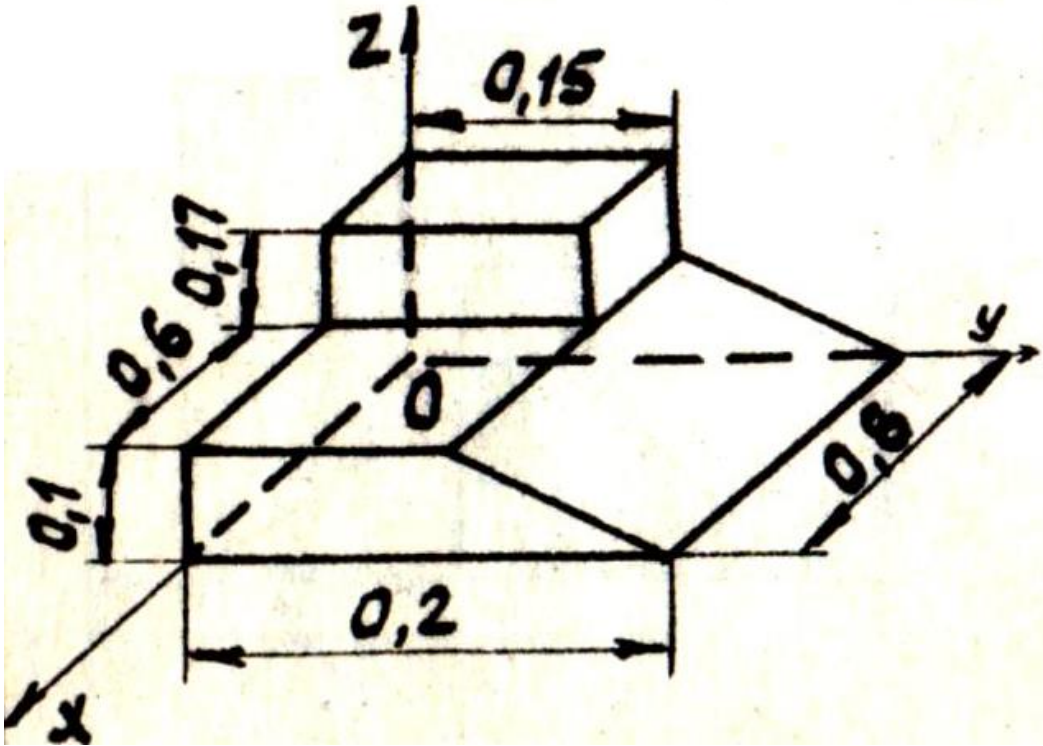


Рисунок 4.41 – Завдання для варіанта 41

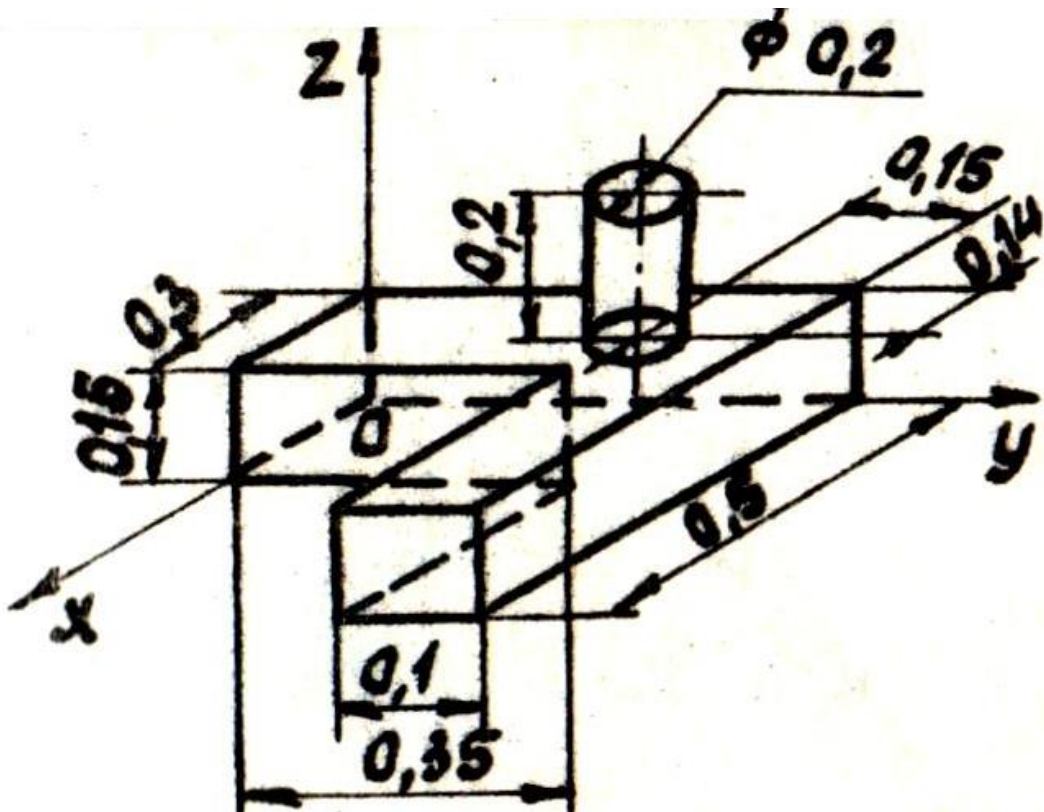


Рисунок 4.42 – Завдання для варіанта 42

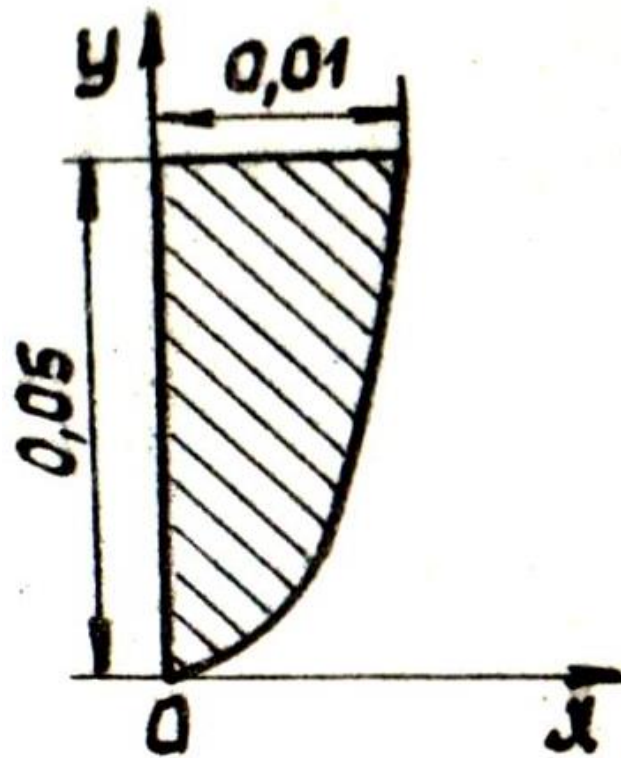


Рисунок 4.43 – Завдання для варіанта 43, на рисунку квадратна параболола

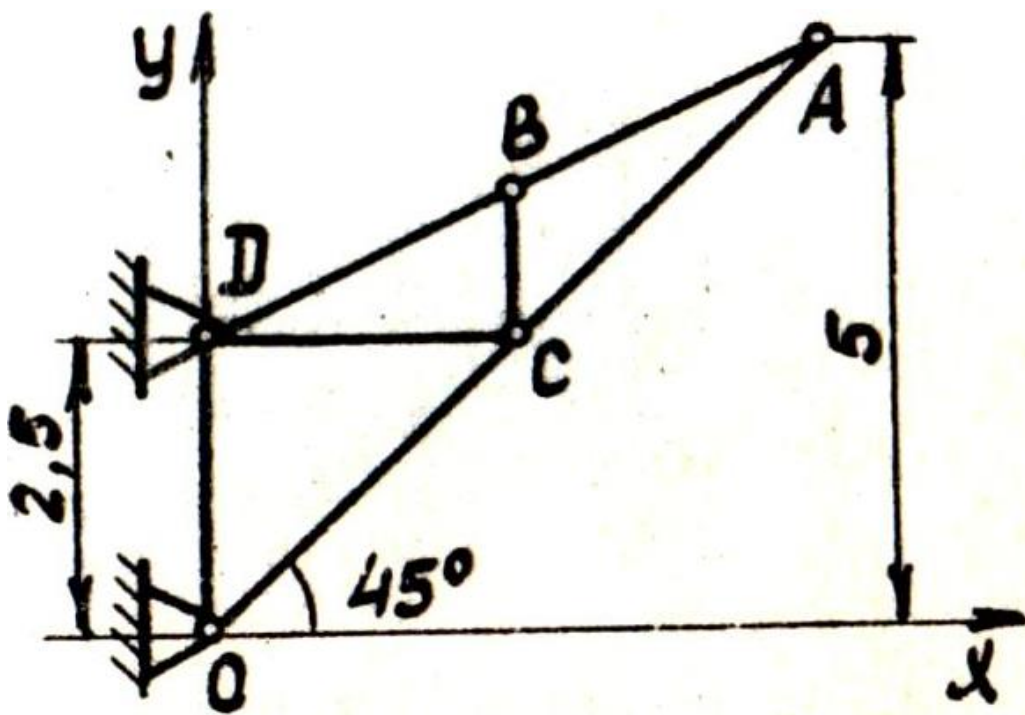


Рисунок 4.44 – Завдання для варіанта 44

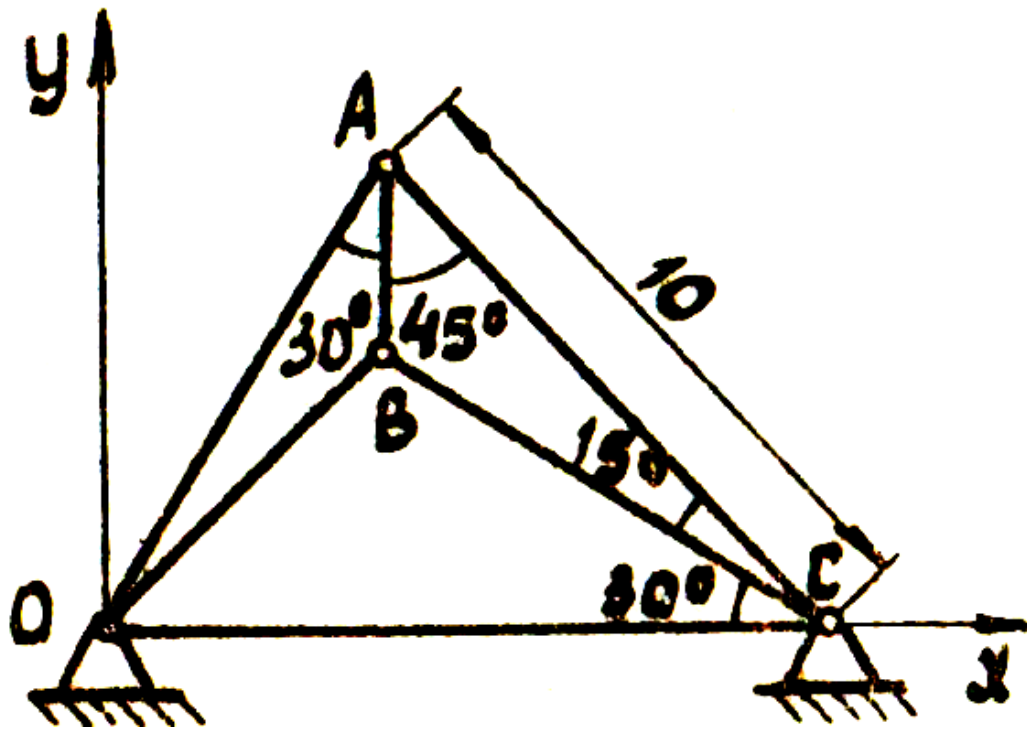


Рисунок 4.45 – Завдання для варіанта 45

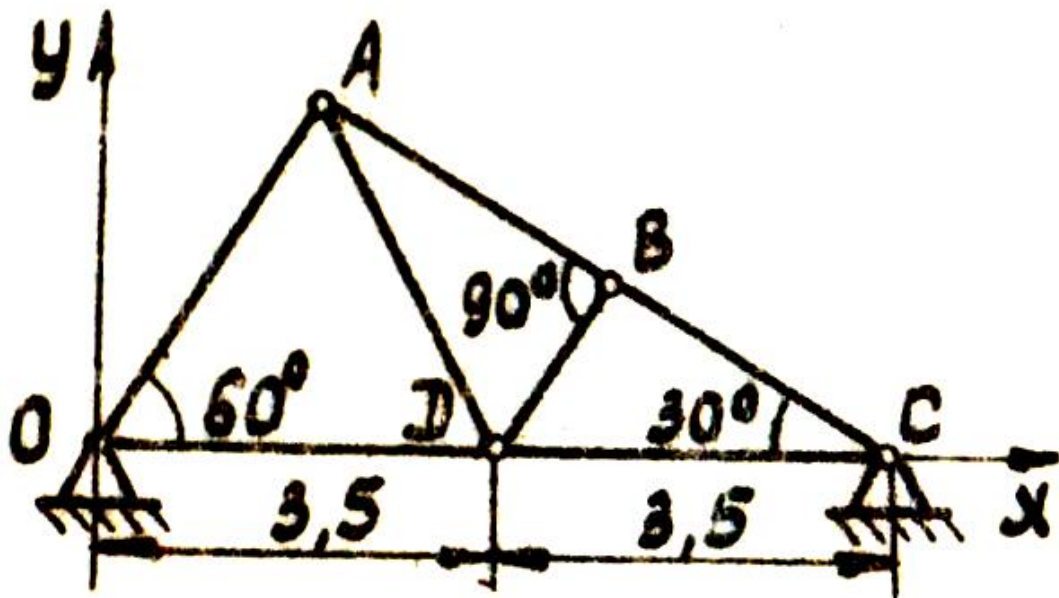


Рисунок 4.46 – Завдання для варіанта 46

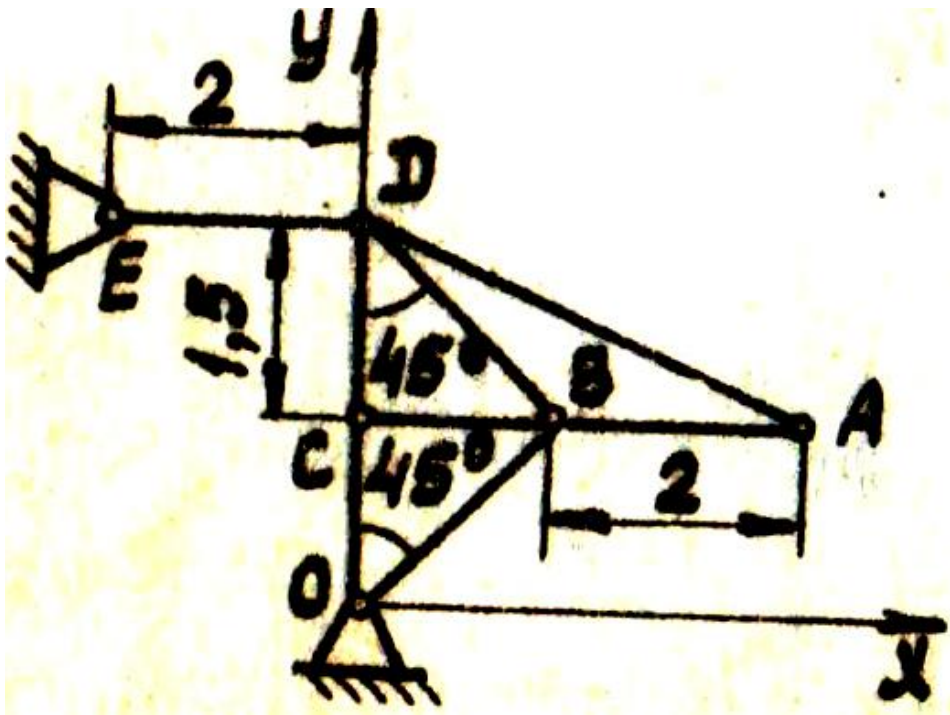


Рисунок 4.47 – Завдання для варіанта 47

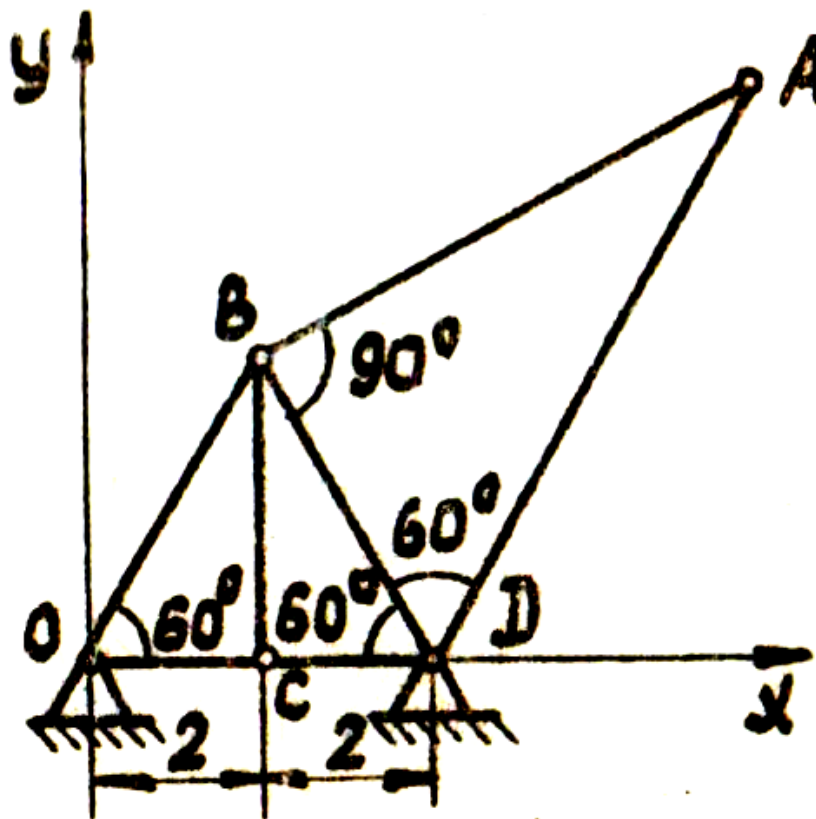


Рисунок 4.48 – Завдання для варіанта 48

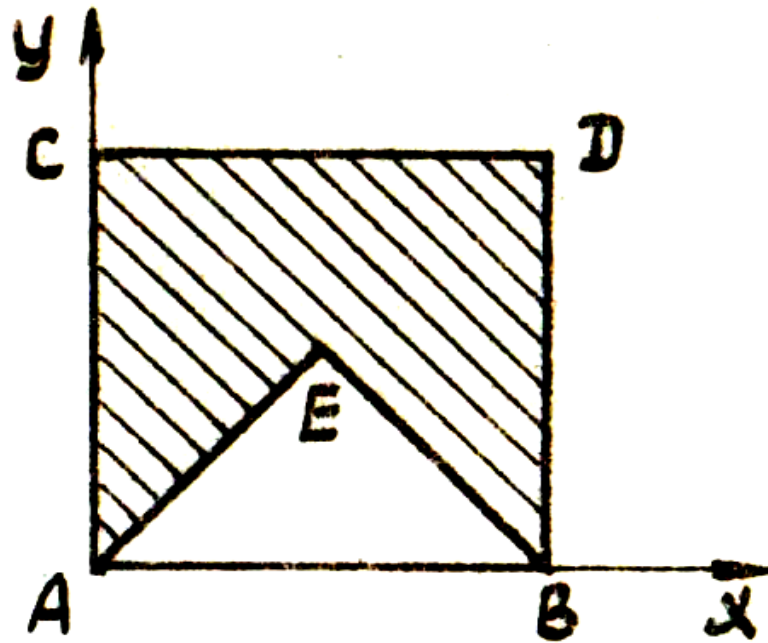


Рисунок 4.49 – Завдання для варіанта 49. Сторона квадрату 2 м.

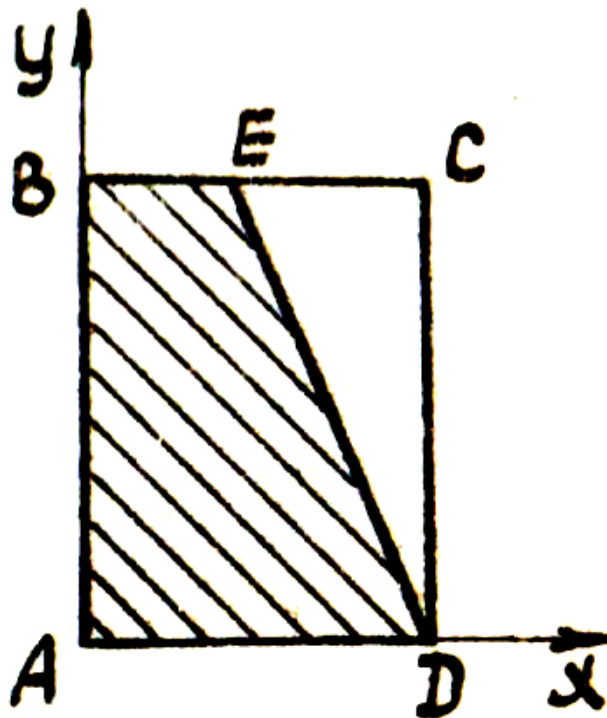


Рисунок 4.50 – Завдання для варіанта 50. Сторони прямокутника 2 м и 3 м, відрізки BE и EC рівні між собою.

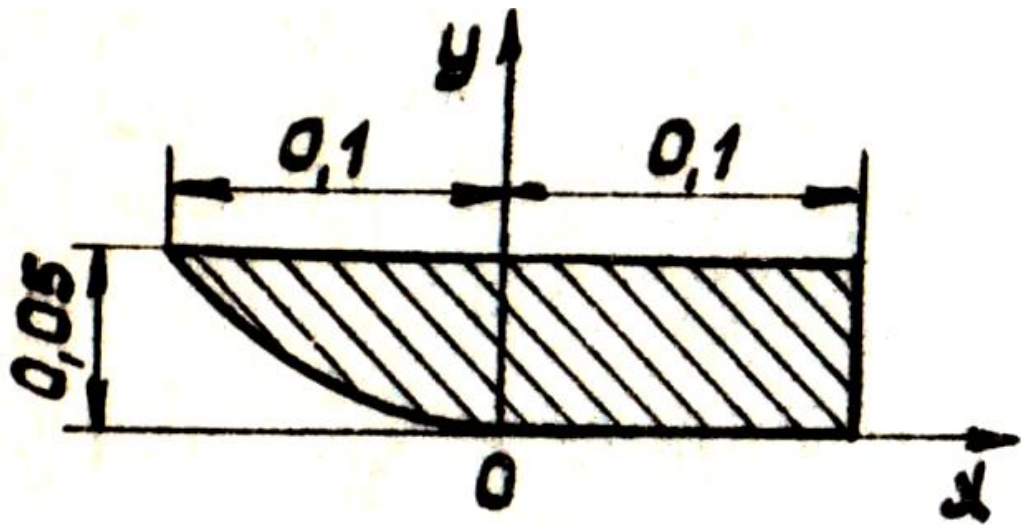


Рисунок 4.51 – Завдання для варіанта 51, на рисунку квадратна параболола

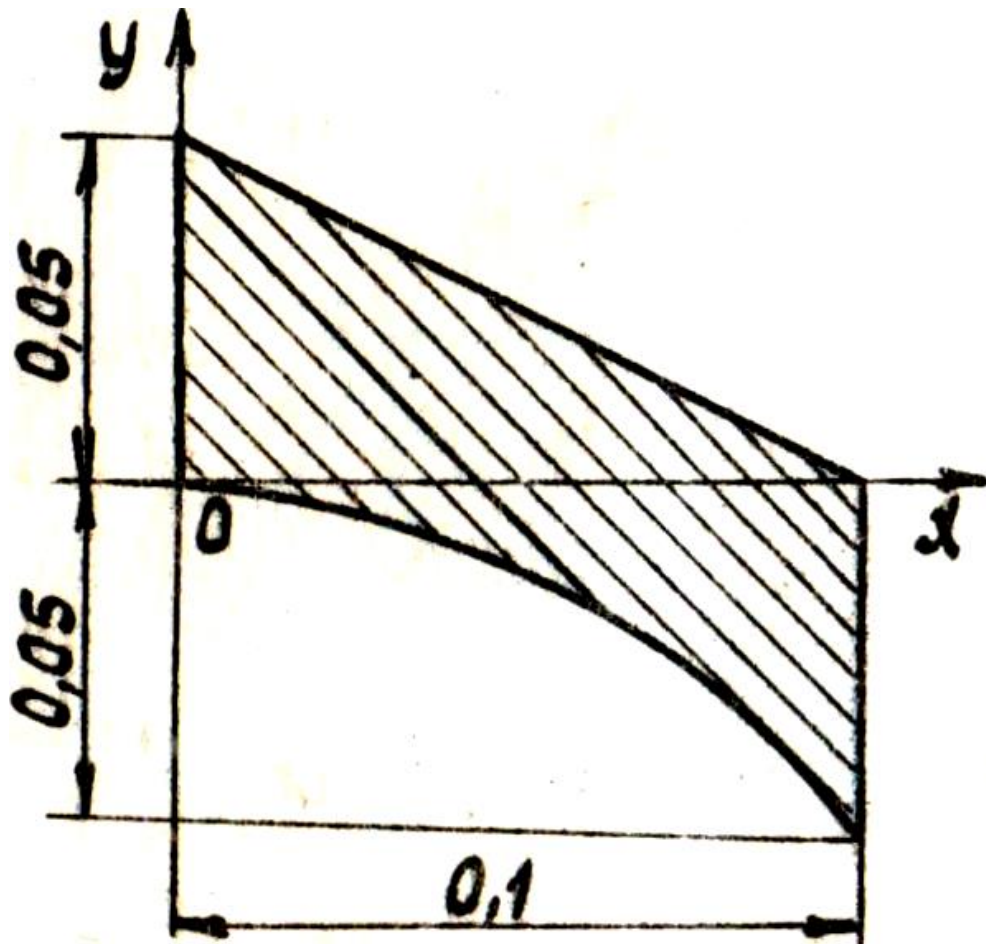


Рисунок 4.52 – Завдання для варіанта 52, на рисунку квадратна параболола

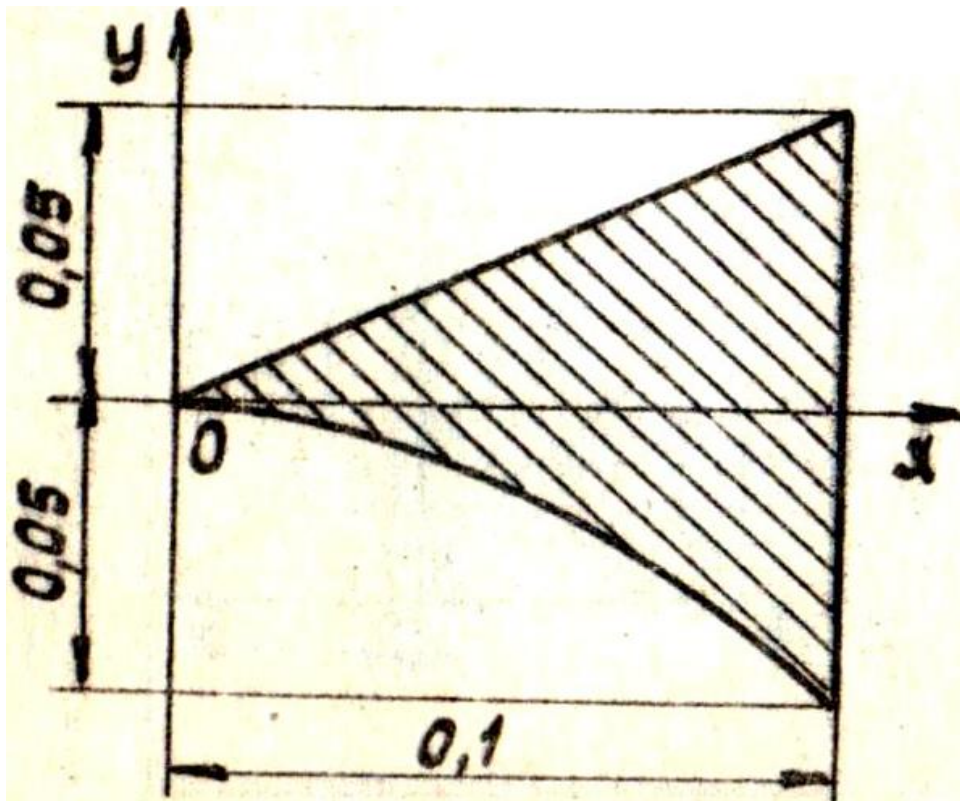


Рисунок 4.53 – Завдання для варіанта 53, на рисунку квадратна парабола

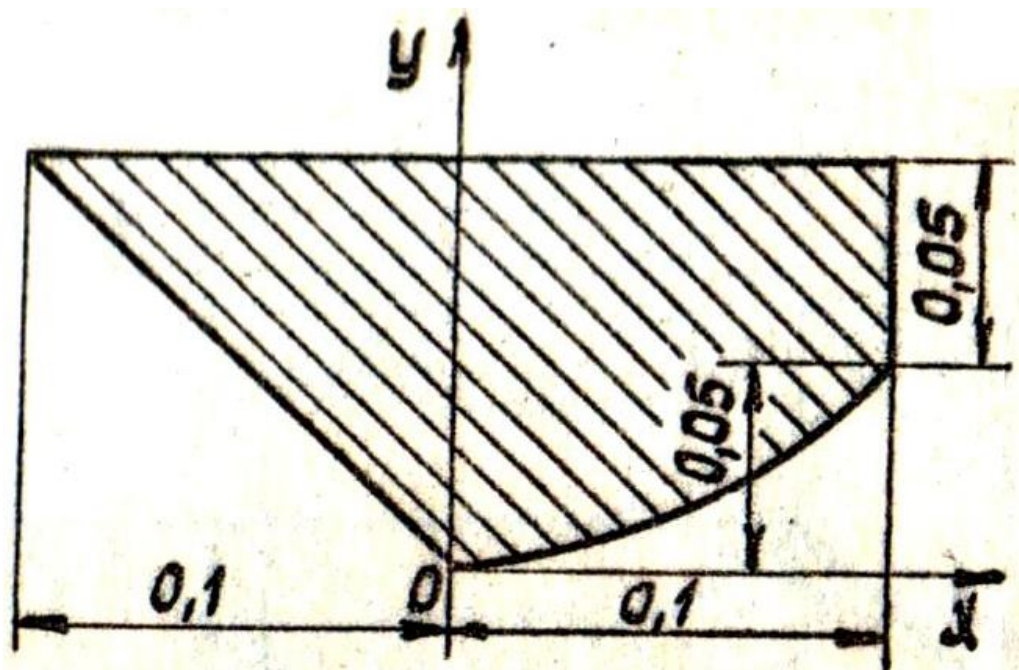


Рисунок 4.54 – Завдання для варіанта 54, на рисунку квадратна парабола

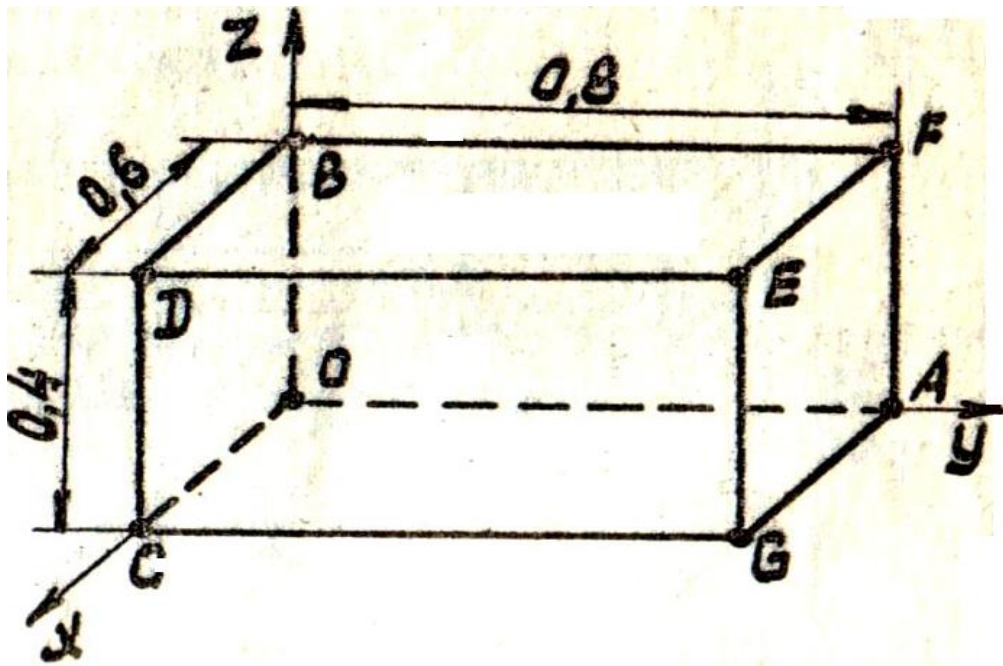


Рисунок 4.55 – Завдання для варіанта 55. Ваги стрижнів:
 $OA = 250 \text{ Н}$, $OB = OC = CD = 75 \text{ Н}$, $CG = 200 \text{ Н}$, $AF = 125 \text{ Н}$, $AG =$
 $GE = 50 \text{ Н}$, $BD = BF = DE = EF = 25 \text{ Н}$.

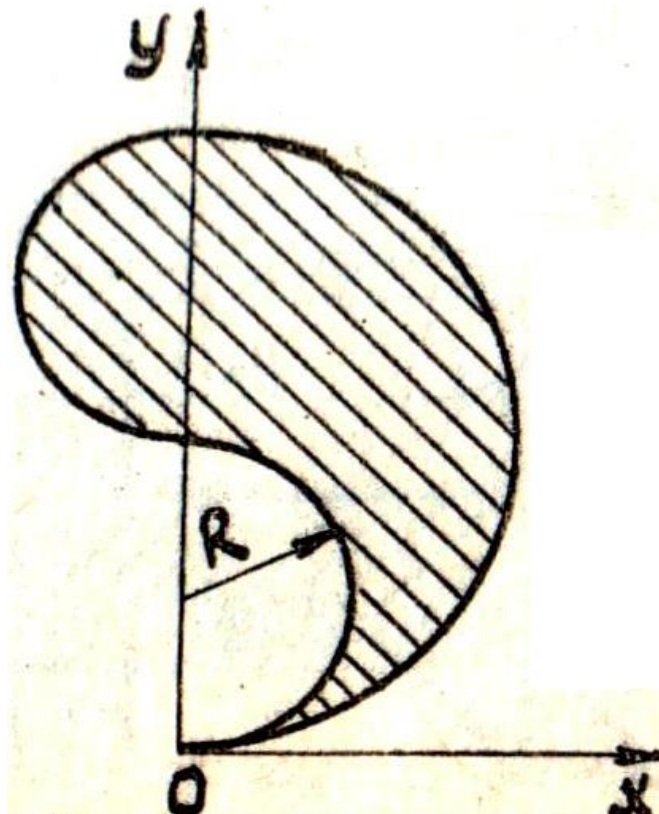


Рисунок 4.56 – Завдання для варіанта 56. Радіус дорівнює $0,02 \text{ м}$.

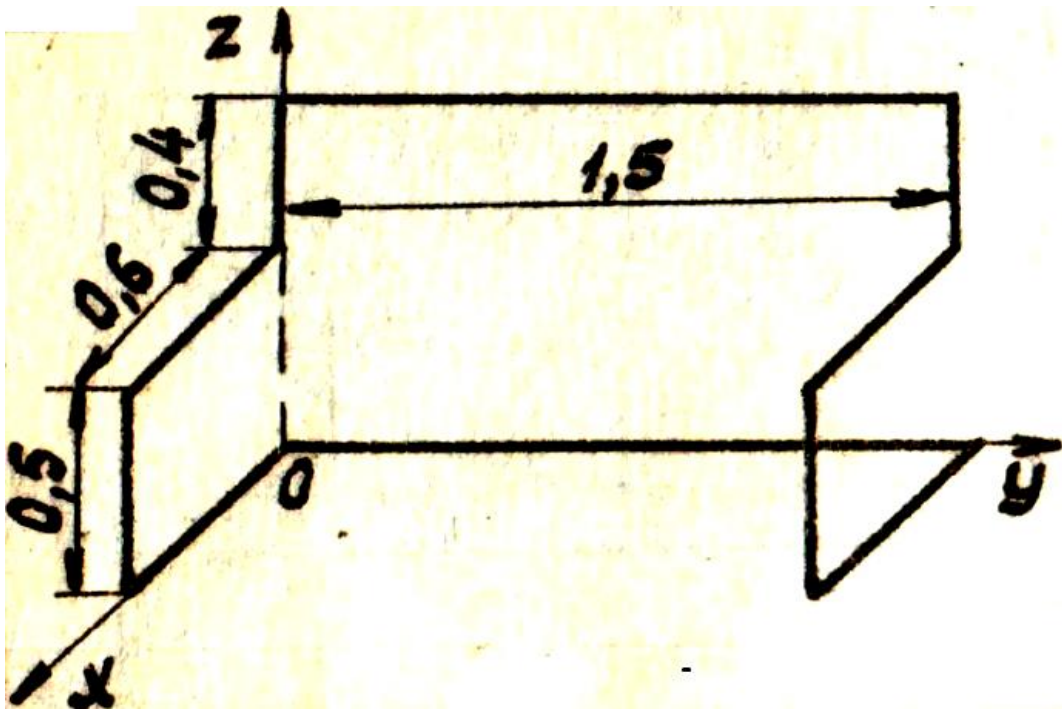


Рисунок 4.57 – Завдання для варіанта 57

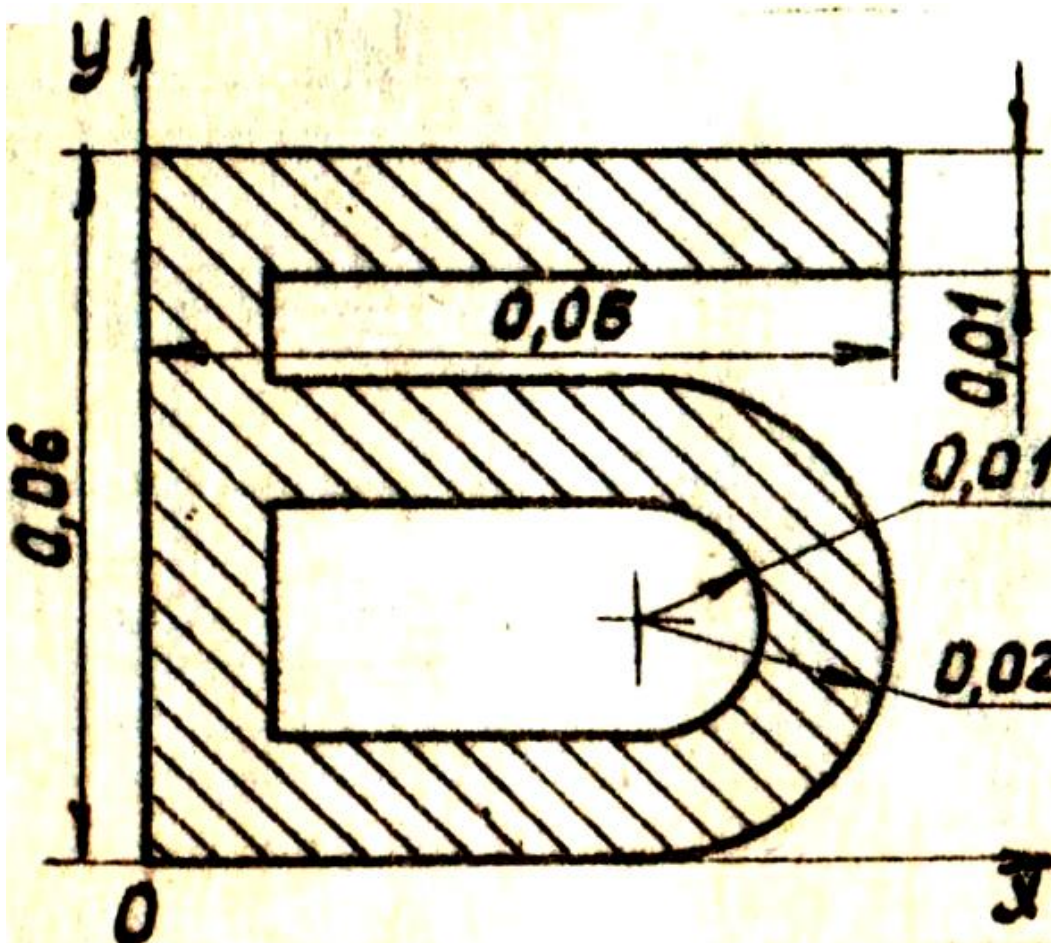


Рисунок 4.58 – Завдання для варіанта 58

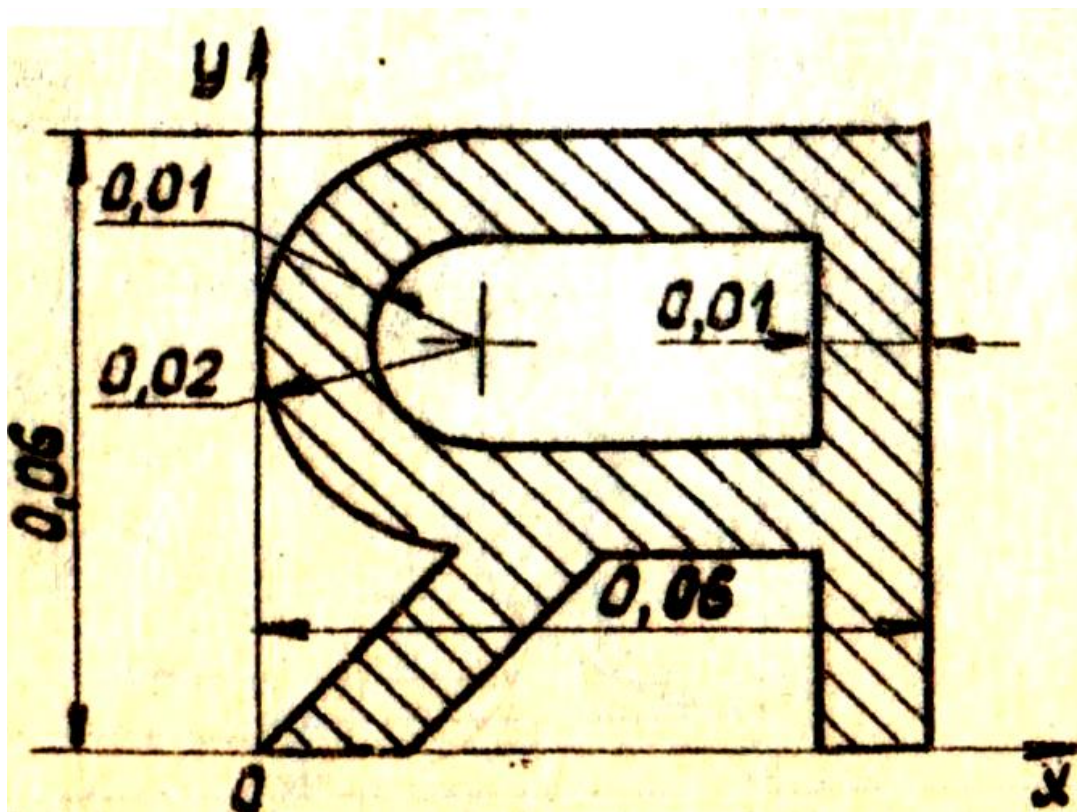


Рисунок 4.59 – Завдання для варіанта 59

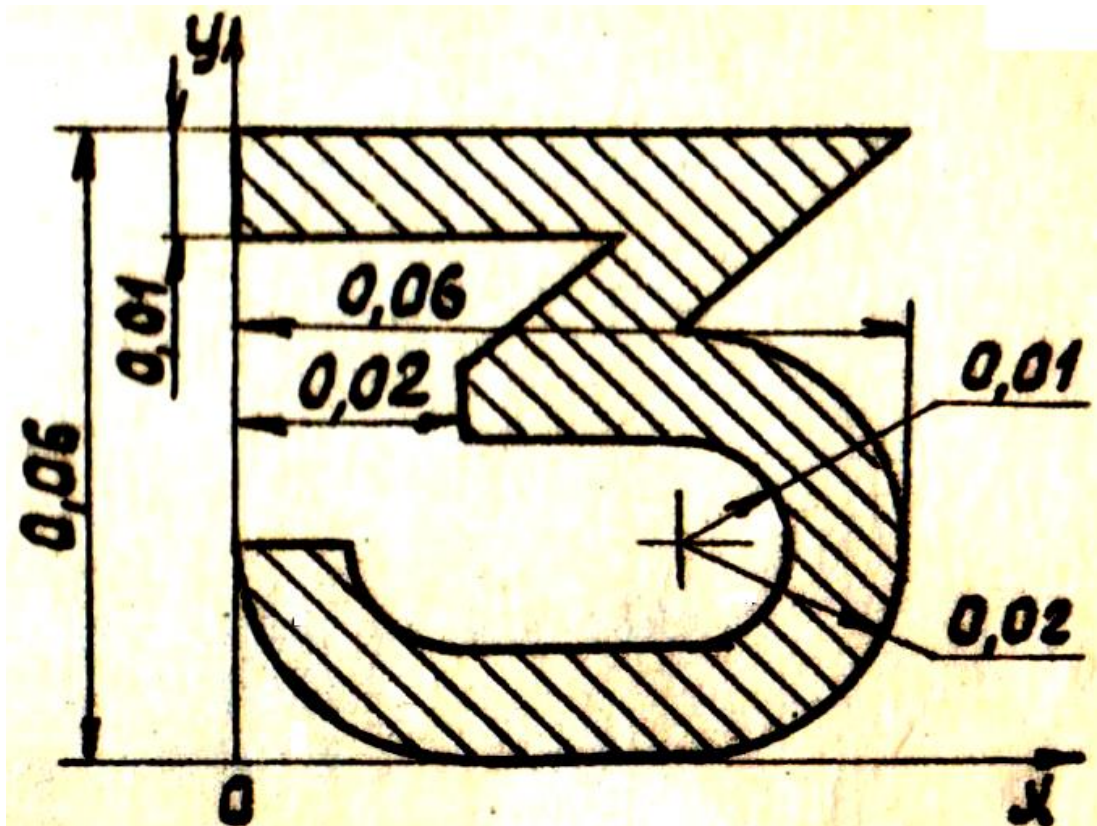


Рисунок 4.60 – Завдання для варіанта 60

5 СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лобас Л.Г., Лобас Людм. Г. Теоретична механіка: Підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів. К.: ДЕГУТ, 2008. 406 с.
2. Збірник задач з теоретичної механіки : навч. посіб. / Л. М. Мамаєв, О. В. Нікулін, В. Ю. Солод. Кам'янське : ДДТУ, 2018. 247 с.
3. Фомін В. М. Курс теоретичної механіки : навч. посіб. / В. М. Фомін, І. П. Фоміна, Т. О. Козаченко. Одеса : Поліграф, 2012. 200 с.
4. Солодов В. Г., Романенко Л.Г. Теоретична механіка : Навч. посіб. для студ. вузів, ; Харк. нац. автомоб.-дор. ун-т. Х., 2014. 270 с.
5. Солодов В.Г., Авершин А.Г., Стародубцев Ю.В., Хандримайлов А.О., Шипенко О.М. Теоретична механіка. Теорія і задачі: Навчальний посібник. Харків: ХНАДУ, 2007. 212 с.
6. Старжинський В.М. Теоретична механіка. К.: Наука, 2000. 464 с.
7. Розв'язання розрахунково-графічних завдань з теоретичної механіки : Навч. посіб. / О. М. Шипенко, А. Г. Авершин, І. П. Бойчук, Ю. В. Стародубцев, В. Г. Солодов; Харк. нац. автомоб.-дор. ун-т. Х., 2005. - 192 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт за темою «Центр ваги твердих тіл» з дисципліни «Теоретична механіка»
для студентів всіх спеціальностей

Укладач Красніков С.В.

Відповідальний за випуск
Воропай О.В.

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *Н.А. Нестерової*

План 2024. Поз. 00.

Підписано до друку 00.00.2023 р. Формат 60×84 1/16. Папір газетний.

Гарнітура Times New Roman Суг. Віддруковано на ризографі.

Ум. друк. арк. 2,4. Обл.-вид. арк. 2,3.

Зам. № 476/16 Тираж 50 прим. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО

Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, м. Харків – МСП, вул. Я. Мудрого, 25.

Тел. /факс: (057)700-38-64; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції, серія ДК № 897 від 17.04.2002 р.