

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний автомобільно-
дорожній університет

Конспект лекцій з теорії механізмів і машин

Конспект склали: професор Гречко Леонід Петрович,
 доцент Перегон Володимир Андрійович

Харків 2001

Лекція 1

Тема: Структурний аналіз механізмів

1. Задачі з структурного аналізу механізмів.
2. Кінематичні пари і їхня класифікація.
3. Кінематичні ланцюги.
4. Структурні формули механізмів.
5. Контрольні запитання.

Лекція 2

Тема: Класифікація плоских важільних механізмів

1. Різновидності класифікацій механізмів.
2. Класифікація механізмів по Ассуру – Артоболовському.
3. Початкові механізми і групи Ассура.
4. Задачі з класифікації механізмів.
5. Контрольні запитання.

Лекція 3

Тема: Метричний синтез важільних механізмів

1. Умови синтезу.
 2. Теорема Грасгофа.
 3. Коефіцієнт зміни швидкості вихідної ланки.
 4. Задачі з метричного синтезу важільних механізмів.
- Контрольні запитання.

Лекція 4

Тема: Кінематичний аналіз механізмів

1. Задачі кінематичного аналізу.
2. Аналітичний метод кінематичного аналізу.
3. Графічний метод кінематичного аналізу.
4. Контрольні запитання.

Лекція 5

Тема: Кінематичний аналіз важільних механізмів за графо-аналітичним методом планів

1. Загальна характеристика методу.
2. Побудова планів для початкового механізму.
3. Теорема подібності планів.
4. Побудова планів для груп Ассура.
5. Контрольні запитання.

Лекція 6

Тема: Побудова планів швидкостей і прискорень типових найпростіших механізмів

1. Кривошипно-повзунний механізм.
2. Кривошипно-коромисловий механізм.
3. Кривошипно-кулісний механізм.
4. Тенгенсний кулісний механізм.

5. Синусний кулісний механізм.
6. Шестиланковий важільний механізм.
7. Контрольні запитання.

Лекція 7

Тема: Кінематика просторового універсального сферичного шарнірного механізму (шарнір Гука)

1. Загальна характеристика та призначення шарніра Гука.
2. Одинарний шарнір Гука.
3. Здвоєний шарнір Гука.
4. Контрольні запитання.

Лекція 8

Тема: Механізми передач

1. Основні параметри механізмів передач.
2. Класифікація триланкових зубчастих передач.
3. Багатоланкові зубчасті передачі. Класифікація.
4. Зубчастий ряд з паразитними колесами.
5. Контрольні запитання.

Лекція 9

Тема: Багатоланкові зубчасті передачі

1. Багатоланкові (багатоступінчасті) зубчасті передачі.
2. Багатоланкові зубчасті передачі з нерухомим осями валів.
3. Зубчастий ряд з паразитними колесами.
4. Багатоступінчасті циліндричні рядові зубчасті передачі.
5. Особливості комбінованих багатоступінчастих передач.
6. Контрольні запитання.

Лекція 10

Тема: Планетарні зубчасті передачі

1. Ознаки планетарної передачі.
2. Найпростіші циліндричні планетарні передачі.
3. Кінематичний аналіз циліндричних планетарних передач. Метод уявної зупинки водила.
4. Задачі з кінематичного аналізу найпростіших планетарних передач.
5. Контрольні запитання.

Лекція 11

Тема: Графічні методи кінематичного аналізу та приклади використання планетарних передач

1. Циліндрична планетарна передача.
2. Конічна планетарна передача.

3. Міжколісний симетричний диференціал.
4. Кінематичний синтез планетарних зубчастих передач.
5. Контрольні запитання.

Лекція 12

Тема: Відомості з теорії зачеплення

1. Вимоги до профілів зубців коліс.
2. Основний закон зачеплення.
3. Лінія зачеплення.
4. Евольвентне зачеплення. Загальні відомості.
5. Рівняння евольвенти.
6. Взаємодія евольвентних профілів
7. Контрольні запитання.

Лекція 13

Тема: Геометричні та якісні показники евольвентного зачеплення

1. Геометрія евольвентного зубчастого колеса.
2. Геометрія зовнішнього нульового евольвентного зачеплення.
3. Особливості геометрії внутрішнього евольвентного зачеплення.
4. Якісні показники евольвентного зачеплення.
5. Коефіцієнт перекриття.
6. Питоме сковзання евольвентних профілів.
7. Контрольні запитання.

Лекція 14

Тема: Виготовлення евольвентних зубчастих коліс

1. Початкові контури евольвентного зачеплення.
2. Методи нарізування евольвентних коліс та їх призначення
3. Підріз евольвентних профілів.
4. Мінімальне число зубців евольвентного колеса.
5. Вибір профільного кута початкового контуру.
6. Контрольні запитання.

Лекція 15

Тема: Поліпшення (корекція, виправлення) евольвентного зачеплення

1. Мета корекції евольвентного зачеплення. Види корекції.
2. Нарізування евольвентних коліс зі зсувом.
3. Мінімально необхідний зсув.
4. Параметри евольвентного зачеплення зі зсувом.
5. Контрольні запитання.

Лекція 16

Тема: Особливості косозубих і шевронних евольвентних циліндричних зубчастих коліс

1. Утворення косозубої евольвентної поверхні.

2. Геометрія косозубого евольвентного колеса.
3. Додатковий коефіцієнт перекриття.
4. Сили в косозубому зачепленні.
5. Еквівалентне число зубців косозубого колеса.
6. Особливості шевронних евольвентних коліс.
7. Контрольні запитання.

Лекція 17

Тема: Особливості конічного евольвентного зачеплення

1. Геометрія конічного колеса і конічного зачеплення.
2. Наближене профілювання конічних евольвентних коліс.
3. Особливості покращання конічного евольвентного зачеплення.
4. Сили в конічному прямозубому і косозубому зачепленні.
5. Контрольні запитання.

Лекція 18

Тема: Особливості неевольвентних зачеплень

1. Геометрія черв'ячного зачеплення.
2. Швидкість сковзання в черв'ячному зачепленні.
3. Сили в черв'ячному зачепленні.
4. Особливості зачеплення Новікова.
5. Особливості циклоїдального та цівкового зачеплень.
6. Особливості хвильового зачеплення.
7. Контрольні запитання.

Лекція 19

Тема: Рух машини під дією заданих сил

- Зміст:
1. Задачі динамічного аналізу та синтезу машин
 2. Динамічні моделі машини
 3. Зведення мас.
 4. Зведення сил за методом Жуковського.
 5. Задача на зведення мас і сил.
 6. Контрольні запитання.

Лекція 20

Тема: Діаграма енергомас

- Зміст:
1. Чинники, що впливають на закон руху машини.
 2. Застосування рівняння руху в інтегральній формі.
 3. Побудова діаграми енергомас. Їх властивості.
 4. Визначення закону руху головного вала машини.
 5. Контрольні запитання.

Лекція 21

Тема: Визначення моменту інерції маховика

- Зміст:
1. Метод Віттенбауера.
 2. Метод Мерцалова.
 3. Рівняння руху машини в диференціальній формі.
 4. Контрольні запитання.

Лекція 22

Тема: Силевий розрахунок механізмів

- Зміст:
1. Методи силових розрахунків.
 2. Статична визначеність кінематичних ланцюгів.
 3. Визначення інерційних навантажень на ланки.
 4. Контрольні запитання.

Лекція 23

Тема: Кінетостатика груп Ассура

- Зміст:
1. Група Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду.
 2. Група Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду.
 3. Група Ассура II класу 2-го порядку 3-го виду.
 4. Контрольні запитання.

Лекція 24

Тема: Кінетостатика механізмів

- Зміст:
1. Кінетостатика тангенсного механізму.
 2. Кінетостатика синусного механізму.
 3. Кінетостатика початкового механізму.
 4. Контрольні запитання.

Лекція 25

Тема: Кулачкові механізми

- Зміст:
1. Призначення кулачкових механізмів.
 2. Різновиди схем кулачкових механізмів.
 3. Зведення споріднених схем. Дійсний і теоретичний профілі.
 4. Методи кінематичного аналізу кулачкових механізмів.
 5. Контрольні запитання.

Лекція 26

Тема: Кінематичний аналіз кулачкових механізмів методом діаграм

- Зміст:
1. Центральний механізм з зубчастим штовхачем.
 2. Нецентральний механізм з голчастим штовхачем.
 3. Механізм з коромисловим штовхачем.
 4. Кут тиску кулачка на штовхач.
 5. Контрольні запитання.

Лекція 27

Тема: Кінематичний синтез кулачкових механізмів

- Зміст:
1. Вибір закону руху штовхача.
 2. Визначення мінімального радіусу кулачка.
 3. Профілювання кулачка.
 4. Вибір радіуса ролика штовхача. Загострення кулачка.
 5. Контрольні запитання.

Лекція 28

Тема: Урахування тертя в машинах

- Зміст:
1. Прояви тертя в побуті та в техніці.
 2. Види тертя. Класифікація.
 3. Визначення сил тертя ковзання.
 4. Визначення сил тертя кочення.
 5. Контрольні запитання.

Лекція 29

Тема: Тертя в поступальній кінематичній парі

- Зміст:
1. Коефіцієнт тертя. Закон тертя Амонтона.
 2. Кут та конус тертя. Явище заклинення повзуна.
 3. Клиновий повзун. Зведені коефіцієнт та кут тертя.
 4. Контрольні запитання.

Лекція 30

Тема: Силowe дослідження найпростіших механізмів з урахуванням тертя

- Зміст:
1. Постановка задачі. Припущення. Коефіцієнт корисної дії. Самогальмування.
 2. Нахилена площина. Підйом і опускання вантажу.
 3. Клиновий прес.

4. Гвинтовий домкрат.
5. Контрольні запитання.

Лекція 31

Тема: Тертя в обертальній кінематичній парі та тертя гнучкої нитки

- Зміст:
1. Тертя шина в підшипнику. Круг тертя.
 2. Тертя між п'ятою в підп'ятником.
 3. Тертя гнучкої нитки. Формула Ейлера. Приклади застосування.
 4. Контрольні запитання.

Лекція 32

Тема: Урахування тертя кочення

- Зміст:
1. Каток. Режими руху.
 2. Підкладні котки. Режими руху.
 3. Зведений коефіцієнт тертя причіпного візка.
 4. Режими руху колісного тягача з причіпними ланками.
 5. Контрольні запитання.

Лекція 33

Тема: Коефіцієнт корисної дії планетарних передач (ККД)

- Зміст:
1. Загальні відомості
 2. Кінематичні залежності механізмів найпростіших планетарних передач
 3. Припущення, прийняті для аналітичного визначення ККД механізмів планетарних передач
 4. ККД механізмів Джемса
 5. ККД механізмів Давида
 6. Рекомендації з використання планетарних передач
 5. Контрольні запитання.

Лекція 34

Тема: Зрівноважування мас ланок механізмів

- Зміст:
1. Мета зрівноважування мас.
 2. Зрівноважування мас, що обертаються в одній площині.
 3. Зрівноважування мас, що обертаються в різних площинах.
 4. Статична і динамічна незрівноваженість. Умови зрівноваженості.
 5. Контрольні запитання.

Лекція 35

Тема: Балансування обертових деталей і вузлів

- Зміст:
1. Мета балансування.
 2. Статичне балансування.
 3. Динамічне балансування за методом трьох спроб.
 4. Динамічне балансування методом стробоскопії.
 5. Контрольні запитання.

Лекція 36

Тема: Зрівноваження мас, що рухаються поступально та плоскопаралельно

Зміст: 1. Зрівноважування мас, що рухаються поступально.

2. Механізм Ланчестера.

3. Статичне зрівноважування важільних механізмів.

4. Контрольні запитання.

Лекція 1

Тема: Структурний аналіз механізмів

Зміст:

1. Задачі структурного аналізу.
2. Кінематичні пари і їхня класифікація.
3. Кінематичні ланцюги.
4. Структурні формули механізмів.
5. Контрольні запитання.

1. Задачі структурного аналізу

Структурний аналіз механізму включає такі **задачі**:

1. Побудова кінематичної схеми механізму.
2. Нумерація і найменування ланок.
3. Найменування і класифікація кінематичних пар і структурних кінематичних ланцюгів.
4. Визначення ступеня рухливості механізму, у т. ч. місцевих рухливостей.
5. Виявлення надлишкових зв'язків у механізмі.
6. Розчленовування кінематичної схеми механізму на початкові механізми і нормальні структурні кінематичні ланцюги (групи Ассура) і їхню класифікацію.
7. Класифікація механізму.

Перша і друга задачі тут окремо не розглядаються, але нижче буде показано багато прикладів кінематичних схем механізмів із нумерацією і найменуванням ланок, що дозволить студенту при необхідності складати кінематичні схеми інших механізмів і виконувати їхню обробку за аналогією з розглянутими в даному посібнику.

2. Кінематичні пари і їхня класифікація

У механізмах застосовується широкий ряд кінематичних пар. Нижче будуть показані найбільш поширені кінематичні пари і на їхньому прикладі пояснені принципи класифікації.

Позначимо:

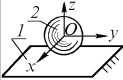
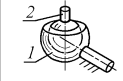
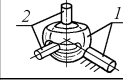
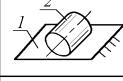
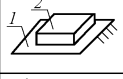
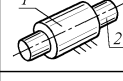
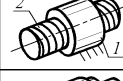
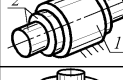
H - число ступенів свободи у відносному русі ланок у кінематичній парі;

S - число умов зв'язку, накладених на відносний рух ланок у кінематичній парі.

Тому що тверде тіло в просторі має 6 ступенів свободи, то очевидно буде

Приклади кінематичних пар різних класів
по Артоблевському

Таблиця 1.1

Рисунок	Схема	Назва	S	H	Клас
		Куля-площина	1	5	I
		Сферична	3	3	III
		Сферична з пальцем	4	2	IV
		Ролик-площина	2	4	II
		Площинна	3	3	III
		Циліндрична	4	2	IV
		Поступальна	5	1	V
		Гвинтова	5	1	V
		Обертальна	5	1	V
		Кулачкова	4	2	IV
		Зубчаста	4	2	IV

$$S + H = 6.$$

Очевидно також, що кінематична пара буде існувати тільки тоді, коли

$$1 \leq S \leq 5$$

і, відповідно,

$$5 \geq H \geq 1.$$

Адже при $S=0$ ланки не зв'язані одна з одною, а при $S=6$ ланки зв'язуються одна з одною жорстко, тобто вони стають одною ланкою.

По Артоболевському І. І. всі кінематичні пари діляться на класи в залежності від числа умов зв'язку S .

Усього існує п'ять класів кінематичних пар: I, II, III, IV і V .

У таблиці 1.1 показані приклади найбільш поширених кінематичних пар різних класів. Клас кінематичної пари можна підрахувати по формулі

$$S = 6 - H. \quad (1.1)$$

Іноді кінематичні пари по числу H називають: однорухомою, дворухомою, трирухомою, чотирирухомою або п'ятирухомою.

Вищою кінематичною парою називається така пара, у якій ланки контактують тільки по лініях або по точках. Прикладом вищої кінематичної пари можуть служити пари "куля - площина" або "ролик - площина".

Нижчою кінематичною парою називається пара, у якій ланки контактують по якійсь поверхні. Прикладом нижчої кінематичної пари може служити пара: "сферична" або "циліндрична".

Студент може самостійно знайти інші вищі і нижчі кінематичні пари в таблиці 1.1.

Варто підкреслити, що характер контакту ланок деяких пар не завжди можна визначити за схемою. Схематичне зображення кінематичної пари може ввести в помилку в цьому питанні, тому в сумнівних випадках необхідно звернутися до креслення або до рисунка пари.

Для того, щоб ланки в кінематичній парі знаходилися в постійному контакті, вона повинна бути замкнутою.

Замикання кінематичних пар може бути або геометричним, або силовим.

Як приклад геометричного замикання можна привести замикання "обертальної" або "гвинтової" кінематичних пар.

Силове замикання звичайно здійснюється силою пружності пружин, іноді силою тяжіння.

Студент може самостійно визначити, як вирішене питання замикання кінематичних пар, наведених у таблиці 1.1.

3. Кінематичні ланцюги

Будь-який механізм являє собою кінематичний ланцюг, одна ланка котрого (стояк) нерухома, а інші здійснюють відносно неї упорядкований рух.

Найпростішим кінематичним ланцюгом є ланцюг, який включає всього лише дві ланки, що утворюють кінематичну пару. Число ланок і кінематичних пар у кінематичному ланцюзі може бути більшим.

Нижче показаний ряд прикладів кінематичних ланцюгів.

Кінематичні ланцюги діляться на *прості* і *складні*.

Простим називається кінематичний ланцюг, у котрого кожна ланка входить не більш ніж у дві кінематичні пари (рис. 1.1 *а, б і г*).

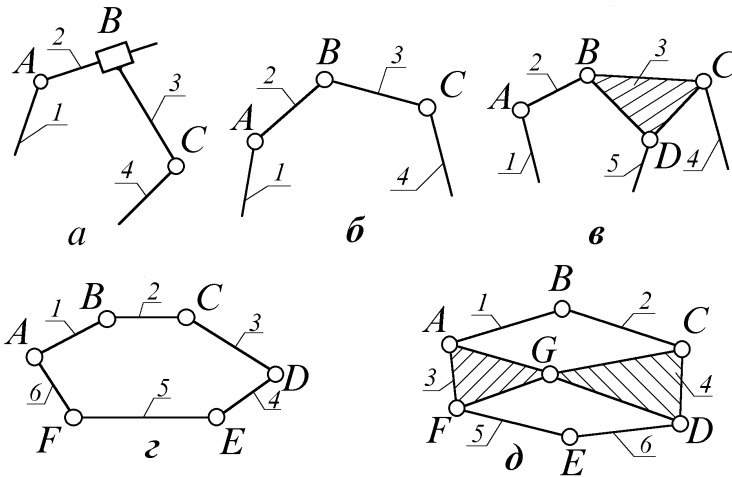


Рис. 1.1. Кінематичні ланцюги

Складним кінематичним ланцюгом називається ланцюг, у якому є хоча б одна ланка, що входить більш ніж у дві кінематичні пари (рис. 1.1 *в і д*).

Прості і складні кінематичні ланцюги у свою чергу діляться на *замкнуті* і *незамкнуті*.

Замкнутим кінематичним ланцюгом називається кінематичний ланцюг, у котрого немає ланок, що входять тільки в одну кінематичну пару (рис. 1.1 *г і д*).

Незамкнутим кінематичним ланцюгом називається кінематичний ланцюг, у якого є хоча б одна ланка, що входить тільки в одну кінематичну пару. Прикладами таких ланцюгів можуть служити ланцюги, показані на рис. 1.1 *а, б і в*.

Більшість механізмів робочих машин є замкнутими кінематичними ланцюгами.

Незамкнуті кінематичні ланцюги застосовуються в механізмах роботів, маніпуляторів, крокуючих машин.

4. Структурні формули механізмів

Спочатку розглянемо просторовий механізм, на ланки якого не накладено ніяких спільних зв'язків.

Нехай механізм включає у свій склад k ланок, із котрих n ланок рухливі, а одна (стояк) - нерухома. Тоді буде

$$n = k - 1.$$

Позначимо:

w - шукане число ступенів свободи механізму;

p_1 - число кінематичних пар *I*-го класу;

p_2 - число кінематичних пар *II*-го класу;

p_3 - число кінематичних пар *III*-го класу;

p_4 - число кінематичних пар *IV*-го класу;

p_5 - число кінематичних пар *V*-го класу.

Будемо спочатку вважати механізм розібраним на окремі ланки. Кожна ланка при цьому має 6 ступенів свободи. А k ланок будуть мати загальне число ступенів свободи $6k$.

Виберемо наступний порядок складання механізму.

Спочатку закріпимо нерухомо стояк, відібравши у нього 6 ступенів свободи.

Потім з'єднаємо ланки, що утворюють кінематичні пари *I*-го класу, відібравши у кожній парі 1 ступінь свободи, а у всіх цих парах - p_1 ступенів свободи.

Після цього, з'єднаємо ті ланки, що утворюють кінематичні пари *II*-го класу, відібравши у них сумарно $2p_2$ ступенів свободи, тому що в кожній такій парі буде відібрано 2 ступеня свободи.

З'єднавши далі ланки в кінематичні пари *III*-го, *IV*-го і *V*-го класів, відберемо в них відповідно $3p_3$, $4p_4$ і $5p_5$ ступенів свободи.

Завершивши з'єднання всіх ланок у кінематичні пари, одержимо зібраний механізм із w ступенями свободи, число яких можна підрахувати по формулі

$$w = 6k - 6 - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5.$$

Зручніше для використання формули перші два члени правої частини уявити у вигляді $6k - 6 = 6(k - 1) = 6n$, а інші члени поміняти місцями. Тоді одержимо формулу

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (1.2)$$

Ця формула носить ім'я Сомова - Малишева. По ній можна вести підрахунок ступенів рухливості сімейства просторових механізмів, які не мають загальних обмежень, накладених на рух усіх ланок.

Для ілюстрації використання формули Сомова - Малишева вирішимо таку задачу.

5. Задачі структурного аналізу

Задача 1. Визначити число ступенів свободи w і маневреність m механізму промислового робота за схемою (рис. 1.2).

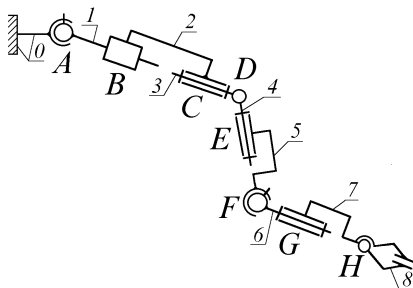


Рис. 1.2. Механізм маніпулятора

Пояснення.

Під маневреністю m механізму робота або маніпулятора розуміється його число ступенів свободи при нерухомому захваті.

Рішення:

1. Нумерація ланок показує, що $k=9$, а $n=8$.

2. Ланки утворюють:

- дві кінематичні пари

IV класу: (0 - 1) і (5 - 6), що

називаються "сферична з пальцем";

- шість кінематичних пар V класу: (1 - 2) - ("поступальна") і (2 - 3, 3 - 4, 4 - 5, 6 - 7, 7 - 8) - ("обертальна").

3. По формулі Сомова - Малишева знайдемо ступінь рухливості механізму

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = \\ = 6 \cdot 8 - 5 \cdot 6 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 10.$$

Проте, з отриманих 10 ступенів свободи одна призначена для захвату робочого тіла, тому прийнято визначати число ступенів свободи робота при зімкнутому захваті 8. Якщо захват вважати зімкнутим, тоді будемо мати: $n=7$; $p_5=5$; $p_4=2$, а число ступенів свободи робота

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = \\ = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 9.$$

4. Визначимо маневреність механізму промислового робота m .

Будемо вважати захват нерухомим. При цьому ланки 7 і 8 зіллються зі стояком.

Розрахунок здійснимо по тій же формулі Сомова - Малишева, порахувавши: $n=6$ (а $k=7$); $p_5=5$ (1 - 2, 2 - 3, 3 - 4, 4 - 5, 6 - 7); $p_4=2$ (0 - 1, 5 - 6).

Тоді

$$m = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = \\ = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 3.$$

Відповідь: $w=9$; $m=3$.

Серед просторових механізмів є такі, у яких на рух всіх ланок накладається одне або більше загальних обмежень. Для урахування цих обмежень застосовуються структурні формули, що походять з формули Сомова - Малишева за рахунок зменшення всіх чисельних коефіцієнтів на число загальних обмежень і відкидання членів правої частини, що подають неіснуючі кінематичні пари.

Покажемо такий перехід від формули Сомова - Малишева до структурної формули так званого сімейства плоских механізмів.

Назва "плоский механізм" - умовна. Це, насправді, просторовий механізм, на рух ланок якого накладено три певні загальні умови зв'язку. Цими обмеженнями будуть: неможливість лінійного руху всіх ланок уздовж осей z просторової декартової системи координат і їхнього обертання навколо осей x і y . Тоді точки ланок "плоского" механізму можуть здійснювати рух лише в площині xOy або в паралельних їй площинах.

Іншими словами, плоским механізмом будемо вважати такий, точки ланок якого рухаються в паралельних площинах.

Очевидно, що для рішення задачі кінематичного аналізу такого механізму цілком достатньо розглянути одну єдину з цих взаємно паралельних площин. Звідси походять і назва механізмів і ілюзія їхнього плоского руху.

У плоскому русі тверде тіло має 3 ступеня свободи, отже кінематичні пари плоского механізму повинні задовольняти вимозі $2 \geq H \geq 1$, тобто вони можуть бути тільки IV і V класу.

Відніmemo число 3 із числових коефіцієнтів правої частини формули Сомова - Малишева, а також врахуємо, що в плоских механізмах відсутні кінематичні пари III , II і I класів.

Тоді одержимо структурну формулу у вигляді

$$w = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Плоскі механізми включають у свій склад тільки чотири різновиди кінематичних пар: обертальну, поступальну, кулачкову і зубчасту. Відзначимо, що дві останні пари по своїй суті є одним і тим самим, але одержали кожна свою назву по типу механізмів, у яких вони використовуються.

Зауважимо, що пари V класу - обертальна і поступальна - є нижчими, а пари IV класу - кулачкова і зубчаста - вищими.

Перепишемо останню формулу з урахуванням сказаного у вигляді

$$w = 3n - 2p_n - p_v, \quad (1.3)$$

де p_n - число нижчих кінематичних пар;

p_6 - число вищих кінематичних пар.

Дана формула носить ім'я Чебишева П. Л.

Підрахуємо по формулі Чебишева число ступенів свободи деяких плоских механізмів.

Задача 2. Підрахувати число ступенів свободи кривошипно-повзунного механізму за схемою (рис. 1.3).

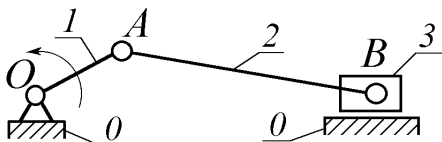


Рис. 1.3. Кривошипно-повзунний механізм

Рішення:

1. Підраховуємо:

$$n=3;$$

$$p_n = 4 (0 - 1; 1 - 2; 2 - 3; 3 - 0); p_6 = 0.$$

2. Знаходимо

$$w = 3n - 2p_n - p_6 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

3. Перевіряємо отриманий результат.

Припустимо, що повзун 3 заклинив на направляючій. Тоді точка B не зможе рухатися. Рух першої ланки супроводжується рухом точки A по окружності з радіусом траєкторії, рівним довжині 1-ї ланки, з центром окружності в точці O .

З іншого боку, рух шатуна був би можливим, якби точка A рухалася по окружності з радіусом l_{AB} із центром у т. B . Маємо, що точка A повинна рухатися одночасно по двох траєкторіях. Тому що таке неможливо, то звідси слідує висновок, що отриманий результат $w=1$ вірний. Відібравши цей єдиний ступінь рухливості в повзуна, одержуємо замість механізму нерухому конструкцію.

Відповідь: $w=1$.

Задача 3. Підрахувати число ступенів свободи шарнірного п'ятиланкового механізму за схемою (рис. 1.4).

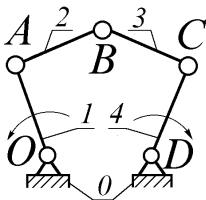


Рис. 1.4. Механізм шарнірного п'ятиланковика

Рішення:

1. Підраховуємо $n = 4$; $p_n = 5 (0 - 1;$

$1 - 2; 2 - 3; 3 - 4; 4 - 0)$; $p_6 = 0$;

$$w = 3n - 2p_n - p_6 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 0 = 2.$$

2. Перевіряємо отриманий

результат.

Припустимо, що ланка 4 заклинила в шарнірі D . Одержуємо змінену схему у вигляді (рис. 1.5), для котрої $n=3$, $p_n=4$, а

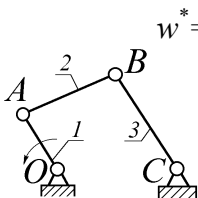


Рис. 1.5. Механізм шарнірного чотириланкового

вигляді (рис. 1.6).

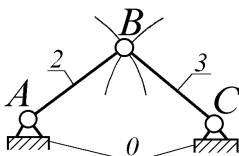


Рис. 1.6. Шарнірний триланковик

що свідчить не тільки про нерухомість ланок 2 і 3 відносно 0-ї ланки, але і про статичну визначеність конструкції, що залишилась.

Як відомо, статично визначеною є така конструкція, для якої справедливі рівняння статки. При цьому число рівнянь рівноваги сил і моментів збігається з числом невідомих у цих рівняннях.

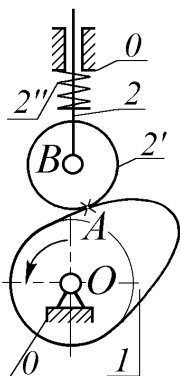


Рис. 1.7. Кулачковий механізм

$$w^* = 3n - 2p_n - p_e = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Після заклинення шарніра D початкова кінематична схема перетворилась у кінематичну схему шарнірного чотириланкового механізму, який має $w = 1$.

Щоб переконаватися, що отриманий результат вірний, припустимо, що також заклинив і шарнір O , тоді одержимо схему у

З останньої схеми слідус, що відібравши другий ступінь свободи за рахунок заклинення шарніра O , одержуємо нерухому конструкцію, для руху якої точка B повинна була б переміщатися одночасно по двох траєкторіях.

По останній схемі, де $n=2$, а $p_n=3$ ($0 - 2; 2 - 3; 3 - 0$),

$$w^{**} = 3n - 2p_n - p_e = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 0 = 0,$$

Відповідь: $w=2$.

Задача 4. Підрахувати число ступенів свободи кулачкового механізму з роликівим штовхачем, що поступально рухається, за схемою (рис. 1.7).

Рішення:

1. Підрахуємо $n = 3$; $p_n = 3$ ($0 - 1; 2' - 2; 0 - 2$); $p_e = 1$.

2. Знаходимо

$$w = 3n - 2p_n - p_e = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

3. Перевіряємо отриманий результат.

Припустимо, що ведена ланка 2 заклинила в направляючій, тоді, очевидно, що рух механізму стане неможливим.

Створюється враження, що відповідь $w=2$

помилкова, але це не так.

Справді, після закінчення штовхача 2 у направляючий рух кулачка в зазначеному напрямку стає неможливим, проте, залишається можливість обертання ролика 2' навколо осі *B*.

Це і є другим додатковим ступенем рухливості, необхідним для заміни тертя сковзання у вищій кінематичній парі (1 - 2') на тертя кочення, що веде до підвищення *ККД*, до зниження зносу і до підвищення довговічності механізму.

Отже, маємо $w=2$ (*I* ступінь свободи - основний і *I* ступінь свободи - додатковий або допоміжний, а іноді навіть говорять - зайвий).

Відповідь: $w=2$.

Задача 5. Підрахувати число ступенів свободи механізму зубчастої шестиланкової передачі за схемою (рис. 1.8).

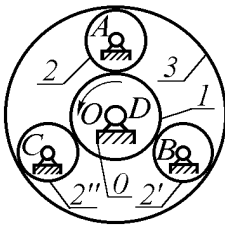


Рис. 1.8. Зубчаста шестиланкова передача

Рішення:

1. Підрахуємо

$$n=5; p_n=5 (0-1; 0-2; 0-2'; 0-2''; 0-3);$$

$$p_a = 6 (1-2; 1-2'; 1-2''; 3-2; 3-2'; 3-2'').$$

2. Знайдемо

$$w = 3n - 2p_n - 2p_a = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 6 = -1.$$

Отриманий результат $w=-1$ означає, що розглянута схема як би не є схемою механізму, тому що має статичну невизначеність першого порядку.

Як відомо, при силовому розрахунку статично невизначеної конструкції крім рівнянь статики необхідно використовувати додаткові рівняння спільних деформацій елементів конструкції. Число цих додаткових рівнянь дорівнює порядку статичної невизначеності.

Пояснити це можна на такому прикладі: коли троє несуть колоду, то невідомо, хто її несе - один середній чи двоє крайніх. Відповідь на це питання дає розгляд деформацій плечей несучих. Де більша деформація - там буде більше і навантаження.

Механізм повинен володіти одним або декількома ступенями рухливості, тобто повинно бути $w \geq 1$.

З практики відомо, що така схема, проте, використовується в реальних конструкціях, наприклад, у бортових передачах автомобілів. І володіє вона реально $w=1$.

Як же розв'язати це протиріччя?

Зауважимо, що зубчасті колеса 2' і 2'' точно такі ж, як і колесо 2.

Тому вони фактично не перешкоджають руху механізму, що відбувався б і без них.

Справді, якщо не враховувати колеса 2' і 2'', тоді будемо мати:

$$n = 3; p_n = 3 (0 - 1; 0 - 2; 0 - 3); p_e = 2 (1 - 2; 2 - 3).$$

Підрахуємо

$$w^* = 3n - 2p_n - p_e = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Якщо припустити, що зубчасті колеса 2' і 2'' відрізняються одне від одного і від колеса 2 по числу зубців, то тоді дійсно передача не зможе рухатися через кінематичну невідповідність зубчастих коліс і буде реально володіти $w = -1$.

Точність виготовлення зубчастих коліс для забезпечення рухливості механізму повинна бути високою, а використання трьох рівноцінних проміжних зубчастих коліс 2, 2', 2'' дозволяє передавати потужність трьома рівними потоками, що знижує навантаженість окремих зубців і, отже, підвищує їхню довговічність.

Зв'язки (накладені в даному прикладі наявністю двох додаткових проміжних коліс) *називаються пасивними, якщо вони не висувають нових кінематичних вимог і їхнє усунення не збільшує ступінь рухливості механізму.*

Оскільки ці ж зв'язки через неповну кінематичну відповідність можуть призводити до невинного зростання навантаженості ланок або навіть до заклинення механізму, то проф. Л. Н. Решетов і проф. О. Г. Озол пропонують називати їх надлишковими.

Названі учені вважають, що проблема полягає не у визначенні числа ступенів свободи механізму w (це неважко визначити інтуїтивно), а у визначенні числа надлишкових зв'язків, щоб потім їх виявити і по можливості усунути.

Число надлишкових зв'язків у плоскому механізмі можна підрахувати по формулі

$$q = w - (3n + 2p_5 + p_4) = 1 - (-1) = 2.$$

Як бачимо, поняття *пасивні і надлишкові зв'язки* є назвами того самого, як "два боки медалі".

Відповідь: $w^* = 1$, якщо не враховувати пасивні (надлишкові) зв'язки;

$w = -1$, якщо розглядати схему в повному вигляді при $q = 2$.

Задача 1.6. Підрахувати число ступенів свободи механізму клинового преса за схемою (рис. 1.9). Тут: 1 - клин; 2 - плунжер.

Рішення:

1. Підрахуємо

$$n = 2; p_n = 3 (0 - 1; 1 - 2; 2 - 0); p_e = 0.$$

2. Знайдемо

$$w = 3n - 2p_n - p_e = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 0 = 0.$$

3. Перевіряємо отриманий результат.

Значення $w=0$ свідчить про відсутність руху механізму, проте, із практики відомо, що це не так. Насправді цей механізм має $w=1$.

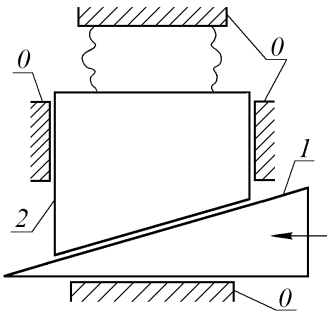


Рис. 1.9. Схема клинового преса

Тоді в чому ж причина помилкового результату?

Довго це було загадкою. Але після поділу механізмів на сімейства з однаковими числами додаткових обмежень, накладених на рух усіх ланок, виявилось, що механізм клинового преса є представником останнього сімейства механізмів, у якого на рух усіх ланок накладено чотири додаткових обмеження.

Прес є плоским механізмом, ланкам котрого додатково заборонене обертання в площині креслення. Тоді структурна формула для клинового преса набуває вигляду

$$w=2n - p_n.$$

Так, із чисельних коефіцієнтів формули Чебишева віднято I , а число вищих кінематичних пар $p_a = 0$.

Отримана формула називається формулою Добровольського, який уперше її застосував.

Маємо

$$w = 2n - p_n = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Відповідь: $w=1$.

5. Контрольні запитання

1. Що вивчається в курсі теорії механізмів і машин?
2. Чим відрізняються аналіз і синтез механізмів?
3. Дайте визначення понять: механізм, машина, ланка, кінематична пара, кінематичний ланцюг.
4. Як називаються ланки важільних механізмів і чому?
5. Що являє собою кінематична схема?
6. На які дисципліни спирається курс ТММ і для вивчення яких дисциплін він є опорним?
7. По яких ознаках класифікують кінематичні пари?
8. Як визначається клас кінематичної пари по Артоблевському?
9. Які кінематичні пари називаються вищими та нижчими і чому?

10. Як здійснюється замикання кінематичних пар?
11. Які різновиди кінематичних ланцюгів Ви знаєте?
12. Які структурні формули механізмів Ви знаєте і чиє ім'я вони носять?
13. Запишіть формулу Чебишева і визначте з її допомогою число ступенів свободи будь-якого плоского механізму.
14. Які механізми називаються "плоскими" і чому?
15. Які сімейства механізмів Вам відомі?

Лекція 2

Тема: Класифікація плоских важільних механізмів

- Зміст:
1. Різновидності класифікацій механізмів.
 2. Класифікація механізмів по Ассуру – Артоболевському.
 3. Початкові механізми і групи Ассура.
 4. Задачі з класифікації механізмів.
 5. Контрольні запитання.

1. Різновидності класифікацій механізмів

Існують декілька підходів до класифікації механізмів.

Можна, наприклад, покласти в основу класифікації функціональне призначення механізмів. Така класифікація буде тоді мати назву функціональної.

Можна класифікувати механізми за ознакою перетворення одного виду руху в другий (обертального в обертальний, поступального в обертальний та таке інше).

Інколи механізми класифікують з огляду на загальні вищі кінематичні пари (зубчасті, кулачкові).

Такі класифікації не розраховані для подальшого вивчення загальних властивостей механізмів. Їх мета має суто описовий характер.

Класифікація механізмів, яка розглянута нижче має дуже плідне подальше застосування.

2. Класифікація плоских важільних механізмів по Артоболевському - Ассуру

У основу класифікації покладена наявність у складі різних механізмів однотипних структурних кінематичних ланцюгів, для яких розроблені стандартні раціональні інженерні методики кінематичного і динамічного аналізу.

Принципи класифікації були запропоновані Ассуром Л. В., а потім вони були розвинуті Артоболевським І. І. до сучасного вигляду.

Для здійснення класифікації механізму необхідно виконати наступне:

1. Складання кінематичної схеми механізму.
2. Вичленення з цієї схеми так званих початкових механізмів (одного або декількох), що включають у свій склад стояк і ланки, рух яких задано (вхідні ланки). Число початкових механізмів у кінематичній схемі аналізованого механізму відповідає загальному його числу ступенів свободи.

Початковий механізм називається механізмом I класу.

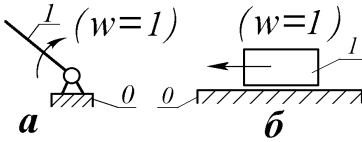


Рис. 1.10. Початкові механізми I класу

На рис. 1.10а показаний початковий механізм I класу, який включає у свій склад стояк і кривошип і володіє одним ступенем рухливості ($w=1$).

На рис. 1.10б показаний початковий механізм I класу, який включає у свій склад стояк і повзун і також володіє одним ступенем рухливості.

3. Вичленення з кінематичної схеми так званих нормальних структурних кінематичних ланцюгів (або груп Ассура) і їхня класифікація.

Групою Ассура є статично визначений кінематичний ланцюг, що володіє нульовою рухливістю відносно ланок, із якими він пов'язаний зовнішніми кінематичними парами, і який не розпадається на більш прості кінематичні ланцюги з тією ж властивістю.

Приєднання до існуючого механізму однієї або декількох груп Ассура не змінює його рухливості. По цьому принципу здійснюється структурний синтез нових механізмів (так зване нашарування груп Ассура).

Від'єднання від існуючого механізму однієї або декількох груп Ассура також не змінює рухливості частини механізму, що залишається. Ця закономірність дає можливість виявляти, які саме різновиди груп Ассура включені до складу досліджуваного механізму (див. задачі 1.7... 1.9).

Відповідно до вищенаведеного визначення структурна формула групи Ассура запишеться у вигляді

$$w = 3n - 2p_n = 0,$$

тому що для плоского важільного механізму, який включає у свій склад тільки нижчі кінематичні пари, $p_e = 0$.

Тоді співвідношення числа нижчих кінематичних пар і числа ланок групи Ассура буде

$$p_n = 1,5n. \quad (1.4)$$

Тому що числа n і p_n обов'язково повинні бути цілими, із формули (1.4) слідує, що число n повинно бути тільки парним.

Розглянемо деякі варіанти сполучень чисел ланок n і чисел нижчих кінематичних пар p_n у групах Ассура.

У таблиці 1.2 наведені найменші з можливих сполучень n і p_n .

Сполучення n і p_n груп Ассура

Таблиця 1.2

	1	2	3	4	...
n	2	4	6	8	...
p_n	3	6	9	12	...

Таблиця 1.2 справа не закрита, але в реальних механізмах використовуються групи Ассура, охоплені декількома першими її стовпчиками.

Розглянемо деякі найпростіші групи Ассура, використовувані в найбільше широко поширених сучасних механізмах.

Нехай: $n = 2$; $p_n = 3$. При такому сполученні n і p_n можливі наступні різновиди груп Ассура II класу (рис. 1.11).

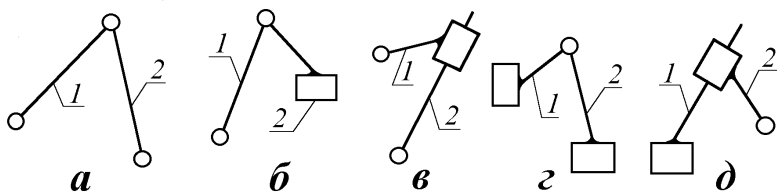


Рис. 1.11. Групи Ассура II класу

Групи Ассура II класу мають усього 5 видів. На рис. 1.11а показана група Ассура II класу 1-го виду, на рис. 1.11б - 2-го виду, на рис. 1.11в - 3-го виду, на рис. 1.11г - 4-го виду, на рис. 1.11д - 5-го виду.

Всі перераховані групи Ассура мають 2-й порядок, тобто по дві зовнішні кінематичні пари. Іноді ці всі групи Ассура називають двоповідковими або діадами, тому що усі вони мають по два повідки.

Група Ассура може приєднуватися до інших ланок тільки зовнішніми кінематичними парами.

Клас груп Ассура по Артоблевському визначається числом сторін (або числом кінематичних пар) найбільше складного замкнутого контуру на її схемі. Групи Ассура, що не містять замкнутих контурів, віднесені Артоблевським до II класу.

Повідки можуть мати кінцеву довжину, а можуть мати і нульову довжину.

Якщо довжина повідка 2 на рис. 1.11б буде нульовою, тоді група Ассура 2-го виду буде виглядати так, як показано на рис. 1.12.

Інші групи Ассура (3-го, 4-го і 5-го видів), із нульовими повідками окремих ланок показані на рис. 1.13 а, б і в.

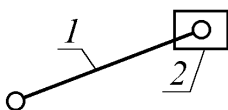


Рис. 1.12. Група Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду з нульовим повідком ланки 2

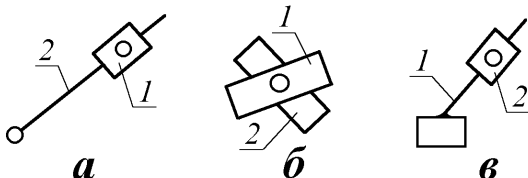


Рис. 1.13. Групи Ассура II класу 2-го порядку 3-го, 4-го і 5-го видів з окремими нульовими повідками

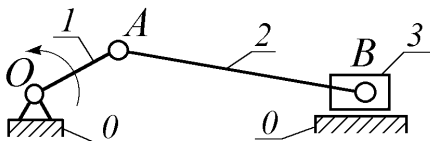


Рис. 1.14. Кривошипно-повзунний механізм

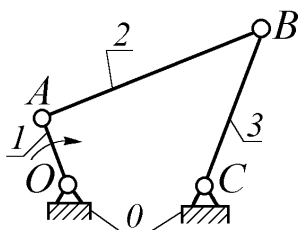


Рис. 1.15. Кривошипно-коромисловий механізм

2-го порядку 5-го виду (рис. 1.11д), то тоді одержимо так званий синусний кулісний механізм (рис. 1.18).

Тепер розглянемо 2-й стовпчик таблиці 1.2 ($n=4$, $p_n=6$).

У багатьох механізмах застосовуються групи Ассура II класу різних видів із нульовими повідками.

Наприклад, якщо до початкового механізму (рис. 1.10а) приєднати групу Ассура II класу, показану на рис. 1.12, то тоді утвориться кривошипно-повзунний механізм (рис. 1.14).

Якщо до початкового механізму (рис. 1.10а) приєднати групу Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду (рис. 1.11а), то тоді утвориться механізм

шарнірного чотириланковика, що частіше усього використовується як кривошипно-коромисловий механізм (рис. 1.15).

Якщо до початкового механізму (рис. 1.10а) приєднати групу Ассура II класу 2-го порядку 3-го виду (рис. 1.13а), то тоді одержимо кривошипно-кулісний механізм (рис. 1.16).

Якщо до початкового механізму (рис. 1.10а) приєднати групу Ассура II класу 2-го порядку 4-го виду (рис. 1.11б), то тоді одержимо так званий тангенсний кулісний механізм (рис. 1.17).

Якщо до початкового механізму (рис. 1.10а) приєднати групу Ассура II класу

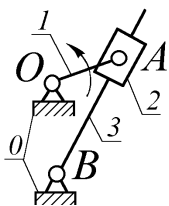


Рис. 1.16. Криво-
шипно-кулісний
механізм

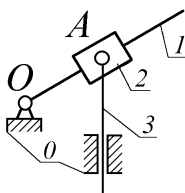


Рис. 1.17. Тангенсний
кулісний механізм

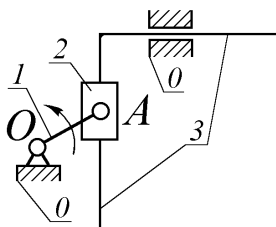
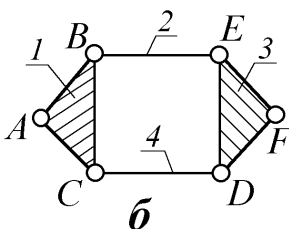
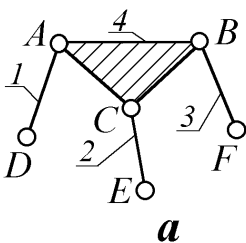


Рис. 1.18. Синусний
кулісний механізм

Будемо з'єднувати ланки тільки обертальними кінематичними парами. Це виправдано тим, що в групах Ассура вище II класу дуже рідко використовуються поступальні кінематичні пари. На рис. 1.19 показані групи Ассура при $n=4$, а $p_n=6$.



На рис.1.19а зображена група Ассура III класу (яка має один тристоронній контур ABC) 3-го порядку (три зовнішні кінематичні пари D, E і F).

Рис. 1.19. Групи Ассура, які мають $n=4$, $p_n=6$

зображена група Ассура IV класу (яка має один чотиристоронній контур $BCDE$ і два тристоронні ABC і DEF) 2-го порядку (дві зовнішні кінематичні пари A і F).

Для груп Ассура, що мають $n=4$; $p_n=6$ (рис. 1.19), не прийнято розрізняти види по варіюванню обертальних і поступальних кінематичних пар.

Очевидно, що таких видів могло б бути дуже багато.

Наведемо також приклад групи Ассура, що має $n=6$, а $p_n=9$, яка буде відноситися до третього стовпчика таблиці 1.2 (рис. 1.20).

Зауважимо, що ланки, які входять у більш ніж дві кінематичні пари, називаються базисними (заштриховані ланки).

Обмежимося показаними вище групами Ассура. На їхньому прикладі цілком можна зрозуміти принципи класифікації груп Ассура.

Слід зазначити, що чим вище клас групи Ассура, тим складніше її кінематичний і силовий аналізи.

Клас механізму визначається по найвищому класу групи Ассура, яка входить до його складу.

Плодотворність структурного аналізу і синтезу полягає в тому, що наступні кінематичний і силовий аналізи проводяться по групах Ассура, котрих порівняно мало, але на їхній основі створене величезне число механізмів.

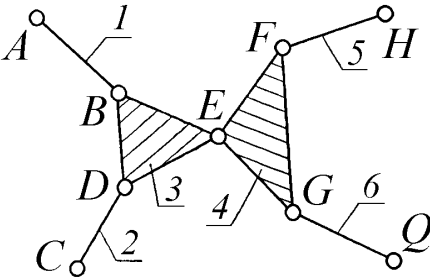


Рис. 1.20. Група Ассура III класу 4-го порядку

Кінематичний аналіз важільного механізму ведеться, починаючи з початкового механізму, і далі - по групах Ассура в міру їхнього нашарування (тобто віддалення від кривошипа). Силовий аналіз виконується в точно зворотному порядку.

Таким чином, класифікація плоских важільних механізмів по

Артоблевському - Ассуру має велику практичну цінність. Вона упорядковує кінематичний і силовий аналізи найрізноманітніших механізмів.

До появи цієї класифікації переважали при розрахунках механізмів дуже громіздкі штучні прийоми, необхідність у яких попросту відпала.

Для закріплення матеріалу розділу I розглянемо приведені нижче рішення задач на визначення груп Ассура в механізмах, що включають у свій склад невідоме число невідомих груп Ассура.

Підкреслимо, що при цьому дуже важливо дотримуватись напрямку пошуку - від початкового механізму і далі по групах Ассура в міру їхнього нашарування.

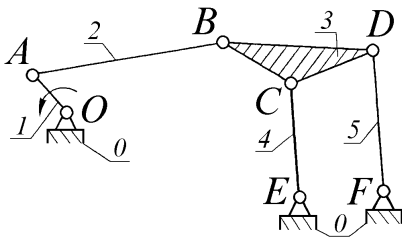


Рис. 1.21. Механізм грохота

Задача 1.7. Визначити клас механізму грохота і ступінь його рухливості по кінематичній схемі (рис. 1.21).

Рішення:

1. Визначимо ступінь рухливості механізму грохота по формулі Чебишева.

Маємо:

$$n = 5, p_n = 7,$$

$$w = 3n - 2p_n - p_e = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

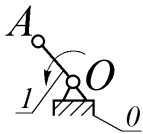


Рис. 1.22. Початковий механізм

2. Вичленуємо з кінематичної схеми механізму грохота початковий механізм (рис. 1.22), відповідно до рис. 1.10а, який має $w=1$.

3. Виявляємо, що ланки 2, 3, 4 і 5 (рис. 1.23), які залишилися, утворять групу Ассура III класу 3-го порядку, відповідно до рис. 1.19а, яка має $n = 4$, $p_n = 6$.

Відповідь: Механізм грохота є механізмом III класу з одним ступенем свободи.

Задача 1.8. Визначити клас механізму і ступінь його рухливості за схемою (рис. 1.24).

Рішення:

1. Визначимо ступінь рухливості механізму по формулі Чебишева.

Маємо: $n=7$; $p_n = 10$,

$$w = 3n - 2p_n - p_6 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

2. Вичленуємо з загальної кінематичної схеми початковий механізм (рис. 1.25), відповідно до рис. 1.10а, що має $w=1$.

3. Далі дивимось, чи можна до початкового механізму приєднати тільки дві такі ланки, щоб при цьому утворився механізм із $w=1$.

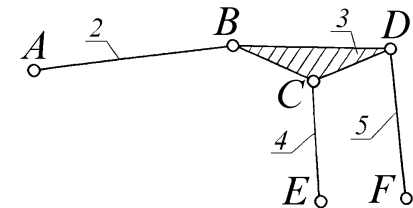


Рис. 1.23. Група Ассура III класу 3-го порядку

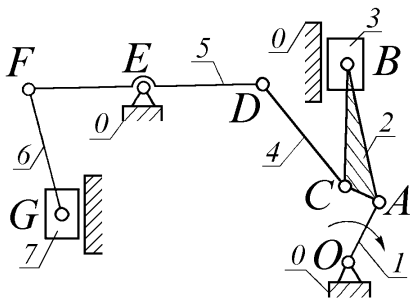


Рис. 1.24. Механізм ДВЗ з приводом компресора від причіпного шатуна

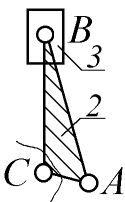


Рис. 1.26. Група Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду

Виявляємо, що ланки 2 і 3 разом із початковим механізмом утворять кривошипно-повзунний механізм, отже вони відповідно до рис. 1.12 утворять групу Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду (рис. 1.26). При цьому шарнір C є допоміжним (для приєднання наступної групи Ассура).

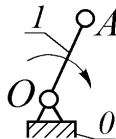


Рис. 1.25. Початковий механізм

4. Точно так само знаходимо, що ланки 4 і 5

(рис. 1.27), утворюють групу Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду, відповідно до рис. 1.11а.

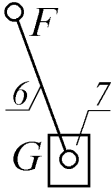


Рис. 1.28. Група Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду

При цьому шарнір F є допоміжним (для приєднання наступної групи Ассура).

5. Остаточково визначаємо, що ланки 6 і 7 (рис. 1.28), утворюють групу Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду, відповідно до рис. 1.12.

Відповідь:

Даний механізм є механізмом II класу з одним ступенем рухливості.

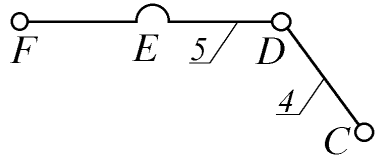


Рис. 1.27. Група Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду

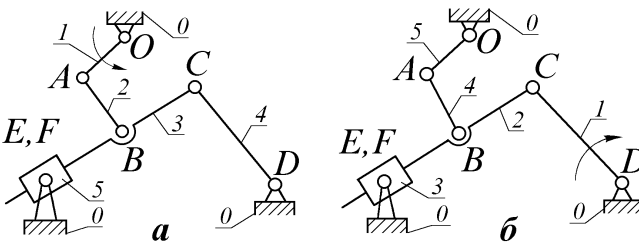


Рис. 1.29. Механізм конхоїдографа

Задача 1.9.

Визначити клас механізму конхоїдографа і ступінь його рухливості по кінематичній схемі в двох варіантах (рис. 1.29 а і б).

Рішення:

1. Очевидно,

що дана схема у варіантах (а і б) та сама і володіє одним і тим же ступенем рухливості.

Підраховуємо: $n=5$; $p_n=7$; $p_6=0$. По формулі Чебишева знаходимо число ступенів свободи механізму конхоїдографа

$$w = 3n - 2p_n - p_6 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

2. Розглянемо спочатку схему а.

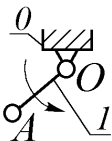


Рис. 1.30. Початковий механізм

2.1. Вичислюємо початковий механізм (рис.1.30), який має $w=1$.

2.2. Припустимо, що ланки 2 і 3 утворюють групу Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду. Тоді виявимо, що початковий механізм із приєднаною до нього гаданою групою Ассура утворить механізм, що має $n=3$, $p_n=3$. Підраховуємо по формулі Чебишева його число ступенів свободи

$$w = 3n - 2p_n - p_6 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 0 = 3.$$

Бачимо, що в цьому випадку порушується принцип нашарування груп Ассура без зміни рухливості, обумовленою рухливістю початкового механізму ($w=I$).

Значить припущення, що ланки 2 і 3 утворять групу Ассура, - помилкове.

Крім того помічаємо, що ланки 4 і 5, які залишилися, не могли б ніяк скласти якусь групу Ассура. По-перше, вони одна з одною не зв'язані, а по-друге, входять обидві в кінематичні пари зі стояком (шарніри D і F).

Отже, тут треба шукати групу Ассура більш високого класу, яка включає у свій склад чотири ланки.

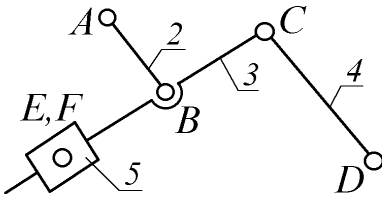


Рис. 1.31. Група Ассура III класу 3-го порядку

Справді, ланки 2, 3, 4 і 5 (рис. 1.31) входять до складу групи Ассура III класу 3-го порядку. Будучи приєднаною до початкового механізму, як і повинно бути, виявлена група Ассура не змінює рухливості механізму, заданої початковим механізмом ($w=I$).

Базисною ланкою групи є ланка 3 (вона входить відразу в три внутрішні кінематичні пари, розташовані по одній лінії, тобто

утворюючі звироднілий у лінію трикутник).

На відміну від рис. 1.19а тут маємо одну кінематичну пару (3 - 5) поступальну замість обертальної, а також ланка 5 - із нульовим повідком.

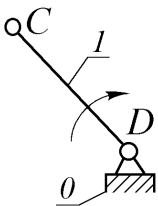


Рис. 1.32. Початковий механізм

3. Розглянемо схему б.

3.1. Вичленуємо початковий механізм (рис. 1.32), що має $w=I$.

3.2. Далі припустимо, що ланки 2 і 3 (рис. 1.33), утворять групу Ассура II класу 2-го порядку 3-го виду.

Виявляємо, що початковий механізм із приєднаними до нього ланками 2 і 3 утворить кулісний механізм із каменем 3, зв'язаним шарнірно зі стояком.

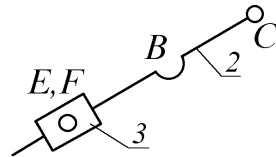


Рис. 1.33. Група Ассура II класу 2-го порядку 3-го виду

Такий механізм знаходить практичне застосування. Значить наше припущення вірне.

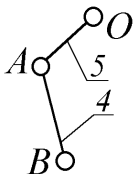


Рис. 1.34. Група
Ассура II класу 2-го
порядку 1-го виду

Зауважимо, що шарнір B - допоміжний. Він служить для приєднання наступної групи Ассура.

3.3. Очевидно, що ланки 4 і 5, які залишилися, (рис. 1.34), утворять групу Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду.

Відповідь:

1. Механізм конхноїдографа має один ступінь рухливості ($w=1$).

2. Механізм у варіанті a є механізмом III класу.

3. Механізм у варіанті b є механізмом II класу.

Висновок. Заміна в одній і тій же схемі вхідної ланки може призвести до зміни класу механізму.

5. Контрольні запитання

1. Що таке початковий механізм?
2. Які кінематичні ланцюги називаються структурними (групами Ассура)?
3. Чим визначається клас групи Ассура?
4. Як визначається порядок групи Ассура?
5. Як визначається клас механізму по Артоблевському - Ассуру?
6. У якому напрямку за схемою слід здійснювати кінематичний аналіз будь-якого важільного механізму?
7. У якому напрямку за схемою слід здійснювати силовий аналіз будь-якого важільного механізму?
8. У чому полягає плідотворність класифікації механізмів по Артоблевському – Ассуру.

Лекція 3

Тема: **Метричний синтез важільних механізмів**

- Зміст:
1. Умови синтезу.
 2. Метричний синтез чотириланкових важільних механізмів.
 3. Теорема Грасгофа.
 4. Коефіцієнт зміни швидкості вихідної ланки.
 5. Задачі з метричного синтезу важільних механізмів.
 6. Контрольні запитання.

РОЗДІЛ І

МЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

1. Умови синтезу

Метричний синтез полягає в визначенні розмірів та взаємного розташування ланок механізму на його кінематичній схемі за наперед заданими геометричними, кінематичними та динамічними умовами руху вихідної ланки. Серед геометричних і кінематичних умов руху вихідної ланки можна назвати такі умови, які найбільш часто зустрічаються в практичних інженерних задачах:

1. Деякі положення вихідної ланки повинні відповідати певним положенням вхідної ланки, при цьому закон руху вихідної ланки не має значення. Дану задачу можна назвати задачею позиціювання ланок механізму.

2. Траєкторія руху вихідної ланки, або його окремої точки повинна відповідати заздалегідь заданим кривій на всьому її протязі або на окремій ділянці.

3. Рух вихідної ланки повинен здійснюватися за наперед заданим законом або характеризуватися окремими заданими кінематичними параметрами, такими, наприклад, як коефіцієнт зміни середньої швидкості вихідної ланки механізму.

Серед динамічних умов можна назвати такі умови, як умова подолання сил корисного опору з заданим законом руху (тобто забезпечення

динамічної точності), або умова обмеження інерційних навантажень, або ж умова обмеження кутів тиску (чи кутів передачі).

Перелічені вище умови можуть бути виконані кулачковими механізмами або іншими механізмами, що мають у своєму складі вищі кінематичні пари, проте вирішення тієї ж задачі з застосуванням шарнірно-важільних (важільних) механізмів доцільне з технологічних та економічних міркувань.

1.2. Метричний синтез важільних чотириланкових механізмів

Розглянемо рішення деяких розповсюджених задач метричного синтезу важільних механізмів спочатку на прикладі синтезу шарнірного чотириланкового механізму, а після цього - деяких інших важільних механізмів.

Існує три різновиди шарнірного чотириланкового механізму.

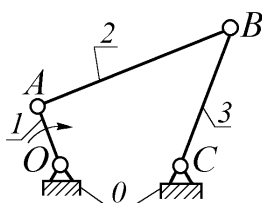


Рис. 1.1. Кривошипно-коромисловий механізм (повне обертання).

2. Двукоромисловий механізм (рис. 1.2).

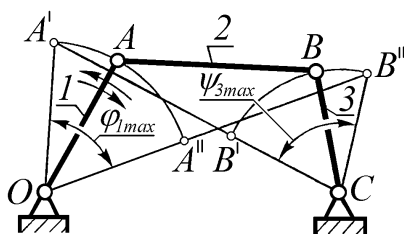


Рис. 1.2. Двукоромисловий механізм

визначеність руху його ланок.

3. Двокривошипний механізм (рис. 1.3).

1. Кривошипно-коромисловий механізм (рис. 1.1).

Механізм включає до свого складу:

0 - стояк;

1 - кривошип, який має повнообертальний рух;

2 - шатун, який здійснює складний плоскопаралельний рух;

3 - коромисло, яке має зворотно-обертальний рух (неповне

Окрім стояка механізм включає до свого складу:

1, 3 - коромисла,

2 - шатун.

Якщо коромисло 1 (вхідна ланка) хитається в межах кута φ_{1max} , то в цей час коромисло 3 (вихідна ланка) може хитатись в межах кута ψ_{3max} . За межами означених кутів φ_{1max} і ψ_{3max} механізм не повинен існувати, інакше порушиться

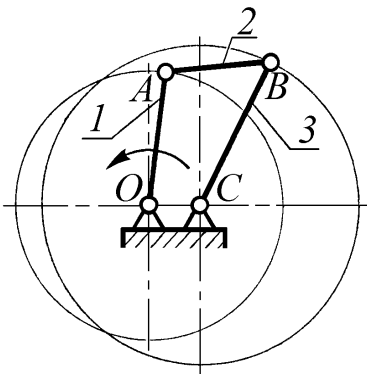


Рис. 1.3. Двокривошипний механізм

Окрім стояка механізм включає до свого складу:

1, 3 - кривошипи,
2 - шатун.

Якщо кривошип 1 (вхідна ланка) рухається повнооборотно, наприклад, з кутовою швидкістю $\omega_1 = \text{const}$, то в цей час кривошип 3 теж рухається повнооборотно, але зі змінною кутовою швидкістю $\omega_3 = \text{var}$.

Найбільш широке застосування в машинах з названих шарнірних чотириланкових механізмів знайшов кривошипно-коромисловий механізм.

Очевидно, що кожна з трьох різновидів шарнірного чотириланкового механізму існує при певному поєднанні довжин всіх чотирьох ланок: l_{OA} , l_{AB} , l_{BC} , l_{OC} .

3. Теорема Грасгофа про існування кривошипа

Умову існування єдиного кривошипа встановлює так звана теорема Грасгофа: *"Найменша ланка буде єдиним кривошипом, якщо сума його довжини і довжини найбільшої ланки виявиться менше від суми довжин двох інших ланок"*.

Теорему Грасгофа можна також назвати теоремою існування кривошипно-коромислового механізму.

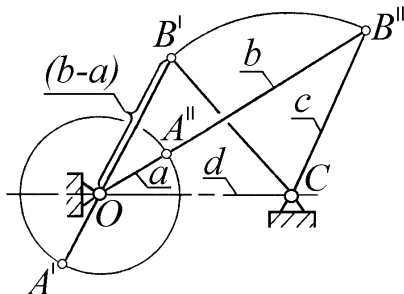


Рис. 1.4. До теореми Грасгофа

Наведемо один з доказів теореми Грасгофа.

Зобразимо кривошипно-коромисловий механізм в двох положеннях, що прийнято називати мертвими (рис. 1.4). Коромисло в цих положеннях механізму займає своє крайнє ліве і крайнє праве положення (мертві ліве й праве положення).

Позначимо з метою спрощення доказу теореми: $l_{OA} = a$, $l_{AB} = b$, $l_{BC} = c$ і $l_{OC} = d$.

З $\Delta OB^I C$ можна

записати:

$$1) \quad OC < B^I C + OB^I \quad \text{або} \quad d < c + (b-a);$$

$$2) B^I C < OC + OB^I \text{ або } c < d + (b-a).$$

З $\Delta OB^{II}C$ можна записати:

$$3) OB^{II}C < B^{II}C + OC \text{ або } (a+b) < c+d.$$

Одержані три нерівності можемо переписати в вигляді:

$$\begin{aligned} 1) a+d < c+b; \\ 2) a+c < d+b; \\ 3) a+b < c+d. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Складемо окремо попарно всі нерівності (1.1), тоді отримаємо

$$\begin{aligned} 1) + 2): 2a + (d+c) < (c+d) + 2b \text{ або } a < b; \\ 1) + 3): 2a + (d+b) < (b+d) + 2c \text{ або } a < c; \\ 2) + 3): 2a + (c+b) < (b+c) + 2d \text{ або } a < d. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Одержані нерівності (1.1) та (1.2) називають нерівностями Грасгофа.

Нерівності (1.2) свідчать, що кривошип є ланкою найменшої довжини.

Нерівності (1.1) показують, що сума довжини кривошипа і довжини будь-якої з ланок (у тому числі найбільшої) повинна бути менше суми довжин двох інших ланок.

Сукупність одержаних нерівностей (1.1) та (1.2) і є доказом теореми Грасгофа.

Помітимо, що при дотриманні нерівностей Грасгофа (1.1) та (1.2) найменша ланка (a) може вчиняти повнооборотний рух відносно трьох інших ланок.

Звідси слідує, що якщо не порушуючи відносного руху механізму найменшу ланку (a) зробити стояком, тоді зв'язані з ним шарнірно ланки (b) і (d), можуть мати відносно найменшої ланки (a) повнооборотний обертальний рух, тобто ці ланки будуть кривошипами. При цьому ланка (c) стане шатуном. Такий механізм, як вже було сказано вище, називається двокривошипним.

Якщо ж нерівності Грасгофа (1.1) та (1.2) у відношенні деякого шарнірного чотириланкового механізму не мають місця, тоді такий механізм може бути тільки двокоромисловим.

4. Коефіцієнт зміни швидкості вихідної ланки

Однією з важливих кінематичних характеристик будь-якого важільного механізму є значення коефіцієнта K_V (або K_ω) зміни середньої швидкості вихідної ланки. Він показує, в скільки разів середня швидкість вихідної ланки на зворотному (холостому) ході більше від середньої швидкості цієї ланки на прямому (робочому) ході.

На робочому ході механізм здійснює перетворення робочого тіла, переборюючи відповідні сили корисного опору.

Холостий хід відбувається, як правило, без участі сил корисного опору.

Для досягнення максимальної продуктивності машин необхідно, щоб з періоду часу одного циклу $T_{\text{ц}}$ більша частина належала до часу робочого ходу T_p , а менша частина - до часу холостого ходу T_x .

Очевидно, що $T_{\text{ц}} = T_p + T_x$.

Якщо виходити з умови рівномірного обертального руху вхідної ланки (головного валу машини) $\omega_l = \text{const}$, тоді можна стверджувати, що динамічні інерційні навантаження в механізмі будуть більші на холостому ході, ніж на робочому ході, бо один й той же лінійний або кутовий шлях вихідна ланка вимушена буде проходити на холостому ході швидше, ніж на робочому ході.

Оптимальним з точки зору однакового навантаження кінематичних пар механізму на холостому та робочому ходах був би такий розподіл періоду часу $T_{\text{ц}}$ між робочим T_p і холостим T_x ходами, при якому динамічна інерційна навантаженість ланок механізму на холостому ході була б така ж, як їхня навантаженість від сил корисного опору в сумі з інерційними динамічними навантаженнями на робочому ході.

В більшості випадків у повній мірі це реалізувати практично неможливо, однак дослідним шляхом для різноманітних типів машин встановлені деякі підходи усереднені значення коефіцієнта зміни швидкості K_V (або K_{ω}).

Розглянемо зв'язок величини коефіцієнта K_{ω} з метричними параметрами кінематичної схеми кривошипно-коромислового механізму (рис. 1.5), показаного в двох крайніх положеннях.

Положення механізму, позначене одним штрихом, відноситься до початку робочого ходу (та до кінця холостого ходу попереднього циклу).

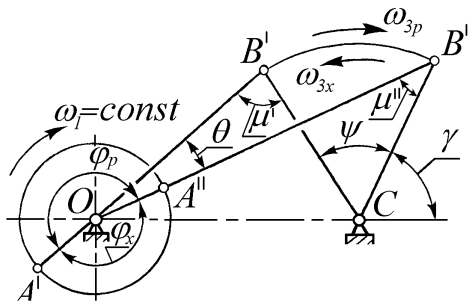


Рис. 1.5. До визначення коефіцієнта зміни швидкості вихідної ланки

Положення механізму, позначене двома штрихами, відноситься до кінця робочого ходу (та до початку холостого ходу поточного циклу).

На рис. 1.5 позначено напрямок обертання кривошипного валу 1 (з $\omega_l = \text{const}$) за годинниковою стрілкою. При цьому коромисло 3 буде мати змінну кутову швидкість робочого ходу ω_{3p} , напрямлену за годинниковою

стрілкою, а також змінну кутову швидкість холостого ходу ω_{3x} , напрямлену проти годинникової стрілки.

Повний кут повороту коромисла 3 і на робочому і на холостому ходах позначено величиною ψ . При цьому кут між правим крайнім положенням коромисла 3 і лінією шарнірів стояка (O та C) позначено величиною γ .

Кут, під яким з центру обертання кривошипа (т. O) видні крайні положення рухомого кінця коромисла 3 (т. т. B^I та B^{II}), позначено величиною θ .

Також показані кути повороту кривошипа 1: за час робочого ходу - φ_p , та за час холостого ходу - φ_x .

Кут μ , під яким по відношенню один до одного розміщені шатун і коромисло, є так званим кутом передачі.

На рис. 1.5 показані величини цього кута μ^I та μ^{II} в крайніх положеннях механізму. Бажано, щоб змінний кут μ залишався поблизу значення, рівного 90° (тобто щоб він був більше деякого мінімально допустимого кута передачі $\mu_{\min}^{\text{don}} < 90^\circ$, а також менше деякого максимально допустимого кута передачі $\mu_{\max}^{\text{don}} > 90^\circ$).

Знайдемо середні значення кутової швидкості коромисла 3 на робочому ході

$$\omega_{3p} = \frac{\psi}{T_p} \quad (1.3)$$

і на холостому ході

$$\omega_{3x} = \frac{\psi}{T_x}, \quad (1.4)$$

де $T_p = \frac{\varphi_p}{\omega_l}$ - час робочого ходу, (1.5)

$$T_x = \frac{\varphi_x}{\omega_l} - \text{час холостого ходу.} \quad (1.6)$$

З рисунка видно, що

$$\varphi_p = 180^\circ + \theta^0, \quad (1.7)$$

$$\varphi_x = 180^\circ - \theta^0. \quad (1.8)$$

Тому що за визначенням

$$K_\omega = \frac{\omega_{3x}^{сеп.}}{\omega_{3p}^{сеп.}}, \quad (1.9)$$

з урахуванням (1.3), ..., (1.8) отримаємо формулу

$$K_\omega = \frac{180^\circ + \theta^0}{180^\circ - \theta^0}, \quad (1.10)$$

де кут θ^0 слід виражати в градусах.

Формулу (1.10) можна перетворити до вигляду

$$K_\omega = \frac{\pi + \theta}{\pi - \theta}, \quad (1.11)$$

де кут θ слід виражати в радіанах.

Помітимо, що звичайно $K_\omega \geq 1$. При $K_\omega = 1$ точки A^I , A^{II} , B^I , B^{II} будуть лежати на одній лінії, що проходить через точку O (рис. 1.6). В цьому випадку прямий і зворотний ходи здійснюються з однієї й тією ж середньою швидкістю коромисла BC . Симетричний рух коромисла на прямому і зворотному ходах слід застосовувати, коли кожний з цих ходів буде робочим, тобто кожний буде супроводжуватися доданням сил корисного опору. Холостий хід при цьому буде відсутній взагалі.

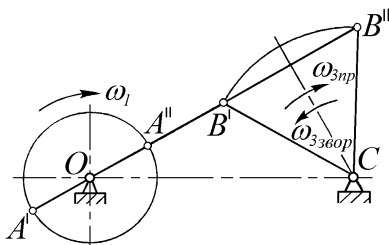


Рис. 1.6. Кривошипно-коромисловий механізм з $K\omega=1$

Ще раз підкреслимо, що кутова швидкість коромисла - змінна величина зі своїм законом зміни і на прямому і зворотному ходах, однак усереднені значення ω_{3np} і $\omega_{3звор}$ при $K\omega=1$ будуть співпадати.

Відзначимо, що формули (1.10) та (1.11) справедливі і для інших важільних механізмів, бо

відношення середніх швидкостей вихідних ланок на робочих та холостих ходах цих механізмів визначається, в кінці кінців, відношенням кутів повороту кривошипного вала на робочому ході (φ_p) та на холостому ході (φ_x).

Покажемо приклади вирішення деяких задач метричного синтезу важільних механізмів за умовою досягнення заданої величини коефіцієнта зміни швидкості вихідної ланки $K\omega$ (або K_V), з урахуванням заданих значень окремих параметрів кінематичних схем механізмів.

5. Задачі з метричного синтезу важільних механізмів

Задача.1. Спроектувати (синтезувати) в загальному вигляді кривошипно-коромисловий механізм у відповідності зі схемою рис. 1.5 та наступними заданими величинами: $l_{OA}=l_1$; ψ ; γ ; $K\omega$.

Рішення.

1. За формулою (1.10) або (1.11), з урахуванням заданого значення коефіцієнта зміни швидкості вихідної ланки $K\omega$, обчислимо величину допоміжного кута θ .

$$\theta^0 = 180^\circ \frac{K\omega - 1}{K\omega + 1} (\text{град}) \quad (7.12)$$

або

$$\theta = \pi \frac{K\omega - 1}{K\omega + 1} (\text{рад}). \quad (7.13)$$

2. Виберемо на кресленні (рис. 1.7) довільну точку C . Проведемо через неї горизонтальну центрову лінію (у бік невідомого доки-що положення т. O), а також промені, що ідуть до цієї центрової лінії під кутами γ та $(\gamma+\psi)$.

3. На кожному з променів відкладемо відповідно довільні однакові відрізки CB^{II} та CB^I .

4. Для відшукування положення точки O використаємо допоміжне коло радіусу ρ , що проходить через точки B^I та B^{II} , у відповідності з відомою теоремою геометрії: "Вписаний в коло кут складає половину центрального, що спирається на ту ж дугу".

Знайдемо центр O^* допоміжного кола з радіусом ρ на продовженні бісектриси кута ψ .

Закоординувати точку O^* можна, наприклад, променем, що йде з точки B^{II} під кутом до прямої лінії $B^I B^{II}$, що дорівнює $(90^\circ - \theta)$. Однак при малих значеннях кута θ точність відшукування положення точки O^* може виявитися недостатньою. Тому краще обчислити довжину DO^* бісектриси за формулою

$$DO^* = 0,5 B^I B^{II} \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

З точки O^* дуга $B^I B^{II}$ буде спостерігатися під центральним кутом 2θ , а з будь-якої точки допоміжного кола, проведеного з центру O^* радіусом ρ , дуга $B^I B^{II}$ буде спостерігатися під кутом θ .

Перетин допоміжного кола з центральною горизонтальною лінією, що проходить через точку C (ліворуч від неї), і буде цією точкою O , з якої точки B^I та B^{II} спостерігаються під кутом θ .

Помітимо, що друга можлива точка перетину допоміжного кола з центральною горизонтальною лінією, що проходить через точку C (праворуч від неї), також задовольняє заданому значенню K_ω , але при цьому отримався б інший механізм зі схемою, дзеркальною по відношенню до необхідної схеми (рис. 1.5).

5. Знайдемо довжини відрізків OA та AB , а також масштаб μ_i , в якому побудована кінематична схема кривошипно-коромислового механізму.

Помітимо, що (у відповідності з рис. 1.5) відрізки

$$OB^{II} = OA + AB,$$

$$OB^I = AB - OA.$$

Віднімемо з першого рівняння друге, тоді отримаємо

$$OB^{II} - OB^I = 2OA.$$

Графічно, як показано на рис. 1.7, визначимо відрізок $2OA$ (відніманням з OB^{II} відрізка OB^I).

Задача 2. Визначити в загальному вигляді значення мінімального μ_{min} і максимального μ_{max} кутів передачі кривошипно-коромислового механізму, синтезованого при вирішенні задачі 7.1.

Рішення.

1. Викреслимо у масштабі μ_l кривошипно-коромисловий механізм у двох положеннях, при яких точка A кінця кривошипа буде знаходитися від точки C на мінімальній та на максимальній відстанях (рис. 1.8).

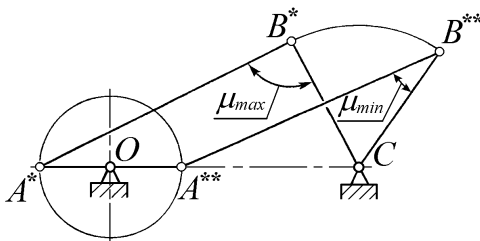


Рис. 1.8. До визначення мінімального і максимального кутів передачі

2. Доведемо, що

кут передачі μ у положенні механізму, позначеному двома зірочками, буде мінімальним (μ_{min}), а в положенні, позначеному одною зірочкою кут передачі буде максимальним (μ_{max}).

Розглянемо два трикутники: $\triangle A^*B^*C$ і $\triangle A^{**}B^{**}C$.

У цих трикутниках маємо по дві рівні сторони

$$\begin{aligned} A^*B^* &= A^{**}B^{**}, \\ B^*C &= B^{**}C, \end{aligned}$$

між якими кут (кут передачі μ) залежить від розміру третьої сторони.

Чим більше третя сторона, тим більше буде і розмір кута μ .

Оскільки довжина сторони A^*C , у положенні механізму, позначеному однією зірочкою, буде максимально можливою, то і кут між двома іншими сторонами $\triangle A^*B^*C$ буде максимально можливим, тобто в цьому положенні механізму $\mu = \mu_{max}$.

Довжина ж сторони $A^{**}C$, у положенні механізму, позначеному двома зірочками, буде мінімально можливою, тому кут між двома іншими сторонами $\triangle A^{**}B^{**}C$ буде мінімально можливим, тобто в цьому положенні механізму $\mu = \mu_{min}$.

Відзначимо, що найвигідніше значення кута передачі дорівнює 90° . Як збільшення, так і зменшення кута передачі від цього значення веде до погіршення умов передачі рушійних сил від вхідного кривошипного вала через шатун на вихідну ланку механізму - коромисло. Тому при синтезі

кривошипно-коромислових механізмів варто перевіряти виконання динамічної умови

$$\mu_{max} \leq \mu_{max}^{don},$$

$$\mu_{min} \geq \mu_{min}^{don},$$

де μ_{max}^{don} і μ_{min}^{don} - максимальне і мінімальне допустимі значення величини кута передачі μ .

Задача 3. Визначити довжини кривошипа r і шатуна l , а також ексцентриситет e дезаксіального кривошипно-повзунного механізму, якщо задано: хід повзуна H , співвідношення довжин шатуна і кривошипа l/r , а також коефіцієнт зміни середньої швидкості руху повзуна K_v . Задачу вирішити в загальному вигляді графічно й аналітично.

Графічне рішення.

1. Обчислимо значення допоміжного кута θ по формулі (1.12).

2. На промені, що йде з довільної точки O в довільному напрямку відкладемо $(l/r+1)$ разів деякий довільний відрізок із довжиною a мм. На другому кінці отриманого результуючого відрізка позначимо точку B^{II} (рис. 1.9).

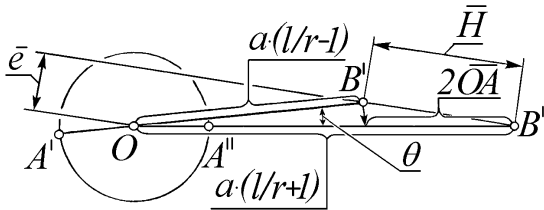


Рис. 1.9. Графічний синтез кривошипно-повзунного механізму

3. З точки O проведемо другий промінь під кутом θ до першого променя й відкладемо на ньому той же відрізок $a(l/r-1)$ разів. На другому кінці отриманого при цьому результуючого відрізка позначимо точку B^I .

4. Відніmemo графічно з відрізка OB^{II} відрізок OB^I , у залишку одержимо відрізок $2OA$. Довжиною відрізка OA як радіусом із точки O проведемо окружність, що на першому промені закоординує точку A^{II} , а на продовженні другого променя в його зворотному напрямку буде закоординована точка A^I .

Помітимо, що відрізок $a=OA$, відрізок $A^IB^I=A^{II}B^{II}=AB$, а відношення $AB/OA=l/r$.

Отже, на рис. 1.9 побудована кінематична схема кривошипно-повзунного механізму з заданими коефіцієнтом зміни вихідної швидкості повзуна K_V і співвідношенням l/r .

5. Визначимо масштаб довжин отриманої схеми

$$\mu_l = \frac{H}{B^I B^{II}} = \frac{H}{H} \text{ (м/мм)}.$$

6. Через розрахований масштаб довжин і виміряні відповідні відрізки знайдемо шукані довжини ланок l та r і ексцентриситет e .

$$l = A^I B^I \cdot \mu_l \text{ (м)},$$

$$r = OA^I \cdot \mu_l \text{ (м)},$$

$$e = \bar{e} \cdot \mu_l \text{ (м)}.$$

Аналітичне рішення.

1. Обчислимо значення допоміжного кута θ по формулі (1.13) і зобразимо довільний фрагмент кінематичної схеми кривошипно-повзунного механізму (рис. 1.10).

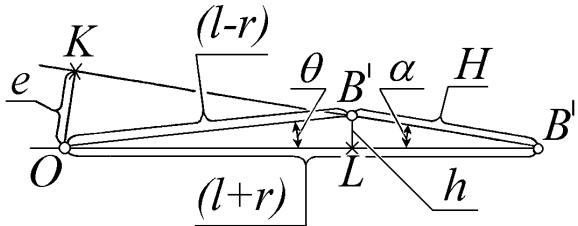


Рис. 1.10. До аналітичного визначення розмірів ланок кривошипно-повзунного механізму

2. Відповідно до рис. 1.10, у трикутнику $OB^I B^{II}$, якщо його уявити в натуральному масштабі, сторона OB^I буде рівна $(l-r)$, сторона OB^{II} буде рівною $(l+r)$, а сторона $B^I B^{II}$ буде дорівнювати H .

Тому що між сторонами OB^I і OB^{II} кут θ відомий, можемо для відшукування величин r і l скористатися теоремою косинусів

$$H^2 = (l-r)^2 + (l+r)^2 - 2(l-r) \cdot (l+r) \cdot \cos \theta. \quad (1.14)$$

З метою спрощення подальших алгебраїчних перетворень позначимо задане відношення l/r величиною c , тоді можна записати

$$l = r \cdot c. \quad (1.15)$$

Підставимо у формулу (1.14) вираз (1.15), тоді одержимо рівняння з одним невідомим r :

$$H^2 = (r \cdot c - r)^2 + (r \cdot c + r)^2 - 2(r \cdot c - r) \cdot (r \cdot c + r) \cdot \cos \theta. \quad (1.16)$$

Після нескладних перетворень рівняння (1.16) набуде вигляду

$$H^2 = 2r^2(c^2 - c^2 \cdot \cos \theta + \cos \theta + 1),$$

звідкіля знайдемо

$$r = H / \sqrt{2(c^2 - c^2 \cdot \cos \theta + \cos \theta + 1)},$$

або

$$r = H / \sqrt{2 \left(\left(\frac{l}{r} \right)^2 - \left(\frac{l}{r} \right)^2 \cdot \cos \theta + \cos \theta + 1 \right)}. \quad (1.17)$$

Після відшукування величини r по формулі (1.15) обчислимо величину

$$l = r \cdot \frac{l}{r}.$$

4. Підрахуємо величину ексцентриситету e з допоміжного прямокутного трикутника $\triangle OKB^{II}$

$$e = (l + r) \cdot \sin \alpha, \quad (1.18)$$

де α - кут між сторонами $B^I B^{II}$ і OB^{II} із $\triangle OB^I B^{II}$.

Для визначення $\sin \alpha$ опустимо з точки B^I висоту h на сторону OB^{II} $\triangle$ -ка $OB^I B^{II}$.

Очевидно, що $h = (l - r) \cdot \sin \theta$, тоді

$$\sin \alpha = \frac{h}{H} = \frac{(l - r) \cdot \sin \theta}{H}. \quad (1.19)$$

Підставимо вираз (1.19) у вираз (1.18), тоді одержимо формулу для визначення ексцентриситету e

$$e = \frac{(l^2 - r^2) \cdot \sin \theta}{H}. \quad (1.20)$$

Задача 4. Виконати в загальному вигляді синтез кінематичної схеми шестиланкового кривошипно-кулісного механізму стругального верстата відповідно до рис. 1.11, якщо задано: хід H (м) повзуна 5, відстань l_{OC} (м) між шарнірами O і C стяка і коефіцієнт K_V зміни швидкості вихідної ланки механізму.

Рішення.

1. Обчислимо значення допоміжного кута θ по формулі (1.12)

$$\theta^0 = 180^0 \frac{K_\omega - 1}{K_\omega + 1} (\text{град}).$$

2. На горизонтальній прямій (рис. 1.12) в обраному масштабі μ_l відкладемо відрізок

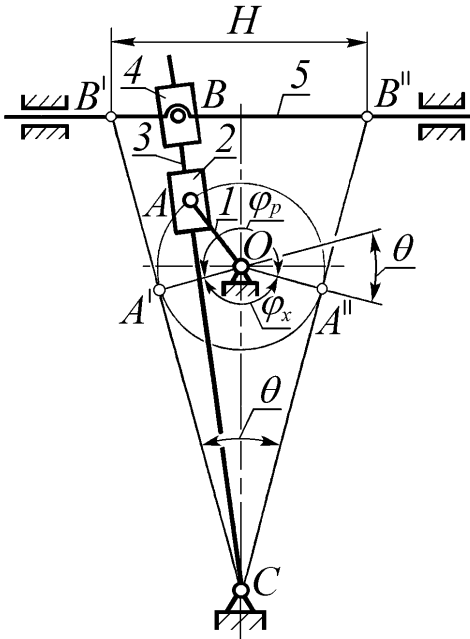


Рис. 1.11. Кривошипно-кулісний механізм
стругального верстата

$$\overline{H} = \frac{H}{\mu_l} (\text{мм}).$$

Позначимо кінці цього відрізка точками B^I і B^{II} .

3. З точок B^I і B^{II} назустріч один одному униз проведемо промені, розташовані до лінії $B^I B^{II}$ під кутами $(90^\circ - \frac{\theta^0}{2})$.

Перетинання вищевказаних променів заординує положення точки C .

Проте при малих значеннях кута θ точність відшукування положення точки C може виявитися недостатньою. Тому краще обчислити відстань DC за формулою

$$DC = 0,5 \cdot B^I B^{II} \cdot \text{tg}(\theta / 2).$$

З'єднаємо точку C з точками B^I і B^{II} і підрахуємо відстань

$$l_{B^I C} = l_{B^{II} C} = \overline{B^I C} \cdot \mu_l (\text{м}).$$

Очевидно, що довжину куліси l_3 варто прийняти конструктивно дещо більше від розміру $l_{B^I C}$, тобто так, щоб камінь 4 міг цілком розташуватися на направляючих куліси 3 (див. рис. 1.11).

4. З точки C відкладемо вверх відстань

$$\overline{OC} = \frac{l_{OC}}{\mu_l} (\text{мм}).$$

5. З точки O , як із центру, проведемо окружність, що дотикається до ліній $B^I C$ і $B^{II} C$ у точках A^I і A^{II} . Радіус окружності OA (мм) можна обчислити по формулі

$$OA = OC \sin(\theta/2).$$

При цьому довжина кривошипа буде

$$l_{OA} = \overline{OA} \cdot \mu_l (м).$$

Помітимо, що якщо кулісні камені 2 і 4 будуть сковзати по загальній направляючій куліси 3 (виконаній з однієї установки), тоді необхідно щоб розмір h і довжини каменів були б такими, щоб у середньому положенні механізму (див. рис. 1.11) між ними залишався гарантований зазор.

У протилежному випадку направляючі для каменів 2 і 4 варто розташувати на кулісі у різних площинах. І тоді розмір h не буде мати ніякого значення (він може бути навіть від'ємним).

Зазначимо ще і на те, що довжина кривошипа кривошипно-кулісного

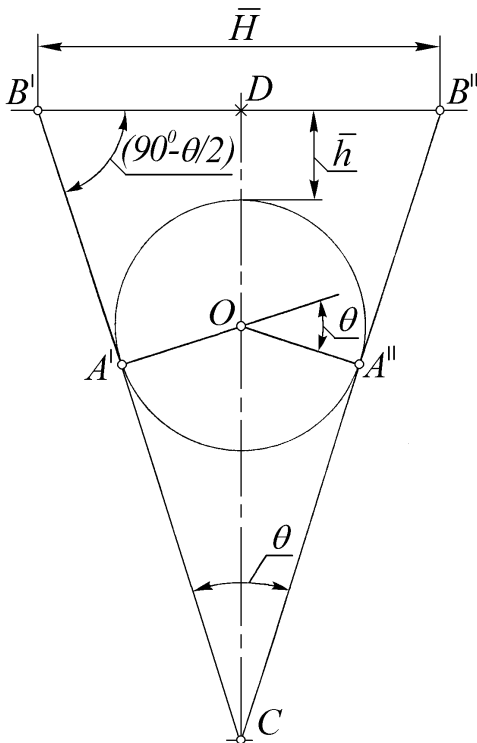


Рис. 1.12. Синтез кривошипно-кулісного механізму

механізму в усіх випадках бажана максимально можлива. Зменшувати її недоцільно, тому що це могло б призвести до зниження точності верстата і його ККД, а також до збільшення навантажень в окремих кінематичних парах механізму.

Задача 5. Виконати в загальному вигляді метричний синтез кінематичної схеми шестиланкового кривошипно-коромислового механізму брикетировочного автомата (рис. 1.13) за відомими вихідними даними: H , l_{ED} , a , b , c , K_V , γ , DC/BC .

Рішення.

1. Проаналізуємо умову задачі. Помітимо, що невідомими являються довжини ланок l_{OA} , l_{AB} , l_{BC} , l_{CD} , положення точки O , а також розташування коромисла 3 у крайніх положеннях.

Розіб'ємо розв'язання задачі на два етапи.

На першому етапі знайдемо за методом обернення руху довжину l_{DC} і розташування коромисла 3 у крайніх положеннях ($D^I C$ та $D^{II} C$).

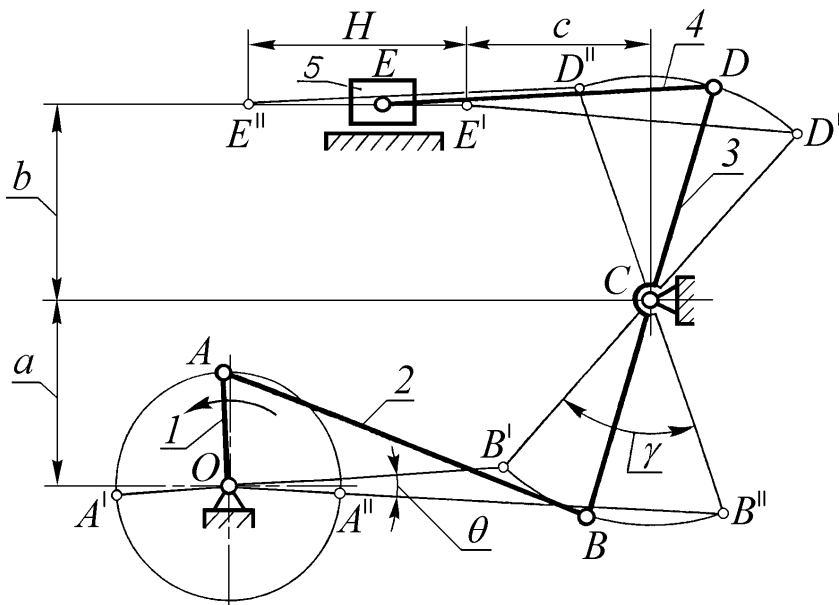


Рис. 1.13. Шестиланковий кривошипно-коромисловий механізм брикетировочного автомата

На другому етапі знайдемо довжини l_{BC} , l_{AB} та l_{OA} , а також положення точки O за заданим значенням коефіцієнта зміни швидкості вихідної ланки K_V .

2. Виконаємо намічений перший етап синтезу.

Метод обернення руху, як відомо, застосовується для зупинки якоїсь із ланок, що дозволяє розглянути в чистому вигляді відносний рух інших ланок (відносно цієї зупиненої ланки).

У нашому випадку за рахунок обернення руху варто зупинити коромисло 3, тому що ні його довжина, ні його розташування на кресленні невідомі.

Зате відомі два крайніх положення повзуна 5 і довжина шатуна 4, що дозволяє за рахунок використання двох відомих відносних положень цих

ланок визначити довжину l_{CD} і розташування на кресленні зупиненого коромисла 3 (наприклад, у лівому крайньому положенні).

Для ілюстрації застосування методу обернення руху використаємо

верхній фрагмент рис. 1.13. Припускаємо, що всі довжини і взаємне розташування ланок 3, 4 і 5 відомі.

На рис. 1. 14а

показано три абсолютні положення вибраного кривошипно-коромислового фрагмента механізму: два крайніх, відповідно позначених одним і двома штрихами, а також деяке проміжне положення, накреслене основними лініями.

Розглянемо випадок абсолютного руху механізму з лівого крайнього положення в праве, при якому коромисло 3 повертається за годинниковою стрілкою.

Для обернення руху коромисла (з метою його зупинки в

лівому крайньому положенні) мислено надамо всьому механізму додаткове протилежне обертання з кутовою швидкістю коромисла, тобто проти годинникової стрілки.

Коромисло при цьому буде спостерігатися нерухомим, а інші ланки (шатун, повзун і стояк) будуть повертатися відносно зупиненого коромисла проти годинникової стрілки.

На рис. 1. 14б пунктирними лініями показані абсолютні проміжне і праве крайнє положення механізму, а тонкими лініями ці ж положення в оберненому русі (позначені зірочками). При цьому спостерігаємо обернений

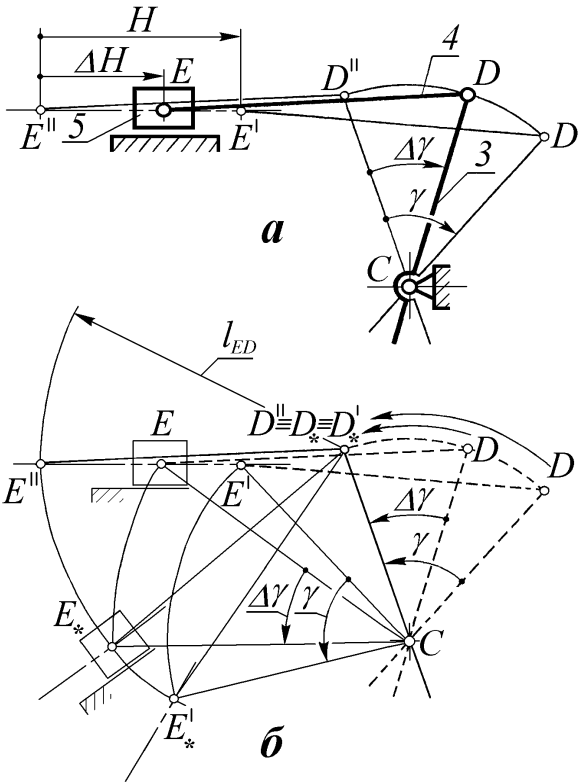


Рис. 1.14. Абсолютний (а) і обернений (б) рух коромислово-повзунної частини механізму

поворот точок D та D^I коромисла, а також точок E та E^I повзуна на ті ж кути $\Delta\gamma$ і γ . Оскільки довжина шатуна не змінюється, то помічаємо, що точки E^{II} , E_* і E^I лежать на віддаленні від точки D^{II} , рівному l_{ED} . Останнім спостереженням надалі варто скористатися.

У вибраному масштабі довжин μ_l на горизонтальній прямій (рис. 1.15) відкладемо послідовно відрізки $\bar{H}$ і $\bar{c}$. Після цього закоординуємо вертикальним відрізком $\bar{b}$ положення точки C .

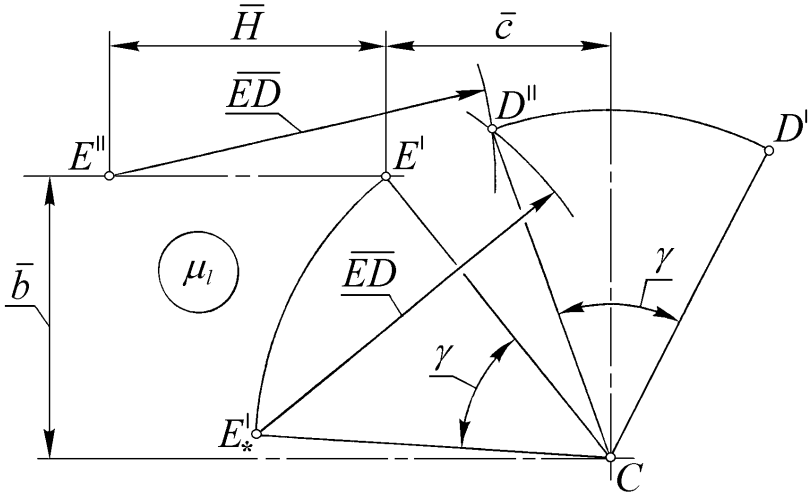


Рис. 1.15. Визначення довжини l_{CD} і розміщення коромисла 3 в крайніх положеннях

Обернувши рух механізму, мислено зупинимо коромисло в крайньому (невідомому) положенні CD^{II} , при цьому точка E^I щодо зупиненого коромисла повернеться в зворотному обертанні коромисла напрямку на заданий кут γ . Обернене положення точки E^I позначено зірочкою (E_*^I).

Тепер можемо закоординувати положення точки D^{II} розчином циркуля $\overline{DE} = l_{DE} / \mu_l$ із точок E^{II} і E_*^I .

Шукана довжина l_{DC} буде дорівнювати:

$$l_{DC} = \overline{D^{II}C} \cdot \mu_l.$$

На цьому мета першого етапу синтезу досягнута.

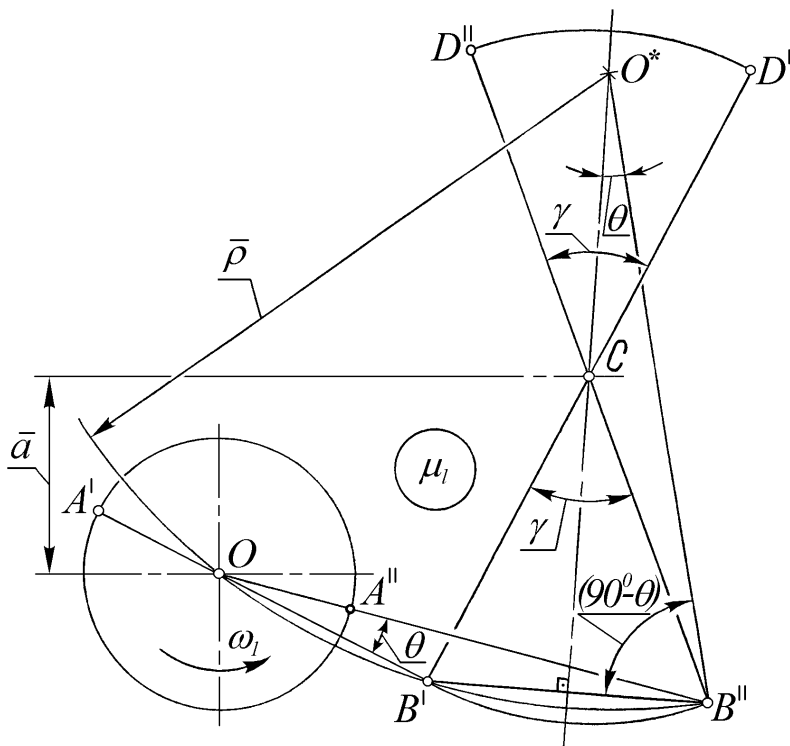


Рис. 1.16. Визначення довжин l_{BC} , l_{AB} , l_{OA} і положення точки O по заданому коефіцієнту K_V

3. Здійснимо подальші побудови, намічені по другому етапі синтезу.

На рис. 1.16 перенесемо результати першого етапу синтезу без зайвих подробиць.

Зобразимо коромисло 3 у двох крайніх положеннях. Для цього продовжимо лінії $D^I C$ і $D^{II} C$ униз на відстані (від точки C) CB^I та CB^{II} , обчислені відповідно до заданого відношення DC/BC .

Для відшукування положення точки O механізму скористаємося заданим значенням коефіцієнта зміни швидкості K_V .

За формулою (1.12) обчислимо величину допоміжного кута θ^0 , під яким із точки O будуть спостерігатися точки B^I і B^{II} :

$$\theta^0 = 180^\circ \frac{K_\omega - 1}{K_\omega + 1}.$$

Таким же чином, як це робилося при вирішенні задачі 1.1, скористаємося допоміжною окружністю радіуса $\bar{\rho}$ з центром у точці O^* , закоординованої на бісектрисі кута γ променем, що йде з точки B^{II} під кутом $(90^\circ - \theta^0)$ до лінії $B^I B^{II}$.

Радіусом $\bar{\rho} = \overline{O^* B^{II}}$ через точки B^I і B^{II} проведемо дугу допоміжної окружності до перетинання з прямою, що йде на відстані $\bar{a} = a/\mu_l$ від горизонталі, проведеної через точку C . Одержана точка перетинання і буде шуканою точкою O , з якої точки B^I і B^{II} будуть видні під кутом θ .

З'єднаємо прямими лініями точку O з точками B^I і B^{II} .

Тепер можемо точно так само, як це було зроблено при вирішенні задачі 1.1, знайти довжини l_{OA} кривошипа 1 і l_{AB} шатуна 2. Для цього віднімемо графічно з відрізка OB^{II} відрізок OB^I . У результаті одержимо відрізок $2OA$. Проведемо радіусом $\overline{OA}$ із точки O (як із центру) окружність, на якій відшукаємо точки A^I і A^{II} .

Остаточню знайдемо

$$l_{OA} = \overline{OA} \cdot \mu_l,$$

$$l_{AB} = \overline{A^I B^I} \cdot \mu_l.$$

5. Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу метричного синтезу важільних механізмів у загальній постановці.
2. Назвіть приклади геометричних, кінематичних і динамічних умов метричного синтезу важільних механізмів.
3. Які різновиди плоского шарнірного чотириланкового механізму Вам відомі?
4. Доведіть теорему Грасгофа про існування єдиного кривошипа чотириланкового шарнірного механізму.

5. Сформулюйте умови існування двокривошипного і двокоромислового чотириланкового шарнірного механізму.

6. Що таке коефіцієнт зміни швидкості важільного механізму?

7. Виведіть формулу для визначення величини коефіцієнта зміни швидкості на прикладі кривошипно-коромислового механізму.

8. Вирішіть в загальному вигляді задачу метричного синтезу кривошипно-коромислового механізму по заданому коефіцієнту зміни швидкості.

9. Визначіть графічно в загальному вигляді значення мінімального і максимального кутів передачі кривошипно-коромислового механізму за заданою його кінематичною схемою.

10. Визначіть в загальному вигляді довжини кривошипа і шатуна, а також ексцентриситет кривошипно-повзунного механізму за заданими коефіцієнтом зміни швидкості і співвідношенням довжин шатуна і кривошипа.

11. Виконайте в загальному вигляді метричний синтез кривошипно-кулісного механізму за заданими ходом вихідної ланки і коефіцієнтом зміни швидкості.

12. Проілюструйте застосування метода обернення руху на прикладі метричного синтезу важільного механізму.

13. Як визначити масштаб лінійних розмірів ланок при метричному синтезі важільних механізмів?

Лекція 4

Тема: Кінематичний аналіз механізмів

- Зміст: 1. Задачі кінематичного аналізу.
2. Аналітичний метод кінематичного аналізу.
3. Графічний метод кінематичного аналізу.
4. Контрольні запитання.

1. Задачі кінематичного аналізу

Кінематичний аналіз механізму включає такі **задачі**:

- 1. Побудова положень механізму (як правило суміщених) на його кінематичній схемі.*
- 2. Визначення траєкторій руху будь-яких точок ланок механізму.*
- 3. Визначення крайніх положень вихідної ланки, а також умов провертання (існування) кривошипа.*
- 4. Визначення лінійних швидкостей і прискорень будь-яких точок ланок механізму.*
- 5. Визначення кутових швидкостей і прискорень ланок механізму.*
- 6. Визначення відносних лінійних і кутових швидкостей точок і ланок механізму.*

Задачу кінематичного аналізу можна вирішувати з переважанням або аналітичних розрахунків, або графічних побудов. У навчальному процесі вигідно відрізняються графічні та графоаналітичні методи кінематичного аналізу механізмів. Вони мають наочність, легко засвоюються, мають точність, характерну для інженерних розрахунків (похибка, як правило, не перевищує 5%). Нижче цим методам буде віддана перевага.

Графічні методи можуть бути алгоритмізовані для машинного використання. У цьому випадку інженер - користувач ЕОМ вирішує задачі усвідомлено, володіючи вихідним ручним методом рішення задачі. Машина тільки прискорює одержання результатів і позбуває інженера-конструктора від рутинної праці. Користувач ЕОМ, який вирішує задачу формально і не володіє сам графічними навичками, може застосовувати тільки стандартні програми для стандартних випадків і не може вести діалог з машиною, оптимізувати рішення, інтерпретувати отримані результати, розвивати програму розрахунку.

Аналітичні методи рішення задач більш трудосмні, потребують спеціальних математичних знань, ненаочні. У навчальній практиці вони знайшли обмежене застосування, що вплинуло і на зміст даного навчального посібника. Позитивним боком аналітичних методів кінематичного аналізу

механізмів є їхня висока точність. Цим і виправдовується широке застосування аналітичних розрахунків в окремих специфічних випадках.

Особливо ефективні аналітичні методи в сполученні з застосуванням обчислювальної техніки.

2. Аналітичний метод кінематичного аналізу

Проілюструємо аналітичний і графічний методи кінематичного аналізу на задачі визначення закону руху повзуна аксіального (центрального) кривошипно-повзунного механізму.

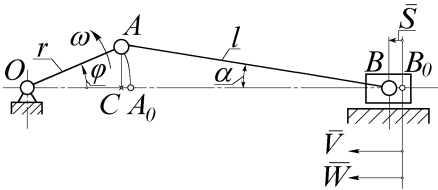
Будемо вважати відомими:

$l_{OA}=r$ - довжина кривошипа;

$\frac{r}{l} = \lambda$ (звичайно $\lambda = \frac{1}{5} \dots \frac{1}{4}$), де

$l = l_{AB}$ - довжина шатуна;

$\omega = \text{const}$ - постійна кутова швидкість обертання кривошипа.



Зобразимо кінематичну схему механізму в довільному положенні (рис. 2.1).

Тому що $\omega = \text{const}$, маємо $\varphi = \omega \cdot t$.

Далі з рисунка знайдемо

Рис. 2.1. Кривошипно-повзунний механізм

$$\begin{aligned} S &= OB_0 - OB = \\ &= (r+l) - (OC+CB) = \\ &= (r+l) - (r \cdot \cos \varphi + l \cdot \cos \alpha). \end{aligned}$$

Зауважимо, що кут α нахилу шатуна залежить від λ і φ .

Знайдемо $\cos \alpha$ у такий спосіб.

З рисунка очевидно, що

$$AC = r \cdot \sin \varphi = l \cdot \sin \alpha,$$

звідси

$$\sin \alpha = \frac{r}{l} \cdot \sin \varphi = \lambda \cdot \sin \varphi.$$

Тому що $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, одержимо $\cos \alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi}$.

З урахуванням отриманого виразу запишемо точну функцію

$$S = r(1 - \cos \varphi) + l \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right). \quad (2.1)$$

Для обчислення швидкості V і прискорення W повзуна необхідно продиференціювати функцію (2.1) за часом двічі.

З теоретичної механіки відомо, що

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \omega,$$

де $\frac{dS}{d\varphi}$ - аналог швидкості.

Відповідно

$$W = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \omega = \frac{d^2S}{d\varphi^2} \cdot \omega^2,$$

де $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$ - аналог прискорення.

Якщо ж $\omega \neq const$, то тоді

$$W = \frac{d^2S}{d\varphi^2} \cdot \omega^2 + \varepsilon \cdot \frac{dS}{d\varphi}.$$

Диференціювання точної функції S (2.1) сполучене з труднощами, викликаними наявністю в ній радикала. Для спрощення розрахунків звичайно радикал розкладається в ряд, наприклад, по функції бінома Ньютона.

Запишемо

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi} = (1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = (1 - \chi)^{\frac{1}{2}},$$

де для спрощення подальших виразів позначене як $\chi = \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi$.

Розкладання функції $(1 - \chi)^{\frac{1}{2}}$ в ряд виглядає в такий спосіб

$$(1 - \chi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\chi - \frac{1}{8}\chi^2 - \frac{1}{16}\chi^4 - \dots.$$

При рішенні інженерних задач звичайно обмежуються двома першими членами розкладання, тобто $(1 - \chi)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\chi$.

Насамперед оцінимо похибку наближеної функції S , яку можна одержати після підстановки у формулу (2.1) останнього виразу.

Тому що відкинуті третій і наступні, які швидко убивають, члени розкладання радикала в ряд по біному Ньютона, то з високою точністю

можна стверджувати, що максимальна абсолютна похибка наближеної функції S не перевищує величини третього члена ряду

$$\frac{l}{8} \chi^2 = \frac{l}{8} \lambda^4 \cdot \sin^4 \varphi, \text{ помноженого на довжину шатуна } l.$$

Тому що $\lambda = \frac{r}{l} \approx \frac{l}{4}$, а $\sin^4 \varphi$ не перевищує 1, то максимальна похибка наближеної функції S буде

$$\Delta S \approx l \cdot \frac{1}{8} \chi^2 = l \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \right)^4 = l / 2048.$$

При цьому відносна похибка $\Delta S\%$ наближеної функції S буде

$$\Delta S\% = \frac{\Delta S}{l} \cdot 100\% \approx 0,2\%.$$

Така відносна похибка сумірна з відносною деформацією шатуна під максимальним навантаженням у межах пружності і нею можна зневажити.

З урахуванням сказаного вище наближене значення функції S буде

$$S = r(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} l \lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi$$

або з урахуванням $l \lambda^2 = l \cdot \frac{r^2}{l^2} = r \cdot \frac{r}{l} = r \lambda$

$$S = r(1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda \cdot \sin^2 \varphi). \quad (2.2)$$

Шляхом диференціювання функції (2.2), з огляду на те, що $\varphi = \omega t$ знайдемо

$$V = r \omega \left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right). \quad (2.3)$$

Шляхом диференціювання функції (2.3) отримаємо

$$W = r \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (2.4)$$

Проаналізуємо отримані функції $S = f_1(\varphi)$ (2.2);

$$V = f_2(\varphi) \text{ (2.3) і } W = f_3(\varphi) \text{ (2.4).}$$

Функція швидкості повзуна V (2.3) приблизно являє собою суму (різницю) двох гармонік.

Перша гармоніка має кругову частоту ω , а друга - 2ω .

Амплітуда другої гармоніки при $\lambda = \frac{1}{4}$ у вісім разів менше амплітуди першої гармоніки, тому для аксіального кривошипно-повзунного механізму відмінність перебігу функції V у першій половині періоду і в другій половині періоду мало помітна (див. рис. 2.26).

Недосвідчене око часто при побудові функції V (2.2) приймає її просто за синусоїду, але це, звичайно, не так. Насправді це періодична функція, що є сумою гармонік із круговими частотами, що подвоюються, і зі швидко збутними амплітудами.

Функція прискорення повзуна W (2.4) також приблизно являє собою суму (різницю) двох гармонік із круговими частотами ω і 2ω , але амплітуди їх уже більш близькі. Відмінність амплітуд тут кратна λ , і при значенні $\lambda = \frac{1}{4}$ амплітуди гармонік відрізняються тільки в чотири рази.

Крім того, гармоніки знаходяться у фазі і протифазі в мертвих положеннях повзуна, тобто там, де прискорення екстремальні (див. рис. 2.22). У верхній мертвій точці повзуна амплітуди складаються, а в нижній мертвій точці - віднімаються.

При $\lambda = \frac{1}{4}$ прискорення W повзуна у верхній мертвій точці більше ніж у нижній мертвій точці приблизно в 1,67 разів.

Справді, якщо прийняти амплітуду першої гармоніки за I , то відношення прискорень повзуна в мертвих положеннях буде дорівнювати

$$\frac{I + \lambda}{I - \lambda} = \frac{I + 0,25}{I - 0,25} = 1,666(6)...$$

Така відмінність дуже помітна, що часто викликає в недосвідченого спеціаліста подив.

Якщо, наприклад, потрібно моделювати гармонійні коливання за допомогою кривошипно-повзунного механізму, то бажано забезпечити $\lambda \rightarrow 0$. Прийняте в конструкції значення відношення λ повинно забезпечувати необхідну малість другої гармоніки в порівнянні з першою. Практичний вибір λ , таким чином, залежить від постановки задачі, тобто, від допустимого відхилення функції W від гармонійної.

Тепер зробимо графічне рішення цієї ж задачі методом кінематичних діаграм.

2.2. Графічний метод

Побудуємо в масштабі кінематичну схему аксіального кривошипно-повзунного механізму в 12 співміщених положеннях (рис. 2.2*a*).

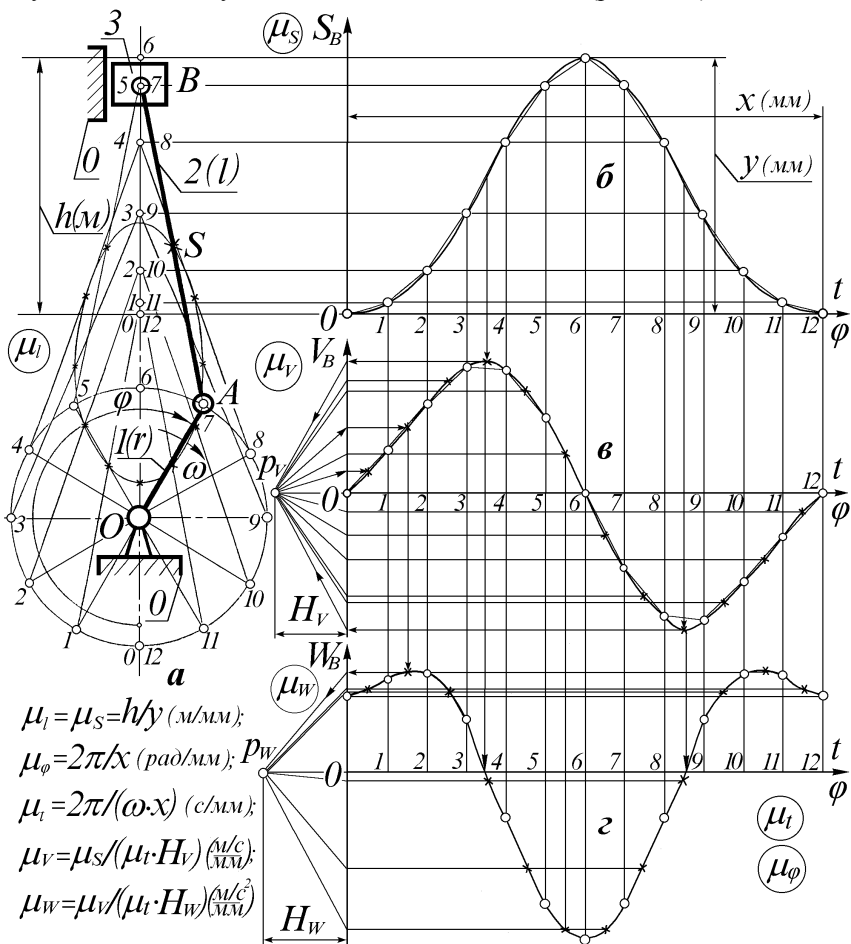


Рис. 2.2. Побудова кінематичних діаграм повзуна кривошипно-повзунного механізму

Розбивка траєкторії точки B на 12-ть положень дозволяє побудувати графік залежності $S_B = f(\varphi)$. Взаємозв'язок графіка S_B і кінематичної схеми в 12-ти співміщених положеннях видний з рис. 2(**a** і **б**). Масштаби

довжин і переміщень прийняті, для спрощення, рівними. При цьому максимальна ордината графіка переміщень

$$y=2OA.$$

Відрізок x обраний довільно. Бажано, щоб число x було кратне числу 360. Це спрощує розбивку відрізка x на будь-яке число рівних частин, що відповідають $\Delta\varphi$ у градусах. В аналізованому прикладі таких частин 12 (по числу положень механізму на кінематичній схемі). В інженерних розрахунках часто розглядають 24 або 36 положень механізму.

Графіки V_B (рис. 2.26) і W_B (рис. 2.27) отримані за допомогою подвійного графічного диференціювання графіка S_B (рис. 2.26).

В основу графічного диференціювання покладено геометричний смисл похідної. З математики відомо, що геометрично похідна є тангенсом кута нахилу дотичної в обраній точці диференціювання первородної функції, заданої графічно.

Розглянемо графічне диференціювання функції S_B . Воно виконується в такій послідовності:

1. Проводимо хорди (січні) по ділянках графіка S_B : 0 - 1; 1 - 2; 2 - 3 і т. д.

2. Приймаємо ці хорди відповідними по нахилу (тобто, паралельними) дотичним до графіка S_B в серединях інтервалів 0 - 1; 1 - 2; 2 - 3 і т. д. Це допущення вносить певну похибку, яка буде тим меншою, чим на більше число інтервалів розбитий графік S_B .

На ділянках, де спостерігаються найбільш круто нахилені хорди додатного і від'ємного напрямків, будемо мати у середніх точках інтервалів найбільші додатне і від'ємне значення похідної, тобто V_B .

3. Вибираємо смугу на кресленні, на якій повинен розташуватися графік V_B .

На її верхньому обрізі намічаємо точку, що відповідає середині інтервалу із найбільш круто нахиленою хордою додатного напрямку графіка S_B .

На нижньому обрізі смуги майбутнього графіка V_B намічаємо точку, що відповідає середині інтервалу із самою круто нахиленою хордою від'ємного напрямку графіка S_B .

Зносимо ці точки горизонтальними прямими на вісь графіка V_B . Перераховані вище графічні побудови позначені стрілками на рис. 2.26.

4. З верхньої і нижньої точок на осі V_B проводимо промені назустріч один одному в напрямках, паралельних найбільш круто нахиленим хордам додатного і від'ємного напрямків графіка S_B . Пересічення променів координує допоміжний полюс p_V , який дозволяє визначити значення V_B в серединах усіх 12-ти інтервалів в однім загальнім масштабі μ_V , формула для визначення якого записана на полі рис. 2.2.

5. Послідовно знаходимо значення величин V_B у масштабі μ_V для середин всіх інтервалів.

Наприклад, у середині інтервалу 0 - 1 ординату V_B знайдемо, провівши з полюса p_V промінь (до пересічення з віссю V_B) паралельно хорді інтервалу 0 - 1 графіка S_B .

Точно так же знайдемо ординату V_B для середин всіх інших інтервалів.

Знайдені ординати V_B в серединах усіх інтервалів позначені хрестиками. З'єднаємо всі ці точки-хрестики плавною кривою, що йде з початку координат і закінчується в 12-ой точці на осі абсцис графіка V_B .

При цьому екстремуми функції V_B виявляться поруч із найвищими і найнижчими хрестиками, першими нанесеними на верхньому і нижньому обрізах вибраної для графіка V_B смуги, і навіть вийдуть на декілька міліметрів за межі цієї смуги.

Нульові значення V_B спостерігаються в положеннях 0, 6 і 12, тобто, у так званих мертвих положеннях механізму.

Тепер можна приступити до другого графічного диференціювання. Подібним чином продиференціювавши графік V_B , одержимо графік W_B (рис. 2.2г). Всі графічні прийоми другого диференціювання в точності повторюють прийоми першого диференціювання. Бажано залишити ті ж інтервали диференціювання, для чого необхідно відновити ординати графіка V_B у вузлах 1, 2, 3 і т. д., а потім провести хорди на ділянках 0 - 1; 1 - 2; 2 - 3 і т. д. Нульові значення графіка W_B спостерігаються в положеннях механізму, які відповідають максимальним швидкостям повзуна на прямому й зворотному ходах. Цей взаємозв'язок позначено вертикальними стрілками між рис. 2.2 (в і г).

Слід зазначити, що кінематичні діаграми повзуна, отримані за допомогою тільки графічних побудов, мають відносно великі похибки.

Похибка графіка S_B визначається тільки неточністю побудови кінематичної схеми співмішених положень механізму. Навіть неточність розбивки траєкторії точки A кривошипа спричиняє за собою великі похибки графіка S_B . Недосвідчений кресляр може допустити й інші неточності (наприклад, недотримання сталості довжини шатуна AB і ін.).

Велике значення для точності побудови графіка S_B має також число положень механізму. Як уже відзначалося, для задовільної точності інженерних графічних побудов слід приймати число положень механізму рівним 24 або навіть 36.

У навчальних курсових проектах звичайно це число дорівнює 12. У результаті похибка графіка S_B в деяких точках може досягати 5%.

Графічне диференціювання також вносить свої додаткові похибки.

Так, нахил хорди приймається за нахил дотичної до графіка в середній точці інтервалу, але це не зовсім так. У результаті похибка графіка V_B може в окремих точках досягати 10%, а похибка графіка W_B - навіть до 20%.

Настільки висока похибка кінематичних діаграм, отриманих за допомогою графічного диференціювання, обмежує їхнє використання при точних інженерних розрахунках. Проте, простота і наочність даного методу має велике значення в навчальному процесі. Більш точно графіки S_B , V_B і W_B можна розрахувати і побудувати по залежностях (2.2; 2.3; 2.4).

У інженерній практиці значно частіше метод кінематичних діаграм використовується при синтезі механізмів.

Звичайно задаються графіком аналога прискорень вихідної ланки. Потім, застосовуючи графічне інтегрування, одержують графіки аналога швидкості і переміщення вихідної ланки механізму.

Графічне інтегрування виконується в точно зворотному диференціюванню порядку (див. приклад графічного інтегрування при синтезі кулачкових механізмів в [8] - розділ 3).

Як не парадоксально, але графічне інтегрування можна виконати зі значно більшою точністю, ніж диференціювання. Пояснення цьому міститься в тому факті, що геометрично інтеграл означає площу під (або над) графіком у межах інтегрування. А площі криволінійних трапецій по інтервалах можна з високою візуальною точністю замінити площами прямокутників. Проілюструємо це на прикладі (рис. 2.3).

Як очевидно з рис. 2.3 у межах кожного інтервалу нескладно накреслити прямокутник, рівновеликий по площі з криволінійною трапецією. Для цього лише необхідно щоб у межах кожного інтервалу площі, позначені

знаками $\oplus$, були рівні площам, позначеним знаком $\ominus$. Точне ж визначення площ прямокутників по інтервалах не має великої труднощі.

Дана властивість інтеграла дозволяє при графічному інтегруванні зберігати похибку побудов у межах 5%, тобто, у межах узвичайної точності інженерних розрахунків.

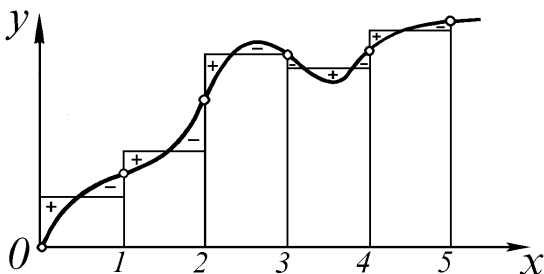


Рис. 2.3. Визначення площ криволінійних трапецій

Адже приблизно 5%-ний розкид мають довідкові дані характеристик міцності матеріалів. Навантаження на ланки механізму також визначаються приблизно з такою ж похибкою.

Тому 5%-ний рубіж похибки при кінематичних розрахунках не порушує загальної похибки аналізу і синтезу механізмів.

Інша справа, якщо вирішується задача, наприклад, дослідницького характеру, із заздалегідь установленим рівнем допустимої похибки значно нижче 5% (іноді значно нижче 1%). У цьому випадку ні графічне інтегрування, ні, тим більше, графічне диференціювання неприйнятні. Задачу тоді слід вирішувати аналітичними методами.

4. Контрольні запитання

1. Які задачі включає кінематичний аналіз механізмів?
2. Які існують методи кінематичного аналізу механізмів? Які їхні позитивні якості і недоліки?
3. Що називається аналогом швидкості й аналогом прискорення? Як аналоги зв'язані зі швидкістю і прискоренням?
4. Який геометричний зміст похідної і інтеграла? Як це використовується при графічному диференціюванні й інтегруванні?
5. Чому точність при графічному інтегруванні вища, ніж при графічному диференціюванні?
6. Опишіть кінематичний аналіз механізму методом кінематичних діаграм (на прикладі).
7. Визначте закон руху повзуна центрального (аксіального) кривошипно-повзунного механізму аналітичним методом.

Лекція 5

Тема: Кінематичний аналіз важільних механізмів за графо-аналітичним методом планів

Зміст: 1. Загальна характеристика методу.

2. Побудова планів для початкового механізму.
3. Теорема подібності планів.
4. Побудова планів для груп Ассура.
5. Контрольні запитання.

1. Загальна характеристика методу

Розглянемо графоаналітичний метод кінематичного аналізу - метод планів швидкостей і прискорень.

Даний метод, сполучаючи графічні побудови з розрахунком деяких проміжних величин, дозволяє істотно підвищити точність кінематичного аналізу.

Похибка методу планів швидкостей і прискорень, як правило, значно менше 5%.

При високій якості графічних побудов можна домогтися похибки, що не перевищує 1%. А при побудовах в AutoCAD можна забезпечити необмежено малу похибку.

План швидкостей є нашаруванням векторних трикутників, сторонами яких є вектори абсолютних або відносних швидкостей точок ланок механізму в однім його положенні.

Практично те ж саме можна сказати про план прискорень (тільки замість слова "швидкостей" у попередньому абзаці треба читати "прискорень", а замість слова «трикутників» - читати «багатокутників»).

Причому всі вектори абсолютних швидкостей починаються в одній точці, яку прийнято називати полюсом плану швидкостей.

Всі вектори відносних швидкостей рухомих точок механізму розташовані в периферійній частині плану швидкостей.

Те ж саме можна сказати про план прискорень.

Недоліком методу є необхідність побудови множини планів для n положень механізму, де звичайно число $n = 12, 24, 36...$

Беззаперечною перевагою плану швидкостей або прискорень є те, що план містить повну інформацію про швидкості або прискорення усіх без винятку точок механізму в даному його положенні.

Використовуючи вектори відносних швидкостей і відносних дотичних прискорень можна визначити величини і напрямки кутових швидкостей і кутових прискорень ланок механізму в усіх його положеннях.

Покажемо побудову планів швидкостей і прискорень на прикладах рішення задач кінематичного аналізу механізмів.

2. Побудова планів для початкового механізму

Побудуємо план швидкостей і план прискорень кривошипа початкового механізму (рис. 2.4) за заданими його кутової швидкості і кутовому прискоренню в положенні, показаному на кінематичній схемі, накреслений в масштабі $\mu_l = 10^{-3} \text{ м/мм}$; $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon = 50 \text{ с}^{-2}$.

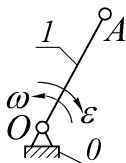


Рис. 2.4. Схема кривошипа

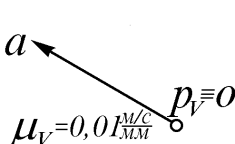


Рис. 2.5. План швидкостей кривошипа

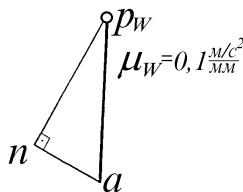


Рис. 2.6. План прискорень кривошипа

1. Знайдемо довжину кривошипа

$$l_{OA} = \overline{OA} \cdot \mu_l = 30 \cdot 10^{-3} = 0,03 \text{ м, де } \overline{OA} = 30 \text{ мм.}$$

Вектор швидкості $\overline{V}_A$ направлений по дотичній до траєкторії точки A в заданому положенні убік кутової швидкості ω .

Зобразимо вектор швидкості $\overline{V}_A$ на плані швидкостей, позначивши його початок точкою p_V (полюс плану швидкостей), а кінець - точкою a (рис. 2.5). Направлено вектор перпендикулярно OA вліво вгору.

Масштаб плану швидкостей можна розрахувати по формулі $\mu_V = V_A / |p_V a|$.

Очевидно, що можна заздалегідь задатися або довжиною відрізка $|p_V a|$, або величиною масштабу μ_V .

Виберемо, наприклад, довжину відрізка $|p_V a| = 30 \text{ мм}$, тоді масштаб плану швидкостей буде

$$\mu_V = V_A / |p_V a| = 0,3 / 30 = 0,01 \text{ (м/с)/мм.}$$

Відзначимо, що бажано мати масштаб у вигляді раціонального числа з одною значущою цифрою. Для цього варто підбирати довжину відрізка $|p_V a|$ кратною відомій швидкості (у даному прикладі - V_A).

Зауважимо, що точка O кривошипа має швидкість $V_O = 0$. Отже і довжина вектора $\overline{V_O}$ нульова. Це значить, що нерухома точка O буде мати на плані швидкостей свій відбиток - точку O , що знаходиться в полюсі плану швидкостей. Це буде стосуватися надалі також і інших нерухомих точок механізмів.

Ще одне зауваження стосується стрілок на плані швидкостей. Стрілки можна вважати "архітектурною" надмірністю, тому що вони не несуть практичної інформації.

Справді, усі вектори абсолютних швидкостей починаються в полюсі і закінчуються малими буквеними відображеннями точок механізму, а відносні швидкості мали б стрілки з двох кінців, що також не давало б додаткової інформації.

Надалі на планах швидкостей і на планах прискорень стрілки ставити не будемо.

На цьому план швидкостей кривошипа можна вважати побудованим.

4. Побудуємо план прискорень.

З теоретичної механіки відомо, що при нерівномірному обертанні точки по криволінійній (тут - окружній) траєкторії, її прискорення розкладається на дві взаємно перпендикулярні складові: нормальне (або доцентрове) прискорення, спрямоване по нормалі до траєкторії убік її центру кривизни (тут - по радіусу до центру окружності) і дотичне (або тангенціальне) прискорення, спрямоване по дотичній до траєкторії убік зміни (збільшення або зменшення) лінійної швидкості руху точки. Дотичне лінійне прискорення зв'язане з напрямком кутового прискорення.

На підставі вищесказаного можна записати векторне рівняння:

$$\overline{W}_A = \overline{W}_A^n + \overline{W}_A^\tau,$$

де $W_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA}$ - нормальне прискорення точка A ;

$W_A^\tau = \varepsilon \cdot l_{OA}$ - дотичне прискорення точки A .

Знайдемо:

$$W_A^n = \omega^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0,03 = 3 \text{ м/с}^2;$$

$$W_A^\tau = \varepsilon \cdot l_{OA} = 50 \cdot 0,03 = 1,5 \text{ м/с}^2.$$

Розрахуємо масштаб плану прискорень, задавшись, наприклад, довжиною вектора нормального прискорення $|p_W n| = 30 \text{ мм}$,

$$\mu_W = W_A^n / |p_W n| = 3/30 = 0,1 \text{ (м/с}^2\text{)}/\text{мм}.$$

Тоді вектор дотичного прискорення буде мати в обраному масштабі довжину

$$|na| = W_A^t / \mu_W = 1,5 / 0,1 = 15 \text{ мм}.$$

Направимо вектор нормального прискорення уздовж AO від точки A до точки O . На плані прискорень цей вектор зображений відрізком $|p_W n|$ (рис. 2.5).

З кінця цього вектора встановимо перпендикуляр і відкладемо відрізок $|na|$ у напрямку вправо вниз (тобто у напрямку, зв'язаному з напрямком кутового прискорення).

$$\text{Остаточно знайдемо } W_A = |p_W a| \cdot \mu_W = 34,5 \cdot 0,1 = 3,45 \text{ м/с}^2.$$

Звертаємо увагу читача на те, що на планах швидкостей і прискорень прийнято абсолютні вектори проводити основними лініями, а вектори відносних швидкостей і прискорень - тонкими лініями.

3. Теорема подібності планів

Знайдемо швидкість точки C шатуна ABC (рис. 2.9), який знаходиться в плоскопаралельному русі, за допомогою побудови плану швидкостей. Положення шатуна, масштаб μ_l , величини і напрямки швидкостей руху двох точок A і B шатуна відомі з попередніх побудов: $\mu_l = 10^{-2} \text{ м/мм}$; $V_A = 10 \text{ м/с}$; $V_B = 20 \text{ м/с}$.

1. Знайдемо довжини

$$l_{AB} = \overline{AB} \cdot \mu_l = 50 \cdot 10^{-2} = 0,5 \text{ м};$$

$$l_{AC} = \overline{AC} \cdot \mu_l = 40 \cdot 10^{-2} = 0,4 \text{ м};$$

$$l_{BC} = \overline{BC} \cdot \mu_l = 30 \cdot 10^{-2} = 0,3 \text{ м}.$$

2. Запишемо систему векторних рівнянь швидкості руху точки C :

$$\overline{V}_C = \overline{V}_A + \overline{V}_{C/A},$$

$$(\perp AC)$$

$$\overline{V}_C = \overline{V}_B + \overline{V}_{C/B}.$$

$$(\perp BC)$$

Бачимо, що в системі рівнянь чотири загальні невідомі і вона може бути вирішена.

Виберемо $\mu_V = 0,5 \text{ (м/с)}/\text{мм}$, тоді

$$|p_V a| = V_A / \mu_V = 10 / 0,5 = 20 \text{ мм},$$

$$|p_V b| = V_B / \mu_V = 20 / 0,5 = 40 \text{ мм}.$$

3. Будуємо план швидкостей.

Для цього відкладемо із довільно вибраного полюса p_V (рис. 2.10) відрізки $|p_V a|$ і $|p_V b|$, а з їхніх кінців проведемо лінії, перпендикулярні сторонам трикутника ABC , тобто: із точки a - перпендикуляр до AB , а з точки b - перпендикуляр до BC . Перетинання цих перпендикулярів і буде точкою c плану швидкостей:

$$V_C = |p_V c| \cdot \mu_V = 25 \cdot 0,5 = 12,5 \text{ м/с}.$$

З'єднаємо також на плані швидкостей точки a і b . Зауважимо, що $\triangle abc$ подібний $\triangle ABC$, тому що всі сторони $\triangle abc$ перпендикулярні відповідним сторонам $\triangle ABC$.

Звідси
знайти

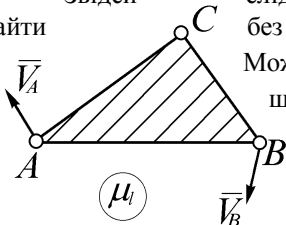


Рис. 2.9. Схема шатуна в плоскопаралельному русі

слідuje, що швидкість точки C шатуна можна було б без рішення вищенаведених векторних рівнянь руху. Можна було б відразу на стороні ab плану швидкостей побудувати $\triangle abc$, подібний $\triangle ABC$. Для цього можна було б знайти з рівності відношення відповідних сторін подібних трикутників $ab / AB = bc / BC = ac / AC$ невідомі відрізки bc і ac :

$$bc = BC \cdot (ab / AB);$$

$$ac = AC \cdot (ab / AB).$$



Рис. 2.10. План швидкостей шатуна

Побудови можна виконати в такій послідовності (рис. 2.11).

З вибраного полюса p_V проводимо відрізки $|p_V a|$ і $|p_V b|$.

Потім із точки a розчином циркуля ac робимо дугову засічку.

З точки b розчином циркуля bc також робимо дугову засічку. Утвориться дві точки

перетинання засічок: c і c^* .

Одна з них дає шукану

вершину c $\triangle abc$, а інша

помилкову вершину c^*

$\triangle abc^*$.

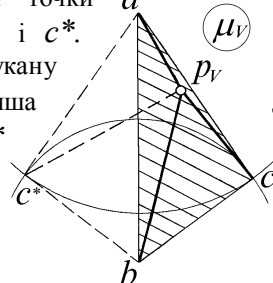


Рис. 2.11. До теореми подібності планів V

Неправильність точки c^* доводиться тією обставиною, що обхід вершин трикутника $\triangle ABC$ і $\triangle abc^*$ йде в протилежних напрямках. Істинна вершина c $\triangle abc$ відповідає збіжному напрямку обходу вершин $\triangle ABC$ і $\triangle abc$.

Приведемо тут без додаткового доказу теорему подібності планів швидкостей:

«План відносних швидкостей точок будь-якої ланки являє собою фігуру, подібну фігурі, утвореній цими ж точками на ланці, і повернену відносно останньої на 90° ».

Надалі ми будемо користуватися теоремою подібності планів швидкостей. Для будь-якої ланки, що має декілька позначених точок, достатньо спочатку знайти швидкості будь-яких двох точок, а швидкості інших точок легко можна знайти, побудувавши план відносних швидкостей усіх точок цієї ланки по його подібності фігурі самої ланки.

Також має місце теорема подібності планів прискорень:

«План відносних прискорень точок будь-якої ланки являє собою фігуру, подібну фігурі, утвореній цими ж точками на ланці, і повернену відносно останньої на кут $180^\circ - \beta$ », де

$$\beta = \arctg(\varepsilon / \omega^2),$$

ω - кутова швидкість,

ε - кутове прискорення ланки.

Кут повороту β в даному випадку, як правило, не дорівнює 90° , але це ніяк не ускладнює використання теореми подібності планів прискорень. Тут застосовується та ж послідовність побудов, що описана вище для плану швидкостей.

Теоремою подібності планів прискорень ми також будемо надалі при необхідності користуватися.

4. Побудова планів для груп Ассура

Побудуємо плани швидкостей і прискорень для групи Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду в заданому на схемі положенні (рис. 2.7а) при відомих: $\mu_1 = 10^{-2}$ м/мм; $V_A = 1,0$ м/с; $V_C = 1,5$ м/с; $W_A = 20$ м/с²; $W_C = 15$ м/с². (Напрямки $\bar{V}_A, \bar{V}_C, \bar{W}_A$ і $\bar{W}_C$ показані на схемі).

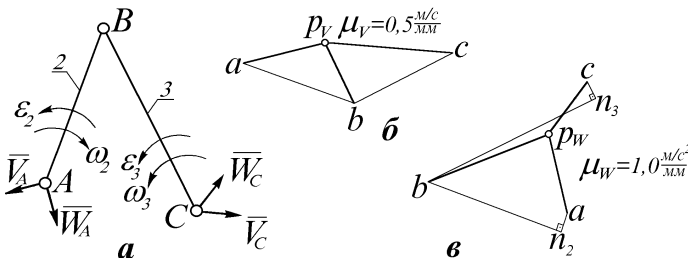


Рис. 2.7. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду

1. Знайдемо довжини ланок:

$$l_{AB} = \overline{AB} \cdot \mu_l = 40 \cdot 10^{-2} = 0,4 \text{ м},$$

$$l_{BC} = \overline{BC} \cdot \mu_l = 50 \cdot 10^{-2} = 0,5 \text{ м}.$$

2. Побудуємо план швидкостей.

Вибираємо місце для полюса плану швидкостей і відкладаємо з полюса p_V (рис. 2.7б), наприклад, у масштабі $\mu_V = 0,05 \text{ (м/с)/мм}$ вектори заданих швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_C$ відрізками

$$|p_V a| = V_A / \mu_V = 1,0 / 0,05 = 20 \text{ мм},$$

$$|p_V c| = V_C / \mu_V = 1,5 / 0,05 = 30 \text{ мм}.$$

Відповідно до системи векторних рівнянь

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A},$$

$$(\perp AB)$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_C + \overline{V}_{B/C};$$

$$(\perp BC)$$

можемо визначити невідомий по величині і напрямку вектор швидкості $\overline{V}_B$.

Справді, кожне з цих двох рівнянь окремо вирішено бути не може, тому що кожне включає по три невідомі. З векторної алгебри відомо, що векторне рівняння вирішується, якщо має не більше двох невідомих.

Умовимося надалі підкреслювати кожний відомий вектор двома тонкими лініями. Якщо у вектора невідома або величина, або напрямок, будемо підкреслювати його одною тонкою лінією.

Якщо вище записані векторні рівняння вирішувати в системі, то вони спільно містять тільки чотири невідомі, і отже, рішення може бути знайдене.

Кожне з двох векторних рівнянь відображається на кресленні векторним трикутником із загальною стороною.

Векторні рівняння вирішуємо в такому порядку. Спочатку відкладаємо з полюса p_V відрізок $|p_V a|$. Потім із точки a плану проводимо пряму лінію (промінь), перпендикулярну ланці AB . Після цього відкладемо з полюса p_V відрізок $|p_V c|$, а з його кінця проведемо пряму, перпендикулярну ланці BC . Перетинання двох останніх променів координує точку b наприкінці шуканого вектора $\bar{V}_B$. Проводимо з полюса відрізок $|p_V b|$ і знаходимо величину швидкості точки B

$$V_B = |p_V b| \cdot \mu_V = 16 \cdot 0,05 = 0,8 \text{ м/с.}$$

Аналогічно знайдемо:

$$V_{B/A} = |ab| \cdot \mu_V = 28 \cdot 0,05 = 1,4 \text{ м/с,}$$

$$V_{B/C} = |cb| \cdot \mu_V = 27 \cdot 0,05 = 1,35 \text{ м/с.}$$

Відносні швидкості $V_{B/A}$ і $V_{B/C}$ дозволяють відшукати величини і напрямки кутових швидкостей ланок:

$$\omega_2 = V_{B/A} / l_{AB} = 1,4 / 0,4 = 3,5 \text{ м/с}^{-1};$$

$$\omega_3 = V_{B/C} / l_{BC} = 1,35 / 0,5 = 2,7 \text{ с}^{-1}.$$

Напрямки ω_2 і ω_3 показані на схемі групи Ассура. Визначені вони уявним переносом векторів $\bar{V}_{B/A}$ і $\bar{V}_{B/C}$ в точку B .

Кожний із цих векторів показує: $\bar{V}_{B/A}$ - напрямок обертання ланки 2 навколо точки A (тобто напрямок ω_2); $\bar{V}_{B/C}$ - напрямок обертання ланки 3 навколо точки C (тобто напрямок ω_3).

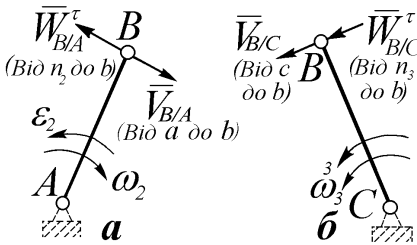


Рис. 2.8. Визначення напрямків ω і ε

3. Будуємо план прискорень.

Для цього спочатку обчислимо нормальні прискорення у відносному русі точки B навколо A і навколо C :

$$W_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = 3,5^2 \cdot 0,4 = 4,9 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{B/C}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC} = 2,7^2 \cdot 0,5 = 3,65 \text{ м/с}^2.$$

Потім запишемо систему векторних рівнянь для прискорення точки B :

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{B/A}^n + \overline{W}_{B/A}^\tau,$$

(Від B до A) ($\perp AB$)

$$\overline{W}_B = \overline{W}_C + \overline{W}_{B/C}^n + \overline{W}_{B/C}^\tau.$$

(Від B до C) ($\perp BC$)

Аналіз системи векторних рівнянь показує, що вона вирішується. Рішення буде мати вигляд двох чотирикутників із загальною стороною $|p_W b|$.

Спочатку виберемо місце для полюса p_W і масштаб плану прискорень $\mu_W = 1 \text{ (м/с}^2\text{)/мм}$.

Потім розрахуємо довжини відрізків, які зображують на плані прискорень відповідні прискорення:

$$|p_W a| = W_A / \mu_W = 20 / 1 = 20 \text{ мм};$$

$$|p_W c| = W_C / \mu_W = 15 / 1 = 15 \text{ мм};$$

$$|an_2| = W_{B/A}^n / \mu_W = 4,9 / 1 = 4,9 \text{ мм};$$

$$|cn_3| = W_{B/C}^n / \mu_W = 3,65 / 1 = 3,65 \text{ мм}.$$

Тепер можна здійснити всі побудови. Напрямки перших двох відомих відрізків задані як напрямки векторів $\overline{W}_A$ і $\overline{W}_C$ на схемі групи Ассура. Відрізок $|an_2|$ відкладається з кінця відрізка $|p_W a|$ у напрямку вектора $\overline{W}_{B/A}^n$ (тобто в напрямку від B до A). Відрізок $|cn_3|$ відкладається в напрямку вектора $\overline{W}_{B/C}^n$ (тобто в напрямку від B до C). З точок n_2 і n_3 проводяться перпендикуляри до відрізків $|an_2|$ і $|cn_3|$, які йдуть у напрямках невідомих по величині векторів $\overline{W}_{B/A}^\tau$ і $\overline{W}_{B/C}^\tau$ до їхнього взаємного перетинання.

Точка перетинання і буде точкою b , тобто кінцем шуканого вектора $\overline{W}_B$, який починається в полюсі p_W плану прискорень.

Обчислимо

$$W_B = |p_W b| \cdot \mu_W = 31 \cdot 1 = 31 \text{ м/с}^2.$$

Отримані з побудов відрізки $|n_2b|$ і $|n_3b|$ відбивають напрямки і величини векторів відносних дотичних прискорень $\overline{W}_{B/A}^\tau$ і $\overline{W}_{B/C}^\tau$:

$$W_{B/A}^\tau = |n_2b| \cdot \mu_W = 34 \cdot 1 = 34 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{B/C}^\tau = |n_3b| \cdot \mu_W = 45 \cdot 1 = 45 \text{ м/с}^2.$$

Останні два вектори, будучи мислено перенесеними в точку B , покажуть відповідно напрямки кутових прискорень ε_2 і ε_3 (рис. 2.8).

Величини ε_2 і ε_3 можна підрахувати по формулах:

$$\varepsilon_2 = W_{B/A}^\tau / l_{AB} = 34 / 0,4 = 85 \text{ с}^{-2};$$

$$\varepsilon_3 = W_{B/C}^\tau / l_{BC} = 45 / 0,5 = 90 \text{ с}^{-2}.$$

Побудуємо в загальному вигляді (тобто без чисельних розрахунків) плани швидкостей і прискорень для групи Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду (рис. 2.12). Вважаємо заданими: положення і розміри ланок групи Ассура на кінематичній схемі; швидкість $\overline{V}_A$ і прискорення $\overline{W}_A$; горизонтальне і нерухоме положення направляючої повзуна xx .

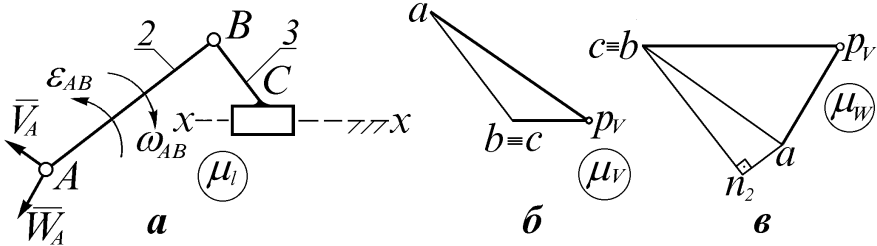


Рис. 2.12. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду

1. Будуємо план швидкостей.

Для цього виберемо місце полюса плану p_V (рис. 2.12б) і з нього проведемо відрізок $|p_Va|$, паралельний вектору $\overline{V}_A$, в обраному масштабі μ_V :

$$|p_Va| = V_A / \mu_V.$$

Запишемо векторне рівняння швидкості руху точки B :

$$\begin{aligned} \underline{\overline{V}}_B &= \underline{\overline{V}}_A + \underline{\overline{V}}_{B/A}. \\ (\parallel xx) \quad (\perp AB) \end{aligned}$$

Аналіз цього рівняння показує, що воно вирішується, тому що містить тільки дві невідомі: величину вектора $\overline{V}_B$ і величину вектора $\overline{V}_{B/A}$.

Знаходимо відрізок $|p_V b|$, що йде паралельно xx , величина якого координується відрізком $|ab|$, який іде в напрямку, перпендикулярному ланці AB . Маємо:

$$\begin{aligned} V_B &= |p_V b| \cdot \mu_V; \\ V_{B/A} &= |ab| \cdot \mu_V; \\ \omega_{AB} &= V_{B/A} / l_{AB}. \end{aligned}$$

Напрямок ω_{AB} знаходимо таким же способом, як і в задачі 2.2.
2. Будуємо план прискорень.

Для цього виберемо місце полюса плану p_W (рис. 2.12б) і з нього проведемо відрізок $|p_W a|$, паралельний вектору $\overline{W}_A$, в обраному масштабі μ_W :

$$|p_W a| = W_A / \mu_W.$$

Запишемо векторне рівняння прискорення точки B :

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{B/A}^n + \overline{W}_{B/A}^\tau.$$

(//xx) (Від B до A) ($\perp AB$)

Аналіз цього рівняння показує, що воно вирішується, тому що містить тільки дві невідомі: величину вектора $\overline{W}_B$ і величину вектора $\overline{W}_{B/A}^\tau$.

Що стосується вектора $\overline{W}_{B/A}^n$, то він може бути знайдений на основі побудови плану швидкостей. Для цього підрахуємо його величину:

$$W_{B/A}^n = \omega^2 \cdot l_{AB}.$$

Напрямок вектора $\overline{W}_{B/A}^n$ відомий: він направлений паралельно AB від точки B до точки A .

Знаходимо відрізки, що зображують на плані прискорень відомі вектори прискорень:

$$\begin{aligned} |p_W a| &= W_A / \mu_W; \\ |a n_2| &= W_{B/A}^n / \mu_W. \end{aligned}$$

Будуємо план прискорень у такій послідовності: відкладаємо з довільно вибраного полюса p_W відрізок $|p_W a|$; із його кінця відкладаємо

відрізок $|an_2|$ (у напрямку від B до A , паралельно AB); із кінця останнього відрізка, тобто із точки n_2 , проводимо перпендикулярну пряму лінію до перетинання з лінією, що йде з полюса p_W паралельно xx .

Точка перетинання останніх двох прямих і є шукана точка b плану прискорень.

Остаточню обчислюємо:

$$\begin{aligned} W_B &= |p_W b| \cdot \mu_W; \\ W_{B/A}^r &= |n_2 b| \cdot \mu_W; \\ \varepsilon_{AB} &= W_{B/A}^r / l_{AB}. \end{aligned}$$

Напрямок ε_{AB} визначаємо так само, як це було зроблено в задачі 2.2.

Побудуємо загальному вигляді (тобто без чисельних розрахунків) плани швидкостей і прискорень для групи Ассура II класу 2-го порядку 3-го виду (рис. 2.13а).

Вважаємо заданими: положення і розміри ланок групи Ассура, вектори швидкостей і вектори прискорень точок приєднання групи (тобто зовнішніх кінематичних пар) - $\overline{V}_{A_2}$; $\overline{W}_{A_2}$; $\overline{V}_{B_3}$; $\overline{W}_{B_3}$.

Раніше ніж приступити до рішення задачі, відзначимо ряд її особливостей:

1. Тому що ланки 2 і 3 утворюють поступальну кінематичну пару, то обов'язково буде дотримуватися умова $\omega_2 = \omega_3$ і $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ (які поки невідомі).

2. Задача буде вирішена, якщо будуть знайдені V і W будь-якої точки будь-якої з ланок, тому що після цього будуть знайдені для цієї ланки ω і ε (загальні для обох ланок).

3. У кожній ланки є своя одна єдина точка, для якої можна знайти V і W . Що це за точки?

Єдина особлива точка ланки 3 - це точка A_3 , а в ланки 2 - це точка B_2 . Тільки лише для цих точок можна записати розв'язувані системи двох векторних рівнянь, що містять усього по чотири загальні невідомі.

Для будь-яких інших точок ланок векторні рівняння ні окремо, ні в системі вирішені бути не можуть, тому що в них утримується число невідомих, більше від допустимого.

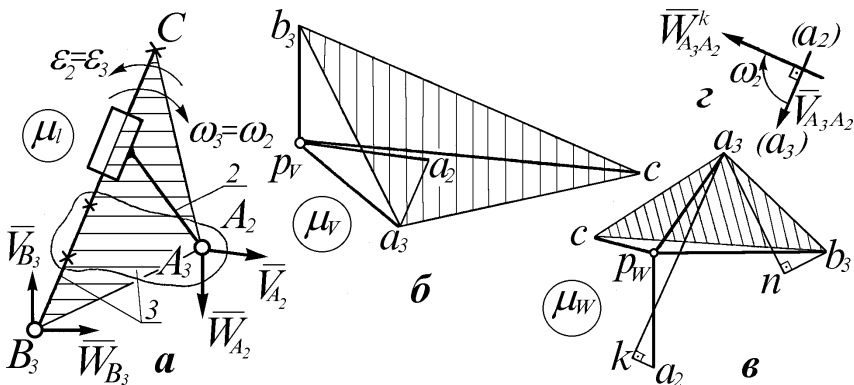


Рис. 2.7. Кінематичний аналіз групи Ассура II класу
2-го порядку 3-го виду

Виберемо для побудов будь-яку одну з цих особливих точок, наприклад, точку A_3 . Точка A_3 показана на рисунку приналежною уявлюваній пластинці, жорстко зв'язаній з ланкою 3. Тоді точки A_3 , B_3 і C ланки 3 утворять заштрихований $\triangle ABC$. Тепер приступимо до рішення задачі.

1. Будуємо план швидкостей.

Для цього виберемо місце полюса плану швидкостей p_V (рис. 2.13б) і з нього проведемо відповідні відрізки $|p_V a_2|$ й $|p_V b_3|$ у напрямку заданих векторів швидкостей $\bar{V}_{A_2}$ і $\bar{V}_{B_3}$. Якби були задані величини швидкостей V_{A_2} і V_{B_3} , тоді треба було б відрізки $|p_V a_2|$ і $|p_V b_3|$ відкласти з розрахунку:

$$|p_V a_2| = V_{A_2} / \mu_V; \quad |p_V b_3| = V_{B_3} / \mu_V.$$

Запишемо систему векторних рівнянь для швидкості точки A_3 , яка належить ланці 3:

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{A_2} + \bar{V}_{A_3 A_2},$$

($\parallel BC$)

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{B_3} + \bar{V}_{A_3/B_3}.$$

($\perp AB$)

Проаналізуємо векторні рівняння.

Вектор $\bar{V}_{A_3}$ невідомий ні по величині, ні по напрямку.

У першому рівнянні вектор $\overline{V}_{A_2}$ заданий, а значить вважаємо відомими і його величину і напрямок, а вектор $\overline{V}_{A_3A_2}$ відомий лише по напрямку. Він направлений паралельно лінії BC .

Справді, якщо уявити нерухомою ланку 2, яка чинить переносний рух, то тоді будемо бачити відносний рух в чистому вигляді.

При цьому точка A_3 буде переміщатися по прямій лінії, паралельній направляючій повзуна, тобто паралельно BC .

В другому рівнянні вектор $\overline{V}_{B_3}$ заданий, а останній вектор $\overline{V}_{A_3/B_3}$ відомий по напрямку - він направлений $\perp A_3B_3$. Уявимо точку B_3 зупиненою, а точці A_3 дозволимо рухатися навколо точки B_3 . Тому що обидві ці точки належать ланці 3, відстань між ними незмінна. Відносний рух точки A_3 навколо B_3 буде здійснюватися у вигляді кругового обертання з центром окружності в точці B_3 і з радіусом окружності, рівним $l_{A_3B_3}$. Отже, вектор $\overline{V}_{A_3/B_3}$ направлений по дотичній до траєкторії відносного руху, або перпендикулярно радіальному напрямку (тобто перпендикулярно лінії A_3B_3).

Аналіз показує, що система рівнянь вирішується. Рішення виконуємо в наступній послідовності.

Проводимо з кінців відрізків $|p_V a_2|$ і $|p_V b_3|$ лінії в зазначених напрямках: із точки a_2 - лінію, паралельну BC , а з точки b_3 - лінію, перпендикулярну A_3B_3 . Перетинання останніх ліній закоординує точку a_3 - кінець вектора швидкості $\overline{V}_{A_3}$ точки A_3 , тоді

$$V_{A_3} = |p_V a_3| \cdot \mu_V.$$

Величину кутової швидкості ланки 3 можна підрахувати по формулі

$$\omega_3 = V_{A_3/B_3} / l_{A_3B_3},$$

$$\text{де } V_{A_3/B_3} = |b_3 a_3| \cdot \mu_V.$$

Вектор $\overline{V}_{A_3/B_3}$, направлений від точки b_3 до точки a_3 на плані швидкостей, будучи перенесеним мислено в точку A_3 , покаже обертання ланки 3 по годинниковій стрілці, що і позначено на схемі групи Ассура.

Тому що поводок на ланці 2 не змінює свого положення відносно повзуна (каменю), то, як уже було сказано вище, $\omega_2 = \omega_3$. Справді ланки 2 і 3 завжди повертаються, незважаючи на їхній відносний рух (сковзання), на

один і той самий кут, похідними якого за часом і будуть кутові швидкості ω_2 і ω_3 .

Для відшукування вектора швидкості $\overline{V}_C$ скористаємося теоремою подібності планів швидкостей (див. задачу 2.3). Використовуючи лінію b_3a_3 , як одну зі сторін Δb_3a_3c , будемо його по подібності з ΔB_3A_3C . Для цього запишемо пропорцію співвідношення сторін подібних трикутників:

$$b_3c / B_3C = a_3c / A_3C = b_3a_3 / B_3A_3.$$

З першого і третього співвідношення знайдемо довжину відрізка $|b_3c|$, а з другого і третього співвідношення - довжину відрізка $|a_3c|$.

З точки a_3 довжиною $|a_3c|$ робимо дугову засічку, а з точки b_3 довжиною $|b_3c|$ координуємо точку c . При цьому стежимо, щоб обхід однойменних точок на ланці 3 і на плані відносних швидкостей збігався по напрямку.

Тепер можемо знайти

$$V_C = |p_{Vc}| \cdot \mu_V.$$

2. Будуємо план прискорень.

План $\overline{W}$ будується майже в такій же послідовності, як і план V .

Виберемо місце для полюса плану прискорень p_W (рис. 2.13б) і проведемо з нього відповідні відрізки $|p_Wa_2|$ й $|p_Wb_3|$ у напрямках, заданих векторами прискорень $\overline{W}_{A_2}$ і $\overline{W}_{B_3}$.

Для особливої точки A_3 , що належить третій ланці, запишемо систему двох векторних рівнянь прискорень:

$$\overline{W}_{A_3} = \overline{W}_{A_2} + \overline{W}_{A_3A_2}^k + \overline{W}_{A_3A_2}^{r'},$$

(//BC)

$$\overline{W}_{A_3} = \overline{W}_{B_3} + \overline{W}_{A_3B_3}^n + \overline{W}_{A_3B_3}^{\tau'}$$

($\perp AB$)

Проаналізуємо ці рівняння.

Вектор $\overline{W}_{A_3}$ невідомий ні по величині ні по напрямку.

У першому рівнянні вектор $\overline{W}_{A_2}$ заданий, а отже відомий і по величині і по напрямку. Вектор $\overline{W}_{A_3A_2}^k$ (прискорення Коріоліса) можна визначити, а отже будемо мати і величину його і напрямок. Останній вектор -

вектор відносного прискорення $\overline{W}_{A_3A_2}^r$ - містить у собі тільки вектор дотичного прискорення $\overline{W}_{A_3A_2}^r$, тому що траєкторія відносного руху точки A_3 є прямою лінією, паралельною BC , отже він направлений уздовж направляючої каменю, тобто паралельно лінії BC , а величина його невідома.

Таким чином у першому рівнянні - три невідомі, і значить одне воно окремо не вирішується.

В другому рівнянні вектор $\overline{W}_{B_3}$ відомий. Вектор $\overline{W}_{A_3/B_3}^n$ можна визначити і по величині і по напрямку на основі побудованого плану швидкостей. Останній вектор $\overline{W}_{A_3/B_3}^r$ перпендикулярний попередньому, а величина його невідома.

Таким чином і в другому рівнянні маємо три невідомі, і одне воно окремо теж не може бути вирішено.

Зате система двох векторних рівнянь вирішується, тому що має усього чотири загальні невідомі.

Визначимо $\overline{W}_{A_3A_2}^k$.

З курсу теоретичної механіки відомо, що

$$\overline{W}_{A_3A_2}^k = 2\overline{\omega}_2^e \times \overline{V}_{A_3A_2}^r.$$

У даній задачі необов'язково відшукувати вектор прискорення Коріоліса як векторний добуток за правилами векторної алгебри - тут достатньо скористатися правилом М. Є. Жуковського. Відповідно до правила Жуковського, величина

$$W_{A_3A_2}^k = 2\omega_2 \cdot V_{A_3A_2}, \text{ де}$$

$$V_{A_3A_2} = |a_2 a_3| \cdot \mu_V,$$

а напрямок $\overline{W}_{A_3A_2}^k$ (рис. 2.132) покаже вектор відносної швидкості $\overline{V}_{A_3A_2}$, якщо його повернути на 90° градусів убік переносної кутової швидкості ω_2 .

Розрахуємо відрізок, яким буде на плані прискорень поданий вектор $\overline{W}_{A_3A_2}^k$,

$$|a_2 k| = W_{A_3A_2}^k / \mu_W \text{ (мм)}.$$

Тепер обчислимо величину нормального відносного прискорення з другого рівняння

$$W_{A_3/B_3}^n = \omega_3^2 \cdot l_{A_3B_3}.$$

Це прискорення буде на плані прискорень зображено відрізком

$$|b_3 n| = W_{A_3/B_3}^n / \mu_W \text{ (мм)}.$$

Побудову плану прискорень виконуємо в наступній послідовності.

З кінця відрізка $|p_W a_2|$ відкладаємо в напрямку $\overline{W}_{A_3 A_2}^k$ відрізок $|a_2 k|$, потім у точці k встановлюємо перпендикуляр.

На цьому рішенні першого рівняння припиняємо і переходимо до другого рівняння.

З точки b_3 відрізка $|p_W b_3|$ проводимо відрізок $|b_3 n|$. Він буде направлений убік вектора $\overline{W}_{A_3/B_3}^n$, тобто від точки A_3 до точки B_3 , як до центру відносного обертання, паралельно лінії $A_3 B_3$. З точки n проводимо перпендикуляр до відрізка $|b_3 n|$ (тобто в напрямку вектора $\overline{W}_{A_3/B_3}^\tau$) до перетинання з останнім вектором першого рівняння (тобто із перпендикуляром у точці k до відрізка $|a_2 k|$).

Перетинання двох останніх ліній на плані прискорень координує точку a_3 кінця вектора $\overline{W}_{A_3}$. Його величина може бути знайдена по формулі

$$W_{A_3} = |p_W a_3| \cdot \mu_W.$$

Прискорення точки C можна знайти, скориставшись теоремою подібності планів прискорень (див. задачу 2.3). Для цього на стороні $b_3 a_3$ треба побудувати $\Delta b_3 a_3 c$, подібний $\Delta B_3 A_3 C$. Ця побудова виконується таким же способом, як це було зроблено на плані швидкостей. Після побудов одержимо

$$W_C = |p_W c| \cdot \mu_W.$$

Тепер обчислимо величину кутового прискорення ланки 3:

$$\varepsilon_3 = W_{A_3/B_3}^\tau / l_{A_3 B_3}, \text{ де}$$

$$W_{A_3/B_3}^\tau = |n a_3| \cdot \mu_W.$$

Напрямок ε_3 покаже вектор $\overline{W}_{A_3/B_3}^\tau$, якщо його перенести мислено в точку A_3 ланки 3 (див. задачу 2.2). Вектор $\overline{W}_{A_3/B_3}^\tau$ має напрямок від точки n до точки a_3 , отже ланка 3 має кутове прискорення ε_3 , направлене проти годинникової стрілки, що і позначено на схемі групи Ассура.

Як уже було сказано вище, кутове прискорення $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, тому що завжди вірно $\omega_2 = \omega_3$ і, отже,

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}.$$

5. Контрольні запитання

1. Що собою являють плани швидкостей і прискорень механізму і яка їхня точність?
2. Як вибираються масштаби планів швидкостей і прискорень і як вони використовуються при визначенні швидкостей і прискорень точок ланок механізмів?
3. Опишіть правила оформлення планів швидкостей і прискорень.
4. Як визначаються величини і напрямки лінійних швидкостей точок ланок механізмів в абсолютному і відносному рухах?
5. Як визначити величини і напрямки кутових швидкостей ланок у складному плоскопаралельному русі?
6. Як визначаються величини і напрямки різних абсолютних, відносних і поворотних (нормальних, дотичних, Коріолісових) лінійних прискорень точок ланок механізмів?
7. Як визначаються величини і напрямки кутових прискорень ланок, які здійснюють складний плоскопаралельний рух?
8. Сформулюйте теорему подібності планів швидкостей. Як вона використовується при відшукуванні швидкостей точок ланок?
9. Сформулюйте теорему подібності планів прискорень. Як вона використовується при відшукуванні прискорень точок ланок?
10. Як уникнути помилок при використанні теорем подібності планів швидкостей і прискорень?
11. У чому полягають особливості оформлення і вирішення векторних рівнянь руху при побудові планів швидкостей і прискорень?
12. У яких випадках слід виділяти особливі конкуруючі точки ланок при побудові планів швидкостей і прискорень?
13. Сформулюйте правило Жуковського М. Є. для визначення напрямку прискорення Коріоліса.
14. В якій послідовності здійснюється побудова планів швидкостей і прискорень?

Лекція 6

Тема: Побудова планів швидкостей і прискорень типових найпростіших механізмів

- Зміст:
1. Кривошипно-повзунний механізм.
 2. Кривошипно-коромисловий механізм.
 3. Кривошипно-кулісний механізм.
 4. Тенгенсний кулісний механізм.
 5. Сінусний кулісний механізм.
 6. Шестиланковий важільний механізм.
 7. Контрольні запитання.

1. Кривошипно-повзунний механізм

Побудуємо в загальному вигляді плани швидкостей і прискорень для кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.14а). Вважаємо заданими: масштаб μ_l (м/мм), положення механізму, кутову швидкість $\omega_l = \text{const}$ (с⁻¹).

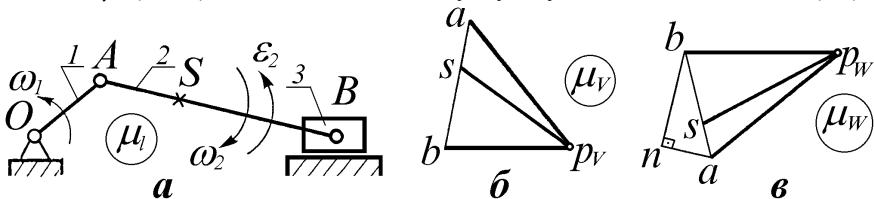


Рис. 2.14. Кінематичний аналіз кривошипно-повзунного механізму

1. Будуємо план швидкостей (рис. 2.14б).

Принципи побудов плану швидкостей ті ж самі, що і в попередній задачі, тому нижче приведемо лише необхідну послідовність векторних рівнянь і розрахункових формул.

Для початкового механізму (0 - 1):

$$V_A = \omega_l \cdot l_{OA} \text{ (м/с), де } l_{OA} = \overline{OA} \cdot \mu_l \text{ (м)}.$$

Для групи Ассур II класу 2-го порядку 2-го виду (2 - 3):

$$\underline{\overline{V}}_B = \underline{\overline{V}}_A + \underline{\overline{V}}_{B/A};$$

$$(\text{гориз.}) \quad (\perp AB)$$

$$\mu_v = V_A / |p_v a| \text{ ((м/с)/мм)};$$

$$V_B = |p_v b| \cdot \mu_v \text{ (м/с); } \omega_2 = V_{B/A} / l_{AB} \text{ (рад/с), де}$$

$$V_{B/A} = |ab| \cdot \mu_v \text{ (м/с); } l_{AB} = \overline{AB} \cdot \mu_l;$$

напрямок ω_2 - по годинниковій стрілці.

2. Будуємо план прискорень (рис. 2.14**б**).

Нижче також приведемо лише необхідну послідовність векторних рівнянь і розрахункових формул.

Для початкового механізму (0 - 1):

$$W_A = W_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Для групи Ассура (2 - 3):

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{B/A}^n + \overline{W}_{B/A}^\tau;$$

(гориз.) (від B до A) ($\perp AB$)

$$\mu_W = W_A / |p_{wa}| \text{ ((м/с}^2\text{))/мм);}$$

$$W_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} \text{ (м/с}^2\text{); } |an| = W_{B/A}^n / \mu_W \text{ (мм);}$$

$$\varepsilon_2 = W_{B/A}^\tau / l_{AB} \text{ (с}^{-2}\text{), де } W_{B/A}^\tau = |nb| \cdot \mu_W \text{ (м/с}^2\text{);}$$

напрямок ε_2 - проти годинникової стрілки.

Побудуємо в загальному вигляді плани швидкостей і прискорень для кривошипно-коромислового механізму (рис. 2.15**а**). Вважаємо заданими: масштаб μ_l (м/мм), положення механізму, кутову швидкість $\omega_l = \text{const}$ (с⁻¹).

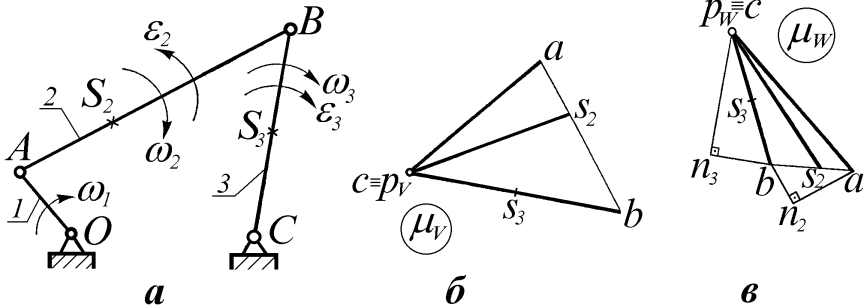


Рис. 2.15. Кінематичний аналіз кривошипно-коромислового механізму

1. Будуємо план швидкостей (рис. 2.15**б**).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$V_A = \omega_l \cdot l_{OA} \text{ (м/с), де } l_{OA} = \overline{OA} \cdot \mu_l \text{ (м).}$$

Для групи Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду (2 - 3):

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A},$$

($\perp AB$)

$$\overline{V}_B = \overline{V}_C + \overline{V}_{B/C}; (\overline{V}_C = 0);$$

($\perp BC$)

$$\mu_V = V_A / |p_V a| \text{ ((м/с)/мм)}; V_B = |p_V b| \cdot \mu_V \text{ (м/с)}; \omega_2 = V_{B/A} / l_{AB} \text{ (с}^{-1}\text{)}, \text{ де}$$

$$V_{B/A} = |ab| \cdot \mu_V \text{ (м/с)}; l_{AB} = \overline{AB} \cdot \mu_l \text{ (м)};$$

ω_2 направлене - по годинниковій стрілці;

$$\omega_3 = V_{B/C} / l_{BC} \text{ (с}^{-1}\text{)}, \text{ де}$$

$$V_{B/C} = |cb| \cdot \mu_V \text{ (м/с)}; l_{BC} = \overline{BC} \cdot \mu_l \text{ (м)};$$

ω_3 направлене - по годинниковій стрілці.

2. Будуємо план прискорень (рис. 2.15б).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$W_A = W_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Для групи Ассура (2 - 3):

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{B/A}^n + \overline{W}_{B/A}^\tau,$$

(від B до A) ($\perp AB$)

$$\overline{W}_B = \overline{W}_C + \overline{W}_{B/C}^n + \overline{W}_{B/C}^\tau;$$

(від B до C) ($\perp BC$)

$$\mu_W = W_A / |p_W a| \text{ ((м/с}^2\text{)/мм)};$$

$$W_{B/A}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} \text{ (м/с}^2\text{)}; |an_2| = W_{B/A}^n / \mu_W \text{ (мм)};$$

$$W_{B/C}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC} \text{ (м/с}^2\text{)}; |cn_3| = W_{B/C}^n / \mu_W \text{ (мм)};$$

$$\varepsilon_2 = W_{B/A}^\tau / l_{AB} \text{ (с}^{-2}\text{)}, \text{ де } W_{B/A}^\tau = |n_2 b| \cdot \mu_W \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$\varepsilon_3 = W_{B/C}^\tau / l_{BC} \text{ (с}^{-2}\text{)}, \text{ де } W_{B/C}^\tau = |n_3 b| \cdot \mu_W \text{ (м/с}^2\text{)};$$

ε_2 направлене - проти годинникової стрілки;

ε_3 направлене - по годинниковій стрілці.

Побудуємо в загальному вигляді плани швидкостей і прискорень для кривошипно-кулісного механізму (рис. 2.16а). Вважаємо заданими: масштаб μ_l (м/мм), положення механізму, кутову швидкість $\omega_l = \text{const}$ (c^{-1}).

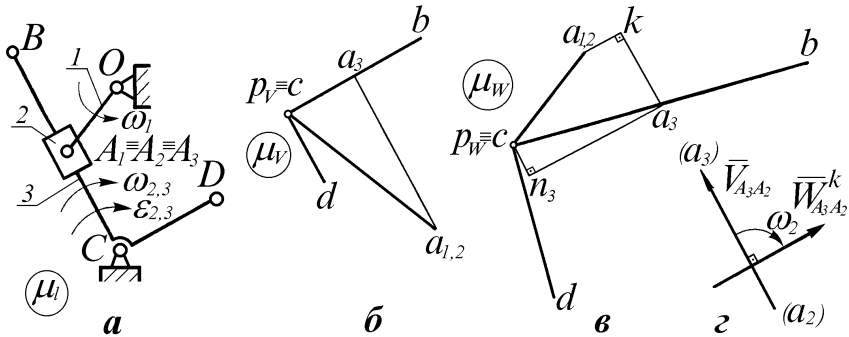


Рис. 2.16. Кінематичний аналіз кривошипно-кулісного механізму

1. Будуємо план швидкостей (рис. 2.16б).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$V_{A_1} = \omega_l \cdot l_{OA} \quad (\text{м/с}),$$

$$\text{де } l_{OA} = \overline{OA} \cdot \mu_l \quad (\text{м}); \quad \mu_v = V_{A_1} / |p_v a_l| \quad ((\text{м/с})/\text{мм}).$$

Для групи Ассур II класу 2-го порядку 3-го виду (2 - 3):

$$\overline{V}_{A_2} = \overline{V}_{A_1};$$

$$\overline{V}_{A_3} = \overline{V}_{A_2} + \overline{V}_{A_3 A_2};$$

$$(\perp BC) \quad (\perp AO) \quad (/BC)$$

$$V_{A_3} = |p_v a_3| \cdot \mu_v \quad (\text{м/с});$$

$$V_B = V_{A_3} \cdot \frac{BC}{AC} \quad (\text{по теоремі подібності});$$

$$V_D = V_B \cdot \frac{DC}{BC} \quad (\text{по теоремі подібності});$$

$$\omega_2 = \omega_3 = V_B / l_{BC} \quad (c^{-1});$$

напрямок $\omega_2 = \omega_3$ - по годинниковій стрілці.

2. Будуємо план прискорень (рис. 2.16в).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$W_{A_1} = W_{A_1}^n = \omega_l^2 \cdot l_{OA} \quad (\text{м/с}^2); \quad \mu_w = W_{A_1} / |p_w a_l| \quad ((\text{м/с}^2)/\text{мм}).$$

Для групи Ассура (2 - 3):

$$\begin{aligned}\overline{\underline{\underline{W}}}_{A_2} &= \overline{\underline{\underline{W}}}_{A_I} ; \\ \overline{\underline{\underline{W}}}_{A_3} &= \overline{\underline{\underline{W}}}_{A_2} + \overline{\underline{\underline{W}}}_{A_3A_2}^k + \overline{\underline{\underline{W}}}_{A_3A_2}^r, \\ & \quad (\text{від } A \text{ до } O) \quad (//BC) \\ \overline{\underline{\underline{W}}}_{A_3} &= \overline{\underline{\underline{W}}}_C + \overline{\underline{\underline{W}}}_{A_3/C}^n + \overline{\underline{\underline{W}}}_{A_3/C}^\tau; (\overline{\underline{\underline{W}}}_C = 0); \\ & \quad (\text{від } A_3 \text{ до } C) (\perp AC) \\ W_{A_3A_2}^k &= 2\omega_2 \cdot V_{A_3A_2} \text{ (м/с}^2\text{)}, \text{ де } V_{A_3A_2} = |a_2 a_3| \cdot \mu_V \text{ (м/с)};\end{aligned}$$

Напрямок $\overline{\underline{\underline{W}}}_{A_3A_2}^k$ знаходимо за правилом М. Є. Жуковського (див. рис. 2.16з).

$$\begin{aligned}|a_2 k| &= W_{A_3A_2}^k / \mu_W \text{ (мм)}; \\ W_{A_3/C}^n &= \omega_3^2 \cdot l_{AC} \text{ (м/с}^2\text{)}, \text{ де } l_{AC} = \overline{AC} \cdot \mu_l \text{ (м)}; \\ |cn_3| &= W_{A_3/C}^n / \mu_W \text{ (мм)}; W_{A_3} = |p_W a_3| \cdot \mu_W \text{ (м/с}^2\text{)}; \\ W_B &= W_{A_3} \cdot \frac{BC}{AC} \text{ (м/с}^2\text{)}; W_D = W_B \cdot \frac{CD}{BC} \text{ (м/с}^2\text{)}; \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 &= W_{A_3/C}^\tau / l_{AC} \text{ (с}^{-2}\text{)}, \text{ де } W_{A_3/C}^\tau = |n_3 a_3| \cdot \mu_W \text{ (м/с}^2\text{)}.\end{aligned}$$

Напрямок $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ - по годинниковій стрілці.

Побудуємо в загальному вигляді плани швидкостей і прискорень для тангенсного кулісного механізму (рис. 2.17а). Вважаємо заданими: масштаб μ_l (м/мм), положення механізму, кутову швидкість $\omega_l = \text{const}$ (с⁻¹).

1. Будуємо план швидкостей (рис. 2.17б).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$\begin{aligned}V_{A_I} &= \omega_l \cdot l_{OA} \text{ (м/с)}, \\ \text{де } l_{OA} &= \overline{OA} \cdot \mu_l \text{ (м)}; \mu_V = V_{A_I} / |p_V a_I| \text{ ((м/с)/мм)}.\end{aligned}$$

Для групи Ассура II класу 2-го порядку 4-го виду (2 - 3):

$$\begin{aligned}\overline{\underline{\underline{V}}}_{A_2} &= \overline{\underline{\underline{V}}}_{A_I} + \overline{\underline{\underline{V}}}_{A_2A_I}; \\ & \quad (\text{верт.}) (\perp OA) (//OA) \\ V_{A_2} &= |p_V a_2| \cdot \mu_V \text{ (м/с)};\end{aligned}$$

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_B = \bar{V}_{A_2};$$

$$\omega_2 = \omega_1; \omega_3 = 0.$$

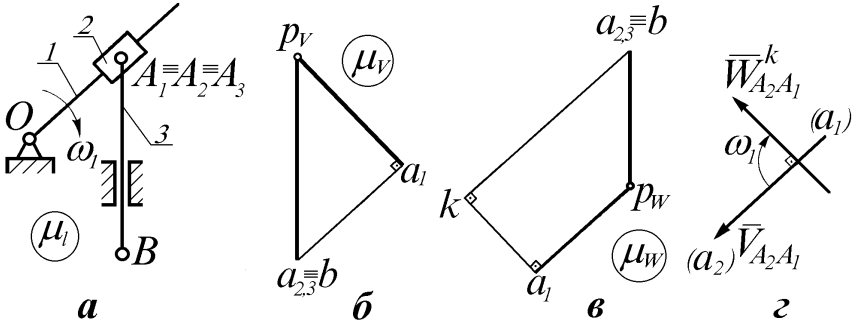


Рис. 2.17. Кінематичний аналіз тангенсного кулісного механізму

2. Будуємо план прискорень (рис. 2.17**б**).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$W_{A_1} = W_{A_1}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} \text{ (м/с}^2\text{)}; \mu_W = W_{A_1} / |p_W a_1| \text{ ((м/с}^2\text{))/мм)}.$$

Для групи Ассура (2 - 3):

$$\bar{W}_{A_2} = \bar{W}_{A_1} + \bar{W}_{A_2A_1}^k + \bar{W}_{A_2A_1}^\tau;$$

(верт.) (від A до O) ($\perp OA$) ($\parallel OA$)

$$W_{A_2A_1}^k = 2\omega_1 \cdot V_{A_2A_1} \text{ (м/с}^2\text{)}, \text{ де } V_{A_2A_1} = |a_1 a_2| \cdot \mu_V \text{ (м/с)}.$$

Напрямок $\bar{W}_{A_2A_1}^k$ знаходимо за правилом М. Є. Жуковського (див. рис. 2.17**г**).

$$|a_1 k| = W_{A_2A_1}^k / \mu_W \text{ (мм)};$$

$$W_B = W_{A_3} = W_{A_2} = |p_W a_2| \cdot \mu_W \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.$$

Побудуємо в загальному вигляді плани швидкостей і прискорень для синусного кулісного механізму (рис. 2.18**а**). Вважаємо заданими: масштаб μ_l (м/мм), положення механізму, кутову швидкість $\omega_1 = \text{const}$ (с⁻¹).

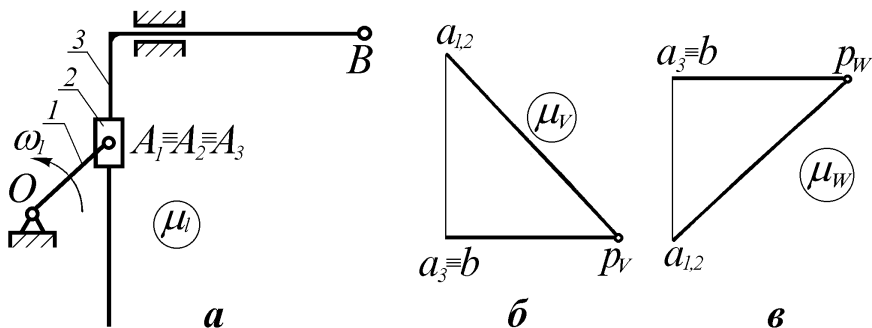


Рис. 2.18. Кінематичний аналіз синусного кулісного механізму

1. Будуємо план швидкостей (рис. 2.18б).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$V_{A_1} = \omega_l \cdot l_{OA} \text{ (м/с),}$$

$$\text{де } l_{OA} = \overline{OA} \cdot \mu_l \text{ (м); } \mu_v = V_{A_1} / |p_v a_1| \text{ ((м/с)/мм).}$$

Для групи Ассура II класу 2-го порядку 5-го виду (2 - 3):

$$\overline{V}_{\equiv A_2} = \overline{V}_{\equiv A_1};$$

$$\overline{V}_{\equiv A_3} = \overline{V}_{\equiv A_2} + \overline{V}_{\equiv A_3 A_2};$$

$$(\text{гориз.})(\perp OA) \text{ (верт.)}$$

$$V_B = V_{A_3} = |p_v a_3| \cdot \mu_v \text{ (м/с);}$$

$$\omega_2 = \omega_3 = 0.$$

2. Будуємо план прискорень (рис. 2.18в).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$W_{A_1} = W_{A_1}^n = \omega_l^2 \cdot l_{OA} \text{ (м/с}^2\text{); } \mu_w = W_{A_1} / |p_w a_1| \text{ ((м/с}^2\text{)/мм).}$$

Для групи Ассура (2 - 3):

$$\overline{W}_{\equiv A_2} = \overline{W}_{\equiv A_1};$$

$$\overline{W}_{\equiv A_3} = \overline{W}_{\equiv A_2} + \overline{W}_{\equiv A_3 A_2}^k + \overline{W}_{\equiv A_3 A_2}^r,$$

$$(\text{гориз.})(\text{від } A \text{ до } O)(=0) \text{ (верт.)}$$

$$W_B = W_{A_3} = |p_w a_3| \cdot \mu_w \text{ (м/с}^2\text{);}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.$$

Побудуємо плани швидкостей і прискорень для шарнірного шестиланкового механізму (рис. 2.19а) за заданими: його положенню, масштабу $\mu_l = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м/мм}$; кутовій швидкості вхідної ланки $\omega_l = 10 \text{ с}^{-1}$; кутовому прискоренню вхідної ланки $\varepsilon_l = 10 \text{ с}^{-2}$.

1. Будуємо план швидкостей (рис. 2.19б).

Для початкового механізму (0 - 1):

$$V_A = \omega_l l_{OA} = 10 \cdot 0,06 = 0,6 \text{ м/с},$$

$$\text{де } l_{OA} = \overline{OA} \cdot \mu_l = 30 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,06 \text{ м.}$$

Вибираємо $\mu_v = V_A / |p_v a| = 0,6/60 = 0,01 \text{ (м/с)/мм}$.

Для групи Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду (2 - 3):

$$\underline{\underline{V}}_C = \underline{\underline{V}}_A + \underline{\underline{V}}_{C/A},$$

$$(\perp CD) (\perp OA) (\perp AC)$$

З плану швидкостей маємо:

$$V_C = |p_v c| \cdot \mu_v = 97 \cdot 0,01 = 0,97 \text{ м/с};$$

$$V_B = |p_v b| \cdot \mu_v = 78,5 \cdot 0,01 = 0,785 \text{ м/с};$$

$$V_{C/A} = |ac| \cdot \mu_v = 68 \cdot 0,01 = 0,68 \text{ м/с}; \quad V_{C/D} = V_C = 0,97 \text{ м/с};$$

$$\omega_2 = V_{C/A} / l_{AC} = 0,68/0,11 = 6,18 \text{ с}^{-1},$$

$$\text{де } l_{AC} = \overline{AC} \cdot \mu_l = 55 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,11 \text{ м};$$

$$\omega_3 = V_{C/D} / l_{CD} = 0,97/0,1 = 9,7 \text{ с}^{-1},$$

$$\text{де } l_{CD} = \overline{CD} \cdot \mu_l = 50 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ м.}$$

Напрямки ω_2 і ω_3 показані на схемі механізму.

Для групи Ассура II класу 2-го порядку 1-го виду (4 - 5):

$$\underline{\underline{V}}_E = \underline{\underline{V}}_B + \underline{\underline{V}}_{E/B}.$$

$$(\perp EF) \quad (\perp BE)$$

З плану швидкостей маємо:

$$V_E = V_{E/F} = |p_{ve}| \cdot \mu_v = 39 \cdot 0,01 = 0,39 \text{ м/с};$$

$$V_{E/B} = |be| \cdot \mu_v = 63 \cdot 0,01 = 0,63 \text{ м/с};$$

$$\omega_4 = V_{E/B} / l_{BE} = 0,63/0,12 = 5,25 \text{ с}^{-1},$$

$$\text{де } l_{BE} = \overline{BE} \cdot \mu_l = 60 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,12 \text{ м};$$

$$\omega_5 = V_{E/F} / l_{EF} = 0,39/0,11 = 3,55 \text{ с}^{-1},$$

$$\text{де } l_{EF} = \overline{EF} \cdot \mu_l = 55 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,11 \text{ м.}$$

Напрямки ω_4 і ω_5 показані на схемі механізму.

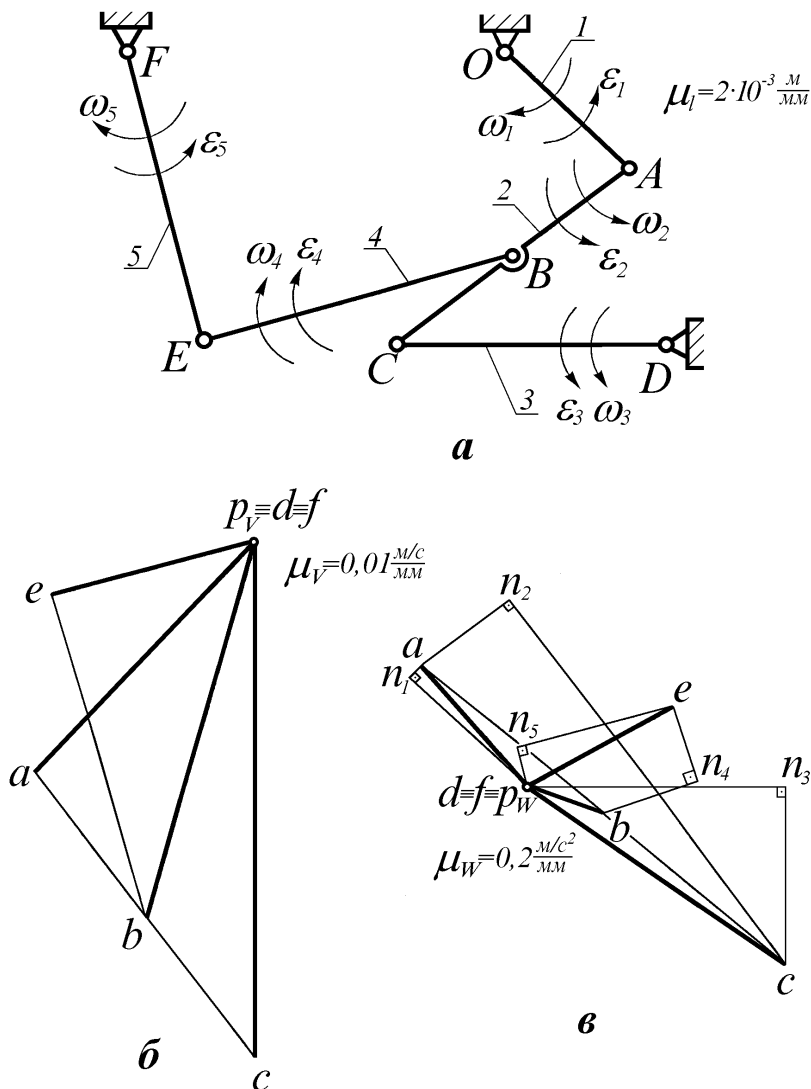


Рис. 2.19. Кінематичний аналіз шестиланкового шарнірного механізму

2. Будемо план прискорень (рис. 2.19б).
Для початкового механізму (0 - 1):

$$\begin{aligned}
\overline{W}_A &= \underline{\underline{W}}_A^n + \underline{\underline{W}}_A^\tau; \\
&(\text{вид } A \text{ до } O)(\perp OA) \\
W_A^n &= \omega_I^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0,06 = 6 \text{ м/с}^2; \\
W_A^\tau &= \varepsilon_I \cdot l_{OA} = 10 \cdot 0,06 = 0,6 \text{ м/с}^2; \\
\mu_W &= W_A^n / |p_W n_I| = 6 / 30 = 0,2 \text{ (м/с}^2\text{)/мм}; \\
|n_I a| &= W_A^\tau / \mu_W = 0,6 / 0,2 = 3 \text{ мм}; \\
W_A &= |p_W| \cdot \mu_W = 31 \cdot 0,2 = 6,2 \text{ м/с}^2.
\end{aligned}$$

Для групи Ассур (2 - 3):

$$\begin{aligned}
\overline{W}_C &= \underline{\underline{W}}_A + \underline{\underline{W}}_{C/A}^n + \underline{\underline{W}}_{C/A}^\tau, \\
&(\text{вид } C \text{ до } A)(\perp AC) \\
\overline{W}_C &= \underline{\underline{W}}_D + \underline{\underline{W}}_{C/D}^n + \underline{\underline{W}}_{C/D}^\tau; \\
&(\text{вид } C \text{ до } D)(\perp CD) \\
W_{C/A}^n &= \omega_2^2 \cdot l_{AC} = (6,18)^2 \cdot 0,11 = 4,2 \text{ м/с}^2; \\
|an_2| &= W_{C/A}^n / \mu_W = 4,2 / 0,2 = 21 \text{ мм}; \\
W_{C/D}^n &= \omega_3^2 \cdot l_{CD} = (9,7)^2 \cdot 0,1 = 9,4 \text{ м/с}^2; \\
|dn_3| &= W_{C/D}^n / \mu_W = 9,4 / 0,2 = 47 \text{ мм}.
\end{aligned}$$

З плану прискорень маємо:

$$\begin{aligned}
W_B &= |p_W b| \cdot \mu_W = 15 \cdot 0,2 = 3 \text{ м/с}^2; \\
W_C &= |p_W c| \cdot \mu_W = 58 \cdot 0,2 = 11,6 \text{ м/с}^2; \\
W_{C/A}^\tau &= |n_2 c| \cdot \mu_W = 85 \cdot 0,2 = 17 \text{ м/с}^2; \\
W_{C/D}^\tau &= |n_3 c| \cdot \mu_W = 32 \cdot 0,2 = 6,4 \text{ м/с}^2; \\
\varepsilon_2 &= W_{C/A}^\tau / l_{AC} = 17 / 0,11 = 154,5 \text{ с}^{-2}; \\
\varepsilon_3 &= W_{C/D}^\tau / l_{CD} = 6,4 / 0,1 = 64 \text{ с}^{-2}.
\end{aligned}$$

Напрямки ε_2 і ε_3 показані на схемі механізму.

Для групи Ассур (4 - 5):

$$\begin{aligned}
\overline{W}_E &= \underline{\underline{W}}_B + \underline{\underline{W}}_{E/B}^n + \underline{\underline{W}}_{E/B}^\tau, \\
&(\text{вид } E \text{ до } B)(\perp EB) \\
\overline{W}_E &= \underline{\underline{W}}_F + \underline{\underline{W}}_{E/F}^n + \underline{\underline{W}}_{E/F}^\tau;
\end{aligned}$$

(від E до F) ($\perp FE$)

$$W_{E/B}^n = \omega_4^2 \cdot l_{BE} = (5,25)^2 \cdot 0,12 = 3,3 \text{ м/с}^2;$$

$$|bn_4| = W_{E/B}^n / \mu_W = 3,3 / 0,2 = 16,5 \text{ мм};$$

$$W_{E/F}^n = \omega_5^2 \cdot l_{EF} = (3,55)^2 \cdot 0,11 = 1,4 \text{ м/с}^2;$$

$$|fn_5| = W_{E/F}^n / \mu_W = 1,4 / 0,2 = 7 \text{ мм}.$$

З плану прискорень маємо:

$$W_E = |p_W e| \cdot \mu_W = 31 \cdot 0,2 = 6,2 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{E/B}^r = |n_4 e| \cdot \mu_W = 16 \cdot 0,2 = 3,2 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{E/F}^r = |n_5 e| \cdot \mu_W = 30 \cdot 0,2 = 6 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_4 = W_{E/B}^r / l_{BE} = 3,2 / 0,12 = 26,7 \text{ с}^{-2};$$

$$\varepsilon_5 = W_{E/F}^r / l_{EF} = 6 / 0,11 = 54,5 \text{ с}^{-2}.$$

Напрямки ε_4 і ε_5 показані на схемі механізму.

7. Контрольні запитання

1. Опишіть правила оформлення планів швидкостей і прискорень.
2. Як визначаються величини і напрямки лінійних швидкостей точок ланок механізмів в абсолютному і відносному рухах?
3. Як визначити величини і напрямки кутових швидкостей ланок у складному плоскопаралельному русі?
4. Як визначаються величини і напрямки різних абсолютних, відносних і поворотних (нормальних, дотичних, Коріолісових) лінійних прискорень точок ланок механізмів?
5. Як визначаються величини і напрямки кутових прискорень ланок, які здійснюють складний плоскопаралельний рух?
6. Сформулюйте теорему подібності планів швидкостей. Як вона використовується при відшукуванні швидкостей точок ланок?
7. Сформулюйте теорему подібності планів прискорень. Як вона використовується при відшукуванні прискорень точок ланок?
8. Як уникнути помилки при використанні теорем подібності планів швидкостей і прискорень?
9. У чому полягають особливості оформлення і вирішення векторних рівнянь руху при побудові планів швидкостей і прискорень?
10. У яких випадках слід виділяти особливі конкуруючі точки ланок при побудові планів швидкостей і прискорень?
11. Сформулюйте правило Жуковського М. Є. для визначення напрямку прискорення Коріоліса.

Лекція 7

Тема: Кінематика просторового універсального сферичного шарнірного механізму (шарнір Гука)

- Зміст: 1. Загальна характеристика та призначення шарніра Гука.
2. Одинарний шарнір Гука.
3. Здвоєний шарнір Гука.
4. Контрольні запитання.

1. Загальна характеристика та призначення шарніра Гука

Шарнір Гука широко застосовується в карданних передачах різних машин. Він дозволяє здійснити передачу обертального руху під перемінним кутом.

Одинарний шарнір Гука володіє одним суттєвим недоліком - нерівномірним обертанням вихідного вала при рівномірному обертанні вхідного вала, що буде показано нижче. Внаслідок цього одинарний шарнір Гука знаходить обмежене застосування.

Використання здвоєного шарніра Гука дозволяє уникнути при дотриманні певних умов нерівномірності вихідного руху. Здвоєний шарнір Гука застосовується дуже широко.

Основний його недолік - великі осьові розміри.

Тому в обмежених осьових розмірах використовуються спеціальні шарніри рівних кутових швидкостей, які тут не розглядаються.

2. Одинарний шарнір Гука

Будемо вважати (рис. 2.20) вхідний рух вала 1 рівномірним, тобто $\omega_1 = \text{const.}$

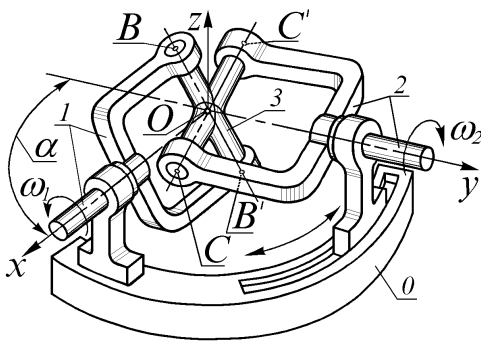


Рис. 2.20. Модель шарніра Гука

площини креслення.

Зобразимо траєкторії руху шарнірів B і C на виді по стрілці A (рис. 2.22).

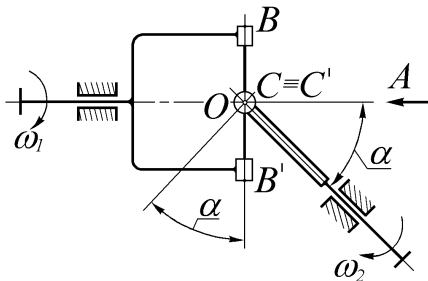


Рис 2.21. Схема шарніра Гука

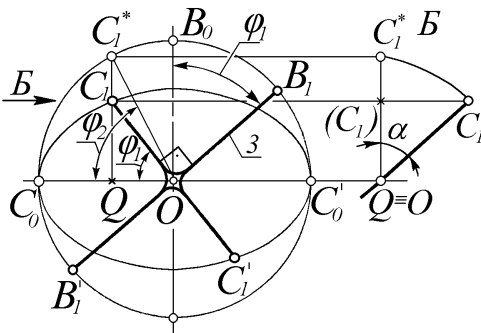


Рис. 2.22. Траєкторії шарнірів B і C

Знайдемо формулу для визначення перемінної функції передаточного

$$\text{відношення } i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Для цього уявимо механізм у такому положенні (рис. 2.21): вісь вала з вилкою 1 знаходиться в площині креслення; вісь вала 2 знаходиться в площині креслення, а його вилка в площині, перпендикулярній до

Відповідно до відомостей із нарисної геометрії, проєкції поперечини хрестовини на виді A будуть складати прямий кут у будь-якому положенні механізму, тому що одна з поперечин (із шарнірами B і B') увесь час буде видна в натуральній величину.

У початковому положенні шарніри B і C займають положення B_0 і C_0 .

Після повороту вала 1 на довільний кут φ_1 шарніри B і C займуть положення B_1 і C_1 .

Кут φ_2 повороту вала 2 можна визначити, якщо траєкторію шарніра C розглянути в натуральну величину.

Для цього її треба мислено повернути на кут α навколо горизонталі, що

проходить через центр хрестовини 3 (тобто через точку O).

Тому що траєкторія шарніра C кругова, кут φ_2 буде координуватися променем OC_1^* , проведеним із центру хрестовини в точку C_1^* (який показує положення точки C_1 на круговій траєкторії, що спостерігається в натуральну величину). У положенні 1 механізму кут φ_2 більше кута φ_1 . У інших положеннях може виявитися $\varphi_2 < \varphi_1$, тому що в середньому за велике число обертів пройдені валами кути φ_2 і φ_1 рівні.

Тому що відношення відрізків C_1Q і C_1^*Q буде $C_1Q / C_1^*Q = \cos \alpha$, із розгляду рис. 2.22 слідує, що

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \cos \alpha. \quad (2.5)$$

Продиференціюємо вираз (2.5), прийнявши значення α незмінним, тоді одержимо

$$\frac{\omega_1}{\cos^2 \varphi_1} = \frac{\omega_2}{\cos^2 \varphi_2} \cdot \cos \alpha.$$

Перепишемо останній вираз у вигляді функції зворотного передаточного відношення

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (2.6)$$

Позбудемося від φ_2 у функції (2.6), використовуючи вираз (2.5). З тригонометрії відома формула

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}.$$

Тоді можемо записати

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1 / \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}. \quad (2.7)$$

Підставимо (2.7) у (2.6), в результаті будемо мати

$$\begin{aligned} i_{21} &= \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi_1 \cdot (\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \varphi_1)} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \varphi_1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Підставимо в (2.8) вираз ($\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$) і після нескладних перетворень одержимо

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos^2 \varphi_1 \cdot \sin^2 \alpha}. \quad (2.9)$$

Проаналізуємо отриману залежність (2.9).

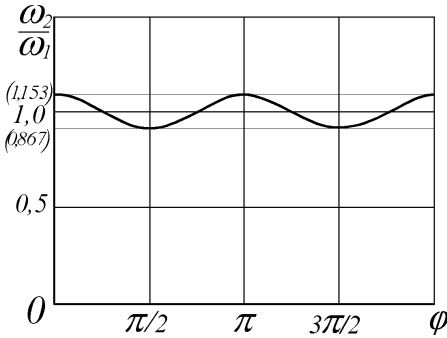


Рис. 2.23. Графік зміни функції i_{21} шарніра Гука при значенні кута $\alpha=30^\circ$

$3\pi/2; \dots$. При цьому $i_{21}^{\min} = \cos \alpha$.

На рис. 2.23 показаний графік функції i_{21} при значенні $\alpha=30^\circ$ ($\cos \alpha \approx 0,87$).

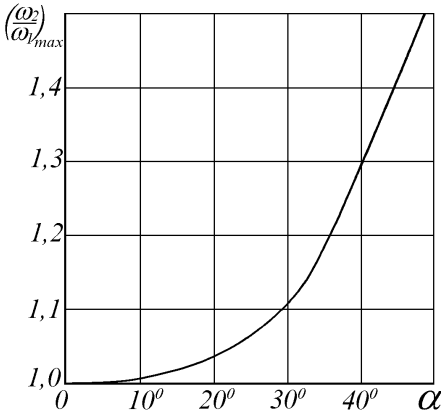


Рис. 2.24. Графік залежності максимальних значень функції i_{21} від α

6%, то при зростанні α від 20° до 40° , ця відмінність досягає 32%.

Очевидно, що функція

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{є} \quad \text{періодичною.}$$

Максимальні значення функції i_{21} будуть відповідати значенням аргументу $\varphi_1 = 0, \pi, 2\pi, \dots$.

Причому

$$i_{21}^{\max} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Мінімальні значення функції i_{21} будуть відповідати значенням аргументу $\varphi_1 = \pi/2;$

Кутова швидкість вихідного вала 2 шарніра Гука буде змінюватися в межах

$$\omega_1 \cdot \cos \alpha \leq \omega_2 \leq \omega_1 / \cos \alpha.$$

Коливання кутової швидкості ω_2 відносно ω_1 будуть тим більшими, чим більше значення кута α між валами 2 і 1.

На рис. 2.24 показаний графік залежності максимальних значень функції i_{21} від значення кута α . Очевидний прогресивний характер залежності. Якщо при зростанні α від 0 до 20° ω_2 від ω_1 відрізняється не більше ніж на

З наведеного вище аналізу можна зробити висновок, що одинарний шарнір Гука можна застосовувати при невеличких значеннях кута α , а також при невисоких швидкостях обертання карданного вала і малих масах, що рухаються з валом 2 (малих зведених моментах інерції вала 2).

3. Здвоєний шарнір Гука

На рис. 2.25 показана кінематична схема здвоєного шарніра Гука. Обертання від вхідного вала 1 на вихідний вал 3 передається через складовий вал 2-2'. Складовий вал 2-2' дозволяє під час руху змінювати свою довжину при зміні відстані H (наприклад, у карданній передачі автомобіля). Частина вала 2 зв'язана з частиною вала 2' шліцьовим рухомим з'єднанням.

Легко довести навіть без застосування математичних викладень, що при рівномірному обертанні вхідного вала 1 також рівномірно буде обертатися вихідний вал 3. І звісно ж, при цьому вал 2-2' буде обертатися нерівномірно.

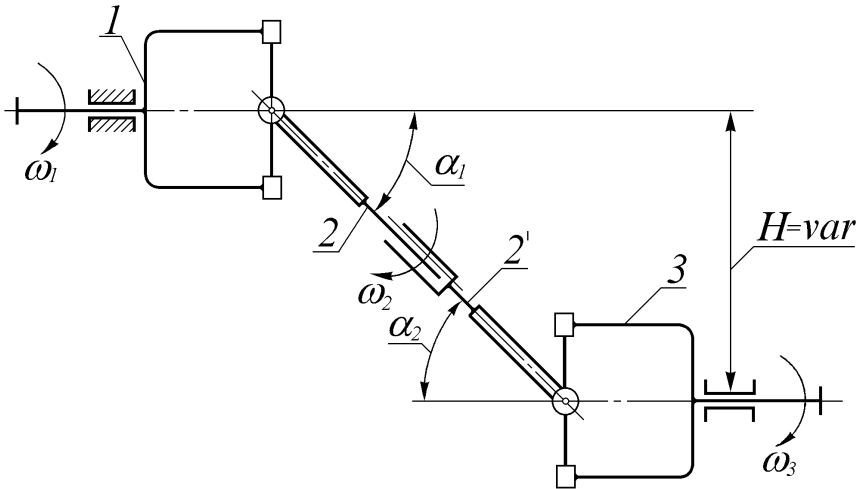


Рис. 2.25. Кінематична схема здвоєного шарніра Гука

Будемо міркувати так. Якщо мислено роз'єднати карданний вал у шліцьовому з'єднанні, а потім вал 3 (разом із валом 2') повернути в площині креслення на 180° і перенести його на місце вала 1, то при рівності $\alpha_1 = \alpha_2$ одержимо повне накладення один на одного валів 1 і 3, а також валів 2 і 2'. Очевидно, що при однаковій рівномірній швидкості обертання валів 1 і 3, вали 2 і 2' одержать абсолютно збіжне нерівномірне обертання.

Отже, за умови $\alpha_1 = \alpha_2$, а також розташуванні вилок проміжного вала 2-2' в одній площині, здвоєний шарнір Гука забезпечить постійну рівність значень ω_1 і ω_3 .

При нерівності α_1 і α_2 може з'явитися невисока нерівномірність обертання вихідного вала 3.

Якщо ж вилки проміжного вала установити у взаємно перпендикулярних площинах, тоді нерівномірність обертання вихідного вала 3 зведеться в квадрат, а максимальне і мінімальне значення кутової швидкості вихідного вала 3 будуть досягати величин

$$\omega_3^{max} = \omega_1 / (\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2) \text{ і } \omega_3^{min} = \omega_1 \cdot (\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2).$$

Бажано так конструктивно виконати проміжний вал 2-2', щоб він міг збиратися тільки при розташуванні його вилок в одній площині.

У крайньому випадку необхідно на торцях валів 2 і 2' зробити відповідні мітки, по яких можна було б здійснити правильне збирання проміжного вала.

4. Контрольні запитання

1. Приведіть схему просторового універсального сферичного шарнірного механізму (шарніра Гука).
2. Яке його призначення?
3. У чому полягає недолік одинарного шарніра Гука?
4. Визначте передаточну функцію шарніра Гука і проаналізуйте її.
5. Викресліть кінематичну схему здвоєного шарніра Гука.
6. Якими властивостями вона володіє?
7. Як уникнути нерівномірності обертання вихідного вала?

Лекція 8

Тема: **Механізми передач**

- Зміст: 1. Основні параметри механізмів передач.
2. Класифікація триланкових зубчастих передач.
3. Багатоланкові зубчасті передачі. Класифікація.
4. Зубчастий ряд з паразитними колесами.
5. Контрольні запитання.

1. Основні параметри механізмів передач

Механізми передач обертання призначені для зміни швидкості обертання або величини обертового моменту, а іноді - отримання більш складного вихідного руху.

Вони підрозділяються на *передачі зачепленням* і *передачі тертям*.

У передачах зачепленням силова взаємодія валів здійснюється за рахунок надітих на них спеціально спрофільованих коліс із виступами (зубцями, витками, штирками), а в передачах тертям - за допомогою сил тертя на посаджених на вали гладких коліс (котків, шківів). У обох видах передач колеса можуть взаємодіяти безпосередньо один з одним або через проміжні гнучкі ланки (ланцюги, ремені).

Найпростіші механізми передач - триланкові або одноступінчасті. Вони включають у свій склад стояк і дві рухливі ланки.

Складні механізми передач можуть включати у свій склад декілька ступенів (і, відповідно, - багато ланок, тому їх і називають багатоланковими).

Основний параметр передачі - передаточне відношення i , яким називається відношення кутової швидкості ведучої (вхідної) ланки до кутової швидкості веденої (вихідної) ланки.

Звичайно вали передачі нумерують і в загальному випадку

$$i_{l-n} = \frac{\omega_l}{\omega_n}.$$

Передаточне відношення характеризується величиною, а іноді і знаком (для механізмів із паралельними осями обертання вхідних і вихідних валів). Знак вважається додатним, якщо ведучий і ведений вали обертаються в одному напрямку, і - від'ємним, якщо вони обертаються в різних напрямках.

У більшості випадків застосовуються передачі з $|i| > 1$, тобто такі, що знижують швидкість обертання. Такі передачі називаються *редукторами* або *заповільнювачами* (іноді - *демультиплікаторами*). При $|i| < 1$ передача підвищує швидкість обертання і тоді вона зветься *прискорювачем* або *мультиплікатором*.

Існують також передачі з $i \neq const$.

Якщо передача змінює i ступінчасто, то вона називається *коробкою переміни передач* або *коробкою швидкостей*.

Якщо ж i змінюється плавно у певному діапазоні значень, то така передача називається *варіатором*.

У силових установках варіатори використовуються дуже рідко. В основному, їх використовують у кінематичних приводах, тобто таких, у яких корисне навантаження незначне або відсутнє взагалі.

При розрахунках передач застосовується також поняття - *передаточне число u* . З назви параметра слідує, що це - відоме число. Крім того, числу u не присвоюється знак і воно завжди більше або дорівнює 1 ($u \geq 1$). Наприклад, можна сказати: "Прискорювач із передаточним числом $u = 2$ ".

Найбільше поширення з числа різноманітних механізмів передач одержали механізми зубчастих передач, яким тут буде приділена основна увага.

2. Класифікація триланкових зубчастих передач

Зубчасті передачі знайшли найширше застосування в машинах і приладах завдяки таким основним їх перевагам:

1. Можливість передачі потужностей у величезному діапазоні (від декількох mBm до $10^5 \kappa Bm$).
2. Найменші габарити в порівнянні з іншими типами передач.
3. Сталість передаточного відношення поза залежністю від навантаження.
4. Високий коефіцієнт корисної дії.

Розглянемо класифікацію триланкових зубчастих передач по розташуванню геометричних осей обертання валів і дамо стислу їхню характеристику.

Осі можуть бути паралельними, та такими, що перетинаються і схрещуються в просторі.

1. Осі валів паралельні. У цьому випадку передача здійснюється, як правило, круглими циліндричними колесами.

Найбільше поширення знайшло зовнішнє зачеплення круглих циліндричних коліс (рис. 3.1).

Штрих-пунктирними лініями на рисунку показані уявлювані так звані початкові окружності, що являються центроїдами у відносному русі коліс. Іншими словами, початкові окружності радіусів r_{w1} і r_{w2} - такі уявлювані окружності, які перекочуються одна по одній без прослизання.

Надалі круглі циліндричні зубчасті колеса на схемах передач будемо показувати у вигляді уявлюваних дисків або циліндрів, що мають радіуси початкових окружностей. Зубці коліс при цьому зображати не будемо.

Для показаної на рис. 3.1 передачі можна записати

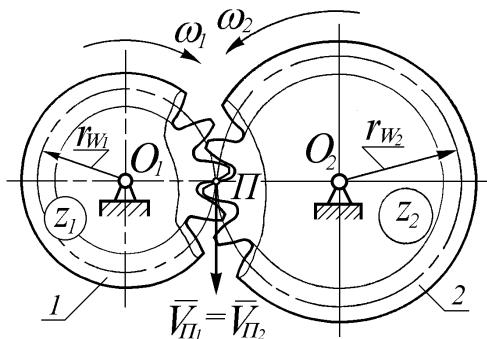


Рис. 3.1. Зовнішнє зачеплення круглих циліндричних коліс

$$V_P = \omega_1 \cdot r_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2}.$$

Звідси, з урахуванням протилежних напрямків ω_1 і ω_2 знайдемо

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}}.$$

Дану формулу використовувати важко, тому що радіуси уявлених початкових окружностей невідомі (вони залежать від профілів зубців, від міжосьової відстані та ін.). Її можна трансформувати до

зручного для розрахунків виду. Для цього помножимо чисельник і знаменник правої частини на 2π . Одержимо передаточне відношення у вигляді відношення довжин початкових окружностей.

Позначимо окружний шаг зубців по початкових окружностях p_{tw} . Очевидно, що обидва колеса мають один і той самий окружний шаг p_{tw} . Якби це було не так, то колеса не змогли б провертатись у відносному русі. Нехай z_1 і z_2 - числа зубців коліс 1 і 2.

Тоді довжини початкових окружностей можна виразити через добутки чисел зубців z_1 і z_2 та окружного шагу p_{tw} . З урахуванням вищесказаного маємо

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = -\frac{2\pi \cdot r_{w2}}{2\pi \cdot r_{w1}} = -\frac{p_{tw} \cdot z_2}{p_{tw} \cdot z_1} = -\frac{z_2}{z_1}.$$

Вираз

$$i_{1-2} = -\frac{z_2}{z_1} \quad (3.1)$$

зручний при обчисленнях передаточного відношення, тому що числа зубців коліс z_1 і z_2 легко підрахувати.

Відзначимо також, що циліндричні колеса можуть мати прямі (а), косі (б) або шевронні (в) зубці (рис. 3.2).

Часто застосовується також внутрішнє зачеплення круглих циліндричних коліс (рис. 3.3), наприклад, у планетарних передачах. У внутрішньому зачепленні колесо 1 має зовнішні зубці, а колесо 2 - внутрішні зубці.

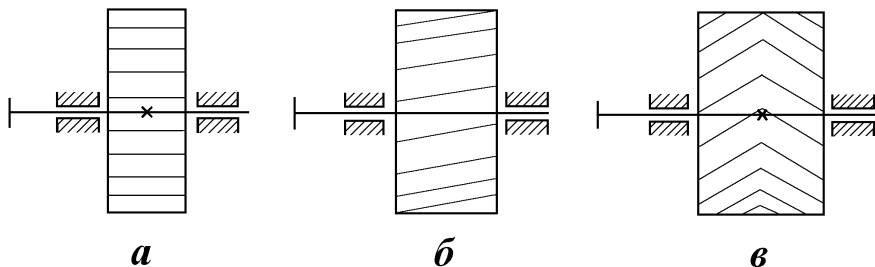


Рис. 3. 2. Основні різновидності форми зубців коліс по довжині

Тут очевидний збіг напрямків кутових швидкостей ω_1 і ω_2 .

З урахуванням міркувань, показаних на попередньому прикладі зовнішнього зачеплення можна записати

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (3.2)$$

Відзначимо, що у внутрішньому зачепленні передаточне відношення має додатний знак.

Рис. 3.3. Внутрішнє зачеплення круглих циліндричних коліс

зовнішні зачеплення коліс.

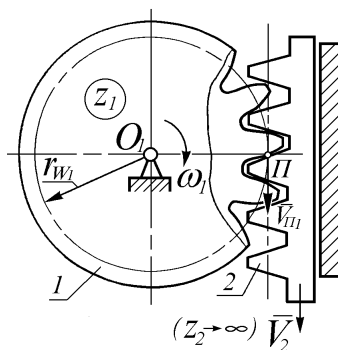


Рис. 3.4. Рейкове зачеплення

Надалі при кінематичному аналізі багатоланкових (багатоступінчастих) зубчастих передач будемо враховувати, що напрямок обертання валів змінюють тільки

Якщо z_1 залишити кінцевим, а z_2 спрямувати до нескінченності, то і зовнішнє і внутрішнє зачеплення перетворяться в так зване рейкове зачеплення (рис. 3.4).

Рейкове зачеплення застосовується для перетворення обертального руху в поступальний і навпаки.

У показаному на рис. 3.4 прикладі має місце

$$V_2 = V_{П_1} = \omega_1 \cdot r_{w1},$$

тобто відбувається перетворення обертального руху колеса 1 у поступальний рух рейки 2.

В окремих випадках також

застосовується зовнішнє зачеплення некруглих циліндричних коліс (рис. 3.5).

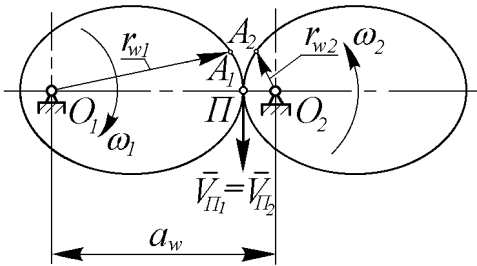


Рис. 3.5. Зовнішнє зачеплення некруглих циліндричних коліс

у яких в якості центроїд узяті еліпси, а центрами обертання O_1 і O_2 є однойменні (ліві або праві) полюси.

На практиці застосовуються некруглі колеса з різними формами (наприклад, у вигляді багатополусних еліпсів). Для всіх них справедливо

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{var} \text{ (тобто } \neq \text{const}).$$

Застосування некруглих циліндричних коліс дозволяє одержати при рівномірному обертанні вала 1 нерівномірне обертання вала 2 із заздалегідь обраним законом руху. Наприклад, некруглі колеса використовують на токарних автоматах для повільного обертання розподільного вала при використанні робочих операцій і швидкого - під час холостих ходів.

Некруглі колеса також знайшли застосування в поліграфічних машинах - у механізмах транспортерів самонакладів, у текстильних машинах - для періодичної зміни щільності утка й основи з метою одержання тканин із певним рисунком.

Останнім часом розроблені продуктивні способи виготовлення некруглих зубчастих коліс методом обкатки при використанні довбачів, черв'ячних фрез або рейок, що спрощує їхнє профілювання і виготовлення, а також розширює можливості застосування.

2. Осі валів перетинаються. У цьому випадку передача здійснюється конічними круглими зубчастими колесами (рис. 3.6).

Як правило, застосовуються конічні колеса з зовнішніми зубцями.

Теоретично внутрішнє конічне зачеплення можливе, але виготовлення конічного колеса з внутрішніми зубцями утруднене.

Крім того відзначимо, що для зачеплення конічних коліс не прийнято визначати знак передаточного відношення, тому що спостереження сполучення напрямків обертання вихідного і вхідного валів залежить від

Центроїдами у відносному русі тут є криві лінії з перемінною кривизною.

На центроїдах показані довільні спряжені точки A_1 і A_2 із поточними значеннями перемінних радіусів r_{w1} і r_{w2} .

У будь-якому положенні зачеплення повинна дотримуватися умова

$$r_{w1} + r_{w2} = a_w.$$

Цій умові завжди задовольняють еліптичні колеса,

напрямку погляду на зачеплення (наприклад, уздовж стрілок A і B на рис. 3.6, де показане кінчне зачеплення круглих зубчастих коліс із кутом між пересічними осями валів $\delta=90^\circ$, можна спостерігати різні сполучення напрямків обертання вхідного і вихідного валів).

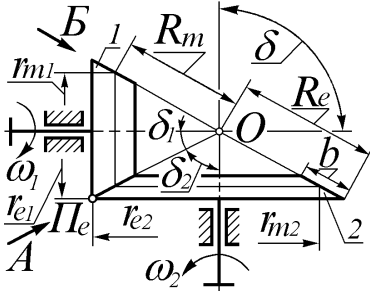


Рис. 3.6. Кінчне зачеплення круглих зубчастих коліс

Кут δ може бути, в принципі, будь-яким, але саме широкое поширення мають передачі з $\delta=90^\circ$, тому що в цьому випадку значно спрощується виготовлення корпуса (усі його основні площини обробки взаємно перпендикулярні).

Для виготовлення окремо взятого колеса, наприклад, колеса 1, має значення тільки величина кута δ_l . А кут δ_l може мати будь-яку величину (практично від 0 до 90°).

При $\delta_l=0$ кінчне колесо вироджується в циліндричне, а при $\delta_l=90^\circ$ кінчне колесо перетворюється в плоске з зубцями на торці.

При збігу вершин початкових конусів коліс (точка O , рис. 3.6) спостерігається чисте перекочування початкових конусів коліс один по одному з миттєвою віссю відносного кочення OP_e .

У цьому випадку можна записати

$$V_{Pe} = V_{Pe1} = V_{Pe2} = \omega_1 \cdot r_{e1} = \omega_2 \cdot r_{e2},$$

Звідси слідує

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{e2}}{r_{e1}} = \frac{OP_e \cdot \sin \delta_2}{OP_e \cdot \sin \delta_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (3.3)$$

При $\delta=90^\circ$ маємо

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1, \quad (3.4)$$

тому що

$$\sin \delta_1 = \cos \delta_2 \text{ і } \sin \delta_2 = \cos \delta_1.$$

Приведені формули з урахуванням $\delta = \delta_1 + \delta_2$ дозволяють при відомому (заданому) передаточному відношенні i_{1-2} обчислити конусні кути δ_1 і δ_2 .

При кінематичних розрахунках користуються залежністю

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

яка справедлива для конічних коліс так само, як і для будь-яких інших.

З рис. 3.6 видно, що розміри конічних коліс у зовнішніх (найбільших) торцях індексуються латинською літерою *e* ($R_e, r_{e1}, r_{e2}, \dots$), а в середніх перерізах - латинською літерою *m* ($R_m, r_{m1}, r_{m2}, \dots$).

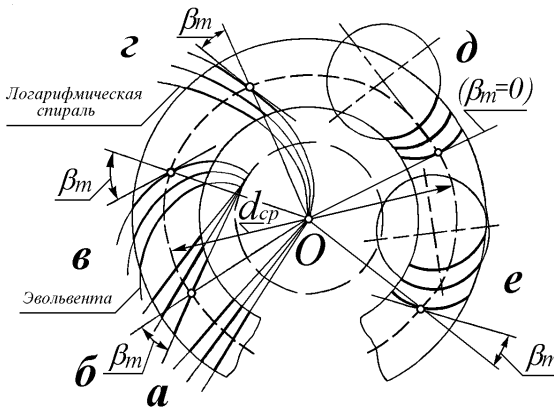


Рис. 3.7. Форма зубців конічних коліс по довжині

По довжині зубці конічних коліс можуть бути окреслені дуже різноманітними лініями (рис. 3.7). На рисунку показана розгортка ділильного конуса на площині з нанесеними на ній різними по довжині зубцями.

Наприклад, застосовуються: прямі зубці (рис. 3.7а), які йдуть повздовж твірних конуса; тангенціальні зубці (рис. 3.7б), які

напрявлені по дотичним до деякого додаткового кола; палюїдні зубці (рис. 3.7в), які окреслені не тільки в нормальному перерізі, а і по довжині евольвентами; спіральні зубці (рис. 3.7г), які можуть бути окреслені по довжині різними спіралями, наприклад, спіраллю Архімеда, логарифмічною спіраллю та іншими спіралями; кругові зубці з нахилом $\beta_m \neq 0$ (рис. 3.7е), кругові зубці "Зерол" із $\beta_m = 0$ (рис. 3.7д).

Така розмаїтість форм зубців конічних коліс по довжині пов'язана з технологією їхнього виготовлення. Зубці - б, в, г, д і е приблизно замінюють істинно косі зубці, які дуже складно точно нарізати (кут β в косих зубців повинен бути постійним по всій довжині зубця, а замінні зубці мають змінний кут β по довжині зубця з фіксованим значенням кута β_m тільки в середньому перерізі).

В даний час переважне застосування знайшли прямі - а і кругові - е та д зубці, в силу їх більш високої технологічності.

Тангенціальні (**б**), палюїдні та спіральні (**в** та **г**) застосовуються рідше, тому що їхнє виготовлення характеризується підвищеною складністю.

3. Осі валів схрещуються в просторі. У цьому випадку передача може бути здійснена гіперболоїдними колесами (рис. 3.8). Початкові поверхні коліс 1 і 2 являються однопорожнинними гіперболоїдами обертання.

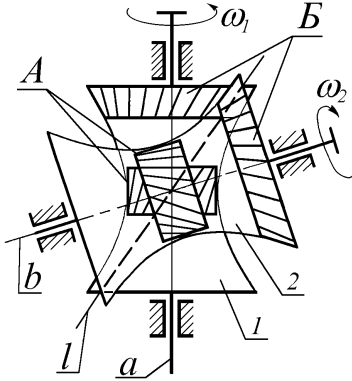


Рис. 3.8. Зачеплення гіперболоїдних коліс

Гіперболоїд колеса 1 утворюється обертанням лінії зуба l навколо осі a колеса 1.

Гіперболоїд колеса 2 утворюється обертанням загальної з колесом 1 лінії зубів l навколо осі b колеса 2.

Гіперболоїдні колеса, внаслідок їхньої складної форми (криволінійність обрису колеса, перемінність перерізу зубців по довжині), на практиці не використовуються, а замість них застосовуються замінні або циліндричні колеса, утворюючі гвинтову передачу (рис. 3.8А), або конічні колеса, утворюючі гіпоїдну передачу (рис. 3.8Б).

Гвинтова і гіпоїдна передачі мають точковий контакт зубців (замість лінійчатого, який спостерігається в гіперболоїдних коліс), що веде до зниженої навантажувальної спроможності (особливо гвинтової передачі, унаслідок більшої відмінності форми її коліс від форми первородних гіперболоїдних коліс).

Наявність суттєвого сковзання зубців уздовж лінії l обумовлює підвищений коефіцієнт втрат і, як наслідок, знижений коефіцієнт корисної дії (ККД) гіперболоїдної передачі.

У гвинтової передачі ККД особливо низький, тому що при тій же швидкості сковзання зубців уздовж лінії l робоча окружна швидкість у гвинтової передачі менше, ніж у гіпоїдної.

Гіпоїдне зачеплення знайшло широке застосування в головних передачах легкових, а також деяких малотонажних вантажних автомобілів. Воно дало можливість поліпшити компоновочні рішення автомобілів і знизило шумність роботи головної передачі. Повздовжнє сковзання зубців у коліс гіпоїдної передачі обумовлює рівномірний їхній знос по довжині і велику періодичність регулювальних робіт (на відміну від конічних спіральних коліс, що раніше більш широко використовувались в головних

передачах легкових автомобілів, які мали зосереджений знос зубців і в наслідок цього швидше виявляли шум та потребували регулювання).

Застосування ж спеціального гіпоїдного мастила дозволило при цьому знизити негативний вплив сковзання зубів на загальну довговічність гіпоїдної передачі.

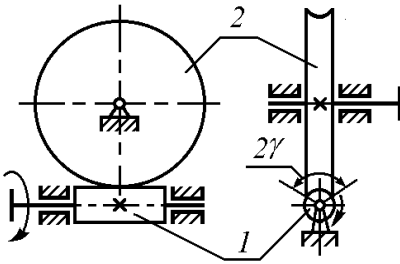


Рис. 3.9. Черв'ячна передача з циліндричним черв'яком

Гвинтова передача може бути трансформована в черв'ячну передачу з циліндричним черв'яком (рис. 3.9) або з глобоїдним черв'яком (рис. 3.10).

Черв'ячна передача з циліндричним черв'яком (рис. 3.9) на відміну від простої гвинтової передачі має колесо 2 із торіодною формою.

Таке удосконалювання гвинтової передачі привело до заміни точкового контакту зубців на криволінійчатий і, як наслідок, до підвищення навантажувальної здатності.

Лінійчатий контакт і спряженість профілів зубців забезпечується завдяки тому, що черв'ячне колесо нарізується черв'ячною фрезою - копією черв'яка.

Відмінною рисою черв'ячної передачі також є невеличке число зубців (заходів) черв'яка z_1 (по держстандарту $z_1=1; 2; 4$).

Це забезпечує значні величини передаточного числа одноступінчастої черв'ячної передачі ($u=z_2/z_1=8\ldots 80$).

Черв'як 1 стає при цьому несхожим на звичайне косозубе колесо, а фактично є одно-, дво-, або чотиризаходним гвинтом.

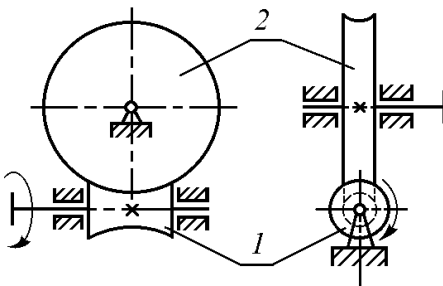


Рис. 3.10. Черв'ячна передача з глобоїдним черв'яком

Черв'ячна передача з глобоїдним черв'яком (рис. 3.10) є подальшим розвитком циліндричної черв'ячної передачі.

Як очевидно з рис. 3.10, черв'як 1 глобоїдної черв'ячної передачі також має нециліндричну форму.

Завдяки взаємообхвату черв'яка і черв'ячного колеса досягається багатопарне зачеплення зубців і, як наслідок, додаткове підвищення навантажувальної спроможності.

Недоліками глобоїдної

черв'ячної передачі є технологічні труднощі і складність взаємозалежних осьових регулювань черв'яка 1 і колеса 2, у той час, як черв'ячна передача з циліндричним черв'яком потребує лише осьового регулювання колеса 2, виконуваного порівняно простими прийомами. Тому черв'ячна передача з глобоїдним черв'яком має обмежене застосування.

Гіпоїдне зачеплення також може бути трансформоване в так звану спіроїдну черв'ячну передачу (рис. 3.11).

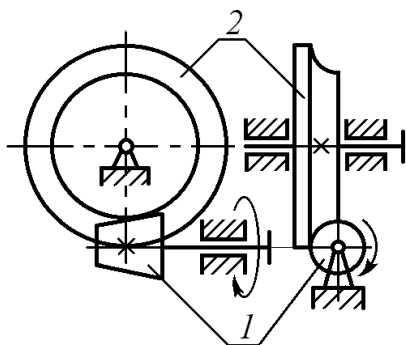


Рис. 3.11. Спіроїдна черв'ячна передача

Спіроїдна черв'ячна передача технологічна і має проміжну навантажувальну спроможність між навантажувальною спроможністю циліндричної і глобоїдної черв'ячних передач.

Вона допускає спрощений монтаж-демонтаж черв'ячного колеса.

Тут осьове регулювання звичайно має тільки черв'як 1, що є конічним гвинтом з одним або декількома заходами.

Гвинтова, гіпоїдна, черв'ячні і спіроїдна передачі, як правило, мають кут між осями перехресних валів, рівний 90° . Це спрощує виготовлення корпусу передачі.

3. Багатоланкові зубчасті передачі. Класифікація

Багатоланкові зубчасті передачі забезпечують здійснення більших передаточних відношень ніж одноступінчаті.

Комбінації типів ступенів у багаступінчастій передачі залежать як від необхідного сумарного (загального) передаточного відношення, так і від розташування вхідного і вихідного валів.

Розрізняють багаступінчасті передачі з нерухомими в просторі осями валів (прості, рядові або непланетарні передачі), а також передачі з рухомими в просторі осями окремих валів (планетарні, сателітні або епіциклічні передачі).

Найбільше поширення одержали багатоланкові передачі, що включають у свій склад тільки циліндричні колеса зовнішнього зачеплення.

Розглянемо декілька прикладів таких передач.

4. Зубчастий ряд із паразитними колесами

Паразитними колесами називаються такі, які одночасно являються і ведучими і веденими.

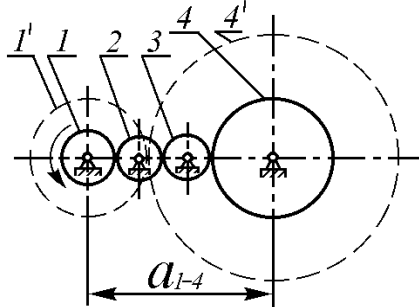


Рис. 3.12. Зубчастий ряд з паразитними колесами

У прикладі передачі, показаної на рис. 3.12, паразитними колесами являються колеса 2 і 3.

Тому що 1-е колесо є вхідним (ведучим), а 4-е - вихідним (веденим), то паразитні колеса з одного боку є веденими, а з іншого боку - ведучими.

Так, колесо 2 відносно колеса 1 являється веденим, а відносно колеса 3 - ведучим. Колесо 3 являється веденим відносно колеса 2 і ведучим - відносно колеса 4.

Розглянемо визначення загального передаточного відношення зубчастого ряду, показаної на рис. 3.12.

Для кожної пари коліс можна записати

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2}; \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Перемножимо окремо ліві й окремо праві частини записаних рівностей, тоді одержимо:

$$\frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3}{\omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right).$$

Після скорочень і упорядкування знаків будемо мати

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^3 \cdot \frac{z_4}{z_1}.$$

Позначимо число зовнішніх зачеплень буквою n (у даному прикладі $n = 3$). Також позначимо буквою k номер вихідного колеса ряду (у даному випадку $k = 4$).

Тоді, виходячи з розглянутого прикладу, для довільного циліндричного ряду зубчастих коліс із усіма проміжними паразитними колесами можна записати формулу по визначенню величини і знака передаточного відношення

$$i_{1-k} = (-1)^n \cdot \frac{z_k}{z_1}. \quad (3.5)$$

Якщо в ряду є внутрішні зачеплення, то вони, як такі, що не змінюють напрямки обертання валів, у число n не включаються.

З аналізу прикладу (рис. 3.12) можна зробити такі висновки:

1. Числа зубців паразитних коліс не впливають на величину передаточного відношення (звідси і походить їхня назва - паразитні).

2. Кожне паразитне колесо зовнішнього зачеплення змінює напрямок обертання вихідного вала на протилежний.

3. Застосування паразитних коліс дозволяє в широкому діапазоні змінювати міжосьову відстань між вхідним і вихідним валами.

4. При заданому (фіксованому) значенні міжосьової відстані між вхідним і вихідним валами застосування паразитних коліс забезпечує значне зменшення габаритів (об'єму) передачі.

З рис. 3.12 очевидно, що передача без паразитних коліс (із колесами 1' і 4', показаними пунктирно) забезпечує те ж передаточне відношення (по величині і за знаком), що і зубчастий ряд коліс 1-2-3-4, проте вона має значно більші загальні габарити.

5. Контрольні запитання

1. Яке призначення механізму передачі?

2. Які передачі називаються одноступінчастими і багатоступінчастими?

3. Що таке передаточне відношення?

4. Що означає додатний або від'ємний знак передаточного відношення для механізмів із паралельними осями валів?

5. Які механізми називаються редукторами, прискорювачами, варіаторами, коробками переміни передач?

6. Чим відрізняється поняття - *передаточне число* від поняття - *передаточне відношення*?

7. Які види передач Вам відомі?

8. Які переваги зубчасті передачі мають перед іншими видами передач?

9. Яким може бути відносне розташування осей обертання валів у триланкових (одноступінчастих) передачах?

10. Яка відмінність зовнішнього і внутрішнього зачеплень циліндричних зубчастих коліс?

11. Які різновиди зубців циліндричних коліс по довжині Ви знаєте?

12. Яке призначення рейкового зачеплення?

13. Яке призначення некруглих циліндричних зубчастих коліс?

14. Яку форму можуть мати зубчасті колеса при паралельному розташуванні валів триланкової передачі?

15. Які зубчасті колеса застосовуються в передачах із пересічними осями валів?

16. Чому переважно застосовуються конічні зубчасті передачі з прямим кутом перетинання геометричних осей валів?
17. Як визначити передаточне відношення конічного зачеплення через кути початкових конусів коліс?
18. Яким індексом позначаються геометричні параметри конічного колеса в зовнішньому торці?
19. Яким індексом позначаються геометричні параметри конічного колеса в його середньому перерізі?
20. Яку форму по довжині можуть мати зубці конічних коліс?
21. Чим обумовлене різноманіття застосовуваних раніше і в теперішній час форм зубців по довжині в конічних зубчастих коліс?
22. Яку форму можуть мати зубчасті колеса при перехресних геометричних осях їхніх валів?
23. Яка зубчаста передача називається гвинтовою?
24. Яка зубчаста передача називається гіпоїдною?
25. Розвитком якої передачі є черв'ячна передача?
26. Які різновиди черв'ячних передач Ви знаєте?
27. Що таке число заходів черв'яка? Як воно впливає на передаточне відношення черв'ячної передачі?
28. Чим обумовлене застосування багатоступінчастих передач?
39. Які різновиди багатоступінчастих зубчастих передач Вам відомі?
30. Які зубчасті колеса називаються паразитними?
31. Яке призначення паразитних зубчастих коліс?

Лекція 9

Тема: Багатоланкові зубчасті передачі

Зміст:

1. Багатоланкові (багатоступінчасті) зубчасті передачі
2. Багатоланкові зубчасті передачі з нерухомими осями валів
3. Зубчастий ряд із паразитними колесами
4. Багатоступінчасті циліндричні рядові зубчасті передачі
5. Особливості комбінованих багатоступінчастих передач.
6. Контрольні запитання

1. Багатоланкові (багатоступінчасті) зубчасті передачі

Багатоланкові зубчасті передачі забезпечують здійснення більших передаточних відношень ніж одноступінчасті.

Комбінації типів ступенів у багатоступінчастій передачі залежать як від необхідного сумарного (загального) передаточного відношення, так і від розташування вхідного і вихідного валів.

Розрізняють багатоступінчасті передачі з нерухомими в просторі осями валів (прості, рядові або непланетарні передачі), а також передачі з рухомими в просторі осями окремих валів (планетарні, сателітні або епіциклічні передачі).

2. Багатоланкові зубчасті передачі з нерухомими осями валів

Найбільше поширення одержали багатоланкові передачі, що включають у свій склад тільки циліндричні колеса зовнішнього зачеплення.

Розглянемо декілька прикладів таких передач.

3. Зубчастий ряд із паразитними колесами

Паразитними колесами називаються такі, які одночасно являються і ведучими і веденими.

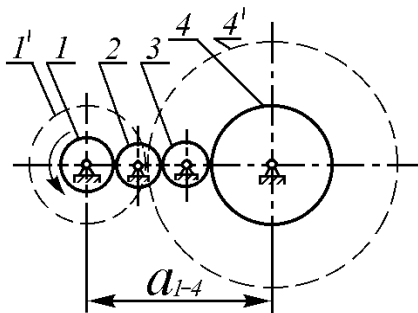


Рис. 3.12. Зубчастий ряд з паразитними колесами

У прикладі передачі, показаної на рис. 3.12, паразитними колесами являються колеса 2 і 3.

Тому що 1-е колесо є вхідним (ведучим), а 4-е - вихідним (веденим), то паразитні колеса з одного боку є веденими, а з іншого боку - ведучими.

Так, колесо 2 відносно колеса 1 являється веденим, а відносно колеса 3 - ведучим. Колесо 3 являється веденим відносно колеса 2 і ведучим - відносно колеса 4.

Розглянемо визначення загального передаточного відношення зубчастого ряду, показаної на рис. 3.12.

Для кожної пари коліс можна записати

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_2}; \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Перемножимо окремо ліві й окремо праві частини записаних рівностей, тоді одержимо:

$$\frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3}{\omega_2 \cdot \omega_3 \cdot \omega_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right).$$

Після скорочень і упорядкування знаків будемо мати

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^3 \cdot \frac{z_4}{z_1}.$$

Позначимо число зовнішніх зачеплень буквою n (у даному прикладі $n = 3$). Також позначимо буквою k номер вихідного колеса ряду (у даному випадку $k = 4$).

Тоді, виходячи з розглянутого прикладу, для довільного циліндричного ряду зубчастих коліс із усіма проміжними паразитними колесами можна записати формулу по визначенню величини і знака передаточного відношення

$$i_{1-k} = (-1)^n \cdot \frac{z_k}{z_1}. \quad (3.5)$$

Якщо в ряду є внутрішні зачеплення, то вони, як такі, що не змінюють напрямки обертання валів, у число n не включаються.

З аналізу прикладу (рис. 3.12) можна зробити такі висновки:

1. Числа зубців паразитних коліс не впливають на величину передаточного відношення (звідси і походить їхня назва - паразитні).

2. Кожне паразитне колесо зовнішнього зачеплення змінює напрямок обертання вихідного вала на протилежний.

3. Застосування паразитних коліс дозволяє в широкому діапазоні змінювати міжосьову відстань між вхідним і вихідним валами.

4. При заданому (фіксованому) значенні міжосьової відстані між вхідним і вихідним валами застосування паразитних коліс забезпечує значне зменшення габаритів (об'єму) передачі.

З рис. 3.12 очевидно, що передача без паразитних коліс (із колесами 1' і 4', показаними пунктирно) забезпечує те ж передаточне відношення (по величині і за знаком), що і зубчастий ряд коліс 1-2-3-4, проте вона має значно більші загальні габарити.

4. Багатоступінчасті циліндричні рядові зубчасті передачі

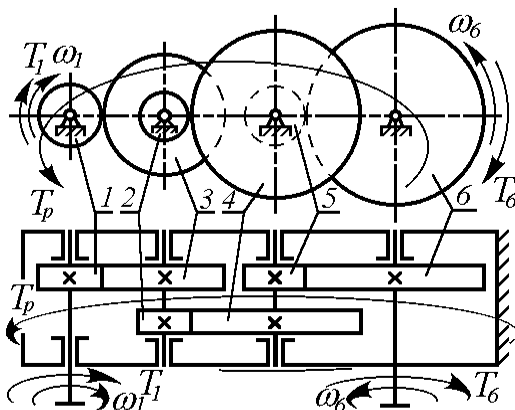


Рис. 3. 13. Триступінчаста циліндрична рядова зубчаста передача

двох проекціях, або в одній - у площині розташування осей валів (у даному прикладі це горизонтальна проекція).

Для окремо взятих ступенів можемо записати:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}; \quad \frac{\omega_5}{\omega_6} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

Розглянемо визначення загального передаточного відношення багатоступінчастої циліндричної рядової зубчастої передачі на прикладі триступінчастої передачі, показаної на рис. 3.13.

Показано дві проекції передачі (фронтальна - вид збоку і горизонтальна - вид у плані).

Горизонтальна проекція передачі більш інформативна, і тому надалі будемо показувати різноманітні передачі або в

Перемножимо окремо ліві й окремо праві частини записаних рівностей

$$\frac{\omega_1 \cdot \omega_3 \cdot \omega_5}{\omega_2 \cdot \omega_4 \cdot \omega_6} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(-\frac{z_6}{z_5}\right).$$

З урахуванням $\omega_2 = \omega_3$ (колеса 2 і 3 посаджені жорстко на одному валі) і $\omega_4 = \omega_5$ (колеса 4 і 5 також жорстко посаджені на одному валі) зробимо скорочення і деяке упорядкування

$$i_{1-6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = (-1)^3 \cdot \left(\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}\right).$$

Помітимо, що загальне передаточне відношення буде дорівнювати

$$i_{заг} = i_{1-6} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = i_I \cdot i_{II} \cdot i_{III}, \quad (3.6)$$

де i_I , i_{II} , i_{III} - передаточні відношення окремих ступенів передачі, узяті зі своїми знаками.

Таким чином, загальне передаточне відношення багатоступінчастої рядової циліндричної передачі можна визначити шляхом перемножування передаточних відношень окремих ступенів, узятих із своїми знаками.

Можна також скористатися формулою для визначення загального передаточного відношення у вигляді

$$i_{1-k} = \frac{\omega_1}{\omega_k} = (-1)^n \cdot \frac{Dz_{вн}}{Dz_{вч}}, \quad (3.7)$$

де k - порядковий номер вихідного вала,

n - число пар зовнішнього зачеплення,

$Dz_{вн}$ - добуток чисел зубців ведених коліс,

$Dz_{вч}$ - добуток чисел зубців ведучих коліс.

Встановимо, що колеса 1, 3 і 5 - ведучі, а колеса 2, 4 і 6 - ведені.

Ознакою ведучого колеса є збіг напрямків кутової швидкості колеса і прикладеного до нього зовнішнього обертового момента сил.

Ознакою веденого колеса є протилежність напрямків кутової швидкості колеса і прикладеного до нього зовнішнього обертового момента сил.

По вказаних вище ознаках колесо 1 - ведуче, а колесо 6 - ведене.

На ведучому колесі 1 обертовий момент сил T_I - рушійний, тому він направлений убік обертання колеса.

На веденому колесі 6 обертовий момент T_6 - є моментом сил опору, тому він направлений у протилежний обертання колеса 6 бік.

Що стосується інших коліс, то легко зміркувати, що в кожній парі коліс, що знаходяться в зачепленні, одне буде ведучим, а друге - веденим. У парі коліс 1 - 2: колесо 1 - ведуче, а колесо 2 - ведене. У парі коліс 3 - 4: колесо 3 - ведуче, а колесо 4 - ведене. У парі 5 - 6: колесо 5 - ведуче, а колесо 6 - ведене.

Надалі будемо користуватися встановленими вище правилами при визначенні напрямків обертових моментів на окремих зубчастих колесах і валах.

Тепер визначимо взаємозв'язок величин обертових моментів, прикладених до вхідного і до вихідного валів. Нехай передача має коефіцієнт корисної дії - η .

Нагадаємо, що коефіцієнтом корисної дії називається відношення корисної частини роботи $A_{кор}$ до усієї затраченої роботи $A_{затр}$.

При постійному потоці потужності N , що йде через передачу, можемо записати:

$$A_{кор} = A_{вих} = N_{вих} \cdot \Delta t,$$

де

Δt - будь-який проміжок часу;

$$A_{затр} = A_{вх} = N_{вх} \cdot \Delta t.$$

З урахуванням

$$N_{вих} = T_{вих} \cdot \omega_{вих};$$

$$N_{вх} = T_{вх} \cdot \omega_{вх},$$

одержимо

$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{затр}} = \frac{A_{вих}}{A_{вх}} = \frac{N_{вих} \cdot \Delta t}{N_{вх} \cdot \Delta t} = \frac{N_{вих}}{N_{вх}} = \frac{T_{вих} \cdot \omega_{вих}}{T_{вх} \cdot \omega_{вх}}.$$

$$\text{Звідси слідує} \quad T_{вих} = T_{вх} \cdot \frac{\omega_{вх}}{\omega_{вих}} \cdot \eta = T_{вх} \cdot |i| \cdot \eta, \quad (3.8)$$

тому що $\frac{\omega_{вх}}{\omega_{вих}} = |i|$ - без урахування знака загального передаточного відношення.

Золоте правило механіки говорить: “В скільки разів програємо у швидкості, у стільки ж разів виграємо в силі”.

Без урахування витрат на подолання тертя (тобто в припущенні $\eta \rightarrow 1$) у формулі (3.8) золоте правило підтверджується.

Проте часто η істотно відрізняється від 1 (наприклад, у гвинтовій, гіпоїдній і черв'ячних передачах).

З урахуванням останнього зауваження варто було б золоте правило механіки сформулювати дещо інакше: “В скільки разів програємо у

швидкості, у стільки ж разів, без урахування витрат на додання тертя, *виграємо в силі*”.

Якщо ж урахувати витрати на додання тертя, то виграш зменшиться в $1/\eta$ разів.

Для триступінчастої передачі, показаної на рис. 3.13, можна записати

$$T_6 = T_1 \cdot |i_{1-6}| \cdot \eta.$$

Напрямок T_6 , як веденого обертового момента сил, протилежний напрямку кутової швидкості ω_6 , а напрямок кутової швидкості ω_6 відносно напрямку кутової швидкості ω_1 визначається знаком загального передаточного відношення, а він у даному прикладі - від'ємний, тобто напрямки ω_1 і ω_6 - протилежні.

На рис. 3.13 показаний також реактивний момент сил T_p , прикладений з боку закріплення до корпуса передачі.

Цей момент T_p сприймається фундаментними болтами (болтами кріплення корпуса передачі до фундаменту).

Його величина визначається за умовою $\Sigma \bar{T}_i = 0$, тобто за умовою рівноваги всіх зовнішніх сил (моментів сил), прикладених до валів і до корпуса передачі. Очевидно, що в даному прикладі

$$T_p = T_1 + T_6.$$

Зауважимо, що при додатному загальному передаточному відношенні напрямки $\omega_{вх}$ і $\omega_{вих}$ були б однакові, а обертові моменти $T_{вх}$ і $T_{вих}$ тоді були б направлені протилежно. А реактивний момент сил T_p був би рівним різниці

$$T_p = T_{вих} - T_{вх}.$$

По викладеній вище методиці можна знайти також моменти сил на проміжних валах передачі.

Наприклад,

$$T_{2,3} = T_1 \cdot |i_{1-2}| \cdot \eta_{1-2},$$

де - η_{1-2} коефіцієнт корисної дії першого ступеня передачі;

$$|i_{1-2}| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| = \frac{z_2}{z_1}.$$

Так само можемо знайти

$$T_{5,4} = \frac{T_6}{|i_{5-6}| \cdot \eta_{5-6}},$$

де η_{5-6} - коефіцієнт корисної дії третього ступеня передачі;

$$|i_{5-6}| = \left| \frac{\omega_5}{\omega_6} \right| = \frac{z_6}{z_5}.$$

Загальний коефіцієнт корисної дії триступінчастої передачі, очевидно, дорівнює

$$\eta = \eta_{1-2} \cdot \eta_{3-4} \cdot \eta_{5-6}.$$

5. Особливості кінематичного аналізу комбінованих багатоступінчастих передач

При наявності комбінованих ступенів у багатоступінчастій передачі не прийнято враховувати знак передаточного відношення окремих ступенів, тому що напрямок обертання вихідного вала відносно напрямку обертання вхідного залежить від напрямку погляду спостерігача.

Тому всі розрахунки кінематики передачі роблять по модулях (величинах) передаточних відношень її ступенів, а напрямки обертання валів визначаються для кожного вала окремо, починаючи з вхідного вала і закінчуючи вихідним валом.

Нижче приведені рішення задач 3.1, 3.2 і 3.3 на відшукування загального передаточного відношення комбінованих багатоступінчастих передач, ознайомившись із якими читач може вникнути в деталі кінематичного аналізу комбінованих багатоступінчастих рядових зубчастих передач.

Задача 1. Визначити загальне передаточне відношення триступінчастого конічно-циліндричного редуктора (рис. 3.14) і напрямок обертання вихідного вала на виді *Б*, якщо вхідний вал на виді *А* обертається по годинниковій стрілці. Числа зубців коліс: $z_1=20$; $z_2=80$; $z_3=22$; $z_4=66$; $z_5=18$; $z_6=54$.

Рішення:

1. Знайдемо загальне передаточне відношення редуктора, перемноживши величини передаточних відношень трьох ступенів

$$\begin{aligned} i_{заг} &= |i_I| \cdot |i_{II}| \cdot |i_{III}| = \\ &= \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3} \right) \cdot \left(\frac{z_6}{z_5} \right) = \frac{80}{20} \cdot \frac{66}{22} \cdot \frac{54}{18} = 36. \end{aligned}$$

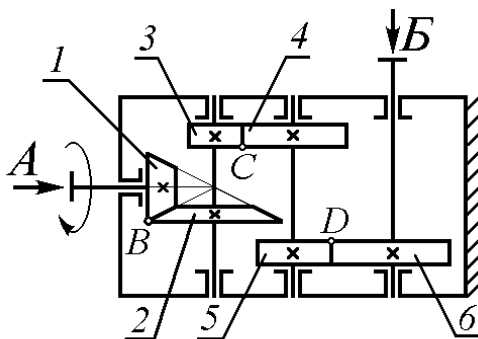


Рис. 3.14. Триступінчастий конічно-циліндричний редуктор

D усередину креслення.

Відповідь:

1. $i_{заг} = i_{1-6} = 36$.

2. На виді *B* вихідний вал обертається по годинниковій стрілці.

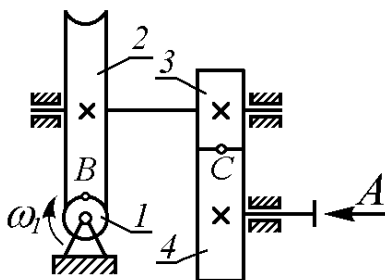


Рис. 3.15. Двоступінчастий черв'ячно-циліндричний редуктор

2. Знайдемо напрямок обертання вихідного вала на виді *B*.

Для цього проведемо такі міркування: точка *B* буде рухатися всередину креслення (це визначається напрямком обертання вхідного вала), тоді точка *C* буде рухатися на нас, а точка *D* - усередину креслення. На виді *B* побачимо обертання вихідного вала по годинниковій стрілці, що визначається рухом точки

Задача 2.

Визначити загальне передаточне відношення черв'ячно-циліндричного редуктора (рис. 3.15) і напрямок обертання вихідного вала 4 на виді *A*, якщо черв'як має праву нарізку, його число заходів $z_1=2$, а числа зубців коліс $z_2=30$, $z_3=20$, $z_4=60$.

Рішення:

1. Визначимо загальне передаточне відношення редуктора, перемноживши передаточні відношення двох його ступенів

$$i_{заг} = i_{1-4} = |i_I| \cdot |i_{II}| = \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3} \right) = \frac{30}{2} \cdot \frac{60}{20} =$$

2. Знайдемо напрямок обертання вихідного вала на виді *A*.

Тому що черв'як являє собою гвинт правої нарізки, при зазначеному напрямку його обертання точка *B*, що належить колесу 2, буде рухатися з креслення (черв'як 1 відносно колеса 2 загвинчується всередину креслення, а

обід колеса 2 у місці контакту з витками черв'яка відносно останнього буде переміщатися в зворотному напрямку). Тоді точка C в зацепленні коліс 3 і 4 також буде рухатися з креслення, а вихідний вал при цьому буде обертатися на виді A проти годинникової стрілки.

Відповідь:

1. $i_{заг} = i_{1-4} = 45$.

2. На виді A вихідний вал обертатися проти годинникової стрілки.

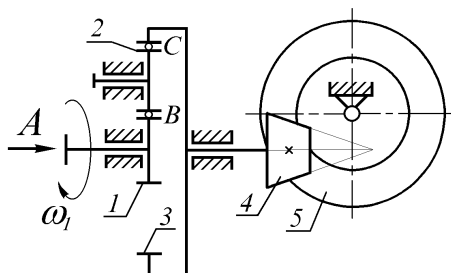


Рис. 3.16. Циліндро-гіпоїдна передача

Задача 3.

Визначити загальне передаточне відношення циліндро-гіпоїдної передачі (рис. 3.16) і напрямок обертання вихідного вала 5, якщо вхідний вал 1 на виді A обертатися по годинниковій стрілці. Числа зубців коліс: $z_1 = 20$; $z_2 = 20$; $z_3 = 60$; $z_4 = 12$; $z_5 = 60$.

Рішення:

1. Визначимо загальне передаточне відношення передачі, перемноживши передаточні

відношення окремих ступенів

$$i_{заг} = i_{1-5} = |i_I| \cdot |i_{III}| \cdot |i_{III}| = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_5}{z_4} = \frac{20}{20} \cdot \frac{60}{20} \cdot \frac{60}{12} = 15.$$

Попутно відзначимо, що колесо 2 - паразитне, і його число зубців z_2 у загальному передаточному відношенні не має значення, тому що скорочується.

2. Знайдемо напрямок обертання вихідного вала.

При зазначеному напрямку обертання вхідного вала 1 точка B буде рухатися з креслення. Тоді точка C буде рухатися всередину креслення й обумовить обертання вала 3-4 на виді A проти годинникової стрілки.

Тому що шестерня 4 гіпоїдної пари знаходиться над колесом 5, то останнє буде обертатися в площині креслення проти годинникової стрілки.

Відповідь:

1. Загальне передаточне відношення

$$i_{заг} = i_{1-5} = 15.$$

2. Вихідний вал колеса 5 обертатися проти годинникової стрілки.

6. Контрольні запитання

1. Які різновиди багатоступінчастих зубчастих передач Вам відомі?
2. Які зубчасті колеса називаються паразитними?
3. Яке призначення паразитних зубчастих коліс?
4. Як визначити передаточне відношення багатоступінчастої передачі?
5. Яке зубчасте колесо називається ведучим?
6. Яке зубчасте колесо називається веденим?
7. Як впливає ККД (коефіцієнт корисної дії) передачі на величину вихідного обертового моменту сил?
8. Як визначити вихідний обертовий момент сил по вхідному?
9. Що таке реактивний момент сил передачі? Як його можна визначити?
10. Які особливості визначення передаточного відношення комбінованої багатоступінчастої передачі?

Лекція 10

Тема: Планетарні зубчасті передачі

Зміст:

1. Ознаки планетарної передачі.
2. Найпростіші циліндричні планетарні передачі.
3. Кінематичний аналіз циліндричних планетарних передач. Метод уявної зупинки водила.
4. Задачі з кінематичного аналізу найпростіших планетарних передач.
5. Контрольні запитання.

1. Ознаки планетарної передачі

Як уже говорилося вище, *планетарними передачами називаються такі, у яких є колеса, що чинять складний рух у просторі*, тобто колеса - з рухомими в просторі осями валів.

Можна сказати інакше: планетарна передача має дві корпусних ланки. Одна з них нерухома - стояк. Другий корпус - рухомий. Його називають *водилом*, тому що цей рухомий корпус водить зубчасті колеса, називані сателітами (супутниками або планетами), по їхніх просторових орбітах.

Наявність складного руху сателітів обумовлює підвищену складність кінематичного аналізу планетарних передач у порівнянні з кінематичним аналізом простих (рядових або не планетарних) передач.

Планетарні передачі в порівнянні з простими мають *дві суттєві особливості*.

Перша з них полягає в тому, що планетарна передача в двоступінчастому виконанні може забезпечувати практично будь-яке велике передаточне відношення (теоретично - необмежене). При цьому з ростом величини передаточного відношення виявляється суттєве зниження ККД передачі, що необхідно враховувати при виборі тієї або іншої схеми планетарної передачі для силового приводу.

Друга особливість планетарних зубчастих механізмів - можливість інтегрування (сумування) рухів або диференціювання (розділення) оберткових моментів.

2. Найпростіші циліндричні планетарні передачі

На рис. 3.17 показані кінематичні схеми найпростіших планетарних зубчастих механізмів п'ятьох типів, що знайшли достатньо широке застосування в машинах, які відрізняються одна від одної комбінаціями зовнішніх і внутрішніх зачеплень.

Тут позначено: 1, 2, 3, 4 - зубчасті колеса (1 і 4 - центральні; 2 і 3 - сателіти; H - водило; 0 - стояк.

Зауважимо, що схема **а** походить зі схеми **б**, якщо прийняти $z_2 = z_3$.

Ці дві схеми (**а** і **б**) представляють так званий планетарний механізм Джемса (з одновісними і двовісними сателітами).

Схеми **в**, **г** і **д** представляють планетарні механізми Давида. Як ми переконаємося нижче, усі вони мають те саме так зване генеральне рівняння руху (або по іншому - формулу Вілліса). Це і послужило підставою для їхньої загальної назви.

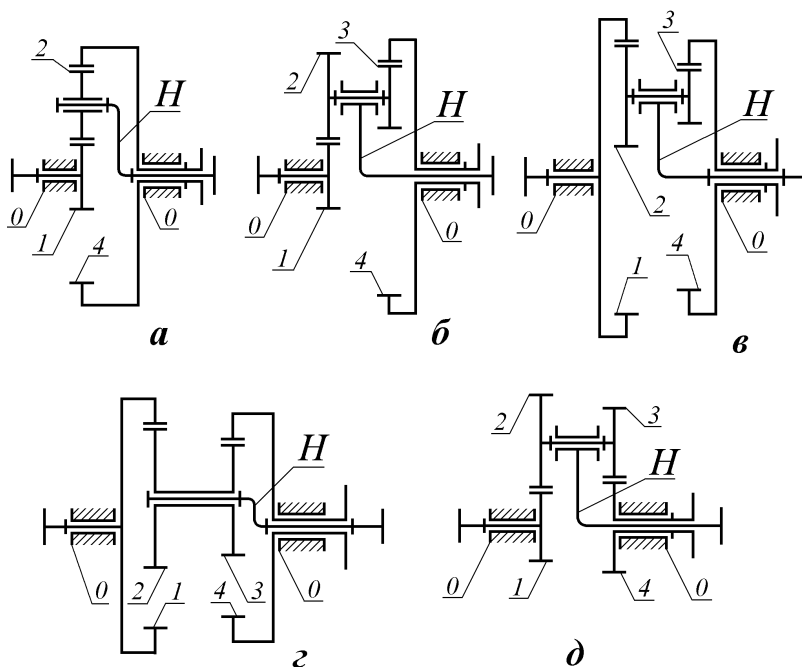


Рис. 3.17. Схеми найпростіших планетарних зубчастих механізмів

Всі подані на рис. 3.17 механізми мають по три зовнішніх вала. При цьому можна комбінувати: два входи - один вихід (інтегрування рухів); один вхід - два виходи (диференціювання обертових моментів); один вал - зупинений, другий вал - вхід, третій вал - вихід (редуктор або прискорювач, у залежності від величини передатного відношення).

Як бачимо, кожна схема дозволяє набрати досить багато варіантів її використання.

Кожна зі схем при використанні її в якості редуктора має практичний діапазон передаточних чисел. У цьому ми зможемо перекоонатися, розглянувши кінематику планетарних зубчастих механізмів.

Кінематичний аналіз планетарних механізмів здійснюється за методом Вілліса, який полягає у виборі такої системи відліку кутових швидкостей, у котрій би не спостерігалось складних рухів усіх його ланок.

3. Кінематичний аналіз циліндричних планетарних передач. Метод уявної зупинки водила

Розглянемо докладніше метод уявної (мисленої) зупинки водила (метод Вілліса) на прикладі одноступінчастого планетарного механізму Джемса.

Зобразимо механізм у двох проекціях (рис. 3.18). На рисунку позначено: 1 - центральне «сонячне» зубчасте колесо; 2 - «сателіт»; 4 - центральне «коронне» або «вінечне» зубчасте колесо; Н - «води́ло».

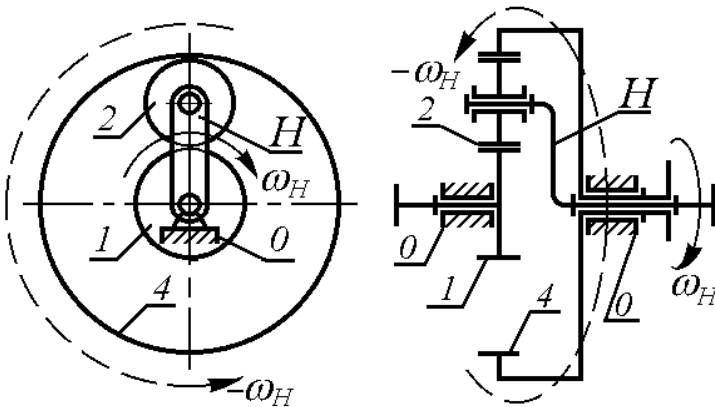


Рис. 3.18. Кінематична схема одноступінчастого планетарного механізму (планетарного механізму Джемса з одновісним сателітом)

Механізм Джемса відноситься до сімейства плоских механізмів. Його число ступенів свободи можна підрахувати по формулі (1.3) Чебишева

$$w = 3n - 2p_n - p_6 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2,$$

де $n = 4$ (1, 2, 4, Н);

$$p_n = 4$$
 (0 - 1, 2 - Н, 0 - 4, 4 - Н);

$$p_6 = 2$$
 (1 - 2, 2 - 4).

Тому що механізм має два ступені свободи, у ньому може спостерігатися велика розмаїтість сполучень кутових швидкостей усіх рухомих ланок. Необхідно знайти рівняння, якому всі ці швидкості повинні підпорядковуватися.

Будемо вважати відомим напрямок обертання водила (нехай навіть умовно).

Відзначимо, що відносно нерухомого корпусу 0 сателіт 2 має складний рух (суму обертання навколо власної осі й обертання разом з цією віссю навколо центральної осі механізму). Це ускладнює пошук рівняння руху в нерухомій системі відліку.

Відносно рухомого корпусу Н сателіт 2 має просте обертання. Всі інші ланки мають просте обертання як відносно стояка, так і відносно водила Н. Звідси можна зробити очевидний простий висновок - відносно рухомого корпусу Н (води́ла) усі ланки разом мають прості обертання, тоді загальний закон руху (рівняння, що зв'язує абсолютні кутові швидкості валів) варто шукати у взаємозв'язку відносних кутових швидкостей валів механізму відносно водила Н, тобто у рухомій системі відліку кутових швидкостей, зв'язаній з водилом Н.

Для виділення в чистому вигляді відносного руху всіх ланок механізму відносно водила Н необхідно мислено зупинити водило, не порушуючи відносного руху всіх ланок механізму.

Наочно метод уявної зупинки водила можна продемонструвати на прикладі механічного годинника з секундною стрілкою. Будемо умовно вважати секундну стрілку водилом годинника. Не порушуючи ходу годинника (тобто, відносного руху в механізмі годинника) повідомимо всьому механізму годинника додаткове обертання з кутовою швидкістю секундної стрілки, але протилежного її обертанню напрямку (тобто проти годинникової стрілки).

Що при цьому відбулося? Годинник як йшов, так і йде, але спостерігач бачить нерухомою секундну стрілку. Колишній раніше нерухомий корпус годинника обертається проти годинникової стрілки. Всі інші рухомі ланки годинникового механізму також одержали додаткове обертання, протилежне обертанню секундної стрілки з її кутовою швидкістю. Це додаткове обертання треба відняти з абсолютного обертання кожної рухливої ланки, і тоді можна побачити в чистому вигляді відносний рух усіх ланок відносно секундної стрілки, що стала нерухомою. Все це ми проробили мислено.

Стосовно до планетарного зубчастого механізму Джемса метод уявної зупинки водила можна сформулювати в такий спосіб.

Не порушуючи відносного руху ланок механізму, мислено повідомимо всьому механізму додаткову кутову швидкість, рівну Ω_H , але протилежно їй спрямовану. При цьому будемо спостерігати водило зупиненим, а механізм

не планетарним, для якого не важко записати вирази для відношень кутових швидкостей, що спостерігаються (зворотно пропорційно числам зубців відповідних коліс). Всі ланки спостерігаються обертовими відносно нерухомого водила з кутовими швидкостями, які можна визначити шляхом вирахування з величини абсолютної кутової швидкості кожної ланки величини кутової швидкості ω_H .

Позначимо швидкості обертання ланок відносно водила штрихом, тоді будемо мати

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \omega_1 - \omega_H; \\ \omega'_2 &= \omega_2 - \omega_H; \quad (\omega'_3 = \omega_3 - \omega_H); \\ \omega'_4 &= \omega_4 - \omega_H; \\ \omega'_H &= \omega_H - \omega_H = 0; \\ \omega'_0 &= 0 - \omega_H = -\omega_H.\end{aligned}$$

Кутові швидкості $\omega'_1, \omega'_2, \dots$ являють собою відносні кутові швидкості ланок відносно водила, передаточні відношення яких можна виразити так само, як у звичайних простих (не планетарних) механізмах, через відношення чисел зубців відповідних коліс.

Наприклад,

$$\begin{aligned}i_{1-2}^{(H)} &= \frac{\omega'_1}{\omega'_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \\ i_{2-4}^{(H)} &= \frac{\omega'_2}{\omega'_4} = \frac{z_4}{z_2}; \\ i_{1-4}^{(H)} &= \frac{\omega'_1}{\omega'_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_2}\right) = -\frac{z_4}{z_1}.\end{aligned}$$

Зауважимо, що в позначенні передаточного відношення для планетарних передач у дужках вказується індекс зупиненої ланки.

При вирішенні різних задач іноді використовуються всі записані рівняння, але останнє рівняння найбільш ємне, тому що включає у свій склад усі абсолютні кутові швидкості зовнішніх валів механізму Джемса. Перепишемо це рівняння в такий спосіб

$$\frac{\omega'_1}{\omega'_4} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{1-4}^{(H)} = -\frac{z_4}{z_1}.$$

Формула Віллеса, іноді називана генеральним рівнянням руху планетарного механізму, у загальному вигляді записується так

$$\frac{\omega_I - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{I-4}^{(H)}. \quad (3.9)$$

Ця формула справедлива для всіх п'яти схем планетарних механізмів, зображених на рис. 3.17, і може відрізнятися для окремих схем тільки знаком і величиною передатного відношення в правій частині, яку іноді називають передаточним відношенням *оберненого планетарного зубчастого механізму* (тобто перетвореного мислено в не планетарний - із зупиненим водилом).

Для одноступінчастої схеми планетарного механізму Джемса

$$i_{I-4}^{(H)} = -\frac{z_4}{z_I}.$$

Аналогічно можемо записати передаточне відношення обернених планетарних механізмів інших схем.

Так, для схеми (рис. 3.17б) двохступінчатого планетарного механізму Джемса

$$i_{I-4}^{(H)} = \left(-\frac{z_2}{z_I}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_I \cdot z_3}. \quad (3.10)$$

Для схем (рис. 3.17 в, з, д) планетарних механізмів Давида

$$i_{I-4}^{(H)} = \left(\pm \frac{z_2}{z_I}\right) \cdot \left(\pm \frac{z_4}{z_3}\right) = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_I \cdot z_3}. \quad (3.11)$$

Нагадаємо, що знаки “-” записані для відношень чисел зубців коліс у зовнішніх зачепленнях, а знаки “+” записані для відношень чисел зубців у внутрішніх зачепленнях.

Невеличка різниця (тільки в знаку $i_{I-4}^{(H)}$) формул Вілліса планетарних механізмів Джемса і Давида обумовлює дуже різні їхні кінематичні можливості.

Вирішимо декілька задач на визначення передаточних чисел деяких варіантів планетарних передач Джемса і Давида.

4. Задачі з кінематичного

4. Задачі з кінематичного аналізу найпростіших планетарних передач

Задача 1. Визначити величину передаточного відношення $i_{I-H}^{(4)}$ планетарного механізму за схемою (рис. 3.19). Числа зубців коліс: $z_I=20$, $z_2=20$, $z_4=60$. Колесо 4 виконано заодно з корпусом передачі.

Рішення:

1. Запишемо формулу Вілліса в загальному вигляді

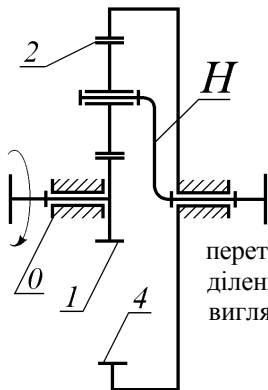


Рис. 3.19. Схема редуктора Джемса з одним сателітом

відношення оберненого механізму

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{1-4}^{(H)}.$$

2. Тому що за умовою задачі $\omega_4 = 0$, перетворимо формулу Віллїса шляхом почленного ділення чисельника лівої частини на знаменник до вигляду

$$-\frac{\omega_1}{\omega_H} + 1 = i_{1-4}^{(H)}$$

або

$$i_{1-H}^{(4)} = 1 - i_{1-4}^{(H)}. \quad (3.12)$$

3. Знайдемо значення передаточного

$$i_{1-H}^{(4)} = -\frac{z_4}{z_1} = -\frac{60}{20} = -3$$

і після підстановки величини $i_{1-H}^{(4)}$ у вираз (3.12) знайдемо

відповідь:

$$i_{1-H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1-4}^{(H)} = 1 - (-3) = 4.$$

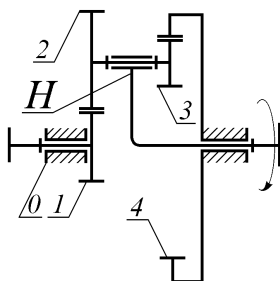


Рис. 3.20. Схема двоступінчастого прискорювача Джемса (з двома сателітами)

Задача 2. Визначити передаточне відношення $i_{H-1}^{(4)}$ планетарного двохступінчастого механізму Джемса за схемою (рис. 3.20). Числа зубців коліс: $z_1 = 30$; $z_2 = 40$; $z_3 = 20$; $z_4 = 90$. Колесо 4 нерухоме.

Рішення:

1. Запишемо формулу Віллїса (3.9)

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{1-4}^{(H)}.$$

2. Визначимо значення передаточного відношення оберненого механізму по формулі (3.10)

$$i_{1-4}^{(H)} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = -\frac{40 \cdot 90}{30 \cdot 20} = -6.$$

3. Знайдемо з формули Вілліса відношення $\frac{\omega_H}{\omega_l} = i_{H-l}^{(4)}$. Для цього

перепишемо формулу Вілліса з урахуванням $\omega_l = 0$ у вигляді

$$\frac{\omega_l - \omega_H}{-\omega_H} = i_{l-H}^{(H)}$$

і виконаємо послідовно наступні алгебраїчні перетворення:

$$-\frac{\omega_l}{\omega_H} + 1 = i_{l-H}^{(H)}; \quad \frac{\omega_l}{\omega_H} = i_{l-H}^{(4)} = 1 - i_{l-H}^{(H)};$$

$$\frac{\omega_H}{\omega_l} = i_{H-l}^{(4)} = \frac{1}{i_{l-H}^{(4)}} = \frac{1}{1 - i_{l-H}^{(H)}}. \quad (3.13)$$

Після підстановки у вираз (3.13) значення $i_{l-H}^{(H)}$ одержимо

відповідь: $i_{H-l}^{(4)} = \frac{\omega_H}{\omega_l} = \frac{1}{1 - i_{l-H}^{(H)}} = \frac{1}{1 - (-6)} = \frac{1}{7}.$

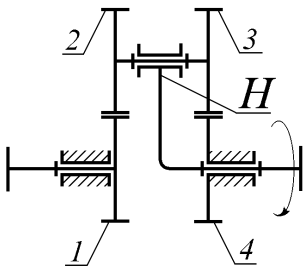


Рис. 2.21. Схема планетарного редуктора Давида з двома зовнішніми зачепленнями

Задача 3. Визначити передаточне

відношення $i_{H-l}^{(4)}$ планетарного двохступінчастого механізму Давида з двома зовнішніми зачепленнями за схемою (рис. 3.21). Числа зубців коліс: $z_1 = z_3 = 100$; $z_2 = 99$; $z_4 = 101$. Колесо 4 - нерухоме.

Рішення:

1. Визначимо значення передаточного відношення оберненої передачі по формулі (3.11)

$$i_{l-H}^{(H)} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100} = 0,9999.$$

2. Скористаємося виразом (3.13), отриманим у задачі 3.5 із перетворення формули Вілліса загального вигляду, тоді знайдемо

відповідь:

$$i_{H-l}^{(4)} = \frac{\omega_H}{\omega_l} = \frac{1}{1 - i_{l-H}^{(H)}} = \frac{1}{1 - 0,9999} = \frac{1}{0,0001} = 10000.$$

Задача 4. Визначити передаточне відношення $i_{H-1}^{(4)}$ планетарного двохступінчатого механізму Давида з двома внутрішніми зачепленнями за схемою (рис. 3.22). Числа зубців коліс: $z_1 = 160$; $z_2 = 150$; $z_3 = 110$; $z_4 = 120$. Колесо 4 нерухоме.

Рішення:

Тому що дана задача відрізняється від попередньої тільки чисельними розрахунками, зробимо їх за схемою рішення попередньої задачі.

1. Визначимо
$$i_{1-4}^{(H)} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = \frac{150 \cdot 120}{160 \cdot 110} = \frac{45}{44}.$$

2. Знайдемо відповідь:

$$i_{H-1}^{(4)} = \frac{1}{1 - i_{1-4}^{(H)}} = \frac{1}{1 - \frac{45}{44}} = -44.$$

На прикладі задач 3.6 і 3.7 приходимо до висновку, що для механізмів **в**, **г** і **д** (рис. 3.17)

$$i_{H-1}^{(4)} = \frac{1}{1 - i_{1-4}^{(H)}}.$$

При $i_{1-4}^{(H)} \rightarrow 1$ одержуємо $i_{H-1}^{(4)} \rightarrow \infty$.

Якщо буде $i_{1-4}^{(H)} < 1$, то тоді виявиться

$$i_{H-1}^{(4)} > 0.$$

Якщо ж буде $i_{1-4}^{(H)} > 1$, то тоді знаходимо $i_{H-1}^{(4)} < 0$.

З аналізу розглянутих прикладів виявляємо великі кінематичні можливості планетарних зубчастих механізмів зі схемами **в**, **г** і **д**.

Після узагальнення отриманих результатів рішення задач дійдемо висновку, що кожна зі схем при використанні її в якості редуктора має практичний діапазон передаточних відношень. При цьому, як уже було сказано вище, виявляється, що з ростом передаточного числа зменшується коефіцієнт корисної дії (див. в [8] розділ IV).

Зазначимо для всіх п'ятих схем орієнтовні, практично використовувані діапазони передаточних відношень і відповідні їм діапазони ККД.

Схема а:

$$i_{1-H}^{(4)} = 3 \dots 9 \text{ при } \eta = 0,99 \dots 0,97;$$

$$i_{4-H}^{(1)} = 1,13 \dots 1,5 \text{ при } \eta = 0,996 \dots 0,99;$$

$$i_{1-4}^{(H)} = -(2 \dots 8) \text{ при } \eta = 0,985 \dots 0,96.$$

Схема б:

$$i_{1-H}^{(4)} = 2 \dots 17 \text{ при } \eta = 0,99 \dots 0,97.$$

Схема в:

$$i_{H-1}^{(4)} = 8 \dots 30 \text{ при } \eta = 0,90 \dots 0,75.$$

Схема г:

$$i_{H-1}^{(4)} = 25 \dots 300 \text{ при } \eta = 0,80 \dots 0,40.$$

Схема д:

$$i_{H-1}^{(4)} = 1 \dots \pm \infty \text{ при } \eta = 0,9 \dots 0,0$$

(наприклад, при $i_{H-1}^{(4)} = 10000$; $\eta = 0,015$).

5. Контрольні запитання

1. Які найпростіші схеми планетарних передач Ви знаєте?
2. Які основні переваги планетарних передач у порівнянні з не планетарними?
3. Які кінематичні можливості мають планетарні передачі?
4. Яка планетарна передача називається диференціальною?
5. Сформулюйте метод уявної зупинки водила (метод Вілліса).
6. Яка планетарна передача називається оберненою?
7. Як визначити передаточне відношення оберненої планетарної передачі?
8. Як визначити відносні кутові швидкості зубчастих коліс планетарної передачі відносно водила?

Лекція 11

Тема: Графічні методи кінематичного аналізу та приклади використання планетарних передач

Зміст:

1. Циліндрична планетарна передача.
2. Конічна планетарна передача.
3. Міжколісний симетричний диференціал.
4. Кінематичний синтез планетарних зубчастих передач.
5. Контрольні запитання.

1. Циліндрична планетарна передача

Метод базується на теорії плоскопаралельного руху твердого тіла, відповідно до якої в будь-який момент часу такий рух можна уявити як обертальний навколо миттєвого центру (миттєвої осі) швидкостей.

Сателіт у будь-якому положенні має цілком визначену миттєву вісь обертання. Інші ланки механізму обертаються навколо постійних осей обертання.

Лінійна швидкість довільної точки ланки дорівнює добутковій кутової швидкості ланки на відстань від даної точки до миттєвої осі обертання. При цьому виявляється лінійна залежність між лінійними швидкостями точок ланки і їхньої відстані до миттєвої осі обертання.

Тому що кутова швидкість ланки є величина, загальна для всієї сукупності точок жорсткої ланки, кутові швидкості ланок виступають у якості кутових коефіцієнтів для рівнянь прямих ліній, які характеризують залежність лінійних швидкостей точок ланок від відстаней точок до миттєвих осей їхнього обертання.

Покажемо застосування графічного методу кінематичного аналізу на прикладі одноступінчастого редуктора Джемса з зупиненим віничним колесом 4 (рис. 3.23). Будемо вважати відомими числа зубців коліс і їхні діаметри.

Механізм повинен бути накреслений в обраному лінійному масштабі як можна крупніше з високою точністю.

Якщо ж відомі тільки числа зубців коліс, а їхні діаметри не відомі, тоді розміри радіусів коліс на схемі можна відкласти пропорційними числам зубців у загальному для всіх коліс лінійному масштабі (хоча і невідомому).

На ланках у місцях їхнього взаємного дотикання намічаємо вузлові точки O, A, B, C .

Поруч із схемою механізму в проекційному зв'язку будуємо діаграму залежності окружних швидкостей точок ланок від радіусів коліс.

Масштаб швидкостей може бути відомий, якщо наприклад, задана вхідна кутова швидкість і розміри коліс. Якщо ж величини радіусів коліс або кутової швидкості ведучої ланки невідомі, тоді побудови можна виконати в невідомому довільному загальному для всіх коліс масштабі лінійних швидкостей μ_v . Нижче будуть приведені формули для визначення всіх масштабів, позначених на рис. 3.23.

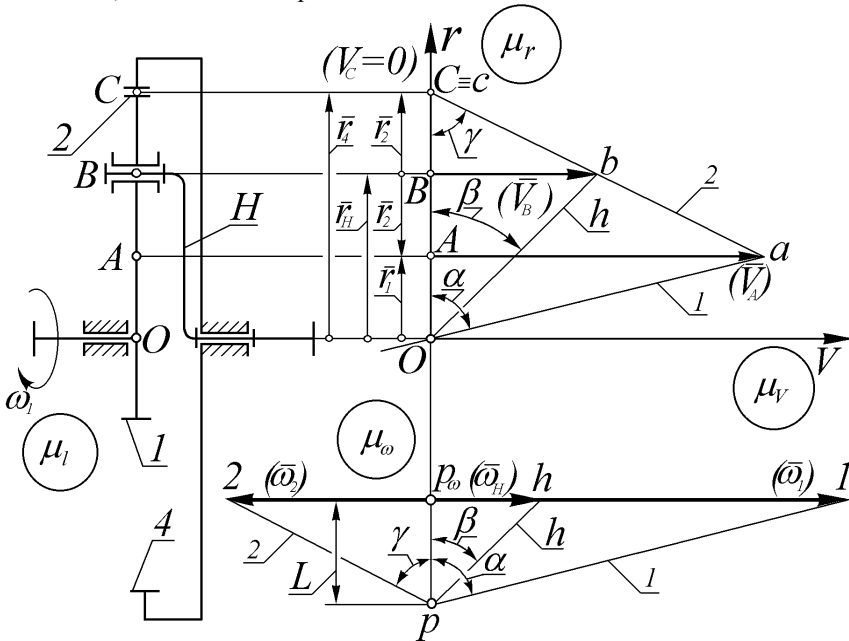


Рис. 3.23. Графічний аналіз кінематики планетарного зубчастого редуктора Джемса з одновісним сателітом

Послідовність побудови діаграми лінійних швидкостей така.

Спочатку відкладемо на діаграмі вектор лінійної швидкості точки A .

З кінця цього вектора, тобто з точки a проведемо промені в початок координат діаграми (т. O) і в точку c на осі ординат, що є кінцем нульового вектора окружної швидкості точки C , тому що колесо 4 нерухоме.

Перший промінь позначимо номером 1, тому що цей промінь є відбитком лінійної залежності окружних швидкостей ланки 1 від радіуса обертання.

Миттєва вісь обертання колеса 1 завжди збігається з центральною віссю механізму, що проходить через точку O .

Другий промінь 2 відбиває лінійну залежність окружних швидкостей ланки 2 від відстані до миттєвої осі обертання, що проходить через точку C .

Зауважимо, що промені 1 і 2 різнонаправлені, тобто як прямі лінії мають різні знаки кутових коефіцієнтів (ω_1 і ω_2).

Тепер можна відшукати вектор лінійної швидкості точки B , що належить ланці 2.

Для цього треба провести лінію зв'язку від точки B до упору в промінь 2. Кінець вектора окружної швидкості точки B позначений маленькою буквою b .

Окружну швидкість V_B має також рухома вісь сателіта 2, тобто точка B водила Н. З кінця b вектора $\bar{V}_B$ проведемо промінь h у початок координат діаграми.

Цей промінь відбиває лінійну залежність окружних швидкостей водила від радіуса обертання.

Кутові швидкості ω_1 , ω_H і ω_2 пропорційні тангенсам позначених кутів α , β і γ :

$$\omega_1 \equiv tg\alpha = \frac{|Aa|}{|OA|}; \quad \omega_H \equiv tg\beta = \frac{|Bb|}{|OB|}; \quad \omega_2 \equiv -tg\gamma = -\frac{|Aa|}{|AC|}.$$

Це дозволяє побудувати план кутових швидкостей ланок механізму в наступному порядку.

Виберемо довільне місце для полюса p_ω плану кутових швидкостей.

По вертикалі від p_ω відкладемо допоміжний полюс p із деякою полюсною відстанню L . Від розміру полюсної відстані L буде залежати масштаб плану кутових швидкостей μ_ω . З допоміжного полюса p проведемо промені 1, h і 2 під кутами α , β і γ , тобто паралельно відповідним променям на діаграмі ($\bar{V}, \bar{r}$).

Промені 1, h і 2 відітнуть на горизонтальній прямій, що проходить через полюс p_ω , довжини векторів $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_H$ і $\bar{\omega}_2$ в загальному масштабі μ_ω .

Напрямки знайдених векторів відбивають напрямки обертання ланок механізму.

Так, ланки 1 і Н обертаються в один бік з різними кутовими швидкостями, а ланка 2 - у протилежний бік.

Слід зазначити, що точність рішення задачі залежить тільки від точності графічних побудов.

Звичайно відносна похибка лежить у межах (2 ... 3)%, але при високоточних побудовах - не перевищує 1%.

Тепер можна визначити величину передаточного відношення механізму

$$i_{1-H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{|p_\omega I|}{|p_\omega h|}.$$

На закінчення запишемо формули, за якими можна розрахувати величини масштабів:

$$\mu_l = \frac{r_l}{OA} \text{ (м/мм)}; \mu_r = \mu_l;$$

$$\mu_v = \frac{\omega_l \cdot r_l}{V_A} \text{ ((м/с)/мм)}; \mu_\omega = \frac{\omega_l}{\omega_1} = \frac{\mu_v}{\mu_r \cdot |p_\omega p|} \text{ ((рад/с)/мм)}.$$

2. Конічна планетарна передача

Для двоступінчастих і одноступінчастих конічних планетарних передач також справедлива формула Вілліса (3.9).

Особливість полягає лише у визначенні величини і знаку передаточного відношення $i_{1-4}^{(H)}$ оберненого механізму.

Графічний метод кінематичного аналізу конічних планетарних передач базується на теорії складного сферичного руху твердого тіла, відповідно до котрого такий рух можна уявити як обертальний навколо миттєвої осі обертання.

Покажемо застосування аналітичного і графічного методів кінематичного аналізу на прикладі механізму, показаного на рис. 3.24.

Запишемо формулу Вілліса (3.9):

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{1-4}^{(H)}.$$

Визначимо передаточне відношення оберненого механізму

$$i_{1-4}^{(H)} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}.$$

Знак “-” означає, що в оберненому механізмі колеса 1 і 4 обертаються в різні боки.

Справді, якщо при зазначеному напрямку ω_1 точка A в зачепленні коліс 1 і 2 рухається з креслення, тоді точка B в зачепленні коліс 3 і 4 при нерухомому водилі могла б рухатися тільки всередину креслення. Це означає, що при погляді на механізм уздовж центральної осі відносно водила колеса 1 і 4 обертаються в різних напрямках.

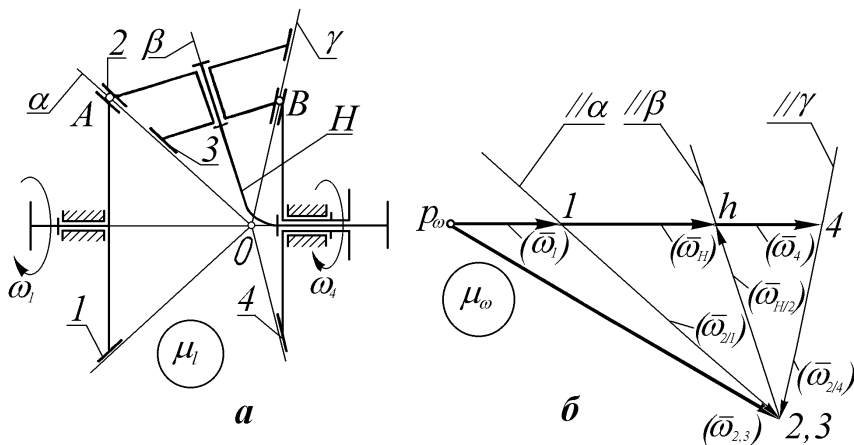


Рис. 3.24. Графічний аналіз кінематики планетарного механізму з конічними колесами

Величина передаточного відношення оберненого механізму складається з добутку передаточних відношень першого і другого ступенів.

Бачимо, що механізм із конічними колесами, поданий на рисунку 3.24а, кінематично ідентичний циліндричному планетарному механізму Джемса з двовісними сателітами (рис. 3.17б) - тут те ж розташування зовнішніх валів і абсолютно та ж формула Вілліса, з якої можна зробити ті самі висновки про взаємозв'язок рухів зовнішніх валів механізму.

У той же час усередині обох механізмів відбувається відносний рух, який цілком відрізняється.

Тепер розглянемо графічний метод кінематичного аналізу.

Попередньо зазначимо, що механізм може мати один або два ступені рухомості (тобто два або три рухомі вали) і, отже, мати один або два вхідних рухи.

Будемо вважати, що механізм має рухомими всі три зовнішні вали, тобто $w=2$ і тому необхідно задати два незалежні вхідні рухи, наприклад $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_4$.

При цьому буде відбуватися інтегрування двох вхідних рухів ($\overline{\omega}_I$ і $\overline{\omega}_4$) в один вихідний рух ($\overline{\omega}_H$).

Відзначимо, що за винятком блока сателітів 2 - 3 всі інші ланки чинять простий обертальний рух.

Складний рух ланки 2 - 3 можна уявити в трьох варіантах:

- разом із ланкою 1 і відносно неї ($\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_I + \overline{\omega}_{2/I}$);
- разом із ланкою 4 і відносно неї ($\overline{\omega}_3 = \overline{\omega}_4 + \overline{\omega}_{3/4}$);
- разом із водилом Н і відносно нього ($\overline{\omega}_{2-3} = \overline{\omega}_H + \overline{\omega}_{2-3/H}$).

Графічне рішення здійснимо в такій послідовності.

Виберемо полюс плану кутових швидкостей p_ω і відкладемо в масштабі вектори заданих кутових швидкостей $\overline{\omega}_I$ і $\overline{\omega}_4$ у вигляді відрізків:

$$|p_\omega I| = \omega_I / \mu_\omega \text{ (мм)};$$

$$|p_\omega 4| = \omega_4 / \mu_\omega \text{ (мм)}.$$

Тому що за умовою задачі кутові швидкості ω_I і ω_4 мають один і той самий напрямок, то і вектори $\overline{\omega}_I$ і $\overline{\omega}_4$ відкладені з полюса в той самий бік. Якби ω_I і ω_4 були спрямовані в різні боки, то і вектори $\overline{\omega}_I$ і $\overline{\omega}_4$ треба було б відкладати з полюса в протилежних напрямках.

Нагадаємо, що вектор кутової швидкості твердого тіла спрямований уздовж осі його обертання убік, звідкіля спостерігається обертання тіла проти годинникової стрілки. Тому вектори $\overline{\omega}_I$ і $\overline{\omega}_4$ спрямовані на плані зліва праворуч.

Щоб відшукати невідому кутову швидкість ω_H необхідно спочатку визначити невідомі кутові швидкості $\omega_2 = \omega_3$. Скористаємося для цього векторними рівняннями для кутових швидкостей із теорії сферичного руху:

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_I + \overline{\omega}_{2/I};$$

(// α)

$$\overline{\omega}_3 = \overline{\omega}_4 + \overline{\omega}_{3/4}.$$

(// γ)

Аналіз показує, що кожне з рівнянь системи окремо не вирішується, тому що має по три невідомі.

Спільно ж рівняння вирішуються, тому що мають усього чотири загальні невідомі.

Зазначимо, що вектор $\overline{\omega}_{2/1}$ відносної кутової швидкості обертання колеса 2 навколо колеса 1 спрямований уздовж загальної твірної конусів 1 і 2, що є миттєвою віссю відносного перекочування цих коліс одне по одному, тобто паралельно позначеній на рис. 3.24а лінії α .

Подібними ж міркуваннями дійдемо висновку, що вектор $\overline{\omega}_{3/4}$ спрямований паралельно лінії γ .

Провівши лінії з кінця вектора $\overline{\omega}_1 // \alpha$ і з кінця вектора $\overline{\omega}_4 // \gamma$, одержимо їхнє перетинання $2 \equiv 3$, що збігається з кінцем векторів $\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_3$, які йдуть із полюса p_ω .

Тому що сателіти 2 і 3 чинять складний сферичний рух, вектор $\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_3$ спрямований не горизонтально.

Цей вектор може мати будь-який напрямок у площині креслення, який залежить від різноманітності можливих сполучень вхідних рухів ($\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_4$). У даному конкретному випадку миттєва вісь обертання блока сателітів проходить через точку O в напрямку, паралельному вектору миттєвої абсолютної кутової швидкості $\overline{\omega}_{2-3}$.

Тепер можемо записати векторне рівняння для відшукування кутової швидкості водила:

$$\overline{\omega}_H = \overline{\omega}_{2-3} + \overline{\omega}_{H/2-3}.$$

(гориз.) ($//\beta$)

У рівнянні всього лише дві невідомі і воно може бути вирішено.

Відзначимо, що вектор $\overline{\omega}_H$ направлений горизонтально, а вектор відносної кутової швидкості $\overline{\omega}_{H/2}$ направлений уздовж осі сателітів, тобто паралельно лінії β .

Проведемо з кінця вектора $\overline{\omega}_2$ лінію паралельно β до перетинання з кінцем вектора $\overline{\omega}_H$, що йде з полюса p_ω .

Остаточно знайдемо

$$\omega_H = |p_\omega h| \mu_\omega (c^I).$$

3. Міжколісний симетричний диференціал

Колісні машини (автомобілі, трактори, тролейбуси, кари й ін.) у ведучих мостах мають міжколісний диференціал, який дозволяє від одного вхідного вала приводити два вихідних вала ведучих коліс рушія лівого і правого бортів транспортного засобу.

Причому, при одній і тій же швидкості обертання вхідного вала ведучого моста колеса рушія лівого і правого бортів повинні мати можливість обертатися з різними кутовими швидкостями, що продиктовано траєкторією руху колісної машини, різницею радіусів коліс і ін.

Так, при повороті ліворуч ведуче колесо рушія лівого борта обертається повільніше, ніж ведуче колесо рушія правого борта.

При повороті праворуч усе відбувається навпаки.

Симетричним міжколісним диференціалом називається такий диференціал, який при прямолінійному русі колісної машини розділяє (диференціює) обертовий момент рушійних сил на дві рівні частини.

Несиметричні диференціали використовуються, наприклад, у міжосьових роздавальних коробках автомобілів, якщо вихідні вали коробки приводять в обертання різне число ведучих мостів. Так, у тривісному повноприводному автомобілі несиметричний диференціал роздавальної коробки поділяє обертовий момент сил на дві нерівні частини, направляючи на один передній ведучий міст $1/3$ частину загального обертового моменту, а на два задні ведучі мости - $2/3$ його частини.

Розглянемо докладніше кінематику і розподіл обертового моменту рушійних сил у симетричному міжколісному диференціалі (рис. 3.25) при різних режимах руху колісної машини.

Привід диференціала здійснюється через головну передачу 5 - 4. Колесо 4 головної передачі закріплене на коробці диференціала Н (на водилі).

Обертовий момент від колеса 4 передається на водило. Очевидно, що по величині $T_H = T_4$.

Водило Н є ведучою ланкою механізму диференціала. Веденими ланками диференціала являються півосі 3 і 1 із півосьовими зубчастими колесами.

Колісна машина може рухатися прямолінійно або по криволінійній траєкторії. Це робочі режими руху.

Розглянемо спочатку прямолінійний рух. У цьому випадку центр повороту (точка P) віддалений у нескінченність і кутові швидкості ω_l і ω_3 коліс рушія лівого і правого бортів будуть однакові.

$$\frac{\omega_I - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = i_{I-3}^{(H)} = -\frac{z_3}{z_I} = -I,$$

де $i_{I-3}^{(H)}$ - передаточне відношення оберненої передачі.

Після алгебраїчних перетворень формули Вілліса знайдемо рівняння

$$\omega_I + \omega_3 = 2\omega_H. \quad (3.15)$$

Зауважимо, що при нерухомому водилі зубчасті колеса 1 і 3 можуть обертатися тільки протилежно, тому $i_{I-3}^{(H)}$ має від'ємний знак, а числа зубців коліс 1 і 3 у симетричному диференціалі однакові.

Спільне рішення рівнянь (3.14) і (3.15) дозволяє знайти значення ω_I і ω_3 .

Якщо третям у диференціалі зневажити, тоді можна вважати, що сателіти 2 і 2' як рівноплечі диференціальні важелі забезпечать рівність обертових моментів T_I і T_3 на колесах рушія лівого і правого бортів і при криволінійному русі колісної машини.

Якщо ж третя враховувати, то можна прийти до висновку, що момент сил третя на осях сателітів зменшить обертовий момент на випереджаючому колесі і одночасно збільшить обертовий момент на відстаючому колесі.

Тобто буде спостерігатися

$$T_I > T_3.$$

Усе ж ця відмінність при високому ККД диференціала дуже мало помітна.

Тепер розглянемо роботу диференціала в режимі буксування одного з коліс рушія.

Будемо вважати, що колесо правого борта знаходяться на слизькій обочині і тому буксує.

Колесо лівого борта при цьому спирається на чистий сухої асфальт, воно не обертається, а машина не рухається. Це не так вже й рідко спостерігається на практиці.

Чому ж машина не може рухатися? Чому ліве колесо рушія, що спирається на чистий асфальт, не може зрушити машину з місця?

Отже, маємо $\omega_I = 0$.

Тоді з рівняння (3.13) одержимо

$$\omega_3 = 2\omega_H.$$

Диференціал у режимі буксування колеса 3 працює як прискорювач із передаточним відношенням

$$i_{H-3}^{(I)} = \frac{\omega_H}{\omega_3} = \frac{1}{2}.$$

Це означає, що якщо на спідометрі при буксуванні бачимо показання швидкості руху, наприклад, 50 км/г , то окружна швидкість буксуючого колеса досягне значення 100 км/г .

На буксуючому колесі 3 через низьке зчеплення зі слизькою обочиною обертовий момент $T_3 \rightarrow 0$. Це означає, що і на півосьовій шестерні 3 окружна сила мізерно мала.

Якщо зневажати тертям у диференціалі, тоді можна прийти до висновку, що за умовою рівноваги окружних сил на сателіті будуть також мізерно малі окружні сили на півосьовій шестерні 1 і на водилі. Це у свою чергу означає, що і на не буксуючому колесі 1 обертовий момент $T_1 \rightarrow 0$.

От чому при буксуванні одного з ведучих коліс двигун може йти в рознос, але не може зрушити машину з місця. Адже на обох ведучих колесах обертові моменти (а значить і штовхаючі сили) мізерно малі.

Раніше для підвищення прохідності автомобілів застосовувалися диференціали підвищеного тертя.

Наприклад, у них навмисне сателіти притискалися пружинами до водила і сковзали відносно коробки диференціала на спеціальних фрикційних шайбах.

Це різко знижувало ККД диференціала при $\omega_1 \neq \omega_3$.

При русі автомобіля по прямій, як уже було відзначено, механізм диференціала обертається як одне ціле, і тому ніяких додаткових утрат потужності в ведучому мості диференціал підвищеного тертя при цьому не викликав.

При русі на повороті, як також було сказано вище, на відстаючому колесі обертовий момент збільшується, а на випереджаючому зменшується, і при цьому, в наслідок повільного відносного руху в диференціалі, спостерігалися незначні втрати переданої потужності, малопомітні в загальному балансі втрат.

Але от при буксуванні зниження ККД диференціала грало позитивну роль. Розглянемо, чому?

З розгляду схеми рівноваги сателіта за умови наявності моменту сил тертя $T_{тер}$ і відносної кутової швидкості $\omega_{2/H} \neq 0$ виявляємо, що як і раніше

$$\bar{P}_H = \bar{R}_{32} + \bar{R}_{12},$$

$$\text{але } R_{12} > R_{32} \text{ і відповідно } T_1 > T_3,$$

тому що з рівняння $\Sigma T_B = 0$ маємо

$$R_{12} = R_{32} + T_{тер}/r_2.$$

Бачимо, що при використанні диференціала підвищеного тертя колесо 1 рушія на чистому асфальті може реалізувати обертовий момент більший того, що реалізується на буксуючому колесі рушія 3.

Можливо, що цього буде цілком достатньо для початку руху і виїзду зі слизької обочини на чистий асфальт.

В даний час замість примітивно улаштованого диференціала підвищеного тертя з фрикційними шайбами в колісних машинах-всюдиходах застосовують або диференціали, що самоблокуються, (які і зараз умовно називають диференціалами підвищеного тертя), або диференціали, що примусово блокуються, із механічним, пневматичним, гідравлічним або електромагнітним сервоприводом.

При заблокованому диференціалі, яке б не мале було зчеплення колеса рушія 3 з дорогою, весь обертовий момент від двигуна без обмеження може бути реалізований на колесі 1.

Зауважимо, що при цьому колеса 1 і 3 будуть обертатися з однією і тією ж кутовою швидкістю

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_H$$

і виконувати поворот колісної машини з заблокованим диференціалом не рекомендується.

Самоблокування диференціала, як правило, здійснюється кулачковими муфтами інерційної дії.

Якщо одне з коліс почне входити в режим буксування, кулачкова муфта за рахунок сил інерції спеціальних сухарів заклиниться й обидва колеса рушія лівого і правого борту будуть обертатися з загальною швидкістю доти, поки на них будуть реалізовуватися різні обертові моменти.

При вирівнюванні умов зчеплення ведучих коліс рушія з дорогою обертові моменти зліва і справа стають однаковими і кулачкова муфта під дією спеціальних пружин саморозблокується і надалі не буде перешкоджати повільному відносному обертанню коліс лівого і правого бортів на повороті.

4. Кінематичний синтез планетарних зубчастих передач

Кінематичний синтез планетарних зубчастих передач полягає у виборі схеми механізму і визначенні чисел зубців його коліс по наперед заданій величині передаточного відношення та ряду додаткових умов, характерних для планетарних передач.

Серед додаткових умов також можуть бути задані або призначені конструктором: число сателітів - k ; необхідна точність реалізованого передаточного відношення в порівнянні з необхідним його значенням; обмеження мінімально допустимого числа зубців коліс, у залежності від виду профілів зубців; допустиме мінімальне значення ККД та ін.

У силових передачах звичайно приймається число сателітів $k=3$. Це покращує самоустановку центрального сонячного колеса. Для забезпечення останньої додатково виконують одне або обидва центральні колеса плаваючими, сателіти - на податливих осях та ін.

Очевидно, що при меншому або більшому числі сателітів самоустановка центрального колеса погіршується.

При виборі різновиду схеми механізму керуються відповідністю заданого передаточного відношення і діапазону можливих передаточних відношень тієї або іншої схеми (див. п. 3.2.2.1).

Бажано з декількох можливих схем механізмів вибрати таку, для котрої задане передаточне відношення буде знаходитися в середині діапазону можливих передаточних відношень, тому що крайні значення діапазону реалізуються з ускладненнями при конструюванні передачі.

Після вибору виду схеми механізму можна переходити до задачі розрахунку чисел зубців коліс.

Варто підкреслити, що задача має багатоваріантне рішення - тобто множину наборів чисел зубців коліс, що задовольняють умовам задачі.

На якому з них зупинитися ?

У межах вивчення курсу ТММ на це питання відповісти неможливо.

Тому лише зазначимо, що звичайно перевагу віддають тому варіанту, у якого буде мінімальним сумарне число зубців усіх коліс.

Якщо в умові задачі допустиме відхилення реалізованого передаточного відношення від необхідного не обговорено, тоді допускають відмінність першого від останнього до 3 %.

Найбільшу трудність може представити задача синтезу планетарної передачі, коли реалізації підлягає абсолютно точне значення передаточного відношення (особливо ірраціонального).

У цьому випадку число можливих наборів чисел зубців різко скорочується.

Рішення окремих задач кінематичного синтезу планетарних передач може бути виконано тільки з залученням ЕОМ.

Ручний розрахунок можливий при порівняно простій умові задачі, яка не потребує високої точності рішення.

Крім задоволення заданому передаточному відношенню з допустимою точністю, вибрані (розраховані) числа зубців окремих коліс планетарної передачі повинні задовольняти також додатковим умовам, що витікають з особливостей планетарних передач.

Одна з таких умов - умова співвісності центральних коліс (тобто спільність геометричної осі центральних коліс).

Ця умова не потребує особливих коментарів.

Справді, при роботі планетарної зубчастої передачі сателіти повинні мати однакові умови руху по своїх орбітах. При недотриманні співвісності центральних коліс це неможливе.

Друга умова - умова сусідства сателітів.

Звичайно число сателітів передачі $k > 1$.

Зустрічаються вказівки про застосування в окремих планетарних передачах понад 7 сателітів. Усі вони повинні розташуватися під рівними кутами з наявністю між ними зазорів. Саме собою зрозуміло, що ця умова також обов'язкова до виконання.

Симетричне розташування k сателітів планетарної передачі дозволяє виконати плаваючим одне з центральних коліс (звичайно це центральне сонячне колесо), чим досягається: вирівнювання потоків потужності, що йдуть через всі окремі сателіти; розвантаження підшипників вихідного вала від радіальних зусиль; зрівноваженість мас водила в зборі з сателітами.

Третя умова - умова зборки.

Ця умова іноді виявляється самою складною для задоволення.

Є декілька підходів до задоволення умови зборки.

Нижче буде розглянутий один із найпростіших прикладів розрахунку цієї умови.

Умову зборки коротко можна пояснити в такий спосіб: зубчасті колеса планетарної передачі повинні мати такі числа зубців, які б дозволили k сателітам розташуватися під рівними кутами.

Четверта умова - умова відсутності інтерференції зубців у внутрішніх зачепленнях, тобто умова незакинення зубців у внутрішніх зачепленнях сателітів із коронними колесами.

При евольвентних профілях зубів ця умова виконується, якщо сателіт має не менше 18-ти зубців, а коронне колесо - не менше ніж на 8 зубців більше від нього.

Можуть бути й інші особливі умови.

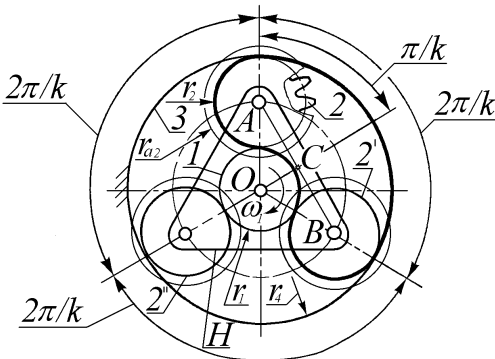


Рис. 3.26. До синтезу планетарного редуктора Джемса з одновісним сателітом

одержимо

Розглянемо приклад синтезу найпростішої одноступінчастої планетарної передачі Джемса (рис. 3.26) по заданих величинах $i_{1-H}^{(4)}$ і k .

Кінематичний синтез будемо виконувати в наступному порядку:

1. Запишемо формулу Вілліса

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = i_{1-4}^{(H)}.$$

Звідси, з урахуванням $\omega_4 = 0$,

$$i_{l-H}^{(4)} = I - i_{l-4}^{(H)} = I + \frac{z_4}{z_l}.$$

Тоді

$$\frac{z_4}{z_l} = i_{l-H}^{(4)} - I. \quad (3.16)$$

2. З умови співвісності центральних коліс слідує, що повинно виконуватися

$$r_l + 2r_2 = r_3.$$

З теорії зачеплення зубчастих коліс відомо, що радіус так званого ділильного кола обчислюється за формулою

$$r = \frac{1}{2} m z,$$

де m - модуль зубчастих коліс.

Тоді маємо

$$\frac{1}{2} m z_l + 2 \cdot \frac{1}{2} m z_2 = \frac{1}{2} m z_3,$$

тобто

$$z_l = 2z_2 = z_3. \quad (3.17)$$

3. Якщо зубчасті колеса евольвентні, тоді існує допустиме мінімальне число зубів z_{min} , які можна нарізати на колесі без додаткових труднощів.

Відомо, що для евольвентних зубчастих коліс

$$z_{min} = 17. \quad (3.18)$$

На рис. 3.26 зображене як найменше колесо 1.

Зі збільшенням передаточного відношення $i_{l-H}^{(4)}$ колесо 1 буде відносно ставати усе менше, а колесо 2 - усе більше.

Якщо ж передаточне відношення $i_{l-H}^{(4)}$ буде зменшуватися, тоді відносно буде зростати колесо 1, а колесо 2 - буде зменшуватися.

Легко можна довести, що при значенні $i_{l-H}^{(4)} = 4$ колеса 1 і 2 будуть однаковими.

Якщо $i_{l-H}^{(4)} > 4$, тоді найменшим буде колесо 1.

Якщо $i_{l-H}^{(4)} < 4$, тоді найменшим буде колесо 2 (колеса 2' і 2'' - точно такі ж, як колесо 2).

Отже, знаючи задану величину передаточного відношення $i_{l-H}^{(4)}$, легко можемо вирішити, яке з коліс буде найменшим.

Число зубців цього найменшого колеса можна задати довільно з ряду чисел $z \geq 17$ - (тобто 17, 18, 19, 20, ...).

В окремих випадках, якщо колесо 1 - найменше, вибір його числа зубців починають навіть із 15.

Очевидно, що трьох умов (3.16), (3.17) і (3.18) цілком достатньо, щоб однозначно розрахувати числа зубців трьох зубчастих коліс 1, 2 і 4.

Проте, це не означає, що задача остаточно вирішена.

Необхідно ще перевірити дотримання інших додаткових умов при обраному наборі чисел зубців $z_1, z_2, \text{ і } z_4$.

4. Розглянемо дотримання умови сусідства сателітів (див. рис. 3.26).

З теорії зачеплення відомо, що зовнішній радіус колеса 2 - радіус вершин зубців - можна обчислити за формулою

$$r_{a2} = \frac{1}{2} m(z_1 + 2).$$

Він більший, ніж радіус діляльного кола колеса 2

$$r_2 = \frac{l}{2} m z_2.$$

Умова сусідства буде дотриманою, якщо буде виконуватися нерівність

$$r_{a2} < AC.$$

З рис. 3.26 маємо

$$AC = OA \cdot \sin \pi / k,$$

$$OA = r_1 + r_2 = \frac{l}{2} m(z_1 + z_2).$$

Тоді умова сусідства запишеться

$$\frac{l}{2} m(z_2 + 2) < \frac{l}{2} m(z_1 + z_2) \cdot \sin \pi / k,$$

або

$$\sin \pi / k > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}. \quad (3.19)$$

5. Перевіримо виконання умови зборки.

Зборка передачі можлива у випадку, якщо в обкресленому на рис. 3.26 основною лінією контури буде ціле число зубців.

При симетричному розташуванні сателітів ціле число зубців тоді буде і всіх інших контурах.

Якби це було не так, тоді після установки одного сателіта другий не вдалося б установити під кутом $2\pi / k$, тому що зубці другого сателіта потрапляли б на зубці одного з центральних коліс.

Коли ж у обкресленому контурі - ціле число шагів зубців, тоді зубці у усіх вищих кінематичних парах вільно ввійдуть у зачеплення.

Недотримання умови зборки призвело б до того, що сателіти 2' і 2'' могли б бути введені в зачеплення з центральними колесами тільки лише під нерівними кутами відносно колеса 2, а осі сателітів через неспівпадання рівномірно розміщених по колу отворів у водили й у сателітах 2' і 2'' не могли б бути встановлені на місце.

Отже, у позначеному контурі сумарне число зубців z_{Σ} обов'язково повинно бути деяким цілим числом

$$z_{\Sigma} = \frac{z_1}{k} + \frac{z_2}{2} + \frac{z_4}{k} + \frac{z_2}{2}.$$

Тому що: $2\left(\frac{z_2}{2}\right) = z_2$ - ціле число зубців, цілим буде також $z_{\Sigma} - z_2$, тоді умова зборки буде

$$\frac{z_1 + z_4}{k} = z_{\Sigma} - z_2 = n.$$

Остаточо можна констатувати, що зборка редуктора Джемса з одновісними сателітами можлива, якщо сума чисел зубців центральних коліс 1 і 4 буде ділитися націль на число сателітів k .

Умову зборки можна не перевіряти, якщо окремо z_1 і z_4 діляться на число k без залишку. У цьому випадку механізм є *k-симетричним* і умови розташування сателітів абсолютно збігаються (тобто вони завжди знаходяться в одній і тій же фазі зачеплення).

6. Умова відсутності інтерференції зубців у внутрішніх зачепленнях перевіряється за формулами теорії зачеплення, які тут не будемо приводити.

При $z_2 \geq 18$ верхівкова інтерференція зубів у внутрішньому зачепленні розглянутого механізму Джемса ніколи не спостерігається, тому для даного типу механізму перевірка відсутності інтерференції не обов'язкова.

Для інших схем, а особливо для схеми (рис. 3.172), тобто для односателітного варіанта механізму Давида з двома внутрішніми зачепленнями, у котрого числа зубців сателітів наближаються до чисел зубців коронних коліс із внутрішніми зубцями, така перевірка обов'язкова, тому що накладає серйозні обмеження на вибір чисел зубців коліс механізму.

5. Контрольні запитання

1. Як визначити графічно передаточне відношення циліндричної планетарної передачі?

2. Як визначити графічно передаточне відношення конічної планетарної передачі?
3. Чим відрізняється несиметричний диференціал від симетричного?
4. Яке призначення міжколісного диференціала колісної машини?
5. Які режими руху може мати міжколісний диференціал?
6. Що таке буксування ведучого колеса? Від чого воно виникає? Як із цим явищем можна боротися?
7. У чому полягає кінематичний синтез планетарних передач?
8. У чому полягає умова співвісності планетарної передачі?
9. У чому полягає умова сусідства планетарної передачі?
10. У чому полягає умова зборки планетарної передачі?
11. Чому сателіти багатосателітної планетарної передачі необхідно розташовувати під рівними кутами?

Лекція 12

Тема: Відомості з теорії зачеплення

Зміст:

1. Вимоги до профілів зубців коліс.
2. Основний закон зачеплення.
3. Лінія зачеплення.
4. Евольвентне зачеплення. Загальні відомості.
5. Рівняння евольвенти.
6. Взаємодія евольвентних профілів
7. Контрольні запитання.

1. Вимоги до профілів зубців коліс

Профілі зубців круглих зубчастих коліс повинні забезпечувати задане передаточне відношення не тільки в середньому, але й у будь-який момент часу. Це означає, що при $\omega_{вх} = const$ повинно бути в будь-який момент часу $\omega_{вих} = const$.

У протилежному випадку будуть з'являтися шкідливі динамічні навантаження, обумовлені нерівномірністю обертання ведених мас машини.

Профілі зубців, що забезпечують задане передаточне відношення, називаються спряженими.

У теорії зачеплення розглядаються задачі профілювання спряжених профілів, визначення їхньої взаємодії, відшукування кількісних характеристик різноманітних зачеплень.

Нижче докладно розглядаються деякі питання теорії зачеплення, що відносяться до круглих циліндричних коліс. Питання, які відносяться до конічного, черв'ячного і деяких інших зачеплень, викладені коротко лише в частині їхніх особливостей у порівнянні з циліндричними колесами.

2. Основний закон зачеплення

Закон установлює геометричну вимогу, якій задовольняють спряжені профілі. Іноді цей закон називають основною теоремою зачеплення (теоремою Віллеса).

Ось формулювання теореми.

Загальна нормаль у точці торкання спряжених профілів зубців поділяє лінію центрів коліс у відношенні, зворотно пропорційному кутовим швидкостям коліс.

Очевидно, що при

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}$$

точка Π ділення лінії центрів повинна бути на ній зафіксованою (тобто нерухомою). Точка Π - називається полюсом зачеплення.

Розглянемо доказ теореми (закону) по рис. 4.1.

На рисунку позначено:

O_1O_2 - лінія центрів (міжосьова відстань);

$n-n$ - загальна нормаль у точці C торкання профілів зубців 1 і 2;

$t-t$ - загальна доти-чна в точці C ;



Рис. 4.1. До основного закону зачеплення

для колеса 2;

Π - полюс зачеплення (точка перетинання загальної нормалі $n-n$ із лінією центрів O_1O_2);

r_{w1} , r_{w2} - радіуси початкових окружностей коліс 1 і 2;

γ_1 , γ_2 - допоміжні кути.

Доказ теореми можна здійснити через так звану умову безвіддривності торкання профілів: *проекції векторів окружних швидкостей*

точок профілів, що знаходяться в контакті, на загальну нормаль $n-n$ однакові, тобто

$$\bar{V}_{C_1} \cdot \cos \gamma_1 = \bar{V}_{C_2} \cdot \cos \gamma_2.$$

Припустимо, що це не так.

Нехай, наприклад,

$$\bar{V}_{C_2} \cdot \cos \gamma_2 > \bar{V}_{C_1} \cdot \cos \gamma_1.$$

Тоді зуб 2 буде іти від зуба 1 із безупинним наростанням зазору.

Якщо ж припустити, що

$$\bar{V}_{C_1} \cdot \cos \gamma_1 > \bar{V}_{C_2} \cdot \cos \gamma_2,$$

тоді зуб 1 буде вклинюватися в зуб колеса 2.

Ні перше, ні друге припущення не можуть мати місця при нормальній роботі зачеплення, і значить умова безвідривності торкання профілів вірна.

Тому що

$$V_{C_1} = \omega_1 \cdot O_1 C_1, \text{ а } V_{C_2} = \omega_2 \cdot O_2 C_2,$$

перепишемо умову безвідривності профілів у вигляді

$$\omega_1 \cdot O_1 C_1 \cdot \cos \gamma_1 = \omega_2 \cdot O_2 C_2 \cdot \cos \gamma_2.$$

Помітимо, що

$$O_1 C_1 \cdot \cos \gamma_1 = \rho_1,$$

$$O_2 C_2 \cdot \cos \gamma_2 = \rho_2,$$

тоді одержимо вираз

$$\omega_1 \cdot \rho_1 = \omega_2 \cdot \rho_2,$$

звідкіля будемо мати

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

З подібності прямокутних $\triangle O_1 N_1 \Pi$ і $\triangle O_2 N_2 \Pi$, що мають той же самий гострий кут при вершині Π виразимо відношення

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{O_2 \Pi}{O_1 \Pi} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}.$$

Остаточно знайдемо

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}, \quad (4.1)$$

що і було потрібно довести.

Відзначимо, що

$$O_1 O_2 = r_{w1} + r_{w2} = \text{const},$$

При $i_{1-2} = \text{const}$ це означає, що полюс зачеплення (точка P) займає на лінії центрів O_1O_2 фіксоване положення, тобто, що

$$r_{w1} = \text{const} \text{ і } r_{w2} = \text{const}.$$

Переконаємося, що проведені через точку P із центрів O_1 і O_2 окружності радіусів r_{w1} і r_{w2} котяться одна по одній без прослизання.

З виразу (4.1) слідує, що

$$\omega_1 \cdot r_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2},$$

отже окружні швидкості окружностей радіусів r_{w1} і r_{w2} збігаються по величині, а з рис. 4.1 очевидно, що вони також мають і загальний напрямок. Значить ці окружності котяться одна по одній без прослизання. Їх прийнято називати, як уже вказувалося в розділі III, початковими.

Тепер розглянемо відносний рух зубців, що знаходяться в зачепленні.

Для цього здійснимо уявну зупинку, наприклад, колеса 1 за методом обернення руху подібно тому, як це робилося у відношенні планетарних зубчастих передач.

Не порушуючи роботи зачеплення, мислено повідомимо всьому механізму додаткову кутову швидкість $-\omega_1$ (рівну по величині ω_1 , але протилежно їй направлену).

Тоді побачимо колесо 1 зупиненим. При цьому колесо 2 буде мати рух, що відповідає цілком його відносному руху відносно колеса 1.

Миттєвим полюсом перекочування колеса 2 по колесу 1 є полюс зачеплення P .

Відносна кутова швидкість перекочування колеса 2 по колесу 1, як очевидно з креслення,

$$\omega_{2/1} = \omega_1 + \omega_2. \quad (4.2)$$

Справді: колесо 1 спостерігається зупиненим, а колесо 2 мало свою абсолютну кутову швидкість ω_2 і до неї додалася повідомлена всьому механізму, а значить і колесу 2, додаткова кутова швидкість того ж напрямку, що і ω_2 , рівна кутовий швидкості ω_1 . З такою ж відносною кутовою швидкістю $\omega_{2/1}$ перекочуються один по одному всі дотичні елементи коліс 1 і 2, тобто зубці 1 і 2.

Крім того, зубці сковзають один по одному зі швидкістю $V_{ск}$.

Величина швидкості сковзання буде

$$V_{ск} = PS \cdot (\omega_1 + \omega_2). \quad (4.3)$$

Доказ вірності формули (4.3) можна здійснити так.

Якщо зуб 1 спостерігається зупиненим, тоді точка C_2 зуба 2 відносно нерухомої точки C_1 зуба 1 буде мати лінійну швидкість, пропорційну

відстані до миттєвого полюса Π (тобто відстані PC) і відносній кутовій швидкості

$$\omega_{2/1} = \omega_1 + \omega_2.$$

Відносна лінійна швидкість $V_{C_2C_1}$ і є швидкістю сковзання зубців V_{CK} , тому що зуб 1 в оберненому русі нерухомий.

Остаточно встановлюємо, що зубці під час зачеплення перекочуються один по одному з постійною відносною кутовою швидкістю $(\omega_1 + \omega_2)$ і сковзають із перемінною швидкістю V_{CK} , у залежності від відстані точки контакту до полюса зачеплення Π .

В момент переходу точки контакту через полюс $V_{CK} = 0$, а також при цьому відбувається зміна знака швидкості V_{CK} , тобто зміна її напрямку.

До полюсного положення зачеплення зубці сковзають назустріч один одному (зближаються), а після зачеплення в полюсі вони віддаляються один від одного.

Чим далі точка контакту зубців від полюса Π , тим більша швидкість їхнього сковзання.

У внутрішньому зачепленні, тому що на відміну від зовнішнього ω_1 і ω_2 направлені в один і той самий бік, відносна кутова швидкість коліс буде

$$\omega_{2/1} = \omega_1 - \omega_2,$$

а швидкість сковзання зубців при цьому становитиме

$$V_{CK} = PC \cdot (\omega_1 - \omega_2).$$

Бачимо, що у внутрішньому зачепленні при порівняних умовах швидкість сковзання зубців буде меншою, ніж у зовнішньому.

Це і пояснює те, що на практиці спостерігається більш високий ККД внутрішнього зачеплення в порівнянні з зовнішнім.

3. Лінія зачеплення

Геометричне місце точок на площині центрів коліс, у котрих різночасно стикаються спряжені профілі, називається лінією зачеплення.

У загальному випадку (для довільних спряжених профілів) лінія зачеплення - це довільна крива лінія, що проходить через полюс зачеплення (через точку Π).

У таких поширених профілів, як евольвентні, лінія зачеплення є прямою лінією, що визначає всі виняткові властивості цього зачеплення.

У циклоїдального зачеплення - це крива, що складається з двох дуг окружностей, сполучених у полюсі зачеплення Π , які мають різні радіуси і протилежну кривизну.

У цівкового зачеплення - це кардіоида.

У зачеплення Новікова - це тільки точка в торцевому перерізі, віддалена від полюса в той або інший бік (останнім часом - дві точки: одна - до, і друга - після полюса, які розташовані в різних торцях по глибині креслення).

Існує теорема Рело, в якій доказується, що вигляд лінії зачеплення визначається одним окремо взятим профілем.

З цієї теореми слідує висновок, що спряжені профілі мають однакову, тобто ту саму, лінію зачеплення.

Теорема Рело (її слідства) дозволяє побудувати будь-яку множину пар кривих ліній, які можна використовувати в якості спряжених профілів.

Послідовність побудов така.

Спочатку вибираємо профіль 1 у вигляді довільної плавної кривої лінії (із деякими обмеженнями).

Потім по ньому будуємо лінію зачеплення.

Після цього по лінії зачеплення, вирішуючи зворотну за змістом задачу, будуємо профіль 2, спряжений з профілем 1.

Враховуємо при цьому, що профілі 1 і 2 обов'язково задовольняють вимогам основного закону зачеплення.

З величезного різноманіття можливих спряжених профілів у даний час використовуються лише декілька.

Найпоширеніший профіль - евольвентний.

На ньому і його властивостях ми і зупинимось нижче більш докладно.

4. Евольвентне зачеплення. Загальні відомості

Евольвента - це розгортка кривої.

Нижче будемо розуміти евольвенту як розгортку окружності, тобто як евольвенту окружності.

Евольвенту можна побудувати різними графічними прийомами. Наприклад, можна побудувати евольвенту, як траєкторію будь-якої точки прямої лінії, що перекочується по окружності без прослизання. Цю пряму лінію будемо називати твірною, а окружність - основною, яка має також математичну назву - еволюта.

Основна окружність (еволюта) - це і є крива лінія, яка розгортається. Її чудова властивість складається в тому, що вона є геометричним місцем центрів кривизни евольвенти (рис. 4.2).

На рисунку позначене:

M - початкова точка евольвенти $MABCDE...$;

$mabcde...$ - еволюта (основна окружність);

$\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D, \rho_E, \dots$ - радіуси кривизни евольвенти в точках $A, B, C, D, E, \dots$.

З рис. 4.2 можна усвідомити основні властивості евольвенти:

-

3. Кривизна евольвенти

$$k = \frac{1}{\rho}$$

зменшується від ∞ до 0 в міру віддалення евольвенти від її початку (а радіус кривизни ρ - зростає від 0 до ∞). Радіус кривизни евольвенти в її початку (т. M) дорівнює нулю, а кривизна - дорівнює нескінченності ($\rho_M = 0$; $k_M = \infty$).

4. Профільний кут α_y
евольвенти (кут між радіальним

- ## 5. Рівняння еволюенти

На рис. 4.20 показана евольвента окружности заданного радиуса r_b .

Y - довільна точка на евольвенті:

M - початкова точка евольвенти;

r – поточне положення радіуса-вектора (функції рівняння в цих координатах) евольвенти;

7

O - початок координат;

$n_Y - n_Y$ - нормаль до евольвенти в точці Y ;

$t_Y - t_Y$ - дотична до евольвенти в точці Y .

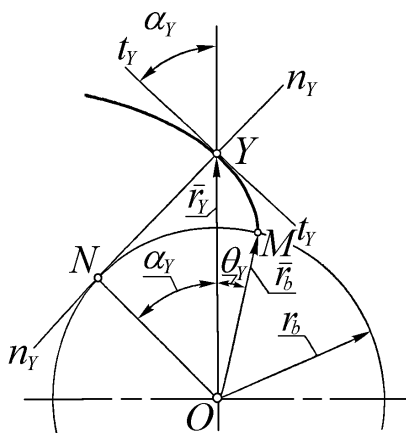


Рис. 4.3. До виводу рівняння евольвенти в полярних координатах

Рівняння (4.5) витікає з рівності довжин відрізка прямої NY і дуги основної окружності NM . Ця рівність походить з властивостей евольвенти - розгортка дуги NM при утворенні евольвенти збігається по довжині з відрізком NY дотичної до основної окружності.

Тому що відрізок прямої $|NY| = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha_Y$, а відрізок дуги $|NM| = r_b(\alpha_Y + \theta_Y)$, рівняння (4.5) перепишеться у вигляді

$$\theta_Y = \operatorname{tg} \alpha_Y - \alpha_Y = \operatorname{inv} \alpha_Y. \quad (4.7)$$

Функція θ_Y названа евольвентною або інволютною функцією. Обчислення її значення при заданому α_Y не представляє складної задачі.

Проте, якщо необхідно виконати обчислення α_Y по відомому θ_Y , то в цьому випадку доводиться вирішувати трансцендентну задачу. Її можна чисельно вирішувати з будь-якою наперед вибраною точністю методом ітерацій (послідовних наближень).

Приблизно (із помилкою не більш $6'$) обчислення α_Y в градусах по відомому θ_Y можна здійснити по формулі, запропонованій В. А. Перегоном

$$\alpha_Y = 76,8 \cdot (\operatorname{inv} \alpha_Y)^{0,32}.$$

Функцію евольвенти в полярних координатах

$$\bar{r}_Y = f(\theta_Y)$$

запишемо в параметричному вигляді:

$$r_Y = f_1(\alpha_Y); \quad (4.4)$$

$$\theta_Y = f_2(\alpha_Y). \quad (4.5)$$

Перемінний профільний кут евольвенти α_Y (не плутати з фіксованим його значенням $\alpha = 20^\circ$ на ділильній окружності й у так званого початкового контуру) прийемо за незалежний параметр рівняння евольвенти.

Рівняння (4.4) можна записати з $\triangle ONY$ у вигляді

$$r_Y = r_b / \cos \alpha_Y. \quad (4.6)$$

Для зручності при виконанні точних розрахунків евольвентного зачеплення в довідковій літературі поміщаються готові таблиці інволюнтної функції $inv\alpha_\gamma$. Наводимо тут стислу вибірку із шестизначної таблиці інволюнтної (евольвентної) функції.

Значення інволюнтної функції ($inv\alpha_\gamma = tg\alpha_\gamma - \alpha_\gamma$)

Таблиця 4.1

Кут α (град)	Порядок	0,0'	10'	20'	30'	40'	50'
15	0,00	615	636	658	680	702	725
16	0,00	749	773	798	823	849	876
17	0,0	0902	0930	0958	0987	1016	1046
18	0,0	1076	1107	1139	1171	1203	1237
19	0,0	1271	1306	1342	1378	1415	1452
20	0,0	1490	1529	1569	1609	1650	1692
21	0,0	1734	1778	1822	1866	1912	1958
22	0,0	2005	2053	2102	2154	2202	2253
23	0,0	2304	2358	2411	2466	2521	2578
24	0,0	2635	2693	2752	2812	2873	2935
25	0,0	2997	3061	3126	3192	3258	3326
26	0,0	3394	3464	3535	3607	3680	3754
27	0,0	3828	3905	3982	4060	4140	4220
28	0,0	4302	4384	4468	4554	4640	4728
29	0,0	4816	4906	4998	5090	5184	5278
30	0,0	5375	5473	5572	5672	5774	5876
31	0,0	5981	6087	6194	6302	6412	6524
32	0,0	6636	6751	6866	6984	7103	7223
33	0,0	7345	7468	7593	7720	7848	7978
34	0,0	8110	8243	8378	8514	8652	8792
35	0,0	8934	9078	9223	9370	9519	9670

6. Взаємодія евольвентних профілів

На рис. 4.4 показані дві евольвенти E_1 і E_2 у різних взаємних положеннях при деякій довільній міжосьовій відстані a_w , яку назвемо монтажною (тобто такою, яка залежить від умов монтажу зубчастих коліс).

Розглянемо спочатку торкання евольвент у деякій точці K .

З властивостей евольвенти слідує, що пряма KN_1 , проведена з точки K дотично до основної окружності радіуса r_{b1} , є нормаллю до евольвенти E_1 .

На тій же підставі пряма KN_2 , проведена дотично до основної окружності радіуса r_{b2} , є нормаллю до евольвенти E_2 .

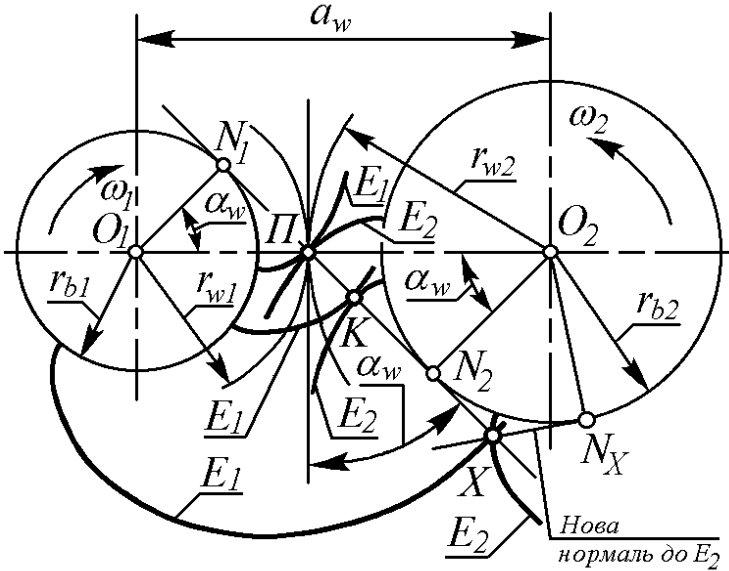


Рис. 4.4. Взаємодія двох евольвентних профілів

Відрізки KN_1 і KN_2 складають загальну пряму N_1N_2 , дотичну до двох основних окружностей. Отже, пряма N_1N_2 буде загальною нормаллю до двох евольвент, які із цієї причини (на підставі основного закону зачеплення) є спряженими профілями, і її можна розглядати як геометричне місце точок контакту спряжених евольвент E_1 і E_2 - тобто як лінію евольвентного зачеплення.

Точка $П$ на перетинанні лінії зачеплення з міжосьовою лінією O_1O_2 є полюсом евольвентного зачеплення.

Окружності радіусів r_{w1} і r_{w2} , що дотикаються в полюсі зачеплення, є початковими окружностями, які перекочуються одна по одній без скосування.

Кут α_w між лінією зачеплення і прямою, перпендикулярною до міжосьової лінії, є кутом евольвентного зачеплення, який теж називається монтажним.

Центральні кути $\angle N_1 O_1 P$ і $\angle N_2 O_2 P$ за умовою взаємної перпендикулярності сторін рівні куту зачеплення α_w .

З рисунка 4.4 слідує, що кут профілю евольвенти в точці евольвенти, що лежить на початковій окружності, чисельно дорівнює куту зачеплення α_w .

Евольвентне зачеплення допускає зміну міжосьової відстані a_w із зберіганням раніше передбаченого передаточного відношення. Зміна міжосьової відстані a_w позначиться тільки на величині кута зачеплення α_w і на величинах радіусів початкових окружностей r_{w1} і r_{w2} .

Дуже важливою є властивість евольвентного зачеплення, яка полягає в тому, що евольвентні профілі являються спряженими тільки в межах відрізка $N_1 N_2$ лінії зачеплення.

Евольвенти E_1 і E_2 , що проходять через деяку точку X , розташовану поза ділянкою $N_1 N_2$ (рис. 4.4), не мають загальної нормалі.

Це означає, що евольвенти не дотикаються в точці X , а перетинаються.

Те ж саме відбудеться поза ділянкою $N_1 N_2$ вище точки N_1 .

Тому ділянка $N_1 N_2$ називається теоретичною ділянкою лінії зачеплення.

У проєктованих зачепленнях контакт евольвентних профілів допустимий тільки в межах теоретичної ділянки лінії зачеплення $N_1 N_2$, у протилежному випадку можлива поломка зубців або ж заклинення передачі.

З прямолінійності лінії зачеплення витікають всі основні переваги евольвентного профілю:

1. Завжди спряженими будуть будь-які евольвентні профілі (як евольвенти двох різних окружностей), тобто незалежно від чисел зубців коліс - адже вони мають ту саму лінію зачеплення (пряму), що і забезпечує їхню спряженість відповідно до теореми Рело.

2. Тим самим евольвентним зубонарізним інструментом (із фіксованим числом зубців z_{instr}) можна нарізати будь-які евольвентні зубчасті колеса (із будь-яким числом зубців z) - усі профілі зубців при цьому будуть залишатися спряженими, тобто в даному випадку евольвентними.

3. Тому що лінія зачеплення завжди йде по нормалі до евольвентного профілю у всіх його точках, то і сила тиску зуба на зуб (без урахування сил тертя) буде зберігати свій напрямок - по лінії зачеплення в будь-якій фазі (у будь-який момент) зачеплення.

А тому, що лінія зачеплення проходить через полюс зачеплення під постійним кутом, то і сила взаємодії зубців незалежно від фази зачеплення буде зберігати свій постійний напрямок.

При постійному переданому обертовому моменті сил, сила тиску зуба на зуб не буде, таким чином, змінювати ні своєї величини, ні свого напрямку.

Стабільність сили взаємодії зубчастих коліс по величині і напрямку при її розкладанні на три виняткові напрямки (окружний, радіальний та осьовий) дає всі постійні складові.

Це забезпечує передачам із евольвентним зачепленням у режимі постійного потоку потужності відсутність вібрацій по напрямках всіх осей декартової системи координат.

4. Зубчасті колеса з евольвентними профілями зубців мають взаємозамінність. Тому звичайно при ремонті передачі замінюють тільки те колесо, у якого знайдено дефект.

У випадку інших зачеплень звичайно рекомендують замінити спряжену пару зубчастих коліс.

5. Евольвентні профілі нечутливі до неточності монтажу по міжосьовій відстані, тому що не втрачають при цьому спряженості. Це здешевлює виготовлення корпусних деталей.

У інших видів зачеплень вимоги до точності забезпечення міжосьової відстані більш жорсткі.

Справедливості заради, слід зазначити, що евольвентне зачеплення має і свої недоліки:

1. Втрати потужності на подолання сил тертя при профільному сковзанні, пропорційні швидкості сковзання, у евольвентного зачеплення вищі, ніж у деяких інших поширених зачеплень (циклоїдального, цівкового, Новікова), тому що швидкість сковзання пропорційна віддаленню точки контакту від полюса зачеплення, а по прямій (в евольвентного зачеплення) можна піти далі від полюса, ніж по кривій (в інших зачеплень).

Таким чином, ККД евольвентних профілів хоч і високий, але все ж дещо нижчий, ніж в інших зачеплень.

2. Обмеженість довжини відрізка N_1N_2 лінії зачеплення між точками торкання до основних окружностей коліс пари зачеплення веде до явищ, що вже згадувалися при кінематичному синтезі планетарних передач:

- до обмеження мінімального числа зубців (Z_{min});
- до можливої інтерференції евольвентних профілів (тобто до заклинення зубців) і до деяких інших небажаних явищ.

3. Опуклість евольвентних профілів коліс із зовнішніми зубцями, що спричиняє за собою великі контактні тиски зубців у зовнішньому зачепленні. Необхідність підвищення навантажувальної спроможності зубчастих коліс у незмінних габаритах спричиняє за собою необхідність підвищення поверхневої твердості зубців за рахунок їх термічної або термохімічної обробки, що ускладнює й здорожує виробництво евольвентних зубчастих коліс.

При цьому виникає непереборна межа навантажувальної спроможності.

Наприклад, зачеплення Новікова має більш високу навантажувальну спроможність навіть без термообробки зубців, унаслідок контакту опуклої й увігнутої поверхонь зубців у зовнішньому цьому зачепленні.

7. Контрольні запитання

1. Які профілі зубів зубчастих коліс називаються спряженими?
2. Сформулюйте і доведіть основний закон (теорему) зачеплення.
3. Що таке полюс зачеплення? Які окружності називаються початковими?
4. Який відносний рух зубців у зовнішньому зачепленні?
5. Які особливості має відносний рух зубців у внутрішньому зачепленні?
6. Як визначити швидкість сковзання зубців?
7. Що таке лінія зачеплення? Які різновиди ліній зачеплення Ви знаєте?
8. Опишіть геометричні властивості евольвенти.
9. Перерахуйте переваги і недоліки евольвентного зачеплення.

Лекція 13

Тема: Геометричні та якісні показники евольвентного зачеплення

Зміст:

1. Геометрія евольвентного зубчастого колеса.
2. Геометрія зовнішнього нульового евольвентного зачеплення.
3. Особливості геометрії внутрішнього евольвентного зачеплення.
4. Коефіцієнт перекриття.
5. Питоме сковзання евольвентних профілів.
6. Контрольні запитання.

1. Геометрія евольвентного зубчастого колеса

На рис. 4.5 показане евольвентне зубчасте колесо з $z=8$.

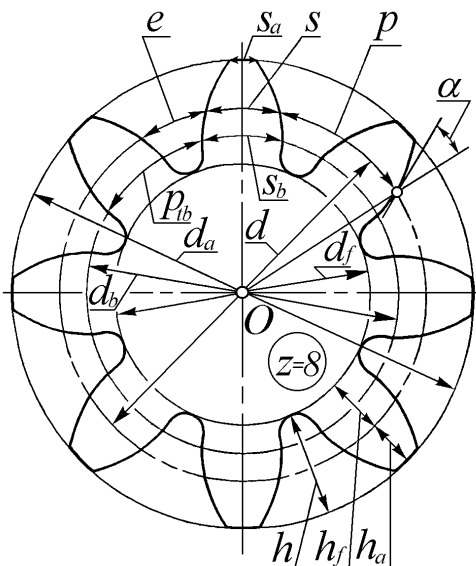


Рис. 4.5. Евольвентне зубчасте колесо

e - ділительна ширина впадини;

Позначені на рисунку розміри мають такі назви:

d - діаметр ділительної окружності (котра була початковою в так званому верстатному зачепленні - тобто при нарізуванні колеса - і прийняла на себе стандартні параметри зубонарізного інструмента);

p - окружний ділительний шаг зубців, тобто відстань по дузі ділительної окружності між однойменними точками сусідніх зубців;

p_b - окружний основний шаг, тобто відстань по дузі основної окружності між однойменними точками сусідніх зубців;

s - ділительна товщина зуба;

h_a - ділильна висота голівки зуба;

h_f - ділильна висота ніжки зуба;

h - висота зуба;

α - профільний кут евольвенти на ділильній окружності (сучасні зубчасті колеса мають величину кута $\alpha=20^0$, а раніше ще зустрічалися зубчасті колеса, які мали $\alpha=28^0$ або $\alpha=15^0$);

d_b - діаметр основної окружності (еволюти);

d_a - діаметр окружності вершин зубців;

d_f - діаметр окружності впадин зубців;

S_a - товщина зуба по окружності вершин (яка ще називається шириною стрічки зуба);

S_b - основна товщина зуба.

Зауважимо, що всім геометричним розмірам привласнені стандартні індекси:

a - розмірам, зв'язаним з окружністю вершин зубців ($d_a, r_a, p_a, h_a, S_a, \alpha_a$ і т. д.);

f - розмірам, зв'язаним з окружністю впадин зубців (d_f, r_f, p_f, h_f і т. д.);

b - розмірам, зв'язаним з основною окружністю (d_b, r_b, p_b, S_b і т. д.);

w - розмірам, зв'язаним із початковою окружністю, що як уже було сказано виникає тільки в зачепленні пари коліс, тобто при монтажі передачі ($d_w, r_w, p_w, S_w, e_w, a_w, \alpha_w$ і т. д.).

І тільки розміри, що відносяться до ділильної окружності, записуються без якого б то не було індексу (d, r, p, s, e, a, α і т. д.).

Всі розміри колеса і зубців взаємозалежні. Покажемо цей взаємозв'язок.

Для цього знайдемо довжину ділильної окружності

$$L_{do} = \pi d = p z.$$

Звідси виразимо величину діаметра ділильної окружності

$$d = \frac{p}{\pi} \cdot z.$$

Виникає питання: яку величину покласти в основу стандартизації зубчастих коліс?

Очевидно, що нормально зачіплятися одне з одним можуть тільки зубчасті колеса з однаковим шагом зубців.

Можна було б покласти в основу стандарту величину ділильного шагу зубців p , але тоді, при стандартному раціональному значенні p і при цілому числі z , ділильний діаметр d буде ірраціональним числом.

Ірраціональність d пояснюється числом π , що входить у формулу для визначення d . Як відомо з математики, число π - є ірраціональним трансцендентним числом, яке виражається нескінченно убитим десятковим неперіодичним дробом.

Завжди виникає питання, скільки знаків після коми у числі π слід враховувати при розрахунку?

Однозначної відповіді на поставлене питання бути не може, тому що в однім випадку достатньо взяти усього лише два знаки після коми (одержимо звичне $\pi = 3,14$), а в іншому буде недостатньо і восьми знаків. Усе залежить від необхідної точності розрахунків.

Як ми побачимо надалі, бажано мати ділильний діаметр d у вигляді раціонального числа, але тоді обов'язково ірраціональним вийде ділильний шаг зубців p .

Вихід із цього замкнутого порочного кола, що виникнуло через наявність числа π у формулі для визначення діаметра ділильної окружності d , був знайдений у тому, що в основу стандарту була покладена величина

відношення $\frac{p}{\pi}$, названа *модулем зачеплення*:

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (4.8)$$

Є два ряди значень модуля зачеплення m (перед другим рядом значень m слід віддавати перевагу першому). Модуль зачеплення m - це раціональне число, що є деяким еталонним розміром (в мм). Геометричні параметри (розміри) колеса виражають у долях модуля m .

Так, формула для розрахунку ділильного діаметра буде:

$$d = m z. \quad (4.9)$$

Окружний ділильний шаг зубців можна підрахувати по формулі

$$p = \pi m \quad (4.10)$$

Тепер можна сформулювати поняття “ділильна окружність”. *Ділильна окружність* - це така уявлювана окружність, яка перетинає евольвентний профіль зуба в точці, для якої кут профілю дорівнює стандартному значенню $\alpha = 20^\circ$, і по якій шаг зубців відповідає стандартному модулю зачеплення m .

З рис. 4.5 очевидно, що

$$s + e = p. \quad (4.11)$$

Нормальні (так звані - нульові) колеса мають

$$s = e = \frac{p}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2}. \quad (4.12)$$

Ненульові колеса можуть мати

$$s \neq e.$$

Ділильну висоту голівки зубців виражають залежністю

$$h_a = h_a^* \cdot m, \quad (4.13)$$

де h_a^* - безрозмірний коефіцієнт висоти голівки зуба.

Звичайно $h_a^* = 1,0$, але іноді h_a^* відрізняється від $1,0$ у більшу або меншу сторону (при $h_a^* = 1,0$ - утворюється нормальний по висоті зуб; при $h_a^* > 1,0$ - утворюється подовжений зуб, при $h_a^* < 1,0$ - утворюється укорочений зуб).

Ділильну висоту ніжки зуба виражають залежністю

$$h_f = (h_a^* + c^*) \cdot m, \quad (4.14)$$

де c^* - коефіцієнт радіального зазору.

Звичайно $c^* = 0,25$, іноді $c^* = 0,2$ (наприклад, у черв'ячних передачах).

Дуже рідко застосовують $c^* < 0,2$, тому що зменшення радіального зазору, особливо при широких вінцях зубчастих коліс і явному змащенню зачеплення, може призводити до неприпустимих сплесків гідравлічного тиску в замкнутих об'ємах мастила між зубцями.

З рис. 4.5 також очевидно, що

$$h = h_a + h_f = (2h_a^* + c^*) \cdot m. \quad (4.15)$$

Діаметр окружності вершин зубців нульового колеса можна підрахувати по формулі

$$d_a = d + 2h_a = m(z + 2h_a^*). \quad (4.16)$$

Для нульових коліс із нормальним по висоті зубом ($h_a^* = 1,0$)

$$d_a = m(z + 2). \quad (4.17)$$

Діаметр окружності впадин зубців нульового колеса обчислюють по формулі

$$d_f = d - 2h_f = m(z - 2h_a^* - 2c^*). \quad (4.18)$$

Для нульових коліс із нормальним по висоті зубом

$$d_f = m(z - 2,5). \quad (4.19)$$

Діаметр основної окружності d_b на підставі першого параметричного рівняння евольвенти (4.6) можна підрахувати по формулі

$$d_b = d \cdot \cos \alpha = m \cdot z \cdot \cos \alpha. \quad (4.20)$$

Радіус довільної окружності колеса r_Y на підставі формул (4.6) і (4.20) через відоме значення кута α_Y виражається в такий спосіб

$$r_Y = r \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_Y} = \frac{mz}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_Y}. \quad (4.21)$$

Тому що шаги зубців пропорційні радіусам, то шаг зубців по основній окружності

$$p_b = p \cdot \cos \alpha = \pi m \cos \alpha, \quad (4.22)$$

а шаг зубців по окружності довільного радіуса

$$p_Y = p \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_Y} = \pi m \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_Y}. \quad (4.23)$$

Формули (4.38) і (4.39) для підрахунку товщин зубців s_a - по окружності вершин і s_b - по основній окружності, показаних на рис. 4.2, будуть виведені нижче (у п. 4.3.12).

2. Геометрія зовнішнього нульового евольвентного зачеплення

На рис. 4.6 показане зовнішнє полюсне нульове евольвентне зачеплення.

На рис. 4.6 додатково, в порівнянні з рис. 4.5 і з урахуванням рис. 4.4 позначено:

a_w - монтажна міжосьова відстань;

a - ділительна міжосьова відстань,

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}; \quad (4.24)$$

α_w - монтажний кут зачеплення;

$N_1 N_2$ - теоретична ділянка лінії зачеплення;

AB - робоча (дійсна, активна) ділянка лінії зачеплення, обмежена на лінії зачеплення окружностями вершин зубців коліс 1 і 2;

$A_1 B_1$ - робоча частина евольвентного профілю зуба колеса 1;

$A_2 B_2$ - робоча частина евольвентного профілю зуба колеса 2.

Зображені на рис. 4.6 зубці ввійшли в зачеплення (почали роботу) у точці A на лінії зачеплення.

У той момент у контакті знаходилися спряжені точки A_1 і A_2 зубців 1 і 2 (робочі сторони зубців 1 і 2 у момент їхнього входу в зачеплення показані пунктирно зліва).

При виході з зачеплення зубці 1 і 2 будуть контактувати в точці B на лінії зачеплення.

У цей момент у контакті виявляться спряжені точки зубців B_1 і B_2 (робочі сторони зубців 1 і 2 у момент їхнього виходу з зачеплення показані пунктирно справа).

Очевидно, що на зубці колеса 1 точка A_1 лежить на окружності з центром O_1 , яка проходить через точку A лінії зачеплення.

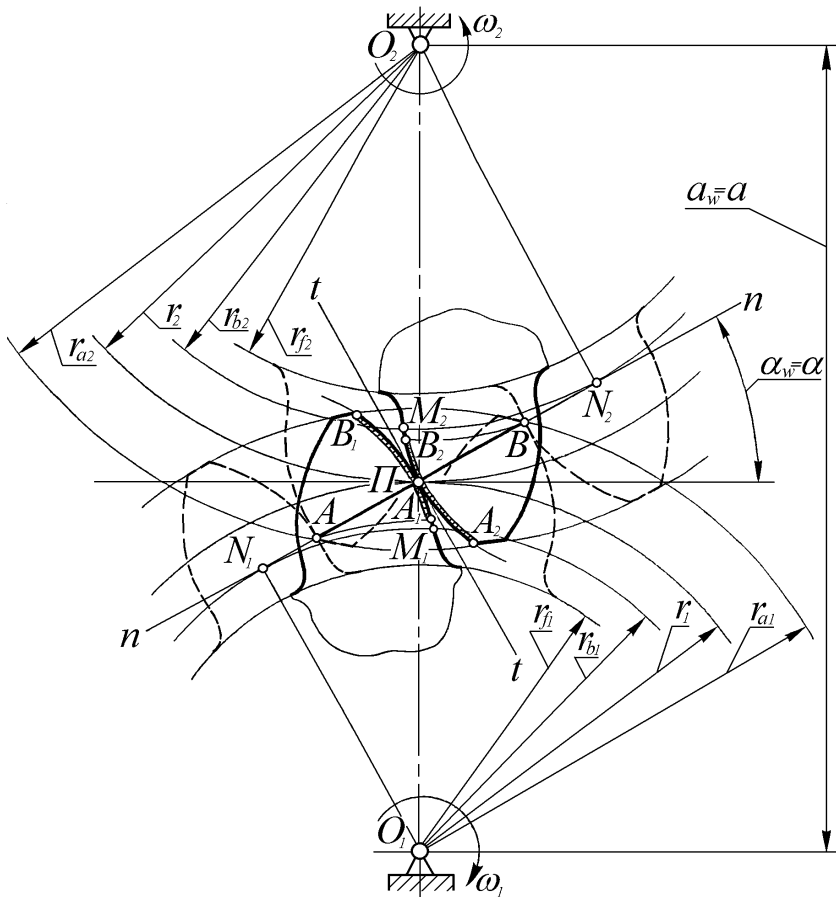


Рис. 4.6. Зовнішнє полюсне нульове евольвентне зачеплення

Точно так само можна закоординувати на робочій стороні зуба колеса 2 точку B_2 . Вона лежить на окружності з центром O_2 , яка проходить через точку B лінії зачеплення.

Що стосується точок B_1 і A_2 , то вони лежать на вершинах зубців.

Таким чином, помічаємо, що не весь евольвентний профіль (у обох зубців) бере участь у зачепленні.

Евольвенти профілів зубців 1 і 2 починаються в точках M_1 і M_2 . Ділянки евольвент M_1A_1 зуба 1 і M_2B_2 зуба 2 у передачі навантаження не беруть участі.

Зі зменшенням чисел зубців коліс 1 і 2 робочі ділянки евольвент усе ближче підходять до точок M_1 і M_2 , а точки N_1 і N_2 лінії зачеплення усе наближаються до точок A і B .

Як було показано в п. 4.3.3, поки робоча ділянка лінії зачеплення AB знаходиться усередині теоретичної ділянки лінії зачеплення N_1N_2 зачеплення зберігає працездатність, але як тільки в якомусь місці робоча ділянка AB вийде за межі теоретичної ділянки N_1N_2 , так відразу ж відбудеться заклинення зачеплення, тому що за межами теоретичної ділянки лінії зачеплення евольвентні профілі не мають загальної нормалі (тобто там порушується основний закон зачеплення).

Взагалі небажано, щоб евольвента вступала в зачеплення поблизу точки M , де кривизна евольвенти прагне до нескінченності, адже це може призвести до неприпустимого росту контактних тисків у зачепленні.

З практики відомо, що ніжка зуба є більш уразливою і з погляду контактної втоми, і з погляду зносостійкості.

Розгляд геометрії евольвентного зачеплення пояснює це практичне спостереження.

Якщо при нарізуванні коліс із малими числами зубів у верстатному зачепленні інструментального колеса і заготовки робоча ділянка лінії зачеплення AB вийде за межі теоретичної ділянки лінії зачеплення N_1N_2 , тоді відбудеться підріз ніжок зубців нарізованого колеса, що неприпустимо.

3. Особливості геометрії внутрішнього евольвентного зачеплення

На рис. 4.7 показане нульове внутрішнє евольвентне зачеплення.

Очевидно, що опуклий профіль зуба малого колеса 1 контактує з увігнутим профілем зуба великого колеса 2 (із внутрішніми зубцями). Це призводить до менших контактних тисків і до підвищення навантажувальної спроможності внутрішнього зачеплення в порівнянні з зовнішнім.

Тому що окружність вершин зубців великого колеса загнута донизу і відтинає нижню межу робочої ділянки лінії зачеплення AB (точку A), ближче

Відзначимо також ту обставину, що велике колесо має на відміну від малого значно більш міцну форму зубців на згин (дуже широку основу). Це створює передумови для перерозподілу згинної міцності зубців за рахунок технологічних прийомів до користь зубців шестерні (малого колеса).

У сполученні з меншими втратами потужності на подолання сил тертя при профільному сковзанні, підвищена контактна і згинна міцність зубців внутрішнього зачеплення обумовлює його широке застосування в планетарних передачах Давида з двома внутрішніми зачепленнями.

4. Якісні показники евольвентного зачеплення

Розглянемо якісні показники евольвентного зачеплення, які дозволяють оцінити передачу у відношенні плавності і безшумності роботи зачеплення, можливого зносу і міцності зубців, а також порівняти ряд передач по тим же показникам. До якісних показників відносяться:

коефіцієнт (ступінь) перекриття зачеплення (враховує безперервність і плавність зачеплення зубців у передачі);

коефіцієнт питомого сковзання профілів (враховує вплив геометричних і кінематичних факторів на величину відносного прослизання профілів у процесі зачеплення);

коефіцієнт питомого тиску зубців (враховує вплив геометрії профілів зубців на величину контактних напруг у місцях контакту зубців).

Зупинимося докладніше на перших двох з них, як більш важливих.

5. Коефіцієнт перекриття зачеплення

При роботі зубчастих коліс обов'язково повинно мати місце перекриття в зачепленні пар зубців, що змінюються: перед тим, як попередня пара зубців вийде з зачеплення, наступна пара зубців повинна в зачеплення ввійти.

Покажемо одну й ту саму пару зубців на початку (т. *A*) і наприкінці (т. *B*) зачеплення (рис. 4.8).

За час роботи одного зуба колесо 1 повернеться на кут, що стягається дугою початкової окружності, яка називається *дугою зачеплення*.

Відповідно до сучасного стандарту *коефіцієнт перекриття чисельно виражається як відношення кута повороту колеса δ за час роботи одного зуба до кутового шагу зубців γ* , тобто

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\gamma}. \quad (4.25)$$

Практичне користування даною формулою утруднено, тому що утруднене визначення кута δ .

Кут γ при необхідності може бути легко підрахований по формулі

$$\gamma = \frac{2\pi}{z} \text{ (рад)}. \quad (4.26)$$

Для графоаналітичного визначення коефіцієнта перекриття ε краще замінити відношення кутів відношенням довжин дуг, що стягають ці кути (величина радіуса обраної окружності при цьому скорочується).

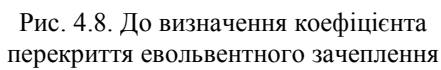
Зручно коефіцієнт перекриття ε виразити через відношення довжин відповідних дуг основної окружності

$$\varepsilon = \frac{CC'}{p_b}, \text{ де}$$

CC' - дуга зачеплення по основній окружності колеса 1,

p_b - окружний основний шаг зубців (визначається по формулі 4.22).

З властивостей евольвенти слідує, що довжина дуги зачеплення CC' дорівнює довжині робочої ділянки лінії зачеплення AB .


$$p_b = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha, \text{ то}$$

$$\varepsilon = \frac{AB}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha}. \quad (4.27)$$

Проаналізуємо отриману формулу (4.27).

Відрізок AB робочої ділянки лінії зачеплення легко визначити графічно. У знаменнику ж стоять усі відомі для даного зачеплення постійні величини.

На перший погляд величина модуля зачеплення m може впливати на коефіцієнт перекриття.

Але це не так.

Модуль зачеплення лише задає лінійний масштаб, у якому відтворюються всі пропорції коліс.

Іншими словами, за інших рівних умов, у скільки разів зміниться модуль зачеплення m , у стільки ж разів зміниться і відрізок AB , а їхнє відношення залишиться незмінним.

Інші величини в знаменнику: π - константа, а профільний кут переважного числа евольвентних сучасних зубчастих коліс $\alpha = 20^\circ$.

Отже, коефіцієнт перекриття визначається практично тільки відносною довжиною робочої ділянки лінії зачеплення AB .

Розглянемо, від чого і як залежить довжина відрізка AB .

1. Застосування подовжених або укорочених зубців вчиняє істотний вплив на коефіцієнт перекриття ε .

Збільшення h_a^* подовжує не тільки зубці, але і збільшує AB і, отже, збільшує ε .

Навпаки, зменшення h_a^* спричиняє за собою зниження ступеня перекриття.

2. При збільшенні α_w довжина робочої ділянки AB лінії зачеплення скорочується. Отже, із ростом α_w коефіцієнт перекриття ε зменшується.

Навпаки, зменшення α_w веде до росту ε .

3. При незмінному i_{1-2} зростання z_1 і z_2 збільшує ε .

Максимальний ступінь перекриття, що досягається в зовнішньому зачепленні, $\varepsilon < 1,981$.

Це можна довести, розглянувши рис. 4.9.

При дуже великих числах зубців коліс 1 і 2 зовнішнього зачеплення їхня форма наближається до форми зубців зубчастої рейки.

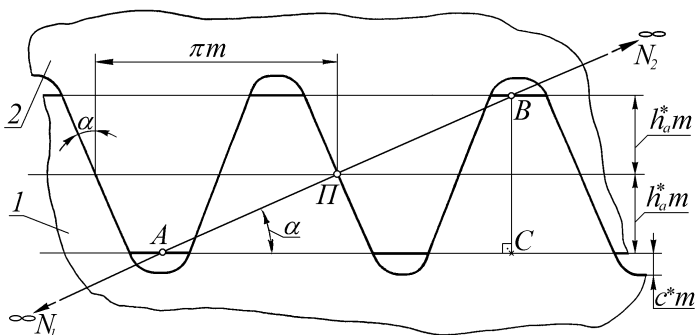


Рис. 4.9. Зовнішнє зачеплення евольвентних зубчастих коліс
при $z_1 \rightarrow \infty$ і $z_2 \rightarrow \infty$

У цьому випадку в масштабі зображення теоретична ділянка лінії зачеплення N_1N_2 ні зліва ні справа не обмежена, довжина ж робочої ділянки лінії зачеплення AB може бути підрахована з $\triangle ABC$ по формулі

$$AB = 2 h_a^* m / \sin \alpha.$$

Тоді

$$\varepsilon_{max} = \frac{AB}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha} = \frac{2 h_a^*}{\pi \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}.$$

При $h_a^* = 1,0$ і $\alpha = 20^\circ$ знаходимо

$$\varepsilon_{max} = 1,9808 < 1,981.$$

В внутрішньому зачепленні коефіцієнт перекриття може бути

$$\varepsilon \leq 2.$$

Іноді, щоб пояснити фізичний зміст коефіцієнта перекриття, говорять, що число ε - це середнє число пар зубців, що одночасно знаходяться в зачепленні. У якійсь мірі це відбиває сутність поняття коефіцієнта перекриття.

Наприклад, якщо $\varepsilon = 1,5$, то можна сказати, що приблизно 50% часу роботи в зачепленні знаходиться усього лише одна пара зубців, а 50% часу роботи в зачепленні знаходиться дві пари зубців.

На рис. 4.10 на робочій ділянці лінії зачеплення AB виділена ділянка однопарного зачеплення K_2K_1 . У межах довжини AK_2 і K_1B робочої ділянки лінії зачеплення буде спостерігатися двопарне зачеплення зубців.

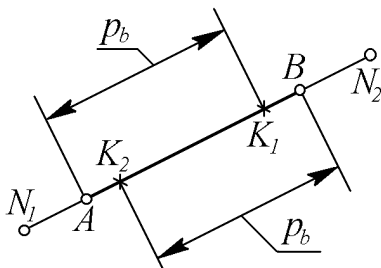


Рис. 4.10. Зони двопарного і однопарного зачеплення

Справді, між точками контакту попередньої пари зубців та наступної пари зубців по лінії зачеплення буде спостерігатися відстань, рівна окружному основному шагу зубців $p_b = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha$.

При вході в контакт у точці A наступної пари зубців попередня пара зубців уже буде знаходитися в контакті в точці K_1 на лінії зачеплення.

Спільна їхня робота буде спостерігатися доти, поки точка контакту наступної пари буде переміщатися від A до K_2 , а точка контакту попередньої пари - від K_1 до B . У межах же K_2K_1 залишиться в зачепленні лише наступна пара, тому що попередня пара зубців уже вийде з зачеплення, а третя пара зубців, що знаходиться на підході, ще не ввійде в зачеплення.

Очевидно, що не повинно бути перерви в передачі навантаження зубцями, тобто коефіцієнт перекриття не може бути менше $1,0$.

Якщо припустити, що $\varepsilon = 0,9$, тоді приблизно 90% часу роботи в зачепленні знаходилася б одна пара зубців, а 10% - жодної.

При цьому колеса могли б обертатися незалежно одне від одного з довільними (залежними від інших факторів, а не від профілів зубців) швидкостями.

При вході в контакт такої пари зубців знову повинен був би відновитися взаємозв'язок кутових швидкостей (відповідно до передаточного відношення).

Це супроводжувалося б дуже жорсткими ударами (великими стрибками кутових прискорень коліс, які викликали б великі стрибки інерційних динамічних навантажень).

Тому на практиці повинна виконуватися вимога

$$\varepsilon \geq 1,1.$$

І лише для високоточних кінематичних зачеплень допускається

$$\varepsilon \geq 1,05.$$

Це можна пояснити так. При невисокій точності виготовлення і зборки передачі відхилення реального коефіцієнта перекриття може бути й у меншу й у більшу сторону дуже значним. Відхилення у більшу сторону навіть корисне, а от відхилення в меншу сторону дуже небезпечне.

$\varepsilon = 1,1$ означає 10%-ний запас на можливе зниження ε .

Тут варто мати на увазі, що ε буде знижуватися також при зносі зубців, підшипників і інших деталей у процесі експлуатації передачі.

10%-ний запас - гарантія, що ε буде не менше 1,0.

При більш високій точності передачі може вистачити і 5%-ного запасу коефіцієнта перекриття відносно його граничного мінімального значення $\varepsilon_{min}=1,0$.

6. Питоме сковзання евольвентних профілів

Сковзання різних точок робочих ділянок евольвентних профілів прийнято характеризувати так званим коефіцієнтом питомого сковзання.

Коефіцієнтом питомого сковзання являється відношення швидкості сковзання $V_{ск}$ профілів до проекції V^{τ} окружної швидкості точки профілю, що знаходиться в контакті, на загальну дотичну в точці контакту.

Коефіцієнт питомого сковзання будемо позначати грецькою буквою σ з індексами:

σ_{1-2} - коефіцієнт питомого сковзання профілю зуба колеса 1 відносно профілю зуба колеса 2;

σ_{2-1} - коефіцієнт питомого сковзання профілю зуба колеса 2 відносно профілю зуба колеса 1.

Пояснимо фізичний смисл коефіцієнта питомого сковзання на прикладі жорсткого колеса з нерухомою віссю, що котиться по рухомій жорсткій платформі в різних режимах.

Позначимо через $\sigma_{к-п}$ і $\sigma_{п-к}$ відповідно коефіцієнти питомого сковзання колеса і платформи у відносному сковзанні.

Якщо спостерігається чисте кочення колеса з кінцевою швидкістю $V_{окр}=V^{\tau}$, тоді $V_{ск}=0$, а коефіцієнт питомого сковзання колеса відносно платформи буде

$$\sigma_{к-п} = \frac{V_{ск}}{V^{\tau}} = \frac{0}{V_{окр}} = 0.$$

Очевидно, що при цьому також буде $\sigma_{п-к}=0$.

Зауважимо, що $V_{окр}$ цілком проектується в точці контакту на дотичний напрям. Якщо колесо буксує на місці (колесо обертається, а платформа загальмована), тоді буде

$$V_{ск}=V_{окр}=V^{\tau}, \quad \text{а} \quad \sigma_{к-п}=1.$$

При цьому одержимо $\sigma_{п-к} \rightarrow \infty$, тому що при нерухомій платформі вся робота сил тертя здійснюється в одній її точці (в нерухомій точці контакту).

Якщо ж колесо загальмоване ($V_{окр}=V^r=0$), а платформа рухається з кінцевою швидкістю V , тоді швидкість ковзання $V_{ск}=V$, а коефіцієнт питомого ковзання

$$\sigma_{к-п} = \frac{V_{ск}}{V^r} = \frac{V}{0} \rightarrow \infty.$$

У це ж самий час знаходимо $\sigma_{п-к}=I$.

Про що говорить величина коефіцієнта питомого ковзання σ ?

При чистому коченні ($\sigma_{к-п}=\sigma_{п-к}=0$) абразивний знос колеса і платформи від дотичних сил тертя спостерігатися не буде (відсутнє відносне ковзання в контактї, при якому сили тертя могли б виконати роботу по зношуванню тіл колеса і платформи).

При буксуванні колеса на місці ($\sigma_{к-п}=I$, $\sigma_{п-к}\rightarrow\infty$) сили тертя виконують роботу по зношуванню колеса і платформи. Робота сил тертя розподіляється рівномірно по всієї довжині окружності колеса, тобто знос у кожній точці периметра колеса буде невеликий. Платформа ж буде зношуватися в однім місці екстремально.

При юзі загальмованого колеса по платформі $\sigma_{к-п}\rightarrow\infty$, а $\sigma_{п-к}=I$.

Це означає, що вся робота сил тертя прийдеться на одну точку колеса і його знос у цьому місці буде носити екстремальний характер, а платформа буде рівномірно і незначно зношуватися по всій довжині.

З розглянутого приклада бачимо, що бажано обмежувати величину коефіцієнта питомого ковзання.

Там, де цей коефіцієнт буде великим, там і знос буде вище.

Там же, де він буде невеликим, там і знос буде обмеженим.

Тепер виведемо формули для розрахунку коефіцієнтів питомого ковзання σ_{1-2} і σ_{2-1} профілів зубців коліс 1 і 2, що знаходяться в зачепленні (рис. 4.11).

Зубці зачіпаються (контактують) у точці C лінії зачеплення. Матеріальна точка зуба 1, що знаходиться в контактї, позначена як C_1 , а - матеріальна точка зуба 2, що знаходиться в контактї, позначена як C_2 .

Вектори окружних швидкостей точок C_1 і C_2 позначені на рисунку як $\vec{V}_{C_1}$ і $\vec{V}_{C_2}$. Їхні проекції на загальну нормаль $n-n$ з умови безвіддривності торкання профілів однакові, а вектори відносних швидкостей $\vec{V}_{C_2-C_1}$ і $\vec{V}_{C_1-C_2}$ рівні одна одній і протилежно направлені уздовж загальної дотичної $t-t$ (по модулю $V_{C_2-C_1} = V_{C_1-C_2} = V_{ск}$).

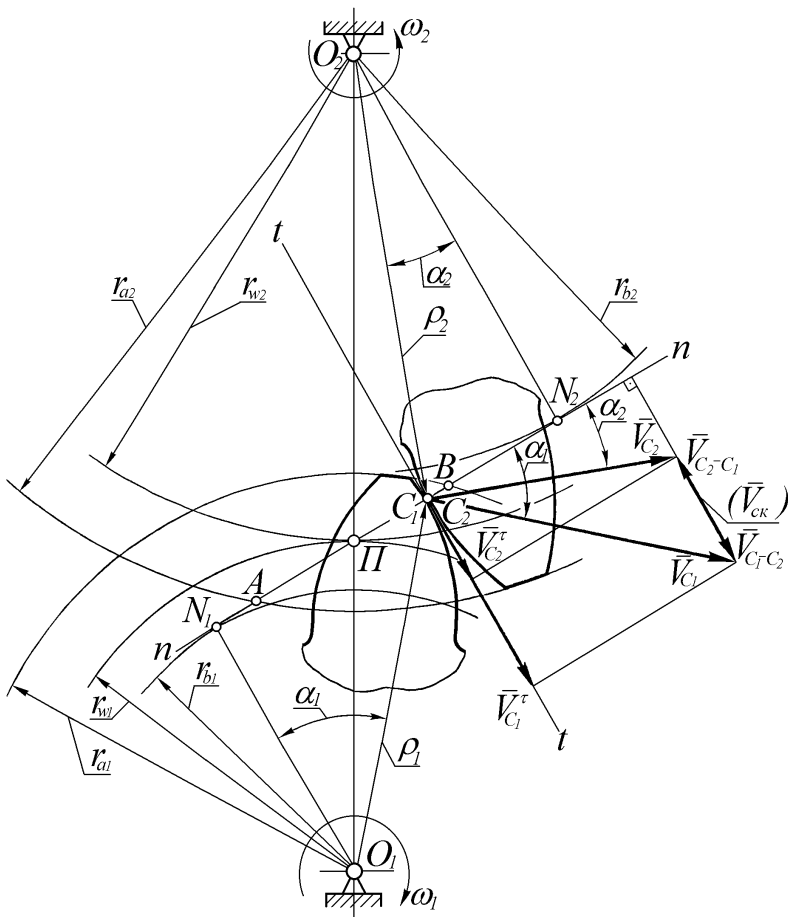


Рис. 4.11. До визначення коефіцієнтів питомого сковзання евольвентних профілів

Відповідно до загального визначення коефіцієнта питомого сковзання σ можемо записати:

$$\sigma_{1-2} = \frac{V_{C_1-C_2}}{V_{C_1}^\tau}, \quad \sigma_{2-1} = \frac{V_{C_2-C_1}}{V_{C_2}^\tau}.$$

Зауважимо, що проекції векторів окружних швидкостей точок профілів, що контактують, на загальну дотичну $t-t$ $\bar{V}_{C_1}^\tau$ і $\bar{V}_{C_2}^\tau$ мають

однин і той же напрямок, а вектори $\bar{V}_{C_2-C_1}$ і $\bar{V}_{C_1-C_2}$ направлені протилежно.

Звідси слідує, що σ_{1-2} і σ_{2-1} мають різний знак, який буде змінюватися на протилежний при переході зачеплення зубців через полюс Π .

Відповідно до формули (4.3)

$$V_{ck} = PC \cdot (\omega_1 + \omega_2).$$

Модулі векторів швидкостей $\bar{V}_{C_1}^\tau$ і $\bar{V}_{C_2}^\tau$ знайдемо, спроектувавши швидкості

$$V_{C_1} = \omega_1 \cdot \rho_1 \text{ і } V_{C_2} = \omega_2 \cdot \rho_2$$

на загальну дотичну $t-t$.

Тоді буде

$$\sigma_{1-2} = \frac{V_{C_1-C_2}}{V_{C_1}^\tau} = \frac{PC \cdot (\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 \cdot \rho_1 \cdot \sin \alpha_1} = \frac{PC}{N_1 C} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1},$$

$$\sigma_{2-1} = \frac{V_{C_2-C_1}}{V_{C_2}^\tau} = \frac{PC \cdot (\omega_1 + \omega_2)}{\omega_2 \cdot \rho_2 \cdot \sin \alpha_2} = \frac{PC}{N_2 C} \cdot \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_2}.$$

Остаточню запишемо формули для визначення σ_{1-2} і σ_{2-1} у вигляді:

$$\sigma_{1-2} = \frac{n_{,,}}{N_1 C} (i_{2-1} + 1); \quad (4.28)$$

$$\sigma_{2-1} = \frac{n_{,,}}{N_2 C} (i_{1-2} + 1). \quad (4.29)$$

На рис. 4.12 показані криві значень коефіцієнтів питомого сковзання σ_{1-2} і σ_{2-1} по довжині теоретичної ділянки лінії зачеплення $N_1 N_2$, розраховані по формулах (4.28) і (4.29).

Додатні гілки σ_{1-2} і σ_{2-1} відносяться до голівок зубців. Видно, що на голівках зубців значення коефіцієнтів питомого сковзання знаходяться в межах від 0 до $+1,0$, тобто невеликі. Знос голівок зубців і колеса 2 і колеса 1 (шестерні), у зв'язку з цим, буде незначний.

Від'ємні гілки σ_{1-2} і σ_{2-1} відносяться до ніжок зубців. Видно, що поблизу точок N_1 і N_2 лінії зачеплення значення коефіцієнтів питомого сковзання йдуть до $-\infty$. Через це знос ніжок зубців носить більш небезпечний характер.

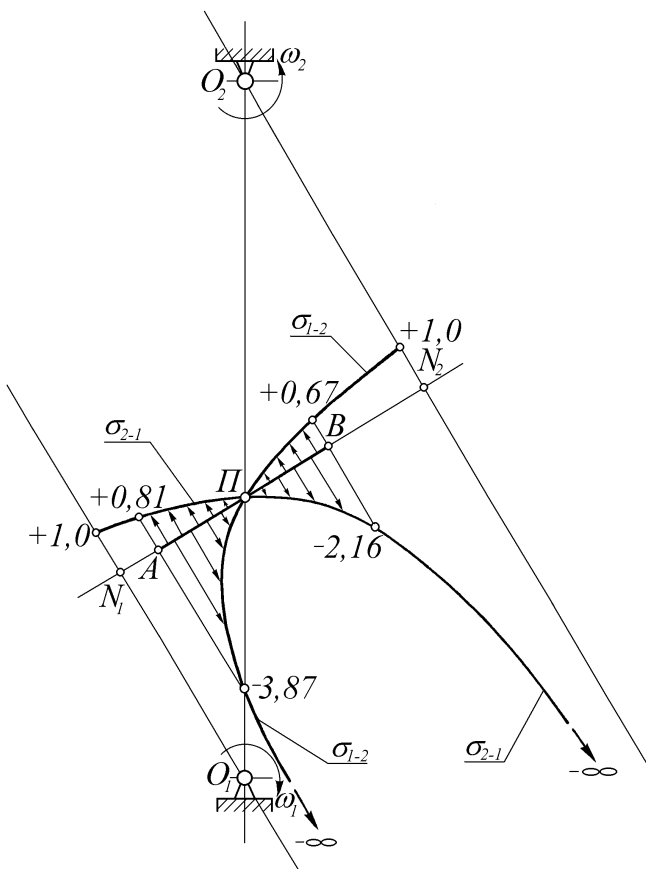


Рис. 4. 12. Криві значень коефіцієнтів
питомого сковзання σ_{1-2} і σ_{2-1}

Особливо знос схильна ніжка зуба шестерні (малого колеса 1), тому що точка A (початку робочої ділянки лінії зачеплення) знаходиться ближче до точки N_1 , ніж точка B до точки N_2 , і коефіцієнт σ_{1-2} у межах робочої ділянки лінії зачеплення AB досягає більших значень, ніж коефіцієнт σ_{2-1} .

Крім того, кожен зуб колеса 1 частіше входить в зачеплення і має менш міцну форму, ніж зуб колеса 2.

Тому звичайно, шестерня виготовляється з більш міцного матеріалу, ніж колесо.

Очевидно, що було б непогано, якби яким-небудь способом вдалося дещо змістити робочу ділянку лінії зачеплення AB у напрямку від N_1 до N_2 . Далі побачимо, що це можливо.

7. Контрольні запитання

1. Опишіть геометрію евольвентного зубчастого колеса.
2. Що таке модуль зачеплення?
3. Що таке кут зачеплення?
4. Опишіть геометричні особливості зовнішнього евольвентного зачеплення.
5. Опишіть геометричні особливості внутрішнього евольвентного зачеплення.
6. Що таке коефіцієнт перекриття евольвентного зачеплення і як він визначається графоаналітично?
7. Що таке зони однопарного і двопарного зачеплення?
8. Від яких факторів залежить величина коефіцієнта перекриття?
9. Визначте коефіцієнти питомого сковзання евольвентних профілів.

Лекція 14

Тема: Виготовлення евольвентних зубчастих коліс

Зміст:

1. Початкові контури евольвентного зачеплення.
2. Методи нарізування евольвентних коліс та їх призначення
3. Подріз евольвентних профілів.
4. Мінімальне число зубців евольвентного колеса.
5. Вибір профільного кута початкового контура.
6. Контрольні запитання.

1. Початкові контури евольвентного зачеплення

В якості початкового теоретичного контуру евольвентного зачеплення прийнятий сектор зубчастого колеса з $z \rightarrow \infty$, тобто зубчаста рейка.

Існує множина стандартизованих початкових контурів, які визначають ті або інші відмінності евольвентних профілів.

На рис. 4.9 показаний початковий контур евольвентного зачеплення, частіше усього використовуваний при проектуванні зубчастих коліс.

У показаного початкового контуру $h_a^* = 1,0$; $c^* = 0,25$; $\alpha = 20^\circ$; $R = 0,38m$.

Точками показані місця сполучення прямих ліній і дуг окружностей, обкреслених радіусом R .

Величина радіуса округлень ніжок зубців початкового контуру $R = 0,38m$, як це слідує з винесення I , визначається величиною c радіального зазору в зачепленні, рівного

$$c = c^* \cdot m = 0,25m.$$

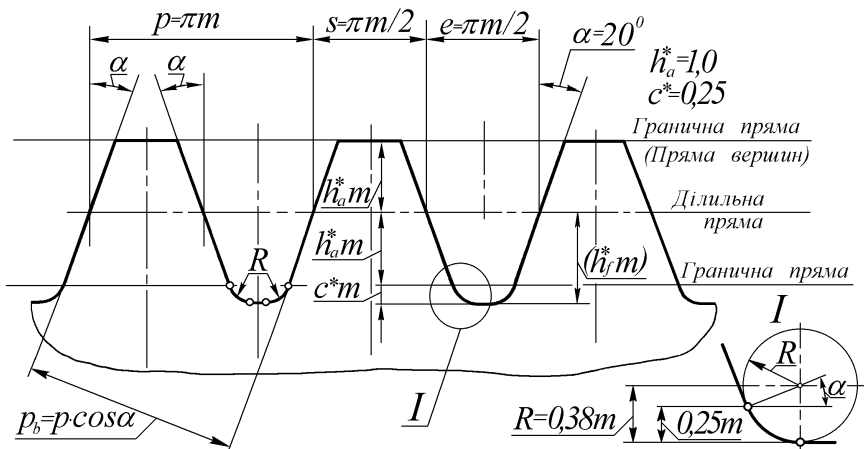


Рис. 4.13. Початковий контур евольвентного зачеплення

На рис. 4.14 показаний початковий виробляючий контур евольвентного зачеплення, який відрізняється від просто початкового контуру, зображеного на рис. 4.13 тим, що має на голівках зубців додаткове подовження на величину $c = c^* m$.

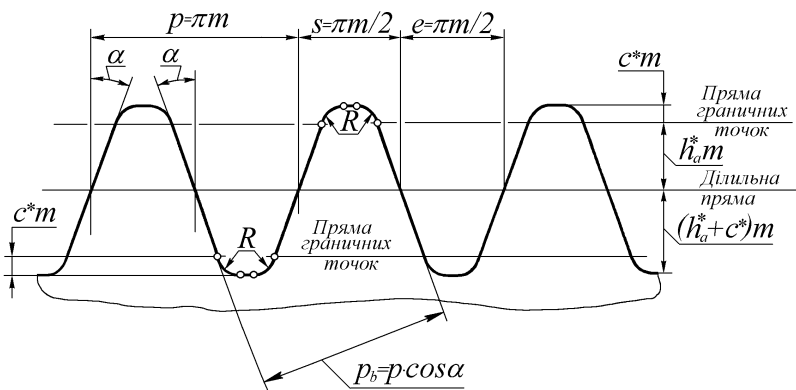


Рис. 4.14. Початковий виробляючий контур евольвентного зачеплення

Початковий виробляючий контур відноситься до зубонарізних інструментів.

Вершини зубців тут подовжені з тієї метою, щоб забезпечити нарізування додаткових заглиблень у западинах між зубцями заготовки, які забезпечать радіальний зазор у зачепленні нарізаних робочих коліс, рівний по величині $c = c^* m$.

Інші, застосовувані на практиці, початкові контури евольвентного зачеплення являються модифікаціями початкових контурів, показаних на рис. 4.9 і 4.10.

У них можуть бути інші значення h_a^* , c^* , α , R , і навіть може бути передбачене різне значення кута α у нижній частині зубців і на їхніх вершинах (так зване фланкування зубців, виконуване з метою зниження динамічних навантажень при вході зубців передач у зачеплення).

2. Методи нарізування евольвентних профілів

Існує два методи нарізування евольвентних профілів: метод копіювання (ділення) і метод обкатки (огинання).

Метод копіювання полягає у фрезеруванні западини між зубцями фрезою, обрис якої відповідає необхідній формі западини (рис. 4.15).

Нарізування евольвентних зубців можна виконати на універсальному фрезерному верстаті, здійснивши z проходів фрези.

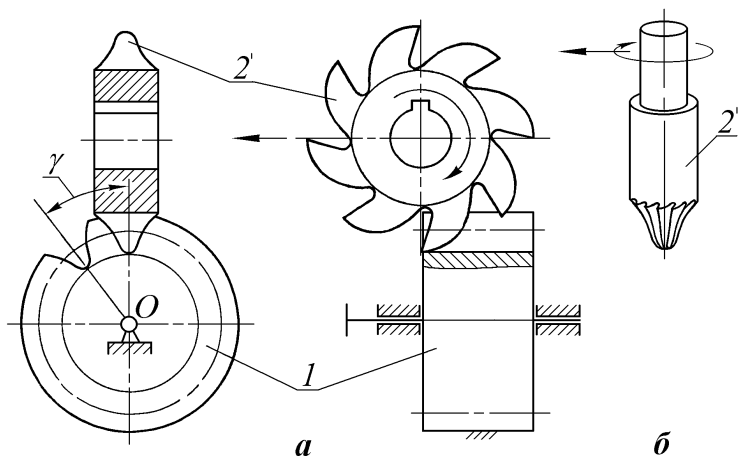


Рис. 4.15. Нарізування зубчастих коліс по методу копіювання

Поворот заготовки 1 для чергового проходів фрези здійснюється за допомогою ділильної голівки на кут $\gamma = 360^\circ/z$. Звідси і відбувається друга назва методу - "метод ділення".

При нарізуванні зубчастих коліс по методу копіювання можуть застосовуватися фрези двох видів: 2'-модульна дискова фреза (рис. 4.15а) ; 2"-модульна пальцева фреза (рис. 4.15б).

Модульна пальцева фреза має меншу стійкість (має менший ресурс) і тому, як правило, застосовується тільки при нарізуванні шевронних коліс,

які інакше неможливо нарізати, або при нарізуванні коліс із візними вінцями.

Шевронні колеса - дуже дорогі, відповідальні, високоточні колеса. Їх застосовують для передачі великих потужностей при високих швидкостях обертання.

Звідси слідє висновок, що метод копіювання, хоч і не відрізняється високою продуктивністю, але може забезпечити принципово точне виготовлення відповідальних і навіть унікальних коліс (із багатометровими діаметрами, наприклад).

Проте, метод копіювання частіше використовується для попереднього чорнового нарізування зубчастих коліс при їхньому масовому виробництві або при одиничному нарізуванні тихохідних невідповідальних коліс в умовах невеличких майстерень, де не може бути спеціальних зубонарізних верстатів. Інструментальне господарство таких майстерень обмежене. Тому, для нарізування різних коліс певного модуля звичайно застосовують набори модульних дискових фрез, які складаються з декількох фрез, кожна з яких призначена для нарізування зубчастих коліс у деякому обмеженому діапазоні чисел зубців (наприклад, при $m < 8$ мм у наборі 8 фрез).

У цьому випадку зубчасті колеса нарізуються принципово неточно, адже при кожному числі зубців - свій профіль, а нарізується один і той самий профіль у коліс із різними числами зубців (наприклад, фреза №5 призначена для діапазону $z=26...29$, вона спрофільована конкретно лише для колеса з $z=26$).

Зубчасті колеса з $z=27$, $z=28$ і $z=29$, нарізані таким способом без наступної чистової обробки, можна застосовувати тільки в невідповідальних, нешвидкісних передачах, тому що вони мають низький ступінь точності.

Метод обкатки є принципово точним методом масового виготовлення зубчастих коліс, але він вимагає застосування спеціальних зубостругальних, зубодовбальних або зубофрезерувальних верстатів.

Останній тип верстатів має дуже високу продуктивність, тому його застосування усе більш розширюється.

Зубостругальні та зубодовбальні верстати мають меншу продуктивність, проте, також широко застосовуються в даний час.

На рис. 4.16 показана схема зубодовбання інструментальним зубчастим колесом, яке називається довбачем.

Інструменту - довбачу 1 і нарізуваному колесу 2 примусово повідомляються кутові швидкості ω_1 і ω_2 , які відповідають передаточному відношенню

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}.$$

Необхідні ω_1 і ω_2 задаються так званою гітарою верстата.

При цьому z_1 - число зубців довбача 1 відоме, а число зубців нарізаного колеса розраховується через дільний діаметр заготовки d_2 і модуль зачеплення m по формулі

$$z_2 = d_2 / m.$$

Тим самим довбачем 1, як уже говорилося вище, можна нарізати зубці колеса 2 із будь-яким їх числом z_2 .

Обертання довбача 1 і колеса 2 із взаємозалежними кутовими швидкостями ω_1 і ω_2 є обкаточним рухом.

Для зрізання стружки довбачу повідомляється зворотно-поступальний осьовий рух. На рисунку цей рух показаний горизонтальними стрілками. Довбач відрізняється від звичайного зубчастого колеса тим, що має затилований зуб, який забезпечує наявність кута різання.

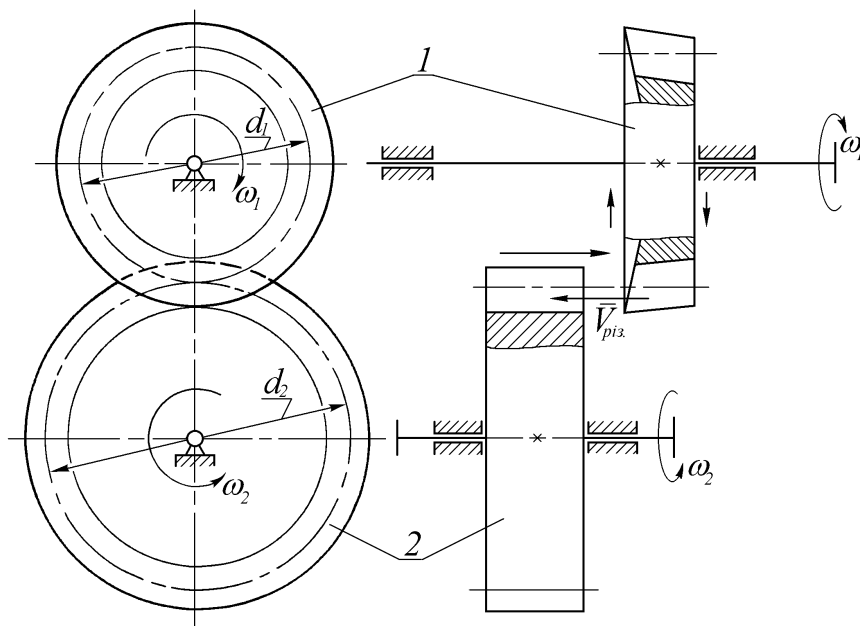


Рис. 4.16. Схема нарізування зубців довбачем на зубодовбальному верстаті

Передня сторона довбача періодично загострюється шліфувальним кругом з циліндричною або конічною формою. При цьому змінюється параметр χ_0 (так званий коефіцієнт зсуву довбача), який необхідно

враховувати при виготовленні зубчастого колеса (від X_0 залежать X колеса та верстатна міжосьова відстань a_w).

Існують прямозубі і косозубі довбачі, які застосовуються для нарізування прямозубих і косозубих коліс. Косозубий довбач під час зубодовбання одержує ще і додатковий гвинтовий рух.

На рис. 4.17 показана схема зубостругання інструментальною прямозубою рейкою (гребінкою або планкою).

Процес зубостругання має багато подібного з процесом зубодовбання. Тільки тут замість обкаточного обертального руху інструментального колеса здійснюється поступальний обкаточний рух інструментальної рейки. Через те, що довжина рейки обмежена, доводиться також додатково переставляти верстатне рейкове зачеплення в нове початкове положення. При великому числі зубців нарізуваного колеса доводиться це робити по декілька разів.

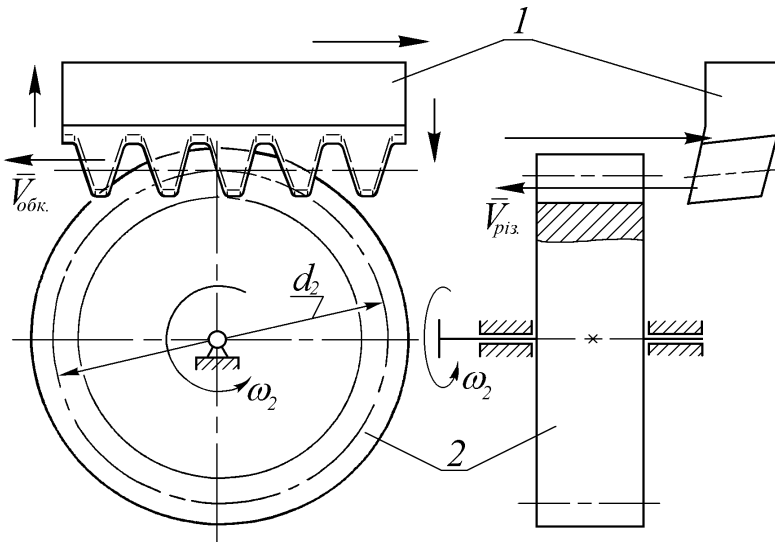


Рис. 4.17. Схема зубостругання прямозубою рейкою

З рисунка очевидно, що профіль рейки цілком відповідає початковому виробляючому контуру. При перезагостренні ріжучих країв рейки її контур не зазнає ніяких змін.

Варто підкреслити, що і при зубодовбанні і при зубоструганні в колеса, що виготовляється, нарізується той же самий евольвентний профіль. Відмінність зубчастих коліс, нарізаних названими способами, полягає в трохи різних формах неevolвентної частини западин між зубцями, яка практично не впливає на працездатність коліс.

Інструментальні рейки, як і довбачі, також можуть мати прямі або косі зубці. Причому прямокутною рейкою можна здійснювати нарізування як прямозубих, так і косозубих коліс.

На рис. 4.18 показана схема зубофрезерування евольвентних прямих зубців колеса 2 на зубофрезерному верстаті за допомогою черв'ячної фрези 1 (при $\lambda^* = \lambda$).

За рахунок зміни установочного кута λ можна нарізати зубчасте колесо з різними кутами нахилу зубців β .

Процес різання здійснюється безупинно без зворотних операцій, що забезпечує високу продуктивність верстата.

Черв'ячна фреза має число заходів z_1 , а нарізуване колесо повинно мати розрахункове число зубців z_2 .

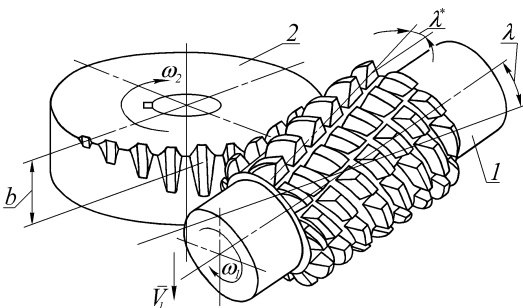


Рис. 4.18. Схема зубофрезерування

Звідси слідує співвідношення кутових швидкостей, які примусово повідомляються фрезі 1 і заготовці 2,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Черв'ячна фреза має нормальні до її витків пропили, за рахунок чого утворюються ріжучі крайки.

Обертання фрези забезпечує одночасно обкаточний рух (за рахунок осьового зсуву чергового ряду ріжучих крайків, що утворюють рейковий контур) і зрізання стружки.

Черв'ячній фрезі (або ж заготовці) також повідомляється повільний рух з постійною швидкістю V_f уздовж осі заготовки на відстань $L > b$, де b - ширина віncia, нарізуваного колеса 2.

Перезагострювання фрези здійснюється плоскою стороною шліфувального круга шляхом розширення нормальних до витків фрези пропилів.

Якщо глянути на ріжучі крайки пропилу, то можна побачити загальний контур крайків, що практично збігається з початковим виробляючим контуром, показаним на рис. 4.14.

3. Підріз евольвентних профілів

Вище говорилося про інтерференцію евольвентних профілів зубців, що виникає у випадку, якщо робоча ділянка AB лінії зачеплення вийде за межі теоретичної ділянки N_1N_2 .

Якщо інтерференція евольвентних профілів виникне у верстатному зачепленні, тобто при нарізуванні зубчастого колеса, то, очевидно, що профіль зубців інструментального колеса (довбача, рейки або фрези) ніяк не постраждає, а профіль зуба заготовки в місцях інтерференції буде зрізаний. Евольвентний зуб нарізованого колеса при цьому буде, як прийнято говорити, підрізаний (рис. 4.19). У колеса з зовнішніми зубцями підрізом вважається не просто розширена форма западини між сусідніми зубцями, а саме видалена в зонах C і D частина евольвентного профілю на ділянці KM .

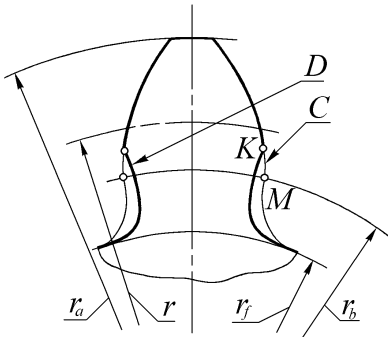


Рис. 4.19. Підрізаний евольвентний зуб

Підріз зубців небезпечний, тому що, по-перше, різко знижує згинну міцність зуба, а по-друге, може призвести до неприпустимого зменшення коефіцієнта перекриття ε .

У колеса з внутрішніми зубцями через інтерференцію евольвентних профілів інструментального колеса і заготовки будуть зрізатися зубці на їх вершинах.

Причому, навіть незначне зрізання вершин внутрішніх зубців може ушкодити евольвентний

профіль на великій висоті, що призведе до порушення спряженості профілів у робочому внутрішньому зачепленні.

3. Мінімальне число зубців z_{min}

Як уже говорилося вище, у зовнішньому зачепленні зі зниженням числа зубців малого колеса 1 точка N_1 початку теоретичної ділянки лінії зачеплення небезпечно наближається до точки A робочої ділянки AB лінії зачеплення.

При деякому мінімальному числі зубців z_{min} точка N_1 приїде в точку A .

Якщо і далі зменшувати z_1 малого колеса, тоді N_1 перейде за точку A усередину робочої ділянки лінії зачеплення. При цьому виникне

інтерференція евольвентних профілів, а при нарізуванні такого колеса - підріз зубців.

Визначимо z_{min} при нарізуванні колеса зубостругальною рейкою (гребінкою), що має початковий виробляючий контур (рис. 4.14).

На рис. 4.20 показане верстатне зачеплення зубців рейки з зубцями коліс:

$$1) z' > z_{min};$$

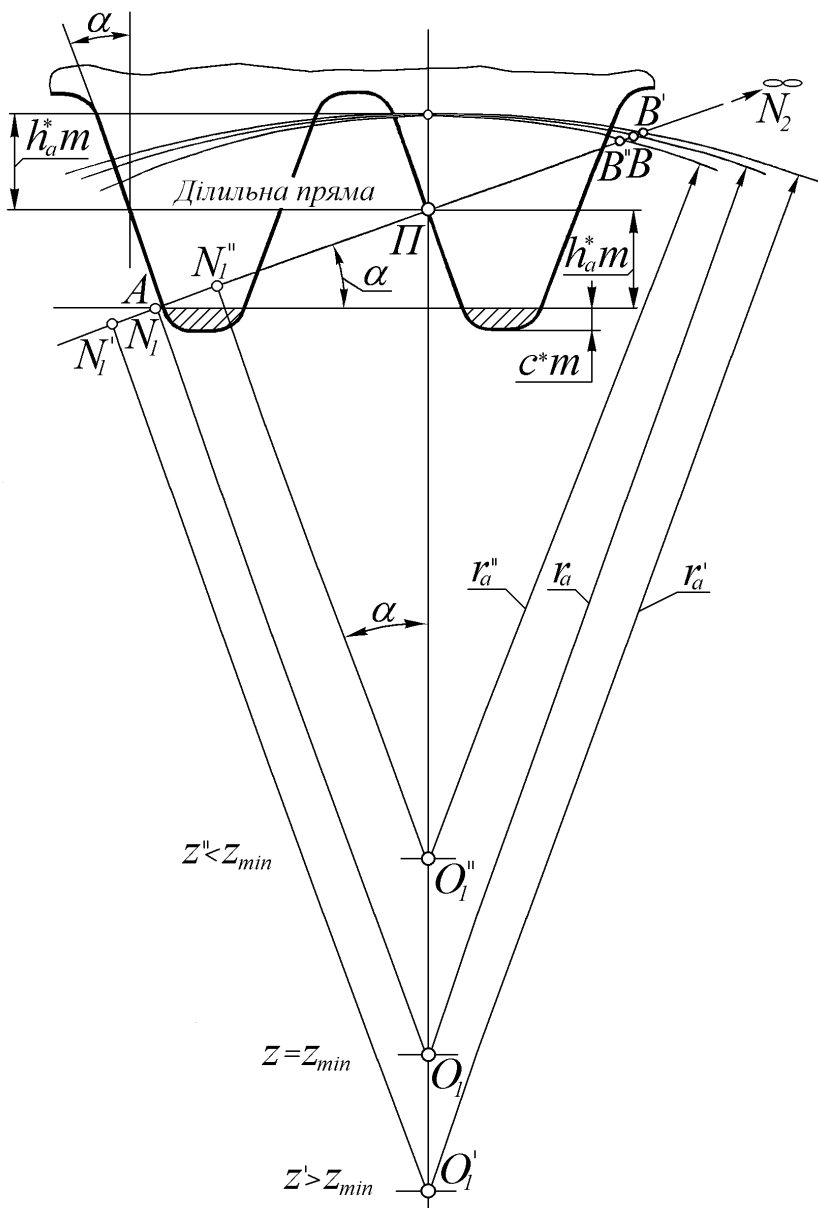


Рис. 4.20. До визначення мінімального числа евольвентних зубців z_{min}

$$2) z = z_{min};$$

$$3) z'' < z_{min}.$$

Колеса з числами зубців z' і z - не будуть мати підрізу зубців, а колесо з числом зубців z'' - буде мати підріз зубців, тому що в колеса з числом зубців $z'' < z_{min}$ початок теоретичної ділянки лінії зацеплення (точка N_1'') лежить вище точки A - початку робочої ділянки лінії зацеплення.

Точка A утворюється пересіченням умовної граничної лінії вершин зубців p

ейки (без заштрихованих частин) із лінією зацеплення.

Заштриховані частини вершин зубців рейки не враховуються, тому що вони не беруть участь у нарізуванні евольвентних профілів нарізуваних коліс, а лише формують перехідну криву між евольвентами сусідніх зубців.

Знайдемо величину z_{min} .

З рисунка слідує, що:

$$O_1P = r_l = \frac{1}{2} m z_{min};$$

$$O_1P \cdot \sin \alpha = AP;$$

$$AP \cdot \sin \alpha = h_a^* \cdot m.$$

Звідси знайдемо

$$z_{min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha}. \quad (4.30)$$

З формули (4.30) слідує, що z_{min} залежить від вибору величин h_a^* і α .

5. Вибір профільного кута початкового контура

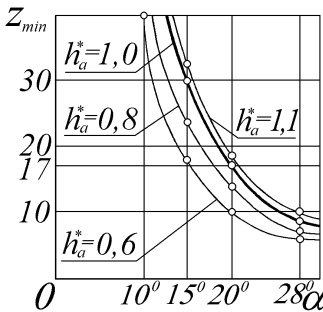


Рис. 4.21. Залежність z_{min} від α при різних h_a^*

При стандартних значеннях $h_a^* = 1,0$ і $\alpha = 20^\circ$ отримаємо

$$z_{min} = 17,1 \approx 17.$$

На рис. 4.21 показані графіки залежностей z_{min} від профільного кута α при фіксованих значеннях $h_a^* = 1,1; 1,0; 0,8; 0,6$.

Л. Ейлер, який розробив евольвентне зацеплення в 18-му сторіччі, запропонував до використання значення $\alpha = 15^\circ$.

При $h_a^* = 1,0$ і $\alpha = 15^\circ$ вийшло $z_{min} = 30$.

Біля 200 років із цим мирилися, тому що питання зменшення габаритів передач не виникало через відсутність масового виробництва машин.

При переході до масового виробництва машин, виявилося, що $z_{min} = 30$ стало надмірною платою за шанування наукового авторитету Л. Ейлера.

Адже розмір зубця залежить від переданого навантаження, а число зубців мінімального колеса визначає габаритні розміри і, у кінцевому рахунку, масу передач.

Зменшення числа z_{min} стало насущною задачею.

До виробництва було прийняте зачеплення з профільним кутом $\alpha = 28^\circ$.

Це знизило z_{min} до 9 зубців (при $h_a^* = 1,0$) і забезпечило більш ніж триразове зменшення габаритів передач.

Проте, при цьому появились і шкідливі наслідки.

Зубці при $\alpha = 28^\circ$ мали більш загострені вершини, що у випадку об'ємного загартування призводило до крихкого сколювання вершин зубців, особливо при ударному характері входу в зачеплення.

Застосування ж у цьому випадку укорочених зубців із збільшеною товщиною зуба на вершині могло дати неприпустиме зниження коефіцієнта перекриття зачеплення.

Крім того, різко зросли розпірні сили в зачепленні, що буде показано нижче.

У кінцевому рахунку пошук найбільш вигідного з усіх точок зору профільного кута α завершився в даний час вибором стандартної величини $\alpha = 20^\circ$.

Нагадаємо, що при цьому $z_{min} = 17$.

При необхідності зменшити z_{min} у даний час застосовують або укорочені зубці ($h_a^* = 0,8$ або $h_a^* = 0,6$ і ін.), або нарізування коліс із $z < 17$ зі зсувом стандартного ріжучого інструмента.

Останнє означає, що процес нарізування колеса зупиняють заздалегідь, не доводячи справу до підрізу евольвентного профілю.

6. Контрольні запитання

1. Зобразіть відомий Вам початковий контур евольвентного зачеплення.
2. Зобразіть відомий Вам початковий виробляючий контур евольвентного зачеплення.
3. Охарактеризуйте існуючі методи нарізування евольвентних зубчастих коліс.
4. Які зубонарізні інструменти Ви знаєте?
5. Що таке підріз евольвентних профілів?
6. Що таке мінімальне число евольвентних зубців? Як його визначити?
7. Чому профільний кут сучасного евольвентного зачеплення дорівнює 20° ? Які значення цього кута застосовувалися раніше? Чому від них відмовилися?

Лекція 15

Тема: Поліпшення (корекція, виправлення) евольвентного зачеплення

Зміст:

1. Мета корекції евольвентного зачеплення. Види корекції.
2. Нарізування евольвентних коліс зі зсувом.
3. Мінімально необхідний зсув.
4. Параметри евольвентного зачеплення зі зсувом.
5. Контрольні запитання

1. Мета корекції евольвентного зачеплення. Види корекції

Поліпшенням евольвентного зачеплення називається навмисний відступ від стандартних значень параметрів ($h_a^* = 1,0$; $\alpha = 20^0$; $c^* = 0,25$), із метою оптимізації показників роботи зубчастих коліс (таких наприклад, як підвищення згинної і контактної міцності зубців, зниження коефіцієнта питомого сковзання в самому уразливому місці - на ніжках зубців шестерні, збільшення коефіцієнта перекриття, вписування в стандартну міжосьову відстань без зміни чисел зубців і модуля коліс, зміна передаточного відношення без зміни міжосьової відстані і модуля коліс, усунення загострення зубців, усунення підрізу зубців та ін.).

Покажемо виправлення евольвентного зачеплення на прикладі усунення підрізу зубців при числі зубців колеса $z < z_{min} = 17$.

Як було показано вище, задачу усунення підрізу можна вирішити шляхом застосування зубонарізного інструмента з $h_a^* < 1,0$ або з $\alpha > 20^0$.

Можна, наприклад, застосувати застарілий 28^0 -ний інструмент, або стандартний сучасний інструмент з укороченими зубцями.

Раніше ці дії іменували кутовою або висотною корекцією евольвентного зачеплення.

В даний час ці види коригування евольвентних зубчастих коліс практично рідко застосовуються.

Виявляється можна домогтися того ж ефекту, використовуючи нарізування коліс стандартним інструментом зі зсувом.

2. Нарізування евольвентних коліс зі зсувом

Розглянемо задачу усунення підрізу евольвентного профілю зуба колеса з $z < 17$ (рис. 4.22) шляхом зсуву стандартного зубонарізного інструмента, який має виробляючий початковий контур.

Відсунемо (зсунемо) рейку з вихідним виробляючим контуром від заготовки (тобто в позитивний або додатний бік) на мінімально необхідну для усунення підрізу зубців відстань абсолютного зсуву

$$X_{min} = x_{min} \cdot m,$$

із тим щоб точка A перетинання лінії зачеплення з лінією вершини зубців рейки (без урахування заштрихованої частини вершин зубців рейки) перемістилася до збігу з точкою N_I початку теоретичної ділянки лінії зачеплення.

3. Мнімально необхідний зсув

У новому положенні рейка показана пунктирною лінією.

Зауважимо, що при цьому шаг зубців рейки $p = \pi \cdot m$ не змінився, а кут α верстатного зачеплення як був рівним $\alpha = 20^0$, таким і залишився.

Зуб колеса, звичайно, виявиться від недорізу товщим, а западина між зубами - вужчою.

Наскільки? - Визначимо це нижче (див. формули (4.33) і (4.34)).

З рис. 4.22 слідує:

$$X_{min} = x_{min} \cdot m = h_a^* \cdot m - ПК;$$

$$ПК = N_I \Pi \cdot \sin \alpha;$$

$$N_I \Pi = ОП \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} m z \sin \alpha.$$

Вирішимо останні три рівняння відносно x_{min} .

З урахуванням формули (4.30) одержимо

$$x_{min} = h_a^* \left(1 - \frac{z \cdot \sin^2 \alpha}{2h_a^*} \right) = h_a^* \left(1 - \frac{z}{z_{min}} \right). \quad (4.31)$$

При значеннях $h_a^* = 1,0$ і $z_{min} = 17$

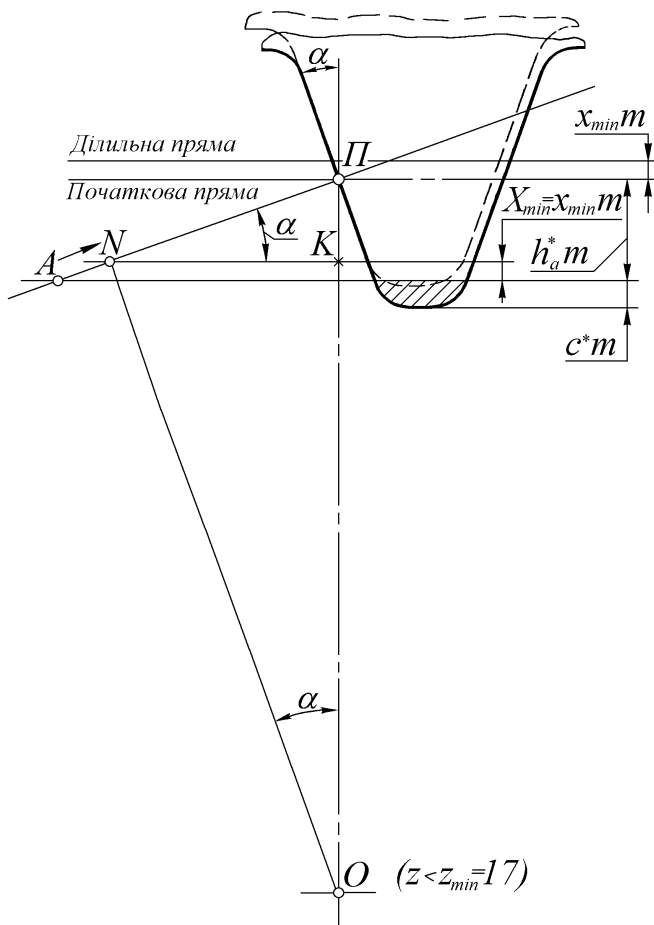


Рис. 4.22. До визначення мінімально необхідного зсуву для усунення підрізу евольвентних зубців

$$x_{min} = 1 - \frac{z}{17}. \quad (4.32)$$

Безрозмірна величина x називається коефіцієнтом зсуву, а

$$X = x \cdot m \text{ (мм)}$$

називається абсолютним зсувом інструмента.

Знайдена залежність (4.32) дозволяє визначити мінімально необхідний коефіцієнт зсуву x_{min} для недопущення підрізу евольвентного профілю зубця колеса з $z < 17$.

Для рішення інших задач поліпшення евольвентного зачеплення можна вибирати (або розраховувати) коефіцієнт зсуву $x \geq x_{min}$.

Зсув із коефіцієнтом менше ніж x_{min} не усуває підріз зубців, що недопустимо.

Знайдемо товщину зуба s і ширину западини e колеса, нарізаного зі зсувом $X = x \cdot m$ (рис. 4.23).

Тому що при нарізуванні колеса його ділильна окружність (д. о.) буде перекочуватись без прослизання по початковій прямій (п. п.) рейки, яка відстоїть від ділильної прямої (д. п.) на відстані $X = x \cdot m$, то розміри відрізків початкової прямої (п. п.) перейдуть незмінними на ділильну окружність (д. о.) колеса.

З рисунка 4.23 слідує, що товщина зуба s і ширина западини e колеса будуть відповідно рівні:

$$s = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2\Delta; \quad e = \frac{\pi \cdot m}{2} - 2\Delta.$$

Відрізок Δ знайдемо з заштрихованого прямокутного трикутника з катетами Δ і X та гострим кутом α :

$$\Delta = X \cdot \operatorname{tg} \alpha = x \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Тоді} \quad s = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2xmtg\alpha; \quad (4.33)$$

$$e = \frac{\pi \cdot m}{2} - 2xmtg\alpha. \quad (4.34)$$

Відзначимо, що при додатному зсуві зубець товщає по ділильній окружності на величину $2xmtg\alpha$, а западина - стає на стільки ж вужчою.

При від'ємному зсуві усе відбувається навпаки: зуб стає тоншим, а западина - ширшою.

Колесо, нарізане з додатним зсувом, називається додатним.

Колесо, нарізане з від'ємним зсувом, називається від'ємним.

Колесо, нарізане без зсуву, називається нульовим.

У залежності від того, які колеса і з якими величинами зсуву входять у зачеплення, розрізняють: додатне, від'ємне, рівнозміщене і нульове зачеплення.

Введемо поняття сумарного коефіцієнта зсуву

$$x_\Sigma = x_I + x_2. \quad (4.35)$$

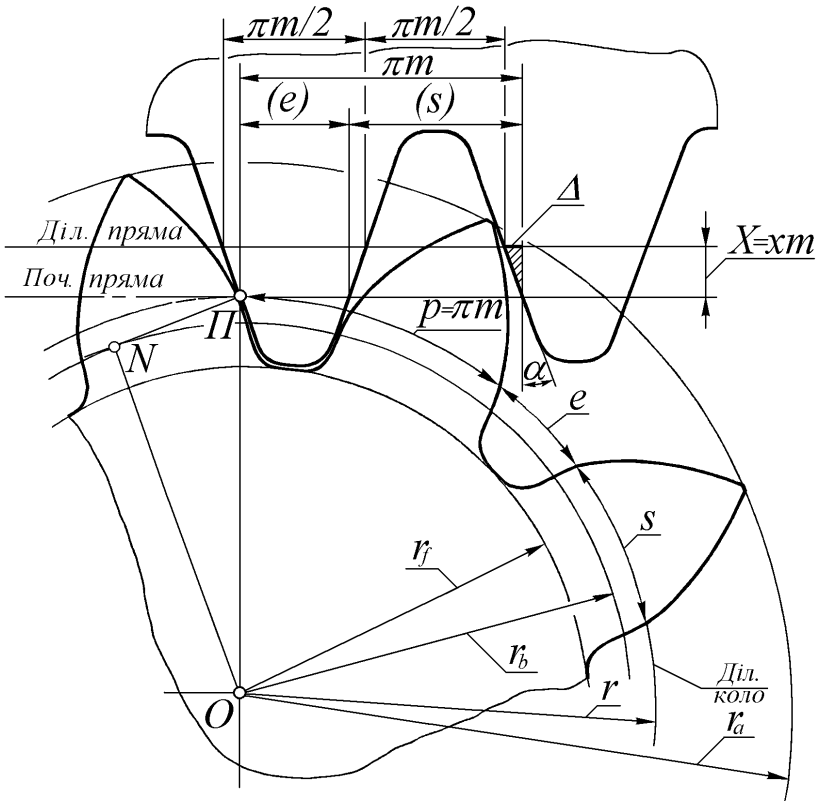


Рис. 4.23. До визначення товщини зуба s і ширини впадини e колеса, нарізаного зі зсувом

Якщо $x_{\Sigma} > 0$, то тоді зачеплення називається додатним.

При цьому можливі різні комбінації величин і знаків x_1 і x_2 :

- 1) $x_I > 0, x_2 > 0$;
- 2) $x_I > 0, x_2 = 0$;
- 3) $x_I > 0, x_2 < 0$, але $|x_I| > |x_2|$.

Можна було б набрати ще дві комбінації x_1 і x_2 ($x_1=0$; $x_2>0$ або $x_1<0$; $x_2>0$, але $|x_1|<|x_2|$), проте такі комбінації на практиці не застосовуються.

При додатному зачепленні сумарна товщина зубців

$$s_1 + s_2 > p = \pi m,$$

тому колеса встановлюються на монтажній міжосьовій відстані a_w , яка перевищує ділильну міжосьову відстань a (4.24):

$$a_w > a = \frac{1}{2} m(z_1 + z_2),$$

а монтажний кут зачеплення α_w виявляється при цьому більшим від профільного кута початкового контуру α :

$$\alpha_w > \alpha = 20^\circ.$$

Ділильні окружності при цьому розходяться одна від одної (між ними з'являється зазор) і вже не можуть відігравати роль початкових окружностей, як при нульовому зачепленні (див. рис. 4.6).

При від'ємному зачепленні спостерігається зворотня картина, тобто:

$$s_1 + s_2 < p = \pi m;$$

$$a_w < a;$$

$$\alpha_w < \alpha.$$

Якби при від'ємному зачепленні виконати $a_w = a$, то тоді б було $\alpha_w = \alpha$, але між зубцями виник би бічний зазор, що призвело б до бічних ударів зубців при реверсі навантаження. До того ж при цьому зменшився б коефіцієнт перекриття ε . Тому так не роблять.

Рівнозміщене зачеплення характеризується сполученням коефіцієнтів зсуву коліс

$$x_2 = -x_1,$$

тобто:

$$x_1 > 0; x_2 < 0 \text{ і } |x_1| = |x_2|.$$

При цьому $x_\Sigma = 0$, а сума ділильних товщин зубців

$$s_1 + s_2 = p = \pi m.$$

Тому при рівнозміщеному зачепленні

$$a_w = a;$$

$$\alpha_w = \alpha,$$

а роль початкових окружностей грають ділильні окружності.

Через частий збіг ділильних і початкових окружностей студенти іноді не бачать різниці між ними, тому ще раз пояснимо різницю між цими дуже важливими термінами.

Початкові окружності - це такі уявлювані окружності, які при роботі зачеплення котяться одна по одній без прослизання. Вони завжди дотикаються одна одній в одній точці - у полюсі зачеплення *П*.

Не можна, наприклад, говорити про початкову окружність окремо взятого колеса. Поки немає зачеплення - немає і початкових окружностей.

Ділильна окружність - це така уявлювана окружність окремо взятого колеса, яка була початковою окружністю в верстатному зачепленні.

На цю окружність перейшли при нарізуванні колеса параметри початкового контуру - шаг зубців $p = \pi m$ і профільний кут зачеплення α (він же - монтажний кут верстатного зачеплення).

Тому можливе і таке її визначення:

ділильна окружність - це окружність із діаметром $d = mz$ і профільним кутом евольвенти на ній, рівним профільному куту початкового контуру α .

Одного: $d = mz$ - недостатньо, тому що можна невірно визначити цю окружність колеса, особливо при малих числах зубців, коли по висоті зубця може бути проведено декілька можливих ділильних окружностей при різних значеннях модуля m .

Ділильна окружність (як паспорт окремо узятого колеса) - завжди з ним - у зачепленні або без нього.

Причому ділильна окружність - залишається тією самою при нарізуванні колеса з нульовим, додатним або від'ємним зсувом.

Разом із незмінною ділильною окружністю в колеса завжди залишається незмінною й основна окружність, діаметр котрої

$$d_b = d \cdot \cos \alpha = \pi m \cdot \cos \alpha.$$

Звідси слідує дуже важливий висновок: при нарізуванні колеса зі зсувом не змінюється форма евольвенти, тому що її еволюта - основна окружність - незмінна.

На рис. 4.24 показані накладеними один на одного по евольвентному профілю зубці додатного - (1), нульового - (2) і від'ємного - (3) коліс.

Очевидно, що додатний зуб має більш міцну форму, ніж нульовий. Від'ємний же зуб у порівнянні з нульовим зубом, навпаки, - ослаблений.

Відомо, що чим менше число зубців колеса, тим у його зубців менш міцна форма.

Тому, застосовуючи, наприклад, рівнозміщене зачеплення, можна значно підсилити менш міцний зуб шестерні за рахунок незначного ослаблення більш міцного зуба більшого колеса.

Вирівнюючи в такий спосіб міцність зубців шестерні і колеса, можна домогтися збільшення навантажувальної спроможності зачеплення пари коліс.

В даний час практично всі зубчасті колеса силових передач нарізуються зі зсувом. Причому за рахунок цього поліпшується не тільки згинна міцність, обумовлена в першу чергу формою зубців, але і контактна

міцність зачеплення, тому що вдається ввести в роботу більш віддалені від основної окружності ділянки евольвенти, які мають меншу кривизну.

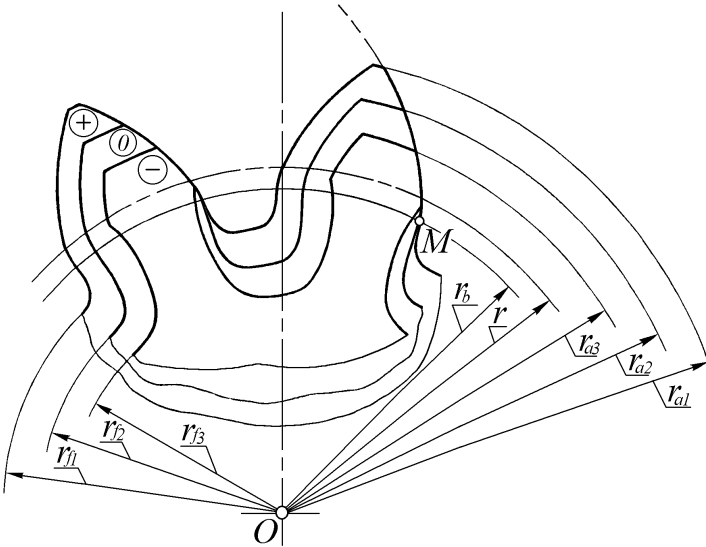


Рис. 4.24. Співміщені форми зубців: додатного (1), нульового (2) і від'ємного (3) евольвентних кіл

Зауважимо також, що товщина зубця по окружності вершин s_a (так звана ширина стрічки зуба) при додатному зсуві зменшується, що служить одним з обмежувачів при виборі величини коефіцієнта додатного зсуву зубчастого колеса.

Практикою встановлено, що в незагартованих зубців повинно бути

$$s_a \geq 0,25 m.$$

У загартованих зубців стрічка зуба повинна бути ширше -

$$s_a \geq 0,4 m.$$

Приведені обмеження називаються умовою незагострення зубців.

4. Параметри евольвентного зачеплення зі зсувом

Для розрахунку різних параметрів окремих зубчастих кіл і зачеплень пар кіл, виготовлених із зсувом, необхідно крім параметрів початкового контуру використовувати рівняння евольвенти (4.5) і (4.6).

Спочатку визначимо у загальному вигляді товщину зуба s_Y (s_a , s_b і т. д.) по окружності заданого радіуса r_Y (r_a , r_b і т. д.) евольвентного зубчастого

колеса з відомими: товщиною зуба s по ділильній окружності радіуса r із профільним кутом α .

Зобразимо схематичний рисунок евольвентного колеса з зубом, що має вертикальну вісь симетрії (рис. 4.25).

Додатково до величин, зазначених в умові задачі, позначимо: α_Y - профільний кут евольвенти на окружності деякого відомого довільного радіуса r_Y ; α_a - профільний кут евольвенти на окружності вершин зубців радіуса r_a ; φ - центральний кут, що стягається дугою $s/2$; φ_Y - центральний кут, що стягається дугою $s_Y/2$; θ - кут (у радіанах), рівний значенню $\text{inv}\alpha$; θ_Y - кут (у радіанах), рівний значенню $\text{inv}\alpha_Y$.

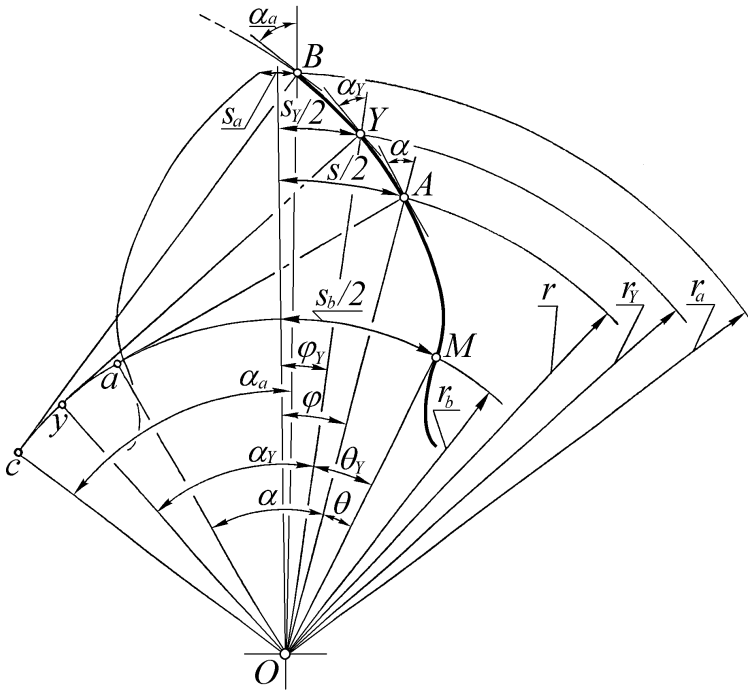


Рис. 4.25. До визначення товщини зуба s_Y по окружності заданого радіуса r_Y

З рисунка слідує рівність

$$\varphi_Y + \theta_Y = \varphi + \theta.$$

Тому що

$$s_Y/2 = \varphi_Y \cdot r; \quad s/2 = \varphi \cdot r;$$

$$\theta_Y = \text{inv} \alpha_Y; \quad \theta = \text{inv} \alpha,$$

одержимо

$$\frac{s_Y}{2r_Y} + \text{inv} \alpha_Y = \frac{s}{2r} + \text{inv} \alpha.$$

Звідси
$$s_Y = 2r_Y \left(\frac{s}{2r} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_Y \right)$$

або
$$s_Y = d_Y \left(\frac{s}{d} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_Y \right).$$

(4.36)

По формулі (4.36) можна обчислити товщину евольвентного зуба по будь-якій окружності, починаючи з основної і закінчуючи окружністю вершин зубців, а також, наприклад, знайти окружність, по якій буде $s_a = 0$ (повне загострення зуба).

За умовою задачі не заданий кут α_Y , але його можна обчислити відповідно до рівняння (4.5) по формулі

$$\alpha_Y = \arccos(r_b/r_Y). \quad (4.37)$$

З рис. 4.25 також очевидно, що

$$O_Y/OY = r_b/r_Y = \cos \alpha_Y.$$

По окружності вершин зубців

$$s_a = d_a \left(\frac{s}{d} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_a \right), \quad (4.38)$$

$$\text{де } \alpha_a = \arccos(r_b/r_a).$$

По основній окружності

$$s_b = d_b \left(\frac{s}{d} + \text{inv} \alpha \right), \quad (4.39)$$

тому що $\alpha_b = 0$ і $\text{inv} \alpha_b = \text{tg} \alpha_b - \alpha_b = 0 - 0 = 0$.

5 Синтез щільного евольвентного зачеплення зі зсувом

Визначимо у загальному вигляді монтажну міжосьову відстань a_w евольвентного зачеплення, нарізаного зі зсувом. Будемо вважати відомими: монтажний кут зачеплення α_w , модуль зачеплення коліс m , числа зубців коліс z_1 і z_2 , профільний кут початкового контуру α .

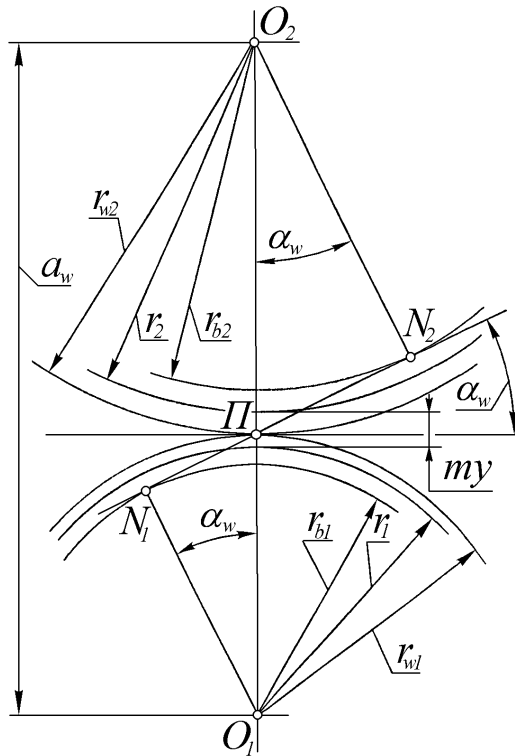


Рис. 4.26. До визначення монтажно́ї міжосьової відстані a_w

Накреслимо схему зачеплення в припущенні $\alpha_w > \alpha$ (рис. 4.26).

На рисунку позначено:

r_{w1} - радіус початкової окружності колеса 1;

r_{w2} - радіус початкової окружності колеса 2;

r_1 - радіус ділильної окружності колеса 1;

r_2 - радіус ділильної окружності колеса 2;

N_1N_2 - теоретична ділянка лінії зачеплення;

r_{b1} - радіус основної окружності колеса 1;

r_{b2} - радіус основної окружності колеса 2;

З рисунка і рівняння евольвенти (4.5) слідує, що

$$a_w = r_{w1} + r_{w2};$$

$$r_{w1}=r_{b1}/\cos \alpha_w;$$

$$r_{w2}=r_{b2}/\cos \alpha_w.$$

З урахуванням:

$$r_{b1}=r_1 \cdot \cos \alpha;$$

$$r_1=\frac{1}{2} m z_1;$$

$$r_{b2}=r_2 \cdot \cos \alpha;$$

$$r_2=\frac{1}{2} m z_2,$$

одержимо:

$$a_w = \frac{m(z_1 + z_2) \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \cos \alpha_w} = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (4.40)$$

Тепер визначимо у загальному вигляді монтажний кут щільного (без бічних зазорів) зачеплення α_w коліс 1 і 2, нарізаних із коефіцієнтами зсуву x_1 і x_2 , якщо відомі числа зубців z_1 і z_2 , а також профільний кут початкового контуру α .

При загальних міркуваннях умовно будемо виходити з припущення, що $x_1 > 0$ і $x_2 > 0$.

При цьому по ділительних окружностях одержимо відповідно до формули (4.33) потовщені зубці з товщинами

$$s_1 = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2x_1 \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$s_2 = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2x_2 \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Накреслимо додатні колеса в щільному зачепленні без бічних зазорів між зубцями, що зачіпаються (рис. 4.27).

При цьому ділительні окружності радіусів r_1 і r_2 будуть дещо розсунуті від полюса Π , а початкові окружності радіусів r_{w1} і r_{w2} будуть дотикатися в полюсі Π зачеплення.

Зачеплення буде щільним лише в тому випадку, якщо по початкових окружностях ширини западин e_{w1} і e_{w2} коліс 1 і 2 будуть заповнюватися цілком товщинами зубців s_{w2} і s_{w1} протилежних коліс (2 і 1), тобто

$$p_{w1}=s_{w1}+e_{w1}=s_{w1}+s_{w2}; \quad e_{w1}=s_{w2}.$$

Відповідно

$$p_{w2}=s_{w2}+e_{w2}=s_{w2}+s_{w1}; \quad e_{w2}=s_{w1}.$$

Очевидно, що має місце рівність

$$p_{w1}=p_{w2}=p_w=s_{w1}+s_{w2}, \quad (4.41)$$

яку можна назвати умовою щільності зачеплення.

Справді, тому що початкові окружності котяться одна по одній без прослизання, шаг зубців кожного з коліс буде заповнюватися товщинами зустрічних зубців і для бічного зазору не залишиться місця.

Відповідно до формули (4.36)

$$s_{w1}=2r_{w1}(s_1/2r_1+inv\alpha - inv\alpha_w);$$

$$s_{w2}=2r_{w2}(s_2/2r_2+inv\alpha - inv\alpha_w).$$

С урахуванням

$$2r_1=mz_1; \quad 2r_2=mz_2; \quad 2r_{w1}=p_w \cdot z_1/\pi; \quad 2r_{w2}=p_w \cdot z_2/\pi;$$

$$s_1 = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2x_1 mtg\alpha; \quad s_2 = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2x_2 mtg\alpha,$$

вирішимо рівняння (4.41) відносно $inv\alpha_w$.

Підставивши всі проміжні вирази у формулу (4.41) і скоротивши p_w , m і π , одержимо:

$$inv\alpha_w = inv\alpha + 2tg\alpha \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2}. \quad (4.42)$$

Значення α_w знайдемо по таблиці 4.1 (стор.125).

Далі визначимо коефіцієнти зрівняльного Δy і сприймального у зсувів щільного зачеплення коліс 1 і 2, нарізаних зі зсувом. Відомими будемо вважати: числа зубців коліс z_1 і z_2 , коефіцієнти зсуву x_1 і x_2 , монтажний кут зачеплення α_w і профільний кут α початкового контуру.

Сприймальним зсувом $Y=y \cdot m$ називається різниця між монтажною і ділильною міжосьовими відстанями

$$Y = a_w - a.$$

Зрівняльним зсувом $\Delta Y=\Delta y \cdot m$ називається різниця між сумарним і сприймальним зсувами

$$\Delta Y = X_\Sigma - Y.$$

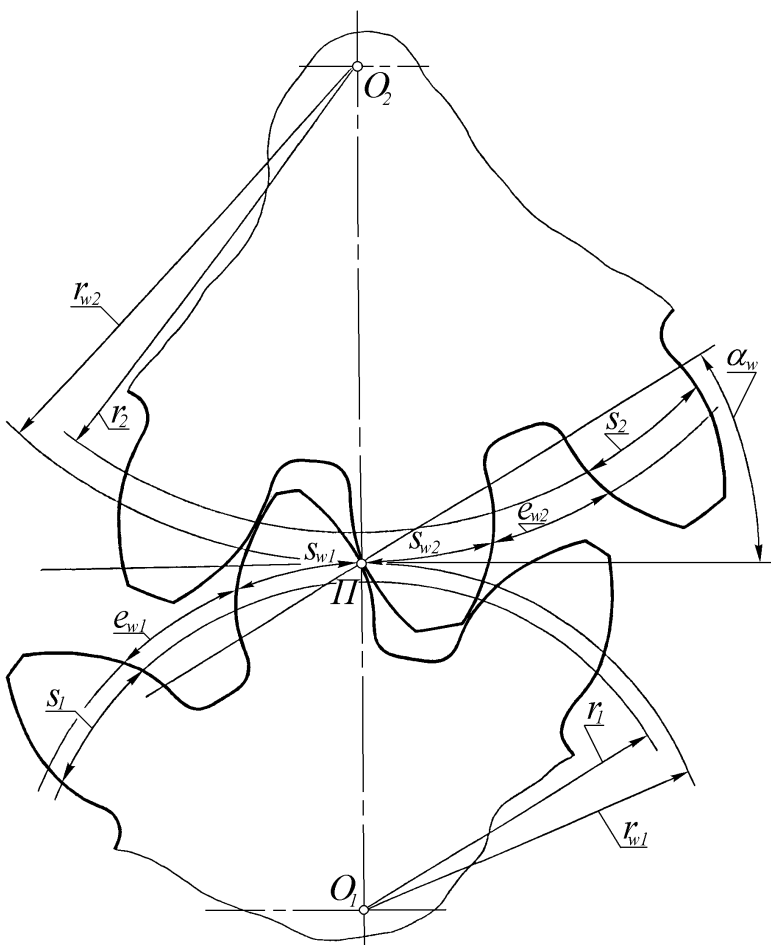


Рис. 4.27. Щільне (без бічних зазорів між зубцями) евольвентне зачеплення зі зміщенням

Як слідує з визначення Y , можна записати

$$a_w = a + Y = a + ym. \quad (4.43)$$

Звідси іде

$$y = \frac{a_w - a}{m}. \quad (4.44)$$

Монтажну міжосьову відстань a_w знайдемо по формулі (4.40)

$$a_w = \frac{m(z_1 + z_2) \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \cos \alpha_w}.$$

Ділильну міжосьову відстань визначимо по формулі (4.18)

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}.$$

Після підстановки останніх двох виразів у формулу (4.44) для визначення коефіцієнта сприймального зсуву y одержимо

$$y = \frac{a_w - a}{m} = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right). \quad (4.45)$$

Зауважимо додатково, що сприймальний абсолютний зсув $V=y \cdot m$ означає прибавку до ділильної міжосьової відстані через потовщення зубців коліс 1 і 2, при нарізуванні їх із додатним зсувом, що і показано на рис. 4.26.

З визначення ΔY також слідує

$$X_\Sigma = x_\Sigma m = (y + \Delta y)m, \quad (4.46)$$

де

$$x_\Sigma = x_1 + x_2.$$

Тоді коефіцієнт зрівняльного зсуву Δy можна визначити по формулі

$$\Delta y = x_\Sigma - y = (x_1 + x_2) - \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right). \quad (4.47)$$

Фізичний зміст зрівняльного зсуву

$$\Delta Y = \Delta y \cdot m \quad (4.48)$$

полягає в наступному.

Якщо нарізані з додатним зсувом колеса 1 і 2 розсунути понад ділильну міжосьову відстань a на величину сумарного абсолютного зсуву X_Σ , і при цьому буде

$$a_w^I = a + (x_1 + x_2) m, \quad (4.49)$$

тоді в зачепленні буде спостерігатися великий бічний зазор між зубцями, що недопустимо.

Для усунення бічного зазору між зубцями колеса треба зблизити від міжосьової відстані a_w^I , обчисленої по формулі (4.49), до монтажної міжосьової відстані a_w , обчисленої по формулі (4.40), на величину

$$a_w^I - a_w = (a + x_\Sigma m) - (a + my) = x_\Sigma m - my = m \cdot \Delta y,$$

тобто на величину зрівняльного зсуву $\Delta Y = m \cdot \Delta y$.

Визначимо в загальному вигляді радіуси r_{a1} і r_{a2} окружностей вершин зубців коліс 1 і 2, нарізаних зі зсувом і змонтованих у щільне

зацеплення з радіальним зазором $c = c^* m$, якщо заданий модуль зацеплення m , монтажний кут зацеплення α_w , профільний кут початкового контуру α , числа зубців коліс z_1 і z_2 , коефіцієнти зсуву x_1 і x_2 , коефіцієнт радіального зазору c^* , коефіцієнт висоти голівки зубців h_a^* .

Для цього здійснимо наступні дії.

1. Виконаємо схематичне креслення щільного зацеплення зі зсувом (рис. 4.28).

2. Обчислимо радіуси окружностей западин зубців, які визначаються відносним положенням інструментального колеса і заготовки в процесі нарізування кожного окремо взятого колеса 1 і 2.

За основу візьмемо формулу (4.18), записану для діаметрів окружностей западин нульового колеса, і додамо в ній для кожного з коліс подвоєні абсолютні зсуви інструмента

$$X_1 = x_1 m \quad \text{і} \quad X_2 = x_2 m,$$

тоді одержимо:

$$\begin{aligned} r_{f1} &= \frac{1}{2} m(z_1 - 2h_f^* + 2x_1); \\ r_{f2} &= \frac{1}{2} m(z_2 - 2h_f^* + 2x_2). \end{aligned} \quad (4.50)$$

3. Обчислимо монтажну міжосьову відстань a_w щільного зацеплення коліс 1 і 2 по формулі (4.40): $a_w = \frac{m(z_1 + z_2) \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \cos \alpha_w}$.

4. Знайдемо з рисунка 4.28 з урахуванням (4.40) і (4.50) формули для обчислення радіусів вершин зубців, при дотриманні яких у щільному зацепленні зі зсувом будуть забезпечені задані радіальні зазори $c = c^* m$:

$$\begin{aligned} r_{a1} &= a_w - r_{f2} - c^* m; \\ r_{a2} &= a_w - r_{f1} - c^* m. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Відзначимо, що знайдені радіуси вершин зубців коліс 1 і 2 виявляться при цьому меншими, ніж якби їх підраховали тільки з урахуванням зсуву інструмента в верстатному зацепленні по формулах $r_{a1} = r_1 + h_a^* m + x_1 m$;

$$r_{a2} = r_2 + h_a^* m + x_2 m, \quad (4.52)$$

тобто загальна висота зубців коліс 1 і 2 із радіусами вершин, виконаними відповідно до формул (4.51), буде меншою, ніж у нульових коліс.

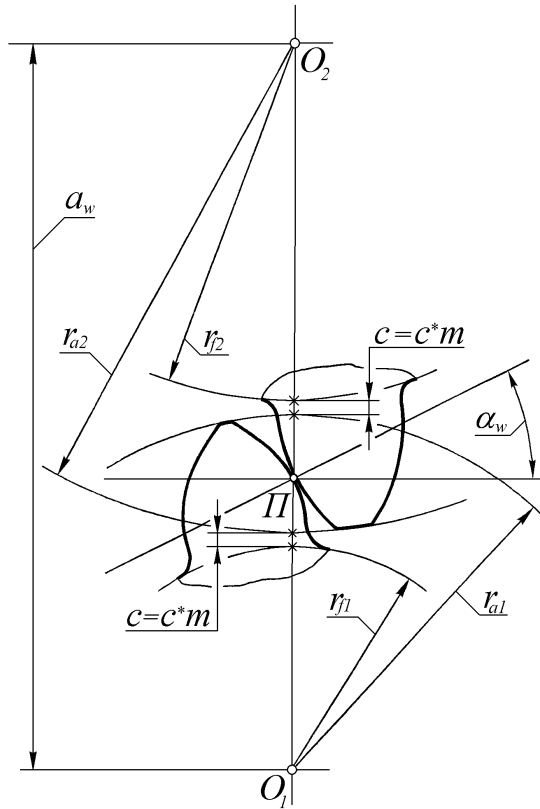


Рис. 4.28. До визначення радіусів вершин зубців коліс, нарізаних зі зсувом

Очевидно, що це веде до зменшення коефіцієнта перекриття зачеплення ε .

Якщо ж коефіцієнт перекриття виявиться меншим допустимого ($\varepsilon = 1,1$), тоді слід зменшити коефіцієнт радіального зазору c^* .

Усі, взяті разом, перераховані вище поняття пояснюють, чому циліндричне прямозубе евольвентне колесо не може мати $z < 8$. При $z = 8$ усі можливості методу нарізування евольвентних коліс зі зсувом стандартного ріжучого інструмента практично вичерпуються.

5. Контрольні запитання

1. Як можна поліпшити (виправити, скорегувати) евольвентне зачеплення?
2. Здійсніть визначення мінімально необхідного зсуву для усунення підрізу зубців.
3. Як визначити ділильну товщину зуба і ділильну ширину западини зубчастого евольвентного колеса, нарізаного зі зсувом?
4. Які колеса і які зачеплення коліс називаються нульовими, додатними, від'ємними?
5. Що таке ділильна окружність евольвентного зубчастого колеса? Як визначити її діаметр? Чому дорівнює профільний кут евольвенти на ділильній окружності?
6. Що таке основна окружність евольвентного колеса? Як визначити її діаметр? Чому дорівнює профільний кут евольвенти на основній окружності?
7. Як змінюється форма евольвентного зуба при його нарізуванні зі зсувом?
8. Запишіть рівняння евольвенти в полярних координатах у параметричній формі?
9. Як визначити товщину евольвентного зуба по окружності довільного радіуса?
10. Як визначити монтажний кут щільного евольвентного зачеплення, нарізаного зі зсувом?
11. Як визначити монтажну міжосьову відстань щільного евольвентного зачеплення, нарізаного зі зсувом?
12. Як визначаються радіуси окружностей вершин зубців щільного евольвентного зачеплення зі зсувом?
13. Що таке коефіцієнт зрівняльного зсуву і коефіцієнт сприймального зсуву?

Лекція 16

Тема: **Особливості косозубих і шевронних евольвентних циліндричних зубчастих коліс**

Зміст:

1. Утворення косозубої евольвентної поверхні.
2. Геометрія косозубого евольвентного колеса.
3. Додатковий коефіцієнт перекриття.
4. Сили в косозубому зачепленні.
5. Особливості шевронних евольвентних коліс.
6. Контрольні запитання.

1. Утворення косозубої евольвентної поверхні

Прямозубі колеса мають істотну ваду: прямий зуб входить у зачеплення і виходить із зачеплення миттєво по всій своїй довжині, що супроводжується неминучими ударами і шумом.

З цієї причини окружні швидкості прямозубих коліс обмежені величиною $V_{окр} = 3 \dots 20 \text{ м/с}$ (у залежності від ступеня точності коліс).

Косозубі колеса позбавлені цієї вади. Вони можуть працювати при окружних швидкостях, що досягають значень $V_{окр} = 5 \dots 30 \text{ м/с}$, тобто за інших рівних умов окружні швидкості косозубих коліс у порівнянні з прямозубими в 1,5 разів вище.

Це пояснюється особливостями геометрії косозубих коліс.

На рис. 4.29 показана просторова схема утворення евольвентних поверхонь прямого і косого зубців.

Евольвентні поверхні прямого і косого зубців утворюються

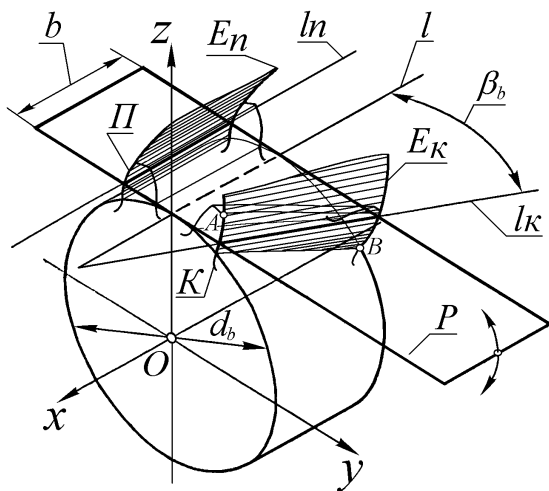


Рис. 4.29. Утворення евольвентних поверхонь прямого і косого зубців

перекочуванням без сковлення твірної площини P по основному циліндру з діаметром d_b .

Миттєвими осями кочення площини P по основному циліндру служать твірні циліндра l .

Візьмемо пряму лінію l_n на виробляючій площині P , паралельну осі циліндра.

Будь-яка точка цієї прямої l_n буде переміщатися при перекочуванні твірної площини P по евольвенті E_n . Уся сукупність евольвент точок прямої l_n утворить евольвентну лінійчатую поверхню прямого зуба Π .

Якщо на твірній площині P взяти пряму лінію l_k , що йде під кутом β_b до осі циліндра, то будь-яка точка цієї прямої l_k також буде при перекочуванні площини P по основному циліндру окреслювати евольвенту E_k (точно таку ж, зауважимо, як і E_n).

Вся сукупність евольвент точок прямої l_k утворить евольвентну лінійчатую поверхню косоного зуба K .

У торцевому перерізі zOy будемо спостерігати однакову картину і на прямому зубці Π і на косому зубці K .

Тому, очевидно, все, що було вище сказано стосовно до прямозубих коліс, повною мірою відноситься і до косозубих коліс, - тільки до величин косозубого колеса, що мають індекс t (окружний, торцевий або тангенціальний).

В усіх торцевих перерізах прямозубого колеса Π спостерігається одна й та сама картина, тому для прямозубого колеса було цілком достатньо розгляди один єдиний його торець.

У косозубого ж колеса K в кожному такому торці, розташованому уздовж осі x глибше попереднього, спостерігається переріз зубця, повернений відносно попереднього на деякий кут.

У деяких підручниках по ТММ утворення косозубого колеса пояснюється в такий спосіб. Береться широке прямозубе колесо і розрізається перерізами, перпендикулярними до його осі, на багато однакових дуже тонких прямозубих коліс, а потім складається косозубе колесо за рахунок повороту кожного такого тонкого прямозубого колеса відносно попереднього на один і той самий малий кут.

Звичайно, ніхто так косозубе колесо не утворює, але уявити косозубе колесо як безкінечний набір нескінченно тонких прямозубих коліс, повернених послідовно один відносно одного на один і той самий кут (загальний кут β по ділильному циліндру).

Очевидно, що при роботі косозубих коліс у чергових по глибині торцях буде спостерігатися інша фаза зачеплення, і при тій же ширині колеса b косий зуб буде працювати по куту повороту колеса довше, ніж прямий.

На рис. 4.30 показані накладеними один на одного для порівняння умовні графіки розрахункового корисного окружного навантаження F_t , переданого одним прямим Π і одним косим K зубцями в часі t у порівнянних умовах.

З графіків очевидно, що косозубе колесо, на відміну від прямозубого, вступає в роботу плавно, може передавати більше навантаження, довше працює і плавно виходить із зачеплення.

Косий зуб вступає в роботу в точці A (рис. 4.29) переднього торця. Потім лінія контакту плавно подовжується, а навантаження плавно росте до деякого максимуму.

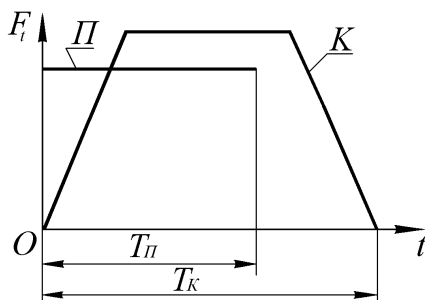


Рис. 4.30. Порівняння навантаженості прямого і косого зубців

Наприкінці роботи зуба лінія контакту скорочується, а передане навантаження плавно падає.

Останньою в зачепленні буде знаходитися точка B (рис. 4.29) заднього торця.

Розглянемо залежності геометричних параметрів зачеплення косозубих коліс.

2. Геометрія косозубих евольвентних коліс

На рис. 4.31 показане косозубе зачеплення на виді збоку з місцевим збільшенням I і з нормальним перерізом зуба $A-A$.

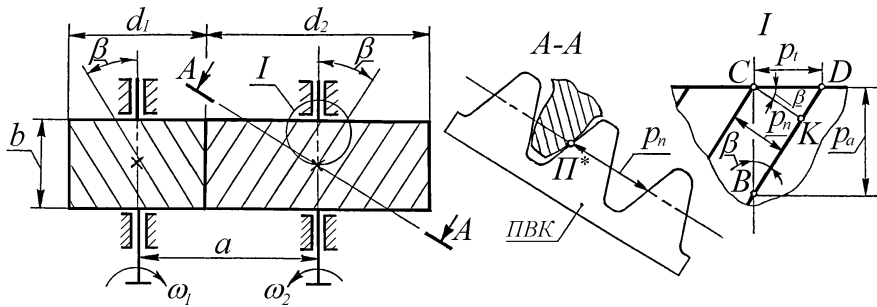


Рис. 4.31. Косоозубе зачеплення евольвентних круглих циліндричних коліс

На рисунку позначене:

d_1 і d_2 - діаметри ділительних циліндрів коліс 1 і 2 ;

b - ширина коліс 1 і 2;

p_t - окружний шаг зубців по ділительному циліндру;

p_n - нормальний шаг зубців по ділительному циліндру (найкоротша відстань між однойменними точками сусідніх зубців у нормальному до зуба перерізі);

p_a - осевий шаг зубців по ділительному циліндру;

ПБК - початковий виробляючий контур;

Π^* - полюс верстатного зачеплення колеса 2;

β - кут нахилу зубців (на колесі 1 - лівого напрямку, на колесі 2 - правого напрямку);

a - ділительна міжосьова відстань.

При нарізуванні косоозубого колеса стандартні параметри початкового виробляючого контуру переходять у нормальний переріз колеса ($A-A$ для колеса 2, наприклад).

З плоскої розгортки криволінійного ΔCDK , виділеного на ділительному циліндрі, маємо

$$p_t = p_n / \cos \beta. \quad (4.53)$$

Розділимо на π ліву і праву частини формули (4.49), тоді одержимо

$$m_t = m_n / \cos \beta, \quad (4.54)$$

де

$m_n = p_n / \pi$ - нормальний модуль зачеплення, що збігається зі стандартним модулем m_n зубонарізного інструмента, тому що стружка при нарізуванні знімається саме в нормальному перерізі і параметри інструмента саме тут передаються заготовці;

$m_t = p_t / \pi$ - окружний (торцевий, тангенціальний) модуль зачеплення, який при стандартному значенні m_n залежить від довільно вибраного значення кута β .

Нижче приведені формули для геометричного розрахунку косозубих коліс, що витікають із сказаного вище.

Діаметр ділильного циліндра можна обчислити по формулі

$$d = m_t \cdot z = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot z. \quad (4.55)$$

Діаметр основного циліндра можна обчислити по формулі

$$d_b = d \cdot \cos \alpha_t = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot z \cdot \cos \alpha_t. \quad (4.56)$$

Діаметр циліндра вершин зубців можна обчислити по формулі

$$d_a = d + 2 h_a^* \cdot m_n = m_n \left(\frac{z}{\cos \beta} + 2 h_a^* \right). \quad (4.57)$$

Діаметр циліндра впадин зубів обчислюється по формулі

$$d_f = d + 2 h_f^* \cdot m_n = m_n \left(\frac{z}{\cos \beta} - 2 h_a^* - 2 c^* \right). \quad (4.58)$$

Міжосьова ділильна відстань обчислюється по формулі

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m_n}{\cos \beta} (z_1 + z_2). \quad (4.59)$$

Формула (4.59) свідчить про те, що ділильна міжосьова відстань залежить від вибору кута нахилу зубів β .

Цим часто користуються при проектуванні співвісних передач: наприклад при розробці двоступінчастої співвісної передачі кути β нахилу зубців в першій і другій парі коліс підбирають такими, щоб одержати ту ж саму загальну міжосьову відстань.

У коробках переміни передач так само часто використовується декілька пар коліс постійного косозубого зачеплення між: первинним - проміжним і проміжним - вторинним валами з однією загальною міжосьовою відстанню. Тут також кути β усіх цих косозубих коліс не можуть бути довільними, тому що вони підбираються з умови співвісності первинного і вторинного валів.

Найбільше часто кут нахилу зубців косозубих коліс вибирається в діапазоні значень

$$\beta = 8^\circ \dots 20^\circ.$$

При $\beta < 8^0$ переваги косозубого колеса перед прямозубим слабко виражені.

При $\beta > 20^0$ помітно виявляється недолік косозубого зачеплення, пов'язаний із ростом осьової сили F_a , яка надмірно ускладнює й здорожує підшипниковий вузол (див. нижче).

Проте, плавність роботи косозубого колеса істотно залежить від величини β , тому в окремих випадках зустрічаються косозубі колеса з кутом β до 30^0 , зокрема, такі колеса застосовуються в коробках переміни передач автомобілів.

Нижче покажемо окремі особливості косозубого зачеплення.

3. Додатковий коефіцієнт перекриття

Визначимо коефіцієнт перекриття ε косозубого нульового зачеплення, якщо відомі: числа зубців нульових коліс z_1 і z_2 , кут нахилу зубців β , ширина вінців коліс b , нормальний модуль зачеплення m_n .

Пояснення. Повний коефіцієнт перекриття ε косозубого зачеплення складається з двох складових: коефіцієнта торцевого перекриття ε_α , який визначається точно так же, як і в прямозубих коліс, а також із додаткового коефіцієнта перекриття ε_β , який залежить від кута нахилу зубців β :

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \quad (4.60)$$

Торцевий коефіцієнт перекриття може бути знайдений, наприклад, по графоаналітичній формулі (див. (4.27)):

$$\varepsilon_\alpha = \frac{|AB|_t}{p_{tb}} = \frac{|AB|_t}{\pi \cdot m_t \cdot \cos \alpha_t} = \frac{|AB|_t \cdot \cos \beta}{\pi \cdot m_n \cdot \cos \alpha_t}, \quad (4.61)$$

де

$|AB|_t$ - довжина робочої ділянки лінії зачеплення в торцевому перерізі, яку можна визначити шляхом найпростіших графічних побудов (подібно рис. 4.8) із використанням залежностей (4.55), (4.56), (4.57) і (4.58);

α_t - проекція профільного кута зачеплення з нормального перерізу на торцеву площину ($\tan \alpha_t = \tan \alpha / \cos \beta$, але звичайно приймають $\alpha_t \approx \alpha_n = 20^0$).

Зауважимо, що роль початкових окружностей тут будуть відігравати ділильні окружності ($d_w = d$), тому що за умовою задачі зубчасті колеса - нульові.

2. Знайдемо додатковий коефіцієнт перекриття ε_β , розглянувши спрощене креслення косозубого зачеплення на виді збоку (рис. 4.32).

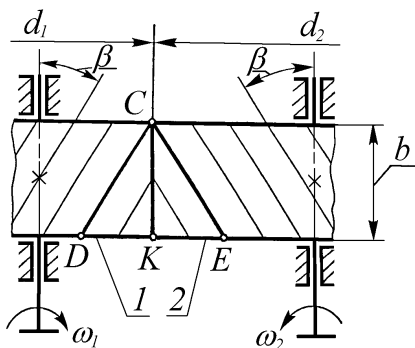


Рис. 4.32. До визначення ε_β

Косі зубці CD колеса 1 і CE колеса 2 ввійшли в зачеплення у верхньому торці - у точці C .

По визначенню коефіцієнт перекриття - це відношення дуги повороту колеса за час роботи одного зуба (дуги зачеплення) до окружного шагу зубців, тобто

$$\varepsilon_\beta = \frac{D\check{K}}{p_t} = \frac{K\check{E}}{p_t}.$$

Довжину дуги

зачеплення, наприклад, колеса 1 - $D\check{K}$ можна знайти по розгортці ділильного циліндра на площину

$$D\check{K} = b \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

тоді

$$\varepsilon_\beta = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{p_t} = \frac{b \cdot \sin \beta}{\pi \cdot m_n}. \quad (4.62)$$

Як бачимо, у косозубих коліс повний коефіцієнт перекриття ε істотно більший, ніж у прямозубих, тому що звичайно ε_β сумірний із ε_α , а іноді, при великих значеннях кута β і ширини вінців коліс b , коефіцієнт ε_β може бути навіть більше від ε_α .

Додатковий коефіцієнт перекриття ε_β можна оцінити навіть візуально без усяких розрахунків.

Покажемо цю оцінку на прикладі косозубого колеса, схема якого накреслена в деякому масштабі (рис. 4.33).

Очевидно, що величина ε_β чисельно дорівнює числу осевих шагів зубців p_a , що укладаються в ширині вінця b .

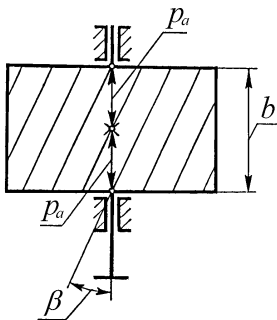


Рис. 4.33. До визначення додаткового коефіцієнта перекриття косозубого зачеплення

Виявляємо, що довжина p_a двічі укладається в розмірі b , значить $\varepsilon_\beta \approx 2,0$.

Справді, якби спряжене колесо знаходилося попереду, то центральний зуб знаходився б у зачепленні у своїй середній частині, а сусідні зубці - один би закінчував свою роботу, а другий - тільки б її починав.

Це б означало, що за рахунок кута нахилу зуба β у зачепленні увесь час знаходилося б дві пари зубів.

І лише в момент передачі «естафети» навантаження короткочасно в зачепленні знаходилося б три пари зубців.

4. Сили в косозубому зачепленні

Визначити без урахування витрат на долаття сил тертя сили взаємодії зубців косозубих коліс 1 і 2, якщо задано: нормальний модуль зачеплення m_n , числа зубців z_1 і z_2 , кут нахилу зубців β , обертовий момент рушійних сил T_1 на ведучім колесі 1. Колеса вважати нульовими, а початковий контур - стандартним (див. рис. 4.13).

Зобразимо колесо 1 на виді збоку з сторони відкинутого колеса 2 (рис. 4.34).

Замість відкинутого зв'язку прикладемо повну нормальну силу реакції зв'язку F_n . Для цього виконаємо переріз $A-A$, нормальний до центрального зубця, що знаходиться в зачепленні.

У площині перерізу $A-A$ направимо вектор повної (результуючої) сили навантаження на зуб $\overline{F}_n$ (без урахування сил тертя) по нормалі $n-n$ до евольвентного профілю зуба в полюсі зачеплення Π .

Розкладемо вектор сили $\overline{F}_n$ на дві складові $\overline{F}_r$ і $\overline{F}_t$.

Сила $\overline{F}_r$ - називається радіальною, тому що вона спрямована по радіусу до осі колеса.

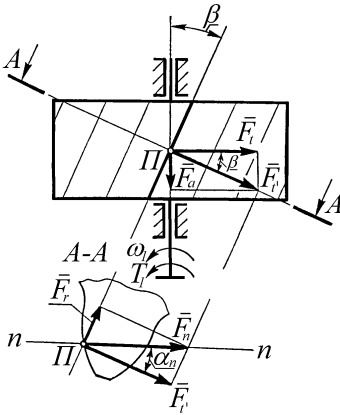


Рис. 4.34. До визначення сил в косозубому зачепленні

Сила $\overline{F}_t$ діє в площині, дотичній до діляльного циліндра, і може бути перенесена на основний вид колеса в натуральний величину.

Тепер у свою чергу можемо розкласти силу $\overline{F}_t$ на осьовий ($\overline{F}_a$) і окружний ($\overline{F}_r$) напрямки.

Очевидно, що складова $\overline{F}_a$ називається осьовою силою, а складова $\overline{F}_r$ - окружною силою.

З умови $\sum T = 0$ навколо осі вала колеса по заданому обертовому моменту T_l знайдемо силу

$$F_t = \frac{T_l}{d_l / 2} = \frac{2T_l}{d_l}, \quad (4.63)$$

де

$$d_l = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot z_l.$$

З паралелограма сил $\overline{F}_t$ і $\overline{F}_a$ з діагоналлю $\overline{F}_l$ знайдемо

$$F_a = F_t \cdot \tan \beta; \quad (4.64)$$

$$F_l = F_t / \cos \beta. \quad (4.65)$$

А з паралелограма сил $\overline{F}_r$ і $\overline{F}_l$ з діагоналлю $\overline{F}_n$ знайдемо:

$$F_r = F_l \cdot \tan \alpha_n \approx \frac{F_t \cdot \tan \alpha}{\cos \beta}; \quad (4.66)$$

$$F_n = F_l / \cos \alpha_n \approx \frac{F_t}{\cos \beta \cdot \cos \alpha}. \quad (4.67)$$

Проаналізуємо отримані формули.

По-перше, зауважимо, що вектор результуючої сили взаємодії косих зубців $\overline{F}_n$ розкладений на три взаємно перпендикулярні складові, що йдуть по виняткових (головних) напрямках (окружному, радіальному й осьовому)

$$\overline{F}_n \{ \overline{F}_t; \overline{F}_r; \overline{F}_a \}. \quad (4.68)$$

Корисною силою є окружна сила F_t . Вона визначається обертовим моментом рушійних сил T_l .

Така ж окружна сила (і по тій же лінії дії, тільки в протилежному напрямку) діє на колесо 2.

Її величина взаємозалежна з величиною обертового момента сил опору T_2 , який можна підрахувати по формулі

$$T_2 = F_t \cdot \frac{d_2}{2}, \quad (4.69)$$

де

$$d_2 = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot z_2.$$

На друге колесо діють також такі ж (з тими ж лініями дії, тільки в протилежних напрямках) сили $\overline{F}_r$ і $\overline{F}_a$.

У випадку прямозубих коліс $\beta=0$, $m_n=m$, тоді можна записати набір формул, по яких можна визначити сили в нульовому прямозубому зачепленні:

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1}, \text{ де } d_1 = mz_1; \quad (4.70)$$

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad (4.71)$$

$$F_a = 0;$$

$$F_n = F_t / \cos \alpha. \quad (4.72)$$

Здійснимо порівняння силової взаємодії прямозубих і косозубих коліс.

Корисна складова F_t і там і там визначається обертовим моментом і ділильним діаметром, тобто в цьому відмінності немає.

Перша шкідлива складова F_r буде при косозубому зачепленні дещо більшою (при $\beta = 20^\circ$, $\cos \beta = 0,94$ і радіальна сила в косозубому зачепленні виявиться більше ніж у прямозубому приблизно на 6%; при менших значеннях β ця відмінність ще менша). Істотної відмінності і тут не спостерігається.

Друга шкідлива складова F_a у прямозубого колеса взагалі відсутня, а в косозубого колеса вона є і відіграє велику роль при конструюванні і розрахунку підшипникових вузлів, а також при їхній експлуатації.

При $\beta = 20^\circ$ одержимо $F_a = 0,36 F_t$.

Відомо, що велике осьове навантаження сприймається підшипниками кочення значно гірше, ніж таке ж радіальне. Цим і пояснюється обмеження величини кута нахилу зубців значенням $\beta = 20^\circ$, що рекомендується в літературі. Наприклад, при використанні радіальних однорядних кулькових підшипників для сприйняття тільки осьового

навантаження рекомендується обмежити максимальну осьову силу чвертю від значення допустимого максимального радіального навантаження.

5. Еквівалентне число зубців косозубого колеса

Визначимо для косозубого колеса з числом зубців z і кутом нахилу

зубців β еквівалентне число зубців z_v .

Пояснення.

Еквівалентним косозубому колесу вважається прямозубе колесо, нарізане тим же зубонарізним інструментом, що і косозубе, і яке має зубці, рівномірні з зубцями косозубого колеса (іншими словами, і прямі і косі зубці вищезгаданих коліс мають у нормальному перерізі, який і характеризує міцність зубця, однакову форму).

Зобразимо на кресленні косозубе колесо на виді збоку з нормальним до зубця перерізом $A-A$ (рис.

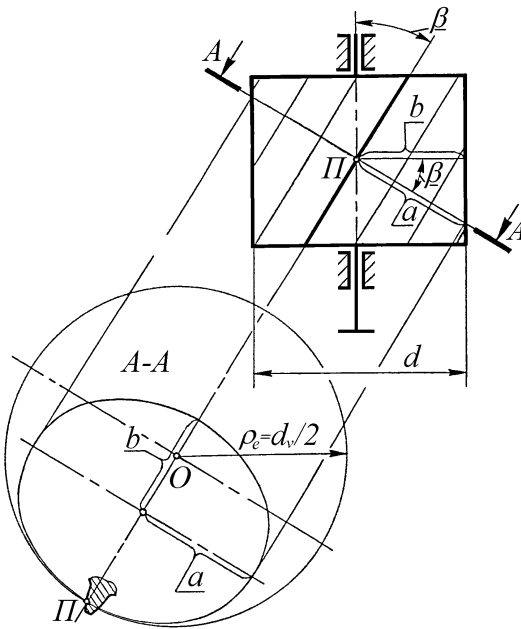


Рис. 4.35. До визначення еквівалентного числа зубців z_v косозубого колеса

4.35).

Як уже сказано, при нарізуванні косозубого і прямозубого коліс відтворюється та сама форма зубця в нормальному до зуба перерізі. Проте, у прямозубого колеса цей переріз буде збігатися з торцевим перерізом.

І тоді еквівалентне прямозубе колесо з таким же як у косозубого колеса зубом буде мати дільний діаметр d_v , рівний по величині двом радіусам кривизни ρ_e еліпса косоного перерізу $A-A$ дільного циліндра косозубого колеса в точці $П$ на малій осі.

З аналітичної геометрії відомо, що в точці еліпса на малій осі

$$\rho_e = a^2/b,$$

де $b = d/2$ - мала піввісь еліпса;

$$a = \frac{d}{2 \cdot \cos \beta} \quad - \text{велика піввісь еліпса.}$$

З урахуванням

$$d_v = m_n \cdot z_v \quad \text{і} \quad d = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot z$$

знайдемо еквівалентне число зубців :

$$\begin{aligned} d_v &= 2\rho_e; \\ m_n z_v &= 2 \frac{a^2}{b} = 2 \frac{(d / (2 \cos \beta))^2}{d / 2} = d / \cos^3 \beta = \frac{m_n}{\cos^3 \beta} \cdot z. \\ z_v &= \frac{z}{\cos^3 \beta}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Знайдемо мінімальне число зубців косозубого колеса z_{min}^{κ} , яке можна нарізати без підрізу евольвентного профілю, якщо кут нахилу зубців $\beta = 20^0$. Вважатимемо, що нарізування здійснюється інструментом із стандартним початковим виробляючим контуром ($h_a^* = 1,0$; $\alpha = 20^0$).

За формулою (4.30) знайдемо мінімальне число зубців прямозубого колеса, що нарізується тим же інструментом

$$z_{min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 1,0}{\sin^2 20^0} \approx 17.$$

Очевидно, що еквівалентне косозубому прямозубе колесо не буде мати підрізу зубців при значенні

$$z_v = z_{vmin} = 17,$$

тоді відповідно до формули (4.73) можемо знайти число зубців косозубого колеса z_{min}^{κ} , при якому профіль не буде мати підрізу

$$z_{min}^{\kappa} = z_{vmin} \cdot \cos^3 \beta = 17 \cdot \cos^3 20^0 = 17 \cdot (0,936)^3 = 15.$$

Приведені вище відомості розкривають окремі з властивостей косозубого зачеплення.

Не поглиблюючись далі у виклад інших особливостей косозубих коліс, зауважимо, що і для косозубих коліс широко застосовується поліпшення (корекція) методом нарізування стандартним інструментом зі зсувом із усіма вигодами, показаними вище на прикладі прямозубого зачеплення.

Всі переваги косозубого зачеплення особливо виявляються в косозубому зачепленні шевронних коліс (рис. 4.36).

6. Особливості шевронних евольвентних коліс

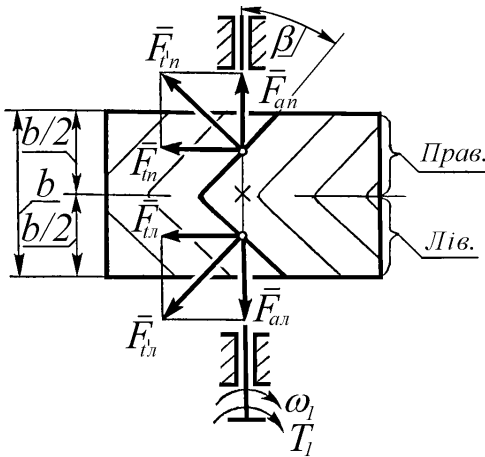


Рис. 4.36. Шевронне зубчасте колесо

)) також більший, ніж у косозубого. Тут більші значення також має і ширина колеса b , що в сполученні з великими кутами β забезпечує велику величину додаткового ступеня перекриття ε_β , який підраховується по формулі (4.62).

Зуб шевронного колеса також має підвищену згинну міцність, у порівнянні з косим - кожна половина шевронного зуба відіграє роль ребра жорсткості для другої його половини.

Еквівалентне число зубців z_v шевронного колеса також більше, ніж у косозубого, що свідчить про більш міцну форму зуба в нормальному перерізі.

Перераховані вище переваги шевронних коліс, забезпечують передачу ними потужності, у багато разів перевищуючої ту, яку спроможна передати прямозуба передача в тих же габаритах.

При $\beta=45^\circ \dots 50^\circ$ мінімальне число зубців шевронного колеса, яке можна нарізати без підрізу (без зсуву інструмента) складає всього 5 ... 6 зубців (див. задачу 4.5).

Але усе ж самою головною перевагою шевронного зачеплення перед простим косозубим є відсутність у шевронному зачепленні осьової сили F_a .

На рис. 4.36 показане шевронне колесо 1 на виді збоку.

Нехай колесо 2, що зачіпається з колесом 1, знаходиться попереду.

У шевронних коліс кут нахилу зубців може досягати значень $\beta=50^\circ$.

При великих значеннях β істотно підвищується плавність і безшумність роботи шевронних коліс.

Оскільки шевронні колеса застосовуються у відповідальних високоточних передачах, окружна швидкість коліс може досягати значень $V_{окр}=100 \dots 150 \text{ м/с}$.

Ступінь перекриття шевронного зачеплення (див. формули (4.60) ... (4.62

Воно відкинуте і замість нього прикладені сили дії колеса 2 на колесо 1 (реакції відкинутого зв'язку) на лівій і правій половинах центрального зуба.

Тут $\bar{F}_{t'n}$ і $\bar{F}_{t'l}$ - проекції повних сил взаємодії правої і лівої половин зуба - F_{nn} і F_{nl} (див. рис. 4.34) на дотичну площину до ділильного циліндра.

Сили $\bar{F}_{t'n}$ і $\bar{F}_{t'l}$ розкладені в площині креслення на складові:

$\bar{F}_{tn}$ і $\bar{F}_{tl}$ - окружні сили;

$\bar{F}_{an}$ і $\bar{F}_{al}$ - осьові сили.

Очевидно, що результуюча окружна сила

$$F_t = F_{tn} + F_{tl} = \frac{T_1}{d_1 / 2},$$

а результуюча осьова сила

$$F_a = F_{an} - F_{al}.$$

Бажано мати

$$F_a = 0,$$

тоді повинно бути

$$F_{an} = F_{al}.$$

Це досягається за рахунок самоустановки, як правило, колеса 1 на плаваючих в осьовому напрямку опорах (підшипниках).

Радіальні складові F_{rn} і F_{rl} , а також повні результуючі сили F_{nn} і F_{nl} можуть бути знайдені по формулах (4.66) і (4.67), виведених для простого косозубого зачеплення.

Як уже говорилося вище, шевронне колесо можна нарізати по методу копіювання модульними пальцевими фрезами (див. рис. 4.15). Це непродуктивний і дорогий спосіб виготовлення.

Іноді застосовують різновид шевронних коліс із розрізним шевронним зубом (рис. 4.37).

Ширина канавки b_k повинна бути достатньою для виходу інструмента при нарізуванні правої і лівої половин зубчастого вінця по методу обкатки.

У цьому випадку не вся ширина колеса b бере участь у роботі.

Крім того, відомо, що збільшення розміру b накладає підвищені вимоги до точності виготовлення і монтажу шевронних зубчастих коліс.

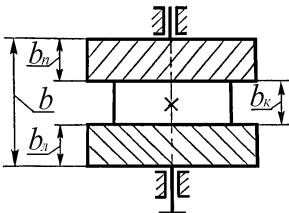


Рис. 4.37. Шевронне колесо з розрізними зубцями

Виграш при такій формі колеса полягає в здешевленні виготовлення й у підвищенні продуктивності нарізування на зубодовбальних або зубофрезерувальних верстатах.

Зачеплення ж розрізних шевронних коліс має дещо гірші показники навантажувальної спроможності, ніж зачеплення нерозрізних коліс.

7. Контрольні запитання

1. Які основні особливості косозубих і шевронних евольвентних зубчастих коліс?
2. Як геометрично утворюються лінійчаті евольвентні поверхні прямого і косого зубців?
3. Які модулі косозубого евольвентного зачеплення Вам відомі? Як визначаються геометричні розміри косозубого колеса?
4. Охарактеризуйте коефіцієнт перекриття косозубого і шевронного зачеплень?
5. Розкладіть повну силу взаємодії косих зубців на три складові (окружну, радіальну й осьову). Запишіть формули для їхнього визначення.
6. Знайдіть еквівалентне число зубців косозубого колеса і розкрийте його фізичний зміст.
7. Чому одне із шевронних коліс виконується плаваючим в осьовому напрямку?

Лекція 17

Тема: **Особливості конічного евольвентного зачеплення**

Зміст:

1. Геометрія конічного колеса і конічного зачеплення.
2. Наближене профілювання конічних евольвентних коліс.
3. Особливості покращання конічного евольвентного зачеплення.
4. Сили в конічному прямозубому і косозубому зачепленні.
5. Контрольні запитання.

1. Геометрія конічного колеса і конічного зачеплення

Як уже говорилося в попередніх лекціях, за допомогою конічних зубчастих коліс здійснюється передача між пересічними осями валів під кутом δ (як правило, $\delta = 90^\circ$).

Це просторова передача.

Евольвентні теоретично правильні профілі конічних зубців утворюються на сферичній поверхні (рис. 4.38).

Кінематика конічного зачеплення і деякі питання зовнішньої геометрії конічних коліс були описані в пункті 3.1.

Важливо ще раз підкреслити, що правильне конічне евольвентне зачеплення може бути здійснене тільки при збігу уявлених вершин початкових конусів зачіплюваних зубчастих коліс (т. O , рис. 3.6 та рис. 4.38).

Цю вимогу можна виконати, тільки передбачивши осьове регулювання обох коліс.

Якість регулювання оцінюється за формою так званої плями контакту зубців.

Регулювання є непростю операцією.

Якщо пригадати, що виготовлення конічних зубчастих коліс більш складне (в порівнянні з виготовленням циліндричних зубчастих коліс, які до того ж не потребують осьового регулювання), то конічне зачеплення перд циліндричним явно програє.

Проте, у силу монтажних вимог по розташуванню двигунів і виконавчих механізмів кінцеве зачеплення знаходить широке застосування.

Усе ж варто підкреслити: якщо можна обійтися застосуванням циліндричних зубчастих коліс, то краще кінцеве зачеплення не застосовувати.

Нижче розглянемо особливості кінцевого евольвентного зачеплення на прикладі коліс із прямими зубцями з деякими зауваженнями, що відносяться до непрямозубих кінцевих коліс.

2. Наближене профілювання кінцевих евольвентних коліс

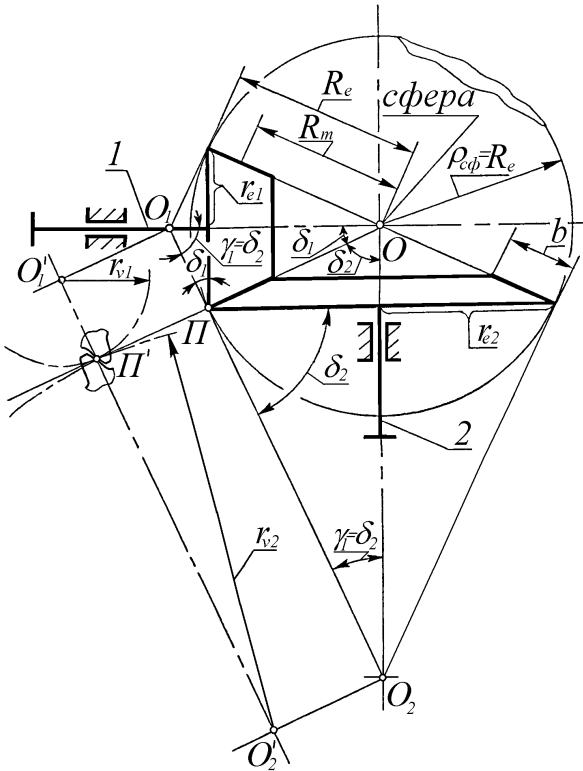


Рис. 4.38. Наближене профілювання зубців кінцевих евольвентних коліс

Отже, точне профілювання евольвентних зубців кінцевих коліс, як уже було сказано, можна виконати на поверхні сфери.

Графічні прийоми для цього випадку відпадають, тому що сфера не розвертається на площину, а сферичних ватману і креслярських дощок з комбайнами ще ніхто не придумав.

Аналітичні точні розрахунки, у принципі, можливі, але також практично не застосовуються, через їхню громіздкість і ненаочність. На практиці застосовується наближене профілювання конічного евольвентного зачеплення на плоских розгортках додаткових конусів (рис. 4.38).

Твірні додаткових конусів перпендикулярні твірним відповідних початкових конусів.

Картина теоретично правильного зачеплення на сфері замінюється картиною на додаткових конусах.

На рисунку кут пересічення осей валів прийнятий рівним 90° .

Додаткові зовнішні конуси з вершинами O_1 і O_2 як би надіті на поверхню сфери зовні - це уявлювані конуси з довжинами твірних $O_1\Pi$ і $O_2\Pi$.

Осі додаткових конусів збігаються з осями початкових конусів коліс, а їхні конусні кути γ_1 і γ_2 є додатковими до 90° із конусними кутами δ_1 і δ_2 конічних зубчастих коліс.

Зліва від основної проекції конічних коліс у проекційному зв'язку показаний фрагмент наближених профілів зубців конічних коліс, виконаних на розгортках додаткових конусів.

Прямозубі конічні колеса мають стандартне значення модуля зачеплення в зовнішніх торцях, для яких прийнятий індекс e (від слова “end” - кінець), тобто - m_e .

Уявлювані прямозубі циліндричні колеса з таким же модулем зачеплення $m=m_e$ і радіусами ділільних окружностей

$$r_1 = r_{v1} = O_1\Pi \quad \text{і} \quad r_2 = r_{v2} = O_2\Pi$$

в точності співпадуть по профілю зубців і радіусам ділільних окружностей із зображеними на розгортках додаткових конусів.

Підррахуємо числа зубців цих уявлюваних коліс, названих еквівалентними:

$$\begin{aligned} r_{v1} &= r_{e1} / \cos \delta_1; \\ \frac{1}{2} m_e z_{v1} &= \frac{1}{2} m_e z_1 / \cos \delta_1; \\ z_{v1} &= z_1 / \cos \delta_1. \end{aligned}$$

Точно так само знайдемо

$$z_{v2} = z_2 / \cos \delta_2,$$

тобто в загальному випадку для будь-якого конічного прямозубого колеса буде справедливий вираз

$$z_v = z / \cos \delta. \quad (4.74)$$

Розрахунок на міцність прямозубих конічних коліс, які мають перемінний переріз по довжині зубців, який убуває до вершини колеса, прийнято виконувати по середньому перерізу зубця.

Як відомо, для середнього перерізу конічного колеса присвоюється індекс m (від слова “mid” - середній). Тоді в розрахунках на міцність слід застосовувати значення середнього модуля зачеплення m_m .

Тому що модуль прямого зуба конічного колеса лінійно убуває від величини стандартного модуля зачеплення m_e у зовнішньому торці до 0 на вершині конуса (т. O), середній модуль конічного зачеплення m_m можна підрахувати з пропорції

$$\frac{m_e}{R_e} = \frac{m_m}{R_m}.$$

Тому що $R_m = R_e - b/2$, що слідує з рис. 4.38, одержуємо формулу для підрахунку m_m

$$m_m = m_e \left(1 - \frac{b}{2R_e} \right). \quad (4.75)$$

У конічних коліс із непрямым (тангенціальним, спіральним, круговим) зубом міцність зуба оцінюється також по величині середнього перерізу зуба з нормальним середнім модулем зачеплення m_{nm} і середнім кутом нахилу β_m , що є для названих коліс стандартними величинами.

При цьому по величині z_v оцінюється форма зуба, тобто відповідно до z_v по таблицях (номограмах) вибирається так званий коефіцієнт форми зуба Y_F , що є характеристикою згинної міцності зуба.

3. Особливості покращання конічного евольвентного зачеплення

Конічне евольвентне зачеплення так само може піддаватися виправленню (поліпшенню, корекції) евольвентного профілю. Проте, у конічному зачепленні неможливо застосувати виправлення методом зсуву зубонарізного інструмента з довільними коефіцієнтами зсуву x_1 і x_2 . Це викликало б довільну зміну конусних кутів δ_1 і δ_2 .

Тому що звичайно $\delta_1 + \delta_2 = \delta = 90^\circ$, то можливе тільки таке виправлення, при котрім би не змінювалася сума конусних кутів ($\delta_1 + \delta_2$).

Цій умові задовольняє тільки рівнозміщене зачеплення, при котрому

$$x_2 = -x_1,$$

$$x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 0.$$

Величини коефіцієнтів зсуву x_1 і $x_2 = -x_1$ вибираються з міркування вирівнювання коефіцієнтів питомого сковзання зубців σ_{1-2} і σ_{2-1} шестерні 1 і колеса 2.

Згинну ж міцність зубців шестерні 1 і колеса 2 вирівнюють за допомогою так званої тангенціальної корекції. Вона полягає в тому, що різці різцевої голівки, що прорізає впадини між зубцями, розсовують на деякий додатковий розмір при нарізуванні западин колеса 2.

Тому що шаг зубців змінений бути не може, то розширення впадини супроводжується потоншенням зубця колеса 2, тобто зниженням згинної міцності зубців колеса 2.

При нарізуванні шестерні 1 усе роблять навпаки: впадину звужують, а зубець на той же самий розмір потовщують. Це досягається зближенням різців різцевої голівки на ту ж величину.

Таким чином, не змінивши ніяк форму самих профілів, домагаються перерозподілу згинної міцності зубців шестерні 1 і колеса 2 (зайва частина запасу міцності передається від більш міцного зуба до більш слабкого зуба, чим досягається підвищення загальної міцності конічного зачеплення).

Розглянемо тепер окремі особливості конічного евольвентного зачеплення.

Визначимо мінімальне число зубців прямозубого конічного колеса $z_{min}^{кон}$, яке можна нарізати без підрізу евольвентного профілю інструментом із стандартним початковим контуром ($h_a^* = 1,0$; $\alpha = 20^\circ$). Конусний кут колеса δ відомий.

Для цього виконаємо наступні дії.

1. Визначимо мінімальне еквівалентне число зубців конічного колеса по формулі (4.74)

$$z_v = z_{vmin} = z_{min}^{кон} / \cos \delta.$$

2. Знайдемо z_{vmin} , яке могло бути нарізаним стандартним інструментом по формулі (4.30), виведеній для циліндричного прямозубого колеса,

$$z_{vmin} = z_{min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 1,0}{\sin^2 20^\circ} \approx 17.$$

3. Підрахуємо $z_{min}^{кон}$ по формулі

$$z_{min}^{кон} = z_{vmin} \cdot \cos \delta = 17 \cos \delta. \quad (4.72)$$

4. Побудуємо графік залежності $z_{min}^{кон}$ від δ (рис. 4.39).

Аналіз залежності $z_{min}^{кон}$ від величини δ показує, що при великих передаточних числах конічної передачі, при котрих δ_I невелике, особливого виграшу в зменшенні числа зубців шестерні 1 у порівнянні з циліндричною передачею не спостерігається.

Якщо ж передаточне відношення зменшується, то виграш від зниження числа зубців шестерні 1 стає помітним.

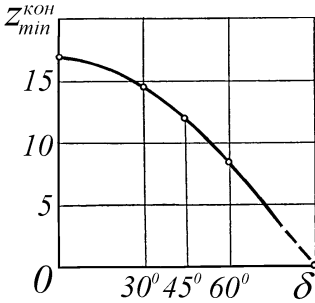


Рис. 4.39. Залежність $z_{min}^{кон}$ від величини конусного кута δ

Наприклад, при $u=1$ кут $\delta_I = \delta_2 = 45^\circ$ і тоді $z_{min}^{кон} = 12$ замість $z_{min}^ц = 17$ у циліндричній шестерні.

У конічних коліс із криволінійними зубцями $z_{min}^{кон}$ може бути істотно знижено.

Так, наприклад, при $\beta_m = 30^\circ$ з урахуванням формули (4.69)

$$z_{min}^{кон} = 17 \cdot \cos \delta \cdot \cos^3 \beta_m = 11 \cdot \cos \delta.$$

При $u=1$ одержимо

$$z_{min}^{кон} = 7,78 \approx 8.$$

4. Сили в конічному прямозубому і косозубому зачепленні

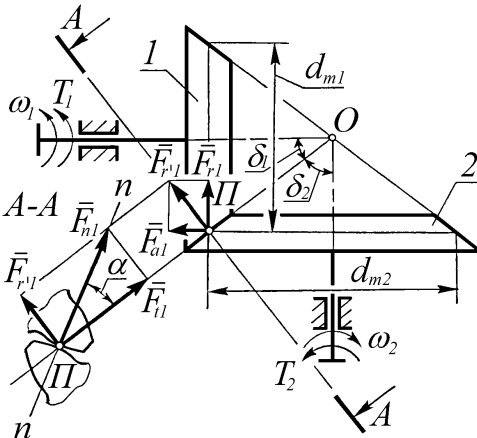


Рис. 4.40. До визначення сил в прямозубому конічному зачепленні

Визначимо сили в ортогональному конічному прямозубому зачепленні, якщо відомі: зовнішній торцевий модуль зачеплення m_e , ширина вінця зубців b , числа зубців коліс z_1 і z_2 , ведучий обертовий момент T_1 .

Для цього: 1. Покажемо (рис. 4.40) конічне прямозубе зачеплення на виді збоку з нормальним середнім перерізом зубців у зачепленні $A-A$.

2. Прикладемо до

зуба колеса 1 (у нормальному перерізі $A-A$ в полюсі зачеплення Π по напрямку нормалі до евольвентного профілю) результуючу (повну) силу тиску $\overline{F}_{n1}$ з боку зуба колеса 2.

Розкладемо $\overline{F}_{n1}$ на дві взаємно перпендикулярні складові сили: окружну - $\overline{F}_{t1}$ і розпірну - $\overline{F}_{r1}$.

3. Перенесемо силу $\overline{F}_{r1}$ в натуральну величину на головний вид.

У свою чергу розкладемо силу $\overline{F}_{r1}$ на складові $\overline{F}_{r1}$ і $\overline{F}_{a1}$.

4. Визначимо всі складові $\overline{F}_{t1}$, $\overline{F}_{r1}$, $\overline{F}_{a1}$ і результуючу $\overline{F}_{n1}$ сили в зачепленні.

Окружна сила $\overline{F}_{t1}$ на головному виді направлена всередину креслення. Її величина може бути знайдена по формулі

$$F_{t1} = \frac{T_1}{d_{m1}/2}, \quad (4.76)$$

де d_{m1} - середній ділильний діаметр колеса 1.

З урахуванням формули (4.75) знайдемо

$$d_{m1} = m_m z_1 = m_e \left(1 - \frac{b}{2R_e}\right) z_1, \quad (4.77)$$

де

R_e - зовнішня конусна відстань, яку можна відшукати по формулі

$$R_e = r_{e1}/\sin\delta_1 = \frac{1}{2} m_e z_1/\sin\delta_1. \quad (4.78)$$

$\sin\delta_1$ можна знайти з урахуванням формули (3.4)

$$i_{1-2} = \frac{z_2}{z_1} = \operatorname{ctg}\delta_1, \text{ звідкіля}$$

$$\delta_1 = \operatorname{arccctg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right). \quad (4.79)$$

З перерізу $A-A$ знайдемо

$$F_{r1} = F_{t1} \cdot \operatorname{tg}\alpha; \quad (4.80)$$

$$F_{n1} = F_{t1}/\cos\alpha. \quad (4.81)$$

Далі з розкладання вектора сили $\overline{F}_{r1}$ на головному виді відшукаємо

$$F_{r1} = F_{r1} \cdot \cos\delta_1 = F_{t1} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\delta_1; \quad (4.82)$$

$$F_{a1} = F_{\rho1} \cdot \sin \delta_1 = F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \delta_1. \quad (4.83)$$

5. Без урахування сил тертя в зачепленні знайдемо сили, що діють на колесо 2 із боку колеса 1.

У повній відповідності з 3-м законом Ньютона запишемо

$$\overline{F}_{t2} = -\overline{F}_{t1}; \quad \overline{F}_{r2} = -\overline{F}_{a1}; \quad \overline{F}_{a2} = -\overline{F}_{r1}; \quad \overline{F}_{n2} = -\overline{F}_{n1}. \quad (4.84)$$

$$\text{Тут} \quad \overline{F}_{n2} \{ \overline{F}_{t2}; \overline{F}_{r2}; \overline{F}_{a2} \}$$

так само як і

$$\overline{F}_{n1} \{ \overline{F}_{t1}; \overline{F}_{r1}; \overline{F}_{a1} \}.$$

6. Визначимо обертовий момент на колесі 2 відповідно до формули (3.8)

$$T_2 \approx T_1 \cdot (z_2/z_1). \quad (4.85)$$

Знак $\approx$ у формулі (4.85) означає, що T_2 знайдено без урахування сил тертя, тобто без урахування відмінності ККД передачі від 1.

Обертовий момент T_2 також можна відшукати по формулі

$$T_2 = F_{t2} \cdot d_{m2}/2, \quad (4.86)$$

де

$$d_{m2} = m_m \cdot z_2 = m_e (1 - b/(2Re)) \cdot z_2,$$

$$R_e = 0,5 m_e \cdot z_2 / \sin \delta_2,$$

$$\sin \delta_2 = \cos \delta_1.$$

5. Контрольні запитання

1. Опишіть наближене профілювання зубців конічних евольвентних коліс.

2. Визначте еквівалентне число зубців конічного евольвентного колеса і розкрийте його фізичний зміст.

3. Чому мінімальне число зубців конічного евольвентного зачеплення менше, ніж у циліндричного?

4. Які існують види покращення конічного евольвентного зачеплення?

5. Розкладіть повну силу взаємодії зубців конічного прямозубого зачеплення на три складові (окружну, радіальну й осьову).

6. Запишіть формули для їхнього визначення.

Лекція 18

Тема: **Особливості неевольвентних зачеплень**

Зміст:

1. Геометрія червячного зачеплення.
2. Швидкість сковзання в червячному зачепленні.
3. Сили в червячному зачепленні.
4. Особливості циклоїдального та цівкового зачеплень.
5. Особливості хвильового зачеплення.
6. Контрольні запитання.

1. Геометрія червячного зачеплення

Розглянемо червячну передачу з циліндричним черв'яком, як найпоширенішу серед червячних передач.

Як уже було показано вище, червячна передача є розвитком гвинтової передачі, котра включає у свій склад циліндричні косозубі колеса, що знаходяться в точковому зачепленні.

На відміну від гвинтової червячна передача має підвищену навантажувальну спроможність. Червячне колесо має торієдну форму, завдяки чому воно охоплює витки червяка на куті $2\gamma \approx 110^\circ$. При цьому утворюється лінійчатий контакт зубців червячного колеса 2 з гвинтовою поверхнею червяка 1 (рис. 3.9).

У принципі, червячна передача є різновидом зубчастої передачі. Але свою власну назву вона одержала через те, що колесо 1, маючи усього лише один або декілька косих зубців із кутом нахилу β , який прагне до величини 90° , перетворилося в гвинт - червяк із трапецеїдальною (або близькою до такої) нарізкою.

Серед множини профілів витків червяка найпоширенішими є трапецеїдальний і евольвентний профілі з параметрами стандартного початкового контуру $h_a^* = 1, 0; \alpha = 20^\circ; c^* = 0, 2; R = 0, 3m$.

На рис. 4.41 показаний схематично двозахідний червяк ($z_1=2$). Якщо трапецеїдальний профіль червяка спостерігається в його осьовому перерізі *Б-Б*, то такий червяк зветься *червяком Архімеда* - *ЗА* (його винахід приписується Архімеду).

Якщо трапецеїдальну форму профілю червяк має в нормальному до витків перерізі *А-А*, то такий червяк називають *конволютним*.

Розрізняють два різновиди конволютного червяка: *ZN1* і *ZN2* (із трапецеїдальною формою виступу витка або впадини між витками).

Якщо ж черв'як має евольвентний профіль витків у торцевому перерізі $B-B$, то він називається *евольвентним* - $Z1$. Фактично це - евольвентне косозубе колесо (з малим z і великим β) із усіма наслідками, що звідси витікають.

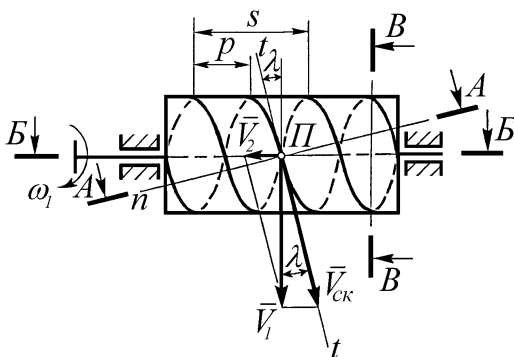


Рис. 4.41. Двозахідний черв'як

(як звичайну трапецеїдальну різьбу) на токарно-гвинторізному верстаті чистовим точінням. Витки черв'яка Архімеда, як правило, не шліфуються через те, що при шліфуванні треба було б застосовувати фасонний шліфувальний круг з криволінійною утворюючою, а це спричиняє за собою багато складностей. Відомо, що шліфування черв'яка істотно підвищує зносостійкість передачі, і тому ця властивість черв'яка Архімеда вважається його суттєвим недоліком.

Конволютні черв'яки також можуть бути виточені на токарно-гвинторізному верстаті спеціальним двостороннім різцем або двома різцями. Їх можна шліфувати шліфувальними кругами з робочою конічною поверхнею.

Евольвентний черв'як можна виготовити за технологією нарізування евольвентних зубчастих коліс на черв'ячно-фрезерувальних верстатах. Евольвентні витки шліфуються плоскою стороною шліфувального круга.

У черв'яків стандартизується осьовий модуль $m_a = m$, який відповідає осьовому шагу його витків $p_a = p$:

$$m = p/\pi. \quad (4.87)$$

Такий же модуль m черв'ячне колесо має в торцевому перерізі.

Багатозахідний черв'як має хід S гвинтових поверхонь

$$S = p z_1, \quad (4.88)$$

де z_1 - число заходів черв'яка (по стандарту $z_1 = 1; 2; 4$).

Існують також інші типи черв'яків (наприклад, нелінійчаті, кругові, з увігнутим профілем). Відмінність вищезгаданих черв'яків із погляду кінематики і навантажувальної спроможності невелика.

Основна їхня різниця стосується технології виготовлення.

Так, черв'як Архімеда можна виточити

Кут підйому витків черв'яка λ на ділильному циліндрі можна визначити по формулах:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{s}{\pi d_1}, \quad (4.89)$$

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{s}{\pi d_1}.$$

Формула (4.89) записується з розгляду розгортки ділильного циліндра черв'яка на площину. Тут d_1 - діаметр ділильного циліндра черв'яка.

Особливістю черв'яка, на відміну від звичайного зубчастого колеса, є те, що його діаметр d_1 ніяк не зв'язаний із числом заходів (тобто з числом зубців z_1).

Діаметр ділильного циліндра черв'яка підраховують по формулі

$$d_1 = q \cdot m, \quad (4.90)$$

де q - коефіцієнт діаметра черв'яка, який означає число модулів у ділильному діаметрі черв'яка.

Величина q вибирається в залежності від z_2 . Вона знаходиться в діапазоні чисел від 7 до 25.

Менші значення q вибирають для швидкісних черв'ячних передач, а великі значення - для тихохідних тяжко навантажених передач.

Ділильний діаметр черв'ячного колеса в середньому перерізі визначається по формулі

$$d_2 = m \cdot z_2. \quad (4.91)$$

Тому що зубці черв'ячного колеса повинні входити в зачеплення з витками черв'яка, то кут нахилу зубців черв'ячного колеса повинен дорівнювати кутові підйому ділильної гвинтової лінії черв'яка

$$\beta = -\lambda. \quad (4.92)$$

2. Швидкість сковзання в черв'ячному зачепленні

Геометрія черв'яка визначає сполучення окружних швидкостей V_1 - черв'яка і V_2 - черв'ячного колеса, а також швидкості сковзання між зубцями колеса 2 і витками черв'яка 1 - $V_{ск} = V_{2-1}$.

З рис. 4.41 слідує, що

$$V_{ск} = \frac{V_1}{\cos \lambda} = \frac{\omega_1 \cdot d_1}{2 \cos \lambda} = \frac{\omega_1 \cdot q \cdot m}{2 \cos \lambda}. \quad (4.93)$$

Помічаємо, що величина $V_{ск}$ перевищує в багато разів величину V_2 і навіть перевищує величину V_1 , що обумовлює великий коефіцієнт утрат у передачі, а отже, невисокий ККД.

З рис. 4.41 також слідує, що

$$tg\lambda = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\omega_2 \cdot mz_2 \cdot 2}{\omega_1 \cdot qm \cdot 2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_2 \cdot q} = \frac{z_1}{q}, \quad (4.94)$$

де
$$V_2 = \omega_2 \frac{mz_2}{2}; \quad V_1 = \omega_1 \frac{qm}{2}; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Той ж самий вираз (4.94) можна одержати, перетворюючи формулу (4.89)

$$tg\lambda = \frac{s}{\pi d_1} = \frac{p \cdot z_1}{\pi \cdot q \cdot m} = \frac{m \cdot z_1}{q \cdot m} = \frac{z_1}{q}.$$

Черв'ячне колесо нарізується черв'ячною фрезою, що являється точною копією спряженого з ним черв'яка. При цьому механізми верстата забезпечують взаємозалежні швидкості обертання черв'ячної фрези і заготовки черв'ячного колеса відповідно до формули

$$u = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1.$$

Зубці черв'ячного колеса мають дугоподібну форму, тому що охоплюють витки черв'яка на куті $2\gamma = 110^\circ$.

У центральній частині зубець черв'ячного колеса має найменший переріз, а до країв зубця переріз зростає, зберігаючи спряженість із профілем витків черв'яка, тобто зуб черв'ячного колеса характеризується перемінним коефіцієнтом натурального зсуву по довжині.

У центрі зуба коефіцієнт зсуву мінімальний, а до країв зуба - усе зростає.

При нарізуванні черв'яків зсув інструмента не застосовується. Замість нього можна вибрати різні величини коефіцієнта діаметра черв'яка q , що, у принципі, дає той же ефект, як і нарізування зі зсувом.

При нарізуванні черв'ячних коліс зсув черв'ячної фрези широко застосовується в основному з метою вписування в стандартну міжосьову відстань.

Можна не змінюючи величин z_1 і z_2 (тобто величини $u = z_2 / z_1$) одержати різні міжосьові відстані в межах

$$a_w = a + xm, \quad (4.95)$$

де a - ділильна міжосьова відстань

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{qm + z_2 m}{2} = \frac{m}{2}(q + z_2); \quad (4.96)$$

$x = \pm 1, 0$ - граничні максимальні значення коефіцієнта зсуву,

А можна не змінюючи міжосьову відстань при цьому змінювати число зубців z_2 на 1 або 2 зубці при тому ж значенні z_1 , тобто коректувати

$$u = \frac{z_2^1}{z_1} = \frac{z_2 \pm 2}{z_1}, \quad (4.97)$$

де $z_2^1 = z_2 \pm 2$ - скориговане на ± 2 зуба число зубців черв'ячного колеса.

Тепер вирішимо одну задачу.

3. Сили в червячному зачепленні

Визначимо сили в червячному зачепленні по вихідним даним: m - модуль зачеплення; z_1 і z_2 - число заходів черв'яка і число зубців червячного колеса; q - коефіцієнт діаметра черв'яка; η - коефіцієнт корисної дії червячного зачеплення; T_1 - ведучий обертовий момент на валі черв'яка; початковий контур червячного зачеплення стандартний ($\alpha = 20^\circ$); напрямок навівання витків черв'яка - правий.

Для цього: 1. Зобразимо схему червячної передачі в двох проєкціях із розведеними один від одного черв'яком 1 і червячним колесом 2 (рис. 4.42).

Замість відкинутих зв'язків прикладемо у полюсі зачеплення сили реакції в розкладанні по трьох напрямках:

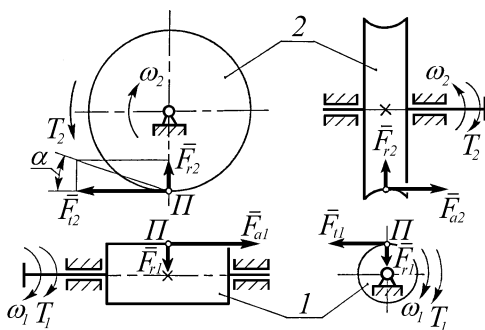


Рис. 4.42. Сили в червячному зачепленні

$$\bar{F}_{n1} \{ \bar{F}_{t1}; \bar{F}_{r1}; \bar{F}_{a1} \},$$

$$\bar{F}_{n2} \{ \bar{F}_{t2}; \bar{F}_{r2}; \bar{F}_{a2} \}.$$

Маємо на кожному з чотирьох зображень по дві складові сили реакції відкинутого зв'язку, що проєктуються в натуральну величину. Третя складова на всіх проєкціях відсутня, тому що вона скрізь перпендикулярна площині проєкції і проєктується в точку.

На валі черв'яка напрямок вхідного (рушійного) моменту сил T_1 збігається з напрямком кутової швидкості ω_1 .

При правому навіванні черв'яка 1 і напрямку кутової швидкості ω_1 по годинниковій стрілці (при погляді зліва праворуч уздовж осі черв'яка) черв'ячне колесо 2 буде обертатися по годинниковій стрілці (при погляді уздовж осі черв'ячного колеса справа ліворуч).

Вихідний обертовий момент сил T_2 (як момент сил опору) буде направлений у бік, протилежний напрямку кутової швидкості ω_2 колеса 2.

2. Знайдемо величину вихідного моменту сил T_2 по формулі (3.8)

$$T_{вих} = T_{ex} \cdot |i| \cdot \eta,$$

тобто
$$T_{вих} = T_{ex} \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \eta. \quad (4.98)$$

3. Обчислимо окружні сили F_{t1} і F_{t2} по формулах

$$F_{t1} = 2T_1/d_1 = 2T_1/(qm); \quad (4.99)$$

$$F_{t2} = 2T_2/d_2 = 2T_2/(mz_2). \quad (4.100)$$

4. Обчислимо радіальну силу F_{r2} колеса 2 по формулі

$$F_{r2} \approx F_{t2} \cdot \tan \alpha. \quad (4.101)$$

5. Відповідно до третього закону Ньютона визначимо інші невідомі сили:

$$\overline{F}_{a1} = -\overline{F}_{t2}; \quad (4.102)$$

$$\overline{F}_{r1} = -\overline{F}_{r2}; \quad (4.103)$$

$$\overline{F}_{a2} = -\overline{F}_{t1}. \quad (4.104)$$

6. Повні сили тиску в зачепленні можна визначити по формулах:

$$F_{n1} = \sqrt{F_{t1}^2 + F_{r1}^2 + F_{a1}^2}; \quad (4.105)$$

$$\overline{F}_{n2} = -\overline{F}_{n1}. \quad (4.106)$$

4. Особливості зачеплення Новікова

Як уже відзначалося в п. 4.3.1 даного розділу зовнішнє евольвентне зачеплення має один дуже суттєвий недолік - у контакті працюють опуклі профілі, через що навантажувальна спроможність зачеплення обмежена технологічними можливостями підвищення поверхневої твердості зубців.

Професор Новіков М. Л. запропонував новий вид зачеплення, в подальшому названий його ім'ям. Це зачеплення ще іноді називають круглогвинтовим зачепленням (рис. 4.43).

Основна ідея зачеплення Новікова полягає в тому, що з метою підвищення контактної навантажувальної спроможності, зовнішнє

зачеплення зубчастих коліс виконується з опуклим профілем зуба на шестерні і з увігнутим профілем зуба на колесі.

Обидва профілі окреслюються дугами окружності. Радіус кривизни профілю зуба шестерні прийнятий рівним $\rho_1 = 1,35m$, а радіус кривизни профілю зуба колеса взятий рівним $\rho_2 = (1,03 \dots 1,1) \rho_1$.

Тому що профілі зубців є спряженими тільки в одній точці A , і при цьому торцевий коефіцієнт перекриття $\varepsilon_\alpha = 0$, то по довжині зубці повинні бути тільки косими (тобто гвинтовими).

З урахуванням форми профілів зубців і їхньої спрямованості по довжині, назва “кругло-гвинтове зачеплення” цілком відповідає його сутності.

Кут нахилу зубців $\beta = 5^\circ \dots 40^\circ$ у сполученні із шириною зубчастих вінців коліс b вибирається таким, щоб забезпечити значення $\varepsilon_\beta = 1,1; 2,1; 3,1$ (тобто - однопарне, двопарне або трипарне зачеплення з приблизно 10%-ним запасом додаткового перекриття).

Проміжні значення ε_β звичайно не застосовуються.

Ступінь перекриття зачеплення Новікова може бути розрахована по формулі (4.62), виведеній для евольвентного косозубого зачеплення.

Радіус r_{a2} окружності вершин зубців колеса 2 був прийнятий Новіковим навіть дещо меншим від величини r_{w2} , у зв'язку з чим зубці і колеса 2 і шестерні 1 утворилися низькими. Їхній згинна міцність також значно вище, ніж у евольвентного зачеплення.

Інші радіуси окружностей r_{a1} , r_{f1} , r_{f2} вибиралися з міркувань забезпечення розмірів плями контакту, показаної на виді B : $l_t \approx l_a$, де l_t - торцева довжина плями контакту, а l_a - осьова його довжина.

Радіальний зазор у зачепленні Новікова як і в евольвентному зачепленні прийнятий $c = 0,25m$.

Кут тиску зубців у торцевому перерізі вибирався в межах $\alpha_t = 20^\circ \dots 30^\circ$.

Пляма контакту під час роботи передачі переміщається уздовж лінії зачеплення, що йде через точку A паралельно осям коліс із постійною швидкістю $V_{ск}$.

Умови змащення зубців у зачепленні Новікова дещо кращі, ніж у евольвентному зачепленні, тому що тут відсутнє перемінне по величині і напрямку профільне скочвання зубців. У зв'язку з цим ККД зачеплення Новікова виявляється дещо вищим від ККД евольвентного зачеплення в порівнянних умовах.

В даний час застосовується удосконалене кругло-гвинтове зачеплення ДЛЗ (із двома лініями зачеплення).

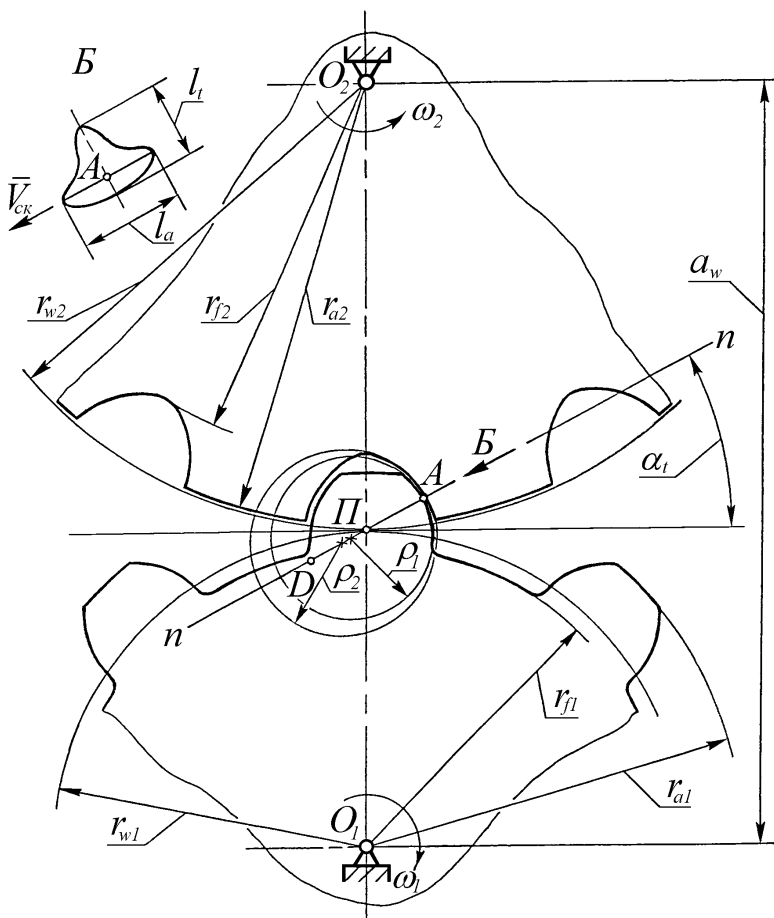


Рис. 4.43. Кругло-гвинтове зачеплення Новікова

У початковому варіанті в зачепленні Новікова вводилися в контакт як би тільки голівка зуба шестерні 1 і тільки ніжка зуба колеса 2 (див. рис. 4.43).

У зачепленні Новікова ДЛЗ у зуба шестерні 1 додана увігнута ніжка з круговим профілем, а в зуба колеса 2 додана опукла голівка також із круговим профілем, що має дещо менший радіус кривизни, ніж у ніжки шестерні.

Друга лінія зачеплення розташовується симетрично першій із протилежної сторони від полюса в нормальній площині ($n-n$), що йде під кутом α_1 до окружного напрямку. Таким чином, якби зубці були подовжені

так, як сказано вище, друга лінія зачеплення проходила б через точку D , перпендикулярно до площини креслення.

Друга точка контакту зубців знаходиться в іншому торцевому перерізі (попереду, або в глибині креслення, в залежності від напрямку навівання зубців).

У зачеплення ДЛЗ профілі зубців шестерні 1 і колеса 2 однакові і нарізуються тим самим інструментом. Завдяки цьому технологічність зачеплення ДЛЗ практично наблизилася до технологічності евольвентного зачеплення.

До недоліків зачеплення Новікова відносяться підвищені вимоги до точності монтажу по міжосьовій відстані a_w , а також до жорсткості валів. Порушення цих вимог веде до спотворення зачеплення і до передчасного виходу зубців із ладу.

До застосування зачеплення Новікова можна рекомендувати в тих випадках, коли передача важко навантажена постійними силами в обмежених габаритах.

5. Особливості циклоїдального та цівкового зачеплень

Циклоїдальне зачеплення широко застосовується, наприклад, у годинникових механізмах. У силових же приводах воно застосовується рідше.

Серед переваг циклоїдального зачеплення можна назвати більш високий ККД, ніж у евольвентного зачеплення. Це пояснюється меншими швидкостями профільного сковзання.

Перевагою також є те, що у циклоїдального зачеплення, в принципі, не може бути інтерференції профілів зубців. Тому на вибір чисел зубців коліс як у зовнішньому, так і у внутрішньому циклоїдальному зачепленні не накладається ніяких обмежень.

Контактні тиски зубців у циклоїдальному зовнішньому зачепленні нижчі, ніж у зовнішньому евольвентному зачепленні, що пояснюється опуклістю голівок і увігнутістю ніжок циклоїдальних зубців.

Розглянемо особливості геометрії циклоїдального зачеплення (рис. 4.44).

На рисунку позначене:

r_{w1}, r_{w2} - радіуси початкових окружностей коліс 1 і 2;

r_{a1}, r_{a2} - радіуси окружностей вершин зубців коліс 1 і 2;

r_{f1}, r_{f2} - радіуси окружностей западин зубів коліс 1 і 2;

ρ_1, ρ_2 - радіуси допоміжних окружностей, що формують циклоїдальні профілі зубців коліс 1 і 2;

a_w - міжосьова відстань.

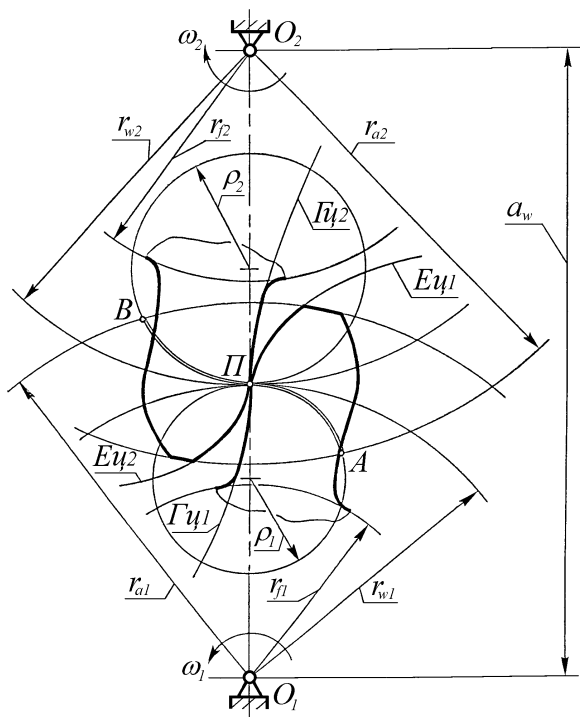


Рис. 4.44. Зовнішнє циклоїдне зачеплення

окружності колеса 1.

Епіциклоїда E_{u2} утворюється як траєкторія точки Π_1 при коченні допоміжної окружності з радіусом ρ_1 зовні по початковій окружності колеса 2.

Гіпоциклоїда Γ_{u2} утворюється як траєкторія точки Π_2 при коченні допоміжної окружності з радіусом ρ_2 усередині по початковій окружності колеса 2.

Лінією зачеплення циклоїдальних профілів є сполучена подвійна дуга допоміжних окружностей радіусів ρ_1 і ρ_2 у межах робочої ділянки AB , обмеженої окружностями вершин зубців.

Очевидно, що при тих же самих заданих початкових окружностях коліс 1 і 2 можна вибирати незліченну множину пар допоміжних окружностей, які забезпечать незліченну множину циклоїдальних профілів коліс 1 і 2.

Профілі зубців обкреслені: на голівках - опуклими епіциклоїдами E_{u1} і E_{u2} ; на ніжках - увігнутими гіпоциклоїдами Γ_{u1} і Γ_{u2} .

Епіциклоїда E_{u1} утворюється як траєкторія точки Π_2 при коченні допоміжної окружності з радіусом ρ_2 зовні по початковій окружності колеса 1.

Гіпоциклоїда Γ_{u1} утворюється як траєкторія точки Π_1 при коченні допоміжної окружності з радіусом ρ_1 усередині по початковій

З вищевикладеного стислого опису геометрії циклоїдального зачеплення можна укласти наступне.

1. Опукий профіль контактує з увігнутим у будь-якій фазі зачеплення, що спричиняє менші контактні напруження в порівнянні з евольвентним зачепленням.

2. Лінія зачеплення - криволінійна, тому відповідно до формули (4.3) $V_{ск}$ при віддаленні точки зачеплення зубців від полюса зростає регресивно, що забезпечує ККД вищий ніж в евольвентному зачепленні.

3. Загальна нормаль у контакті сполучених циклоїдальних профілів, що завжди проходить відповідно до основного закону зачеплення (див. п. 4.1 даного розділу) через полюс зачеплення P , має перемінний кут із лінією центрів O_1O_2 , що породжує небажану перемінність величини і напрямку сили тиску зуба на зуб навіть при постійних обертових моментах сил на валах коліс 1 і 2.

4. Зачеплення чутливе до неточностей монтажу по міжосьовій відстані a_w і до деформацій валів під навантаженням, що порушують спряженість циклоїдальних профілів.

5. Початковий циклоїдальний профіль може бути тільки криволінійним (це диктується обмеженнями при виборі допоміжних окружностей, що не можуть бути більше відповідних початкових окружностей коліс), тобто більш складним, ніж початковий профіль евольвентного зачеплення. Звідси слідує висновок, що технологічність циклоїдальних коліс поступається технологічності евольвентних коліс.

Що стосується годинникового циклоїдального зачеплення, то технологія виготовлення несилкових зубчастих коліс годинникових механізмів гранично проста - вони найчастіше просто штампуються. Похибки профілів при цьому цілком безпечні, тому що годинниковий механізм працює не з постійними швидкостями коліс, а стрибками (із зупинками годинникового механізму при кожній зміні напрямку обертання маятника).

Одним із граничних окремих випадків циклоїдального зачеплення є так називане цівкове зачеплення (рис. 4.45).

Якщо відповідно до рис. 4.44 прийняти радіус ρ_2 допоміжної окружності рівним r_{w2} , а радіус ρ_1 прийняти рівним нулю ($\rho_1=0$), тоді циклоїдний зуб колеса 2 утвориться точковим (тобто нескінченно малим), а зуб колеса 1 буде мати тільки голівки, обкреслені епіциклоїдою $E\psi 1$, як траєкторією точки P_2 , що належить допоміжній окружності з радіусом ρ_2 , при її коченні по початковій окружності колеса 1 зовні.

Отримане зачеплення передавати навантаження не може. Проте, його можна легко перетворити в силове, якщо застосувати еквідистантні початковим профілі ("екві" - рівний, "дистанта" - відстань).

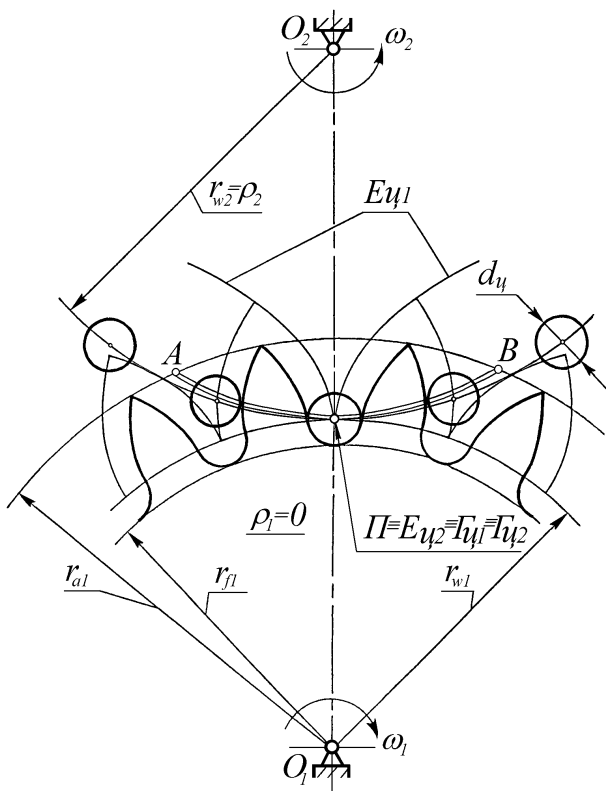


Рис. 4.45. Цівкове зачеплення

роздільними операціями, що не потребують складного зубонарізного устаткування.

Цівкове зачеплення також може бути внутрішнім, причому можна виготовити передачу навіть з числом зубців $z_2 = z_1 + 1$, тому що в цівковому зачепленні не може бути інтерференції профілів зубців, як і у початковому циклоїдальному зачепленні.

Практичне застосування також знайшло позацентридне цівкове зачеплення, при якому цівки колеса 2 винесені назовні початкової окружності, а колесо 1 виготовляється відповідно до цього зі зсувом, що дозволяє збільшити шаг і товщину зубців, тобто підвищити навантажувальну спроможність передачі.

6. Особливості хвильового зачеплення

Зубчаста передача з хвильовим зачепленням або хвильова зубчаста передача з'явилася зовсім нещодавно.

Тоді замість точкового зуба колеса 2 одержимо круглий циліндричний зуб із діаметром d_{η} - так звану цівку, а зуб колеса 1 буде мати увігнуту круглу циліндричну ніжку й опуклу голівку (рис. 4.45).

Лінія зачеплення AB , яка показана подвійною лінією, буде обкреслена так називаною кардіоїдою.

Однією з переваг цівкового зачеплення можна вважати можливість передачі обертання від невеличкого зубчастого колеса 1 на велике цівкове колесо 2, яке можна виготовити простими технологічними

Вперше вона була застосована на космічній техніці для передачі обертання з великими передаточними числами з герметичного бортового простору у відкритий космічний простір.

Крім абсолютної герметичності і великих кінематичних можливостей хвильова передача виявила дуже високі значення ККД, що спочатку навіть спантеличило винахідників передачі.

Розглянемо найпростішу одноступінчасту зубчасту двоххвильову передачу (рис. 4.46).

На рисунку позначене: 1 - тонкостінне зубчасте колесо з гнучким деформованим обідом, що має зовнішні зубці; 2 - жорстке зубчасте колесо з внутрішніми зубцями; Н - хвилевід (або - генератор хвиль), що представляє собою, як один із варіантів, водило з роликами на підшипниках.

Ведучою ланкою передачі є водило Н.

За рахунок різниці чисел зубців z_2 і z_1 колесо 1 має менший діаметр. Для введення коліс 1 і 2 у зачеплення необхідно колесо 1 zdeформувати у межах пружних деформацій, як показано на рисунку.

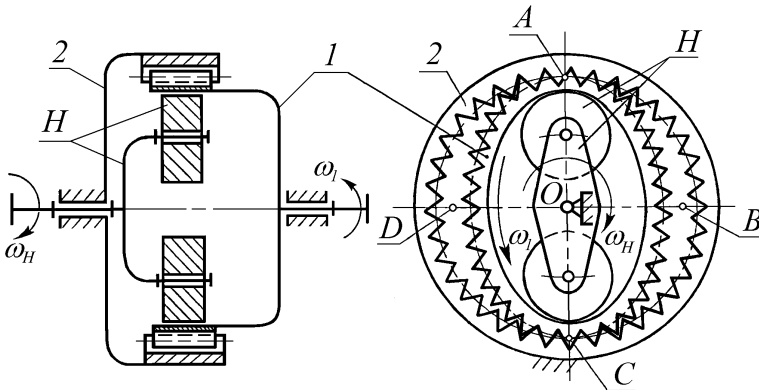


Рис. 4.46. Хвильова зубчаста передача

У зачепленні (у зонах A і C) може знаходитися одночасно біля 25% зубців коліс 1 і 2.

Числа зубців коліс 1 і 2 великі, зубці мілкомодульні, тому навіть при малій різниці ($z_2 - z_1$) у зонах B і D зачеплення зубців немає. Ведуча ланка - водило Н, обертаючись, жене хвилю деформації (тобто хвилю зачеплення зубців) і змушує колесо 1 як би котитися усередині колеса 2.

Причому менше колесо 1 буде обертатися відносно нерухомого колеса 2 в зворотний бік в порівнянні з обертанням хвилеводу Н.

Очевидно, що за один оберт хвилеводу Н гнучке колесо 1 повернеться в зворотний бік на окружну відстань, рівну різниці довжин

початкових окружностей коліс 2 і 1 (тобто на число окружних шагів, рівне різниці чисел зубців ($z_2 - z_1$)).

Для того, щоб колесо 1 зробило цілий оберт, хвилевід Н повинен повернутися в протилежному напрямку на стільки обертів, скільки разів у числі зубців z_1 поміститься різниця чисел зубців ($z_2 - z_1$).

Із сказаного слідує, що

$$i_{H-1}^{(2)} = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.107)$$

Хвильова зубчаста передача на рис. 4.46 у чімсь схожа з планетарною зубчастою передачею Джемса (рис. 3.17а). Відмінність полягає в тому, що в хвильовій зубчастій передачі немає сателітів, а тому центральні зубчасті колеса безпосередньо входять у внутрішнє зачеплення завдяки роликам, які чинять складний (планетарний) рух.

Якщо для хвильової передачі застосувати метод уявної зупинки водила Н, тоді можна записати формулу Вілліса

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = i_{1-2}^{(H)} = +\frac{z_2}{z_1}. \quad (4.108)$$

Тому що відповідно до рис. 4.46 колесо 2 нерухоме ($\omega_2 = 0$), із формули Вілліса (4.108) слідує

$$i_{1-H}^{(2)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1-2}^{(H)} = 1 - \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.109)$$

З формули (4.109) знайдемо зворотнє передаточне відношення

$$i_{H-1}^{(2)} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{i_{1-H}^{(2)}} = \frac{1}{1 - z_2 / z_1} = \frac{z_1}{z_1 - z_2} = -\frac{z_1}{z_2 - z_1},$$

що зайвий раз підтверджує правильність формули (4.107), отриманої за допомогою простих міркувань, без застосування методу Вілліса.

Питання профілювання зубців хвильового зачеплення дотепер дискутується. У першому варіанті хвильової передачі були застосовані зубці трикутної форми.

В даний час переважно застосовуються евольвентні зубці, як найбільш технологічні.

Завдяки багатопарності зачеплення це питання можна вважати другорядним.

Більш того, у хвильовому зачепленні виявлене явище самоприспособування профілів: під навантаженням у середній і задній частинах зони зачеплення зубці, завдяки податливості вінця колеса 1, зберігають відносний спокій. Через це явище втрати на тертя між зубцями, що

знаходяться під навантаженням, значно менші, ніж у звичайному жорсткому зачепленні, де профільне сковзання детерміновано.

Це і пояснює підвищений ККД хвильової передачі при великих значеннях передаточних чисел (наприклад, у порівнянні з ККД планетарних і багатоступінчастих непланетарних передач, утворених жорсткими евольвентними колесами).

Інженерною практикою останнього років встановлено, що при передаточних числах понад $u=100$ у хвильової передачі немає конкурентів.

Слід також відзначити, що хвильові передачі з $u < 50$ не використовуються через недопустимо великі деформації гнучкого колеса.

На закінчення підкреслимо також деякі додаткові переваги хвильової передачі, крім уже перерахованих спочатку даного параграфу.

Хвильові передачі завдяки багатопарності зачеплення не виявляють впливу бічних зазорів у зачепленні на відповідність кутів повороту вхідного і вихідного валів. Ця відповідність у хвильової передачі дуже висока і стабільна, що обумовило застосування хвильового приводу в роботах і маніпуляторах при дуже високих вимогах до точності позиціонування захвата.

Багатопарність зачеплення (до 25% усіх зубців бере участь у зачепленні одночасно) забезпечує дуже високу навантажувальну спроможність зубчастих коліс при порівняно невеличких модулях зачеплення m , що послужило підставою для багатократного зменшення габаритних розмірів і металоємності приводів поворотних устроїв баштових і інших багатотонажних кранів за рахунок використання в цих устроях хвильового зачеплення.

7. Контрольні запитання

1. Назвіть різновиди профілів черв'яків циліндричної черв'ячної передачі.
2. Знайдіть швидкість сковзання в черв'ячному зачепленні.
3. Від яких геометричних параметрів черв'яка залежить ККД черв'ячної передачі?
4. Запишіть формули для визначення окружних, осьових і радіальних сил на черв'яку і на черв'ячному колесі.
5. Опишіть особливості зачеплення Новікова (кругло-гвинтового зачеплення).
6. Опишіть особливості циклоїдального зачеплення.
7. Опишіть особливості цівкового зачеплення.
8. Опишіть особливості хвильового зачеплення.

Лекція 19

Тема: Рух машини під дією заданих сил

- Зміст: 1. Задачі динамічного аналізу та синтезу машин.
2. Динамічні моделі машини.
3. Зведення мас.
4. Зведення сил за методом Жуковського.
5. Види рівнянь руху машини і їх застосування.
6. Контрольні запитання.

1. Задачі динамічного аналізу та синтезу машин

У даному розділі будуть розглядатися тільки *машини циклічної дії*, що складають явну більшість серед енергетичних і робочих машин.

Такі машини в процесі роботи мають явно виражені *три режими руху: розгін, усталений рух і вибіг*.

Розгін машини спостерігається тоді, коли робота рушійних сил перевищує роботу сил опору.

Вибіг машини відбувається під дією сил опору при відключених рушійних силах.

Усталений рух машини здійснюється при рівності за цикл робіт рушійних сил і сил опору.

Розгін і вибіг є специфічними підготовчо-заклучними режимами руху і тому тут не будуть докладно розглянуті.

Усталений рух, як основний робочий режим руху машини, являє особливий інтерес, і тому саме йому буде виділена основна увага.

У інженерній практиці часто треба вирішувати дві основні задачі: робити розрахунок закону руху машини під дією заданих сил, а також забезпечувати регулювання руху машини.

Перша задача зводиться тут до визначення закону руху головного вала машини в межах циклу на усталеному русі.

Друга задача має дві частини.

Перша частина відноситься до регулювання нерівномірності обертання головного вала машини в межах циклу. Вона зводиться до розрахунку махових мас, які необхідно встановити на головному валі машини для досягнення заданого граничного рівня нерівномірності його обертання, що чисельно характеризується величиною коефіцієнта нерівномірності ходу машини δ .

Друга частина відноситься до регулювання величини середньої кутової швидкості $\omega_{\text{ср}}$ обертання головного вала машини в умовах повільної зміни сил корисного опору за допомогою відцентрових регуляторів або

модераторів. Вона являє собою специфічну задачу автоматичного регулювання і тому тут також не розглядається.

При динамічних розрахунках необхідне знання характеристик інертності ланок - мас m_i і моментів інерції J_{Si} .

Якщо динамічний розрахунок відноситься до вже працюючої машини, тоді визначення m_i і J_{Si} не має складності.

Маси ланок можна визначити простим зважуванням, а моменти інерції ланок - експериментально на біфілярному або трифілярному (двохнитковому або тринитковому) підвісі методом вільних коливань. Період коливань визначається довжиною і розташуванням ниток (відомими) і моментом інерції ланки (невідомим). Вимірявши період коливань, можна розрахувати момент інерції ланки J_S відносно центральної його осі інерції (осі інерції, що проходить через центр мас).

Якщо ж динамічний розрахунок відноситься до машини, що проектується, тоді, у залежності від стадії проектування, маси m_i і моменти інерції ланок J_{Si} можна визначити приблизно аналітично по кресленнях або призначити з відповідною корекцією по аналогу (машині попереднього покоління).

При проектуванні машини з використанням AutoCAD величини мас m_i і моментів інерції деталей J_{Si} визначаються з високою точністю за допомогою спеціальної програми розрахунку.

Варто підкреслити також приблизність знання заданих зовнішніх активних сил, що діють на ланки машини. Сили ці часто залежать від багатьох обставин, що носять випадковий характер (стан робочого тіла, його дозування і т. п.).

Тому можна вважати виправданим для вирішення задачі визначення закону руху машини під дією заданих сил застосування графічних методів, яким властива відносна похибка, що не перевищує 5%.

Визначивши закон руху головного вала машини, можна здійснити розрахунок силового навантаження ланок машини в кінематичних парах. Силовий розрахунок машини, як правило, має вид кінетостатичного аналізу, здійснюваного на основі принципу д'Аламбера.

В окремих випадках (для тихохідних машин) виконують статичні силові розрахунки, коли інерційними навантаженнями зневажають. Статичний силовий розрахунок виконується по тій же методиці, що і кінетостатичний, тільки при цьому інерційні навантаження відсутні.

2. Динамічні моделі машини

Рішення задач динаміки машини можна істотно спростити, якщо застосувати динамічне моделювання її руху з максимальним зменшенням числа невідомих і відомих параметрів, що впливають на закон руху

головного вала машини, який визначає закони руху інших частин машини. Головним валом машини прийнято вважати кривошипний (колінний) вал.

Оскільки закон руху машини визначається сумарною інертністю її ланок і роботою зовнішніх активних сил, що діють на ланки машини, необхідно зберегти ці чинники незмінними й у динамічній моделі машини.

На рис. 2.1 показані дві динамічні моделі машини, що застосовуються частіше всього.

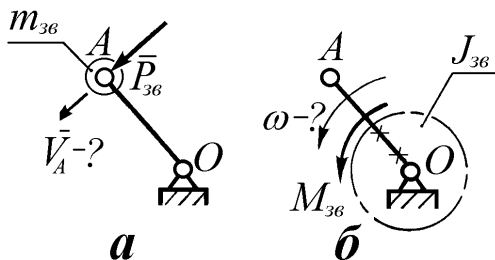


Рис. 2.1. Динамічні моделі машини

Перша модель (рис. 2.1а) включає у свій склад кривошип OA (ланку зведення) з головним валом та зі зведеною до точки A масою m_{36} (від мас зведення, тобто від мас інших відкинутих рухомих ланок машини), що знаходиться під дією

зведеної до точки A сили P_{36} (від сил зведення, тобто від зовнішніх сил, що діють на відкинуті рухомі ланки машини) в напрямку, перпендикулярному до кривошипа OA .

Зведеною масою (m_{36}) називається уявна точкова маса, кінетична енергія якої дорівнює сумарній кінетичній енергії всіх мас зведення.

Зауважимо, що раз кінетична енергія машини, як правило, є змінна величина, то й зведена маса також являється змінною величиною.

Зведеною силою (P_{36}) називається уявна сила, робота (потужність) якої дорівнює сумарній роботі (потужності) усіх сил зведення.

Сила P_{36} також звичайно є змінною величиною.

Сполучення величини m_{36} із величиною і напрямком (знаком) P_{36} визначає шукану величину V_A , що у динамічній моделі машини буде такою ж, як і в реальній машині. Знаючи ж закономірність зміни лінійної швидкості точки A , можна розрахувати всі параметри руху головного вала, а потім і всіх ланок машини.

Друга модель (рис. 2.1б) фактично є варіантом першої моделі. Тільки в ній, на відміну від першої, уявна зведена маса розосереджена навколо осі головного вала і кількісно подана зведеним моментом інерції J_{36} , а уявна узагальнена зведена сила кількісно подана зведеним моментом сил M_{36} .

Якщо прийняти

$$J_{36} = m_{36} \cdot l_{OA}^2, \quad (2.1)$$

$$M_{36} = P_{36} \cdot l_{OA}, \quad (2.2)$$

то очевидно, що перша і друга моделі мало чим відрізняються: головний вал машини й у тому й в іншому випадку буде мати той самий закон руху.

Проте друга модель, нам здається, має перевагу над першою, тому що вона безпосередньо (без проміжних перерахунків) дає закон руху головного вала, а не точки A .

Дамо формулювання параметрів другої моделі.

J_{36} - зведений момент інерції - це уявний момент інерції ланки зведення, кінетична енергія якої дорівнює сумарній кінетичній енергії всіх відкинутих ланок.

M_{36} - зведений момент сил - це уявний момент сил, робота (потужність) якого дорівнює сумарній роботі (потужності) усіх зовнішніх сил, що діють на відкинуті рухомі ланки машини.

Ланка зведення OA зі змінним моментом інерції J_{36} під дією змінного зведеного моменту сил M_{36} буде мати шукану змінну величину кутової швидкості ω головного вала. Продиференціювавши функцію ω за часом, знайдемо закономірність зміни кутового прискорення ε головного вала.

Зауважимо, що іноді зведена маса m_{36} може враховувати тільки маси частини рухомих ланок машини (маси зведення), а зведена сила P_{36} - тільки деякі з зовнішніх сил (сили зведення). Так буває, наприклад, коли не всі маси рухомих частин машини і не всі зовнішні сили, що діють на рухомі ланки машини, заздалегідь відомі.

3. Зведення мас

Відповідно до визначення m_{36} можна записати

$$\frac{m_{36} \cdot V_A^2}{2} = \sum_{i=1}^k \frac{m_i \cdot V_{Si}^2}{2} + \sum_{j=1}^p \frac{J_{Sj} \cdot \omega_j^2}{2}, \quad (2.3)$$

де m_i - маса i -тої ланки;

i - порядковий номер ланки, що поступально рухається, (в число i входять також ланки, що здійснюють складний плоскопаралельний рух);

V_{Si} - швидкості центрів мас i -х ланок;

k - число i -тих мас;

J_{Sj} - центральний момент інерції j -ї ланки;

j - порядковий номер обертової ланки (у число j входять також ланки, що здійснюють складний плоскопаралельний рух);

p - число j -х ланок.

Знайдемо з формули (2.3) величину m_{36}

$$m_{36} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot \left(\frac{V_{Si}}{V_A} \right)^2 + \sum_{j=1}^p J_{Sj} \cdot \left(\frac{\omega_j}{V_A} \right)^2. \quad (2.4)$$

З (2.4) випливає, що m_{36} є функцією положення головного вала машини, тому що вона залежить від зміни сумарної величини кінетичної енергії ланок зведення, а ця зміна визначається співвідношенням швидкостей точок ланок. Співвідношення ж швидкостей точок ланок цілком залежить від положення головного вала і зовсім не залежить від закону руху машини, який до того ж може бути поки що невідомий.

Тому для зведення мас ланок достатньо побудувати аналоги планів швидкостей механізмів машини в n положеннях і в (2.4) співвідношення швидкостей замінити співвідношеннями відповідних відрізків з аналогів планів.

Число n в інженерних розрахунках звичайно приймають 24 або 36 (інколи навіть 72) у межах одного циклу роботи машини (звичайно, у межах одного обороту головного вала, а інколи - двох). У курсовому проєкті по ТММ приймається $n=12$.

Тоді формула (2.4) прийме вид

$$m_{36} = \sum_{i=1}^k m_i \left(\frac{|p_V s_i|}{|p_V a|} \right)^2 + \sum_{j=1}^p \frac{J_{Sj}}{l_j^2} \cdot \left(\frac{|x_j|}{|p_V a|} \right)^2, \quad (2.4^*)$$

де - у круглих скобках подані відношення відповідних відрізків з аналогів планів швидкостей;

$|p_V a|$ - довжина відрізка вектора аналога швидкості точки A ;

$|p_V s_i|$ - довжина відрізка вектора аналога швидкості центру i -ї маси;

$|x_j|$ - довжина відрізка вектора аналога абсолютної або відносної

швидкості деякої точки j -ї ланки, через який виражена кутова швидкість ω_j ;

l_j - довжина j -ї ланки, через яку виражена кутова швидкість ω_j .

Наприклад, для шатуна AB відповідний член другої суми (2.4^{*}) буде мати вигляд

$$\frac{J_{S_{AB}}}{l_{AB}^2} \cdot \left(\frac{|ab|}{|p_V a|} \right)^2,$$

тому що $\omega_{AB} = \frac{|ab| \cdot \mu_V}{l_{AB}}$, $V_A = |p_V a| \cdot \mu_V$ (див. задачу 2.2 [8]).

При цьому масштаб швидкостей μ_V , як і слід було очікувати, скорочується.

Аналіз формули (2.4*) показує, що в величину $m_{3\theta}$ кожна маса ланки "делегує" свою якусь частину, котра залежить від квадрату співвідношення швидкості центра маси і швидкості точки A (або ж від квадрату співвідношення аналогів цих швидкостей).

В другу суму також входять члени, що мають розмірність маси, але тут "представництво" J_{Sj} у $m_{3\theta}$ більш складне, хоча воно теж залежить від квадрата співвідношення відповідних аналогів швидкостей.

Нижче при вирішенні задачі 2.1 буде показано методику зведення мас.

4. Зведення сил за методом Жуковського

Зведення сил можна здійснити за їх потужністю, тому що $P_{3\theta}$, відповідно до її визначення, еквівалентна діючим силам і моментам сил (силам зведення) по їхній сумарній потужності.

Як відомо з теоретичної механіки, потужність сили рівняється добутку величини сили, величини швидкості точки прикладення сили і косинуса кута між векторами сили і швидкості, а потужність моменту сил дорівнює добутку величини моменту сил і кутової швидкості тіла, до якого прикладений цей момент сил.

Якщо зовнішні сили задаються по положенню механізмів машин, тоді також мається можливість здійснити зведення сил за допомогою аналогів планів швидкостей. Невідомі масштаби планів швидкостей тут також скорочуються, як і при зведенні мас.

Потужність сили P_i можна підрахувати по формулі

$$N(P_i) = P_i \cdot V_i \cdot \cos(\bar{P}_i, \bar{V}_i),$$

де V_i - швидкість точки прикладення сили P_i ;
 $\cos(\bar{P}_i, \bar{V}_i)$ - косинус кута між векторами $\bar{P}_i$ і $\bar{V}_i$.

Відповідно до визначення $P_{3\theta}$, якщо зведення сил здійснювати до точки A , можна записати вираз для елементарної роботи зведеної сили:

$$dA(P_{3\theta}) = \sum dA(P_i, M_i),$$

$$P_{3\theta} \cdot dS_A = \sum P_i \cdot dS_i \cdot \cos \alpha_i + \sum M_i \cdot d\varphi_i.$$

Розділивши на dt усі члени останнього рівняння, знайдемо:

$$P_{3\theta} \cdot dS_A/dt = \sum P_i \cdot dS_i/dt \cdot \cos \alpha_i + \sum M_i \cdot d\varphi_i/dt,$$

$$P_{3\theta} \cdot V_A = \sum P_i \cdot dV_i \cdot \cos \alpha_i + \sum M_i \cdot \omega_i,$$

звідкіля остаточно запишемо

$$P_{зв} = \sum P_i \cdot \frac{V_i}{V_A} \cdot \cos \alpha_i + \sum M_i \cdot \frac{\omega_i}{V_A}.$$

Аналіз останніх двох виразів підтверджує, що потужність $P_{зв}$ рівняється сумі потужностей сил і моментів сил зведення, як це записано у визначенні $P_{зв}$ (у дужках). Крім того помічаємо, що для зведення сил не обов'язково знати дійсні значення відповідних лінійних і кутових швидкостей, достатньо знати тільки їхні відношення.

М. Є. Жуковський запропонував витончений метод зведення сил, заснований на доведеній їм теоремі про "жорсткий важіль", у якості якого був узятий аналог плану швидкостей. Суть методу полягає в заміні задачі підсумовування потужностей сил до більш простої задачі підсумовування моментів сил навколо точки. Цією точкою є полюс плану швидкостей p_V .

Не приводячи тут теореми, котру можна знайти в будь-якому підручнику по ТММ, прокоментуємо метод Жуковського зведення сил.

Аналог плану швидкостей варто повернути в будь-який бік на 90^0 (можна аналог плану швидкостей не повертати, тоді треба буде повертати всі сили зведення в один загальний бік на 90^0 , що в окремих випадках навіть зручніше робити).

До поверненого плану аналогів швидкостей у відповідних точках (до кінців векторів швидкостей точок прикладення сил) прикласти всі сили, які підпадають зведенню (сили зведення).

Моменти сил зведення зручно попередньо розкласти на пари сил. Одну із сил кожної пари варто прикладати до нерухомої точки ланки, тоді на повернений аналог плану швидкостей від кожного моменту сил необхідно переносити тільки складову силу, прикладену до рухомої точки ланки.

Момент кожної окремої сили навколо полюса плану p_V на плечі, що являється проекцією вектора швидкості на напрямок цієї сили, фактично є потужністю цієї сили. Сумарний момент усіх сил зведення з урахуванням напрямків (знаків потужностей) подає їхню сумарну потужність.

Таку ж потужність, відповідно до визначення, повинна мати зведена сила $P_{зв}$, плечем якої на плані аналогів швидкостей буде аналог швидкості точки A кінця кривошипа.

Якщо сумарний момент сил зведення навколо полюса плану p_V розділити на плече дії зведеної сили, то й буде знайдена величина (і напрямок, тобто знак) зведеної сили.

$P_{зв}$ вважається додатною, якщо вона спрямована по швидкості руху точки A , та - від'ємною, якщо вона спрямована в протилежний від швидкості точки A бік.

5. Задача на зведення мас і сил

Вирішимо задачу 2.1 по зведенню сил і мас, на котрій докладніше проілюструємо метод Жуковського зведення сил.

Здійснимо в загальному вигляді зведення до точки A заданих мас і сил шестиланкового механізму машини хитного конвеєра по відомій кінематичній схемі (рис. 2.2) у заданому положенні. Вважатимемо відомими величини: μ_l (м/мм), m_2 (кг), m_3 (кг), J_{S2} (кгм²), J_{S3} (кгм²), J_{S4} (кгм²), P (Н).

Рішення.

1. Будуємо аналог плану швидкостей механізму, обравши довільний відрізок $|p_v a|$, що зображує аналог швидкості точки A (методику побудови плану швидкостей див. [8] - у задачах 2.1, ... , 2.11).

2. Здійснимо зведення мас ланок 2, 3, 4, 5 до точки A .

Для цього запишемо рівняння відповідно до формули (2.3):

$$\frac{m_{np} \cdot V_A^2}{2} = \frac{m_2 \cdot V_{S2}^2}{2} + \frac{m_4 \cdot V_{S4}^2}{2} + \frac{m_5 \cdot V_D^2}{2} + \\ + \frac{J_{S2} \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{J_{S3} \cdot \omega_3^2}{2} + \frac{J_{S4} \cdot \omega_4^2}{2}.$$

Перетворимо записане рівняння до виду (2.4*)

$$m_{36} = m_2 \cdot \left(\frac{|p_v s_2|}{|p_v a|} \right)^2 + m_4 \cdot \left(\frac{|p_v s_4|}{|p_v a|} \right)^2 + m_5 \cdot \left(\frac{|p_v d|}{|p_v a|} \right)^2 + \\ + \frac{I_{S2}}{l_{AB}^2} \left(\frac{|ab|}{|p_v a|} \right)^2 + \frac{I_{S3}}{l_{BC}^2} \left(\frac{|p_v b|}{|p_v a|} \right)^2 + \frac{I_{S4}}{l_{BD}^2} \left(\frac{|bd|}{|p_v a|} \right)^2 \quad (\text{кг}).$$

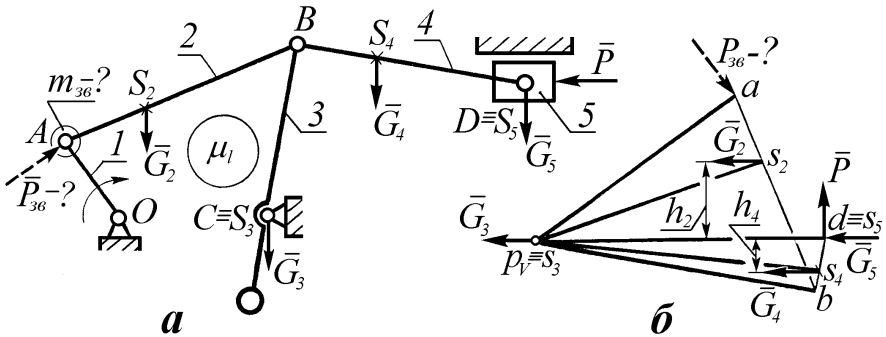


Рис. 2.2. До зведення мас і сил

При розрахунку величини m_{36} довжини відповідних відрізків аналогів швидкостей візьмемо з аналога плану швидкостей (у мм), а довжини ланок обчислимо із вихідних даних:

$$l_{AB} = \overline{AB} \cdot \mu_l (м), l_{BC} = \overline{BC} \cdot \mu_l (м), l_{BD} = \overline{BD} \cdot \mu_l (м).$$

Зауважимо, що m_2 буде умножатися на безрозмірний коефіцієнт, менший від одиниці, тому що $|p_v s_2| < |p_v a|$.

Маси ж ланок m_4 і m_5 будуть умножатися на безрозмірні коефіцієнти, більші від одиниці, тому що $|p_v s_4| > |p_v a|$ і $|p_v d| > |p_v a|$.

Цей приклад показує, що зведена маса не є просто сума мас ланок, як це помилково іноді говорять деякі студенти.

3. Виконаємо зведення сил по методу Жуковського.

План аналогів швидкостей повертати не будемо, а повернемо всі задані сили G_2, G_3, G_4, G_5 і P в один бік на 90° (наприклад, за годинниковою стрілкою) і перенесемо їх на кінці векторів аналогів швидкостей точок прикладення сил (у точки плану s_2, s_3, s_4, d).

Шукану силу P_{36} умовно будемо вважати додатною. Тоді вона буде прикладена в точці a аналога плану швидкостей, як показано на рис. 2.2б.

Сили тяжіння ланок визначимо через задані маси ланок:

$G_2 = m_2 \cdot g$ (Н), $G_3 = m_3 \cdot g$ (Н), $G_4 = m_4 \cdot g$ (Н), $G_5 = m_5 \cdot g$ (Н),
де $g = 9,806$ (м/с²) - прискорення вільного падіння під дією сили тяжіння Землі на рівні моря в середніх широтах.

Запишемо відповідно до визначення P_{36} і поясненням, зробленим вище, рівняння

$$P_{36} \cdot |p_v a| = G_4 \cdot |h_4| - G_2 \cdot |h_2| - P \cdot |p_v d|.$$

$$\text{Звідси} \quad P_{36} = \frac{G_4 \cdot |h_4| - G_2 \cdot |h_2| - P \cdot |p_v d|}{|p_v a|} \quad (H).$$

При підрахунку величини P_{36} плечі дії сил $|p_v a|, |h_2|, |h_4|, |p_v d|$ беруться з аналога плану швидкостей в мм.

При чисельних розрахунках величина P_{36} у деяких положеннях механізму може виявитися від'ємною. Це буде означати, що насправді зведена сила P_{36} спрямована в цих положеннях не по швидкості точки V_A , як це передбачалося, а в протилежному напрямку, тобто що її потужність тут від'ємна.

При динамічному аналізі в різних положеннях механізму знаки P_{36} зустрічаються різні. Це обов'язково треба враховувати при побудованні

графіків. Ординати додатних величин варто відкладати вгору по осі P_{36} , а ординати від'ємних величин - униз.

6. Контрольні запитання

1. Які задачі вирішуються при динамічних розрахунках машин?
2. Наведіть приклад динамічної моделі машини.
3. Що таке зведена маса?
4. Що таке зведена сила?
5. Що таке зведений момент інерції?
6. Що таке зведений момент сил?
7. Як визначаються зведена маса і зведений момент інерції механізму?
8. Як визначається за методом Жуковського зведена сила?

Лекція 20

Тема: Діаграма енергомас

- Зміст: 1. Чинники, що впливають на закон руху машини.
2. Застосування рівняння руху в інтегральній та диференціальній формах.
3. Побудова діаграми енергомас. Їх властивості.
4. Визначення закону руху головного вала машини.
5. Контрольні запитання.

1. Чинники, що впливають на закон руху машини

Закон руху машини залежить від двох чинників: від зміни роботи зовнішніх сил, що діють на ланки механізмів машини, і від зміни інертності машини.

Перший чинник може бути поданий інтегралом зведеної сили $P_{зв}$ по шляху точки A , у якій вона прикладена, тобто по dS_A .

Другий чинник може бути поданий зведеною масою $m_{зв}$, що і несе в собі інформацію про сукупну інертність відкинутих рухомих ланок механізмів машини.

Як уже було відзначено, зручніше користуватися другою динамічною моделлю машини (рис. 2. 1б), відповідно до котрої перший чинник будемо мати у вигляді інтеграла $M_{зв}$ по $d\varphi$, а другий чинник - у вигляді $J_{зв}$.

При вирішенні інженерних задач виникають ситуації, коли не всі зовнішні сили, що діють на ланки механізмів машини, відомі.

Так, наприклад, при проектному розрахунку машини необхідно вирішувати задачу вибору потужності двигуна для здійснення заданого робочого процесу.

У цьому випадку зовнішні сили корисного опору будуть відомі, а зовнішні рушійні сили - невідомі. Оскільки робочий процес, як правило, здійснюється в усталеному режимі руху, коли швидкість обертання головного вала в середньому не змінюється, виникає можливість скористатися умовою рівності за цикл роботи сил рушійних A_u^p і роботи сил опору A_u^o :

$$A_u^p = A_u^o . \quad (2.6)$$

Інакше цю умову можна записати так

$$\Delta A_{\text{ц}} = A_{\text{ц}}^p - A_{\text{ц}}^o = 0. \quad (2.7)$$

Протягом циклу рівності A^o й A^p , як правило, не спостерігається.

Різниця $\Delta A = A^p - A^o$ називається надлишковою роботою.

Надлишкова робота ΔA переходить (без урахування тертя) в зміну кінетичної енергії

$$\Delta A = \Delta E. \quad (2.8)$$

2. Застосування рівняння руху в інтегральній формі

Останній вираз ($\Delta A = \Delta E$) у теоретичній механіці називається законом живих сил або законом кінетичної енергії, що є фактично рівнянням руху машини в інтегральній формі. Воно справедливе як при усталеному, так і при неусталеному русі. І, якщо відомі всі зовнішні сили, в тому числі сили рушійні і сили опору, рівняння (2.8) дозволяє визначити закон руху машини, яким би він не був - усталеним або неусталеним.

Усе ж усталений рух, як основний режим руху машини, більш інформативний. Його розгляд дозволяє вирішувати такі інженерні задачі, як вибір потужності і характеристик двигуна машини, як розрахунок додаткових махових мас, установлюваних, як правило, на головному валі машини для обмеження нерівномірності ходу машини, як вибір типу і характеристик відцентрового регулятора руху та деякі інші.

Відзначимо ще одну обставину, пов'язану з урахуванням сил тяжіння ланок.

У швидкісних машинах сили тяжіння ланок можуть не враховуватися, тому що вони мають другий або навіть третій порядок малості в порівнянні з заданими зовнішніми силами і виникаючими при роботі інерційними динамічними навантаженнями.

У середньошвидкісних і тихохідних машинах із масивними ланками їхні сили тяжіння можуть бути сумірні з зовнішніми силами і динамічними інерційними навантаженнями. У цьому випадку не враховувати сили тяжіння ланок не можна, тому що, не впливаючи на середню швидкість усталеного руху, вони будуть впливати на закон руху головного вала машини в межах циклу, тобто на нерівномірність ходу машини.

Рушійні сили за цикл виконують додатну роботу.

Сили опору за цикл виконують від'ємну роботу.

Сили тяжіння за цикл, як сили потенційні, не виконують ніякої роботи. На окремих ділянках руху всередині циклу сили тяжіння можуть бути рушійними (коли центри мас ланок опускаються). На інших ділянках - вони можуть бути силами опору (коли центри мас ланок піднімаються).

Тому сили тяжіння можна приєднати умовно як до відомих рушійних сил, так і до відомих сил опору.

3. Побудова діаграми енергомас. Її властивості

Графік залежності кінетичної енергії E машини від її зведеної маси $m_{3\phi}$ або від її зведеного моменту інерції $J_{3\phi}$ називається діаграмою енергомас (діаграмою Віттенбауера - по імені німецького вченого, що розробив цей метод розрахунку руху машин).

Діаграма енергомас називається повною, якщо вона враховує повну кінетичну енергію E машини і її повний зведений момент інерції $J_{3\phi}^{\Sigma}$, і неповною (або урізаною) - якщо на діаграмі подана частина кінетичної енергії (ΔE) та деяка часткова величина $J_{3\phi}$.

Прийнято $J_{3\phi}^{\Sigma}$ подавати як таку величину, яка складається з двох частин

$$J_{3\phi}^{\Sigma} = J_{3\phi}^I + J_{3\phi}^{II},$$

де $J_{3\phi}^I$ - зведений момент інерції ланок I-ї групи, що володіє сталістю ($J_{3\phi}^I = const$),

$J_{3\phi}^{II}$ - зведений момент інерції ланок II-ї групи, що має змінну величину ($J_{3\phi}^{II} = var$).

Надалі під $J_{3\phi}$ будемо розуміти тільки $J_{3\phi}^{II}$, а $J_{3\phi}^I$ будемо індексувати просто як J^I .

Урізана діаграма енергомас, що враховує тільки ланки другої групи, будується в тих випадках, коли ще невідомі махові маси головного вала машини, а також рушійний момент, або коли машина характеризується невеликою зміною кінетичної енергії ΔE при великому значенні середньої величини її кінетичної енергії.

Для побудови урізаної діаграми енергомас варто виконати зведення мас ланок важільного механізму машини, що володіє змінним $J_{3\phi}$, в n положеннях механізму.

Для цих же n положень механізму варто здійснити зведення заданих зовнішніх сил (приклад зведення мас і сил див. у задачі 2.1).

На підставі знайдених n значень $P_{3\phi}^o$ знайдемо також n значень

$$M_{3\phi}^o = P_{3\phi}^o \cdot l_{OA} (H_m)$$

і побудуємо графік (рис. 2.3)

$$M_{36}^o = f_1(\varphi),$$

де φ - кут повороту кривошипного вала машини.

Нижче приведено приклад побудов для робочої машини-знаряддя, що споживає для здійснення робочого процесу енергію від двигуна з невідомим постійним, зведеним до головного вала, моментом рушійних сил

$$M_{36}^p.$$

Після графічного інтегрування M_{36}^o по $d\varphi$ одержимо графік залежності

$$A^o = f_2(\varphi).$$

При цьому сили опору за цикл виконують від'ємну роботу A_y^o .

Для здійснення усталеного руху машин рушійні сили повинні будуть виконати таку ж, тільки додатну, роботу

$$A_y^p = A_y^o.$$

Тому що момент рушійних сил за умовою постійний, робота рушійних сил A^p протягом циклу буде змінюватися по лінійному закону.

Диференціювання графіка A^p дозволяє визначити невідомий момент рушійних сил M_{36}^p , зведений до головного вала машини.

Якщо з точки O^* , що відстоїть униз від точки O на відстані $(-M_{36}^p)$ провести нову вісь φ^* , то графік M_{36}^o у системі координат (M_{36}, O^*, φ^*) буде графіком сумарно зведеного моменту M_{36}^Σ всієї сукупності сил (рушійних і опору), що діють на ланки механізмів машини.

Цей графік нижче буде використано при підрахунку кутового прискорення головного вала по рівнянню руху в диференціальній формі.

Далі виконаємо вирахування з роботи рушійних сил A^o роботи сил опору A^c . В результаті матимемо залежність

$$\Delta A = f_3(\varphi).$$

Вирахування можна виконати графічно. Для цього необхідно з початку координат O другого графіка залежності $A^c = f_2(\varphi)$ провести лінію $(-A^o)$, від якої у вертикальних напрямках до кривої A^c і одержимо шукані значення ΔA_i (тут $i=0, 1, 2, 3, \dots, 11, 12$).

На підставі зведення мас побудуємо четвертий графік залежності

$$J_{36} = f_4(\varphi),$$

де

$$J_{36} = m_{36} \cdot l_{OA}^2.$$

На рис. 2.3 графік $J_{3\theta} = f_4(\varphi)$ розташований так, щоб можна було графічно шляхом виключення аргументу φ із третього і четвертого графіків побудувати п'ятий графік

$$\Delta E = f_5(J_{3\theta}).$$

Побудови ясні з рисунка. Однойменні промені з третього і четвертого графіків у перетинаннях дають вузлові точки урізаної діаграми енергомас.

4 Визначення закону руху головного вала машини

Для динамічної моделі машини можна записати

$$E_i = \frac{J_{36i}^{\Sigma} \cdot \omega_i^2}{2}.$$

Тоді

$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{J_{36i}^{\Sigma} \cdot \omega_i^2 \cdot \mu_l}{2 \cdot \mu_A \cdot J_{36i}^{\Sigma}} = \frac{1}{2} \omega_i^2 \frac{\mu_l}{\mu_A}. \quad (2.9)$$

Звідси

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \psi_i \cdot \mu_A}{\mu_l}}. \quad (2.10)$$

Вимірявши кути ψ_i у всіх n положеннях машини можна підрахувати значення ω_i для цих положень. Потім можна побудувати графік залежності $\Delta\omega = f_6(\varphi)$ (рис. 2.5).

Зауважимо, що тому, що ω головного вала змінюється незначно, графік зміни її повної величини був би ненаглядним.

Більш наглядним є графік $\Delta\omega = \Delta\omega(\varphi)$, де $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega$.

Продиференціювавши графічно графік $\Delta\omega$, можна одержати графік аналога кутового прискорення головного вала машини $d\omega/d\varphi = f_7(\varphi)$.

Потім знаходять кутове прискорення головного вала машини

$$\varepsilon_i = \left(\frac{d\omega}{d\varphi} \right)_i \cdot \omega_i. \quad (2.11)$$

Графіки аналога кутового прискорення $d\omega/d\varphi = f_7(\varphi)$ і кутового прискорення $\varepsilon = f_8(\varphi)$ головного вала машини показані на рис. 2.5 нижче графіка $\Delta\omega = f_6(\varphi)$.

Діаграма енергомас (рис. 2.3) дозволяє також установити так званий ступінь нерівномірності ходу машини δ .

Якщо з початку координат O повної діаграми енергомас провести дві дотичні до петлі під кутами $\psi_{\max}$ і $\psi_{\min}$, тоді, використовуючи формули

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{1}{2} \omega_{\max}^2 \frac{\mu_l}{\mu_A} \quad (2.12)$$

i

$$tg\psi_{min}=\frac{I}{2}\omega_{min}^2\frac{\mu_l}{\mu_A}, \quad (2.13)$$

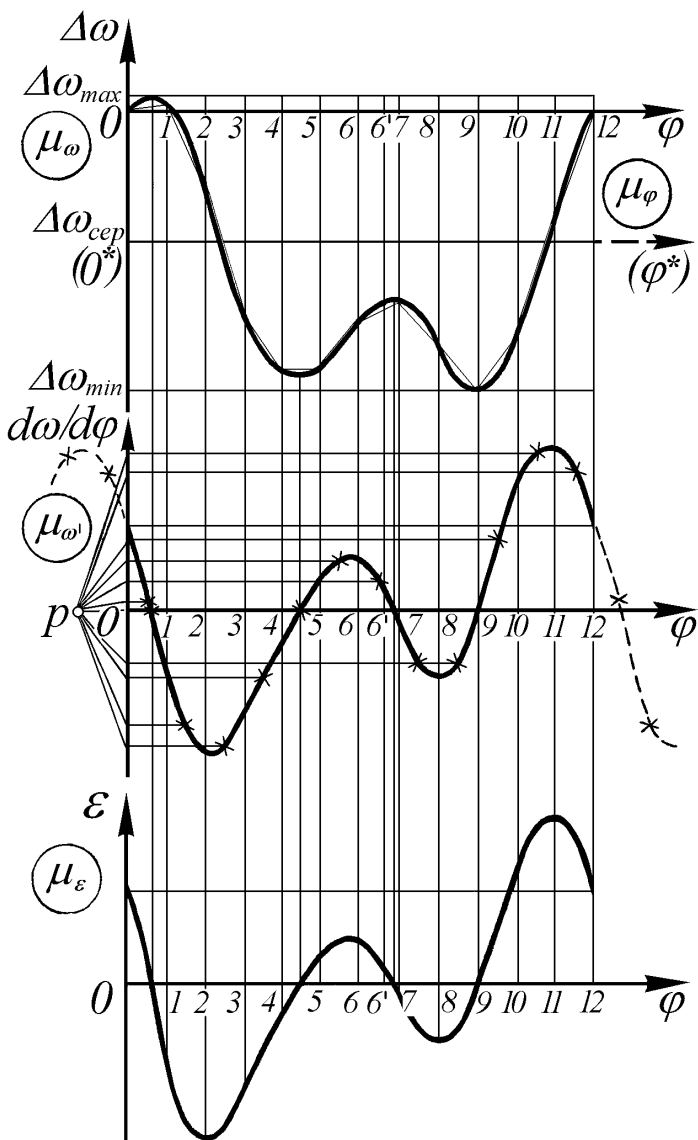


Рис. 2.5. Залежності зміни кутової швидкості ($\Delta\omega$) і кутового прискорення (ε) головного вала машини

можна підрахувати максимальну ω_{max} і мінімальну ω_{min} кутові швидкості головного вала.

Нерівномірність ходу машини прийнято характеризувати ступенем (коефіцієнтом) нерівномірності ходу машини δ , що підраховується за формулою

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{сер}}. \quad (2.14)$$

Середню кутову швидкість головного вала машини $\omega_{сер}$ звичайно підраховують за наближеною формулою

$$\omega_{сер} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}. \quad (2.15)$$

На графіку $\Delta\omega$ (рис. 2.5) показані значення $\Delta\omega_{max}$, $\Delta\omega_{min}$ і $\Delta\omega_{сер}$, відповідно рівні

$$\Delta\omega_{max} = \omega_{max} - \omega_0, \quad (2.16)$$

$$\Delta\omega_{min} = \omega_{min} - \omega_0, \quad (2.17)$$

$$\Delta\omega_{сер} = \omega_{сер} - \omega_0. \quad (2.18)$$

Тут $\Delta\omega_{сер}$ дорівнює середній величині між $\Delta\omega_{max}$ і $\Delta\omega_{min}$.

Іноді графік $\Delta\omega = f_6(\varphi)$ будують, вважаючи

$$\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{сер},$$

тоді:

$$\Delta\omega_{max} = \omega_{max} - \omega_{сер}, \quad (2.19)$$

$$\Delta\omega_{min} = \omega_{min} - \omega_{сер} \quad (2.20)$$

Зауважимо, що маючи тільки графік $\Delta\omega$ і знаючи величину $\omega_{сер}$, можна використовуючи формули (2.16), (2.17) зробити підрахунок величин ω_{max} і ω_{min} , а потім по формулі (2.14) підрахувати величину коефіцієнта нерівномірності ходу машини δ .

5. Контрольні запитання

1. Від чого залежить закон руху головного вала машини?
2. Які властивості має діаграма енергомас?
3. Чим відрізняється від повної урізана діаграма енергомас?
4. У чому полягає умова усталеного руху машини?
5. Назвіть причини нерівномірного обертання головного вала машини.
6. Як визначити кутову швидкість головного вала машини в будь-якому його положенні по діаграмі енергомас?

7. Як можна визначити кутове прискорення ε головного вала машини по заданій діаграмі його кутової швидкості ω у залежності від кута повороту φ ?

8. Що таке ступінь (коефіцієнт) нерівномірності ходу машини?

9. Як визначається середня кутова швидкість головного вала машини?

Лекція 21

Тема: **Визначення моменту інерції маховика**

Зміст: 1. Метод Віттенбауера.

2. Метод Мерцалова.

3. Ескізне проектування маховика.

4. Контрольні запитання.

1. Метод Віттенбауера

При проектуванні машини необхідно вирішувати задачу забезпечення заданого допустимого рівня коливань кутової швидкості головного вала машини в межах циклу за умовою

$$\delta \leq [\delta].$$

Середня кутова швидкість головного вала вважається відомою, а допустимий коефіцієнт нерівномірності ходу машини $[\delta]$ призначається по емпіричним даним. Для різноманітних типів машин існують установлені з досвіду прийнятні допустимі величини коефіцієнта $[\delta]$.

При такій постановці задачі момент інерції ланок першої групи J^I невідомий. Його то і потрібно визначити за умовою досягнення заданого коефіцієнта нерівномірності ходу машини δ .

Серед ланок I-ї групи, що характеризуються сталістю зведеної маси, можна назвати головний вал машини з кривошипамі і противагами, приводні муфти, зубчасті колеса і вали передач, ротор електродвигуна й інші ланки, кінематично пов'язані з головним валом постійним передатним відношенням.

Але, як правило, зведеної маси перерахованих ланок далеко недостатньо для досягнення заданого рівня нерівномірності ходу.

Практично завжди приходиться на головний вал машини встановлювати додаткові махові маси, конструктивно оформлені у виді махового колеса - маховика.

У величині J^I момент інерції маховика частіше усього складає основну частину.

В окремих випадках впливом мас інших ланок I-ї групи на нерівномірність ходу машини навіть зневажають.

Установка маховика на головному валі машини не змінює середньої швидкості його обертання $\omega_{сер}$, а лише обмежує величини ω_{max} і ω_{min} .

З рис. 2.4 очевидно, що збільшення J^I призводить до зсуву початку координат O повної діаграми енергомас вліво й униз по лінії, що йде під кутом $\psi_{сер}$, у нове положення O^I , а це, у свою чергу, призведе до зближення променів, що йдуть під кутами ψ_{max}^I і ψ_{min}^I , тобто виявиться

$$\omega_{max}^I < \omega_{max}$$

і

$$\omega_{min}^I > \omega_{min}.$$

При цьому коефіцієнт δ^I буде менше в порівнянні зі значенням δ .

Для відшукування величини J^I зовсім необов'язково будувати повну діаграму енергомас. Для цієї мети цілком достатньо побудови урізаної діаграми. Величина J^I може бути розрахована по відрізку KL на осі ΔE , або по відрізку PQ , як це буде показано нижче.

Використовуючи деякі проміжні підрахунки по урізаній діаграмі енергомас після вибору величини J^I можна також визначити величини кутової швидкості головного вала машини ω_I .

Доказ таких можливостей і виведення необхідних формул зробимо по рис. 2.4, що має й урізану і повну діаграми енергомас.

Отже, нехай уже побудована урізана діаграма енергомас, як це було показано на рис. 2.3 з відповідними поясненнями в тексті попереднього параграфа. Вважаємо, що середня кутова швидкість головного вала ω_{cep} і коефіцієнт нерівномірності ходу машини δ - відомі. Тому, відповідно до формул (2.14) і (2.15)

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cep}},$$

$$\omega_{cep} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2},$$

можемо знайти значення ω_{max} і ω_{min} .

Перепишемо формули (2.14) і (2.15) у вигляді

$$\delta \cdot \omega_{cep} = \omega_{max} - \omega_{min},$$

$$2 \cdot \omega_{cep} = \omega_{max} + \omega_{min}.$$

Після додавання останніх виразів будемо мати

$$\delta \cdot \omega_{cep} + 2 \omega_{cep} = 2 \omega_{max},$$

$$\text{або} \quad \omega_{max} = \omega_{cep} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \quad (2.21)$$

Аналогічно після вирахування першого з другого тих же перетворених виразів (2.14) і (2.15) знайдемо

$$\omega_{min} = \omega_{cep} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right). \quad (2.22)$$

Тепер відповідно до формул (2.12) і (2.13) знайдемо

і

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_{\max} &= \frac{1}{2} \omega_{\max}^2 \frac{\mu_l}{\mu_A} \\ \operatorname{tg} \psi_{\min} &= \frac{1}{2} \omega_{\min}^2 \frac{\mu_l}{\mu_A} . \end{aligned}$$

Визначимо далі кути $\psi_{\max}$ і $\psi_{\min}$. Потім під кутом $\psi_{\max}$ проведемо дотичну до петлі діаграми енергомас зверху, а під кутом $\psi_{\min}$ - дотичну знизу.

У залежності від того, наскільки машина швидкісна, кути $\psi_{\max}$ і $\psi_{\min}$ можуть бути великими (близькими до 90°) або малого (близькими до 0), тому що тангенси цих кутів визначаються насамперед величинами $\omega_{\max}^2$ і $\omega_{\min}^2$, а потім вже в меншому ступені вони залежать від обраних масштабів μ_l і μ_A .

Якщо кути $\psi_{\max}$ і $\psi_{\min}$ великі, то дотичні до петлі діаграми перетнуть вісь $J_{\text{зв}}$ у точках P і Q . Якщо ж кути $\psi_{\max}$ і $\psi_{\min}$ маленькі, то дотичні перетнуть вісь ΔE в точках K і L . Чого-небудь одного для визначення J^I цілком достатньо.

З рис. 2.4 можна записати

$$\begin{aligned} KL &= KN - LN; \\ KN &= ON \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max}; \\ LN &= ON \cdot \operatorname{tg} \psi_{\min}; \\ ON &= J^I / \mu_l. \end{aligned}$$

Після підстановки трьох останніх виразів у перше знайдемо

$$KL = \frac{J^I}{\mu_l} (\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}).$$

Звідси

$$J^I = \frac{KL \cdot \mu_A}{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}} . \quad (2.23)$$

Формулу (2.23) звичайно піддають подальшим перетворенням, але вже й у такому вигляді її цілком можна використовувати.

Знаменник формули (2.23) можна записати послідовно так

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{1}{2} \omega_{\max}^2 \cdot \frac{\mu_l}{\mu_A} - \frac{1}{2} \omega_{\min}^2 \cdot \frac{\mu_l}{\mu_A} =$$

$$= \frac{I}{2} \cdot \frac{\mu_l}{\mu_A} (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) . \quad (2.24)$$

У свою чергу вираз $(\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2)$ можна перетворити з використанням залежностей (2.14) і (2.15)

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}} ,$$

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} .$$

Перепишемо формули (2.14) і (2.15) у вигляді

$$\delta \cdot \omega_{cp} = \omega_{max} - \omega_{min} ,$$

$$2 \cdot \omega_{cp} = \omega_{max} + \omega_{min} .$$

Перемноживши останні два вирази, одержимо

$$2\delta\omega_{cp}^2 = (\omega_{max} + \omega_{min}) \cdot (\omega_{max} - \omega_{min}) = \omega_{max}^2 - \omega_{min}^2 . \quad (2.25)$$

Останній вираз (2.25) дає можливість записати формулу (2.24) у вигляді

$$tg\psi_{max} - tg\psi_{min} = \frac{I}{2} \cdot \frac{\mu_l}{\mu_A} (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) = \delta \cdot \omega_{cp}^2 \cdot \frac{\mu_l}{\mu_A} .$$

Отриманий вираз підставимо у формулу (2.23), у результаті чого знайдемо

$$J^I = \frac{KL \cdot \mu_A}{\delta \cdot \omega_{cp}^2} , \quad (2.26)$$

де KL - відрізок (у мм) осі ΔE , що відтинається дотичними до петлі діаграми енергомас, що йдуть під кутами ψ_{max} і ψ_{min} .

Зауважимо, що чисельно $KL \cdot \mu_A = \Delta E_{max}^I$, тому формулу (2.26) можна також записати у вигляді

$$J^I = \frac{\Delta E_{max}^I}{\delta \cdot \omega_{cp}^2} . \quad (2.26^*)$$

Формули (2.26) і (2.26*) природно, дають той же результат, що і формула (2.23), але вони частіше використовуються, тому що містять задані вихідні, а не проміжні величини.

Якщо ж відрізок KL на полі креслення не утворився через велику крутизну дотичних, тоді його можна обчислити, використовуючи точки P і Q , які у цьому випадку обов'язково знайдуться на кресленні.

З рис. 2.4 випливає, що

$$\begin{aligned} KL &= O^*L - O^*K; \\ O^*L &= O^*Q \cdot \operatorname{tg} \psi_{\min}; \\ O^*K &= O^*P \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max}. \end{aligned}$$

Підставимо другий і третій вирази в перший і знайдемо

$$KL = O^*Q \cdot \operatorname{tg} \psi_{\min} - O^*P \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max}. \quad (2.27)$$

Далі по формулі (2.26) можемо знайти шукане значення J^I .

Оскільки $J^I = J_M + (J_1 + J_2 + J_3 + \dots)$,

де J_M - момент інерції маховика,

$J_1 + J_2 + J_3 + \dots$ - моменти інерції інших ланок першої групи, зведені до головного вала.

Тоді можна записати

$$J_M = J^I - (J_1 + J_2 + J_3 + \dots). \quad (2.28)$$

Вираз в дужках формули (2.28) часто має невелику величину у порівнянні з J^I і ним зневажають, тоді можна вважати

$$J_M \cong J^I. \quad (2.29)$$

У будь-якому випадку рішення, якою формулою (2.28), чи (2.29) остаточно скористатися, варто приймати після кількісного аналізу членів формули (2.28).

Тому що з формули (2.26*) випливає, що величина δ зворотно пропорційна квадрату кутової швидкості головного вала

$$\delta = \frac{\Delta E_{\max}^I}{\omega_{\text{сеп}}^2 \cdot J^I},$$

у тихохідних машинах із приводом від високошвидкісного електродвигуна, що має кутову швидкість у u разів більше ніж головний вал, може навіть виявитися, що окремий маховик не потрібен. Його роль цілком виконує ротор електродвигуна.

Зведений момент інерції ротора електродвигуна до головного вала машини можна підрахувати по формулі

$$J_{36}^{e.дв.} = J^{e.дв.} \cdot u^2,$$

де u - загальне передатне число передачі від електродвигуна до головного вала.

Очевидно, що якщо u - велике число, тоді навіть порівняно невеличка величина $J^{e.дв.}$ після зведення до головного вала виявиться значною.

Якщо ж, наприклад, виявиться, що

$$J_{36}^{e.дв.} > J^I,$$

тоді розрахункова рівномірність обертання головного вала виявиться навіть вищою, ніж це відповідало б заданій величині δ .

Слід також сказати про те, що в тихохідних машинах із метою зниження металоємності маховик інколи доцільно ставити на одному з швидкохідних валів.

Тепер покажемо, як за допомогою урізаної діаграми енергомас розрахувати закон руху головного вала. Міркування проведемо також на підставі рис. 2.4.

Тому що

$$E_i = \frac{J_{36i}^{\Sigma} \cdot \omega_i^2}{2},$$

одержимо

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2E_i}{J_{36i}^{\Sigma}}}. \quad (2.30)$$

У свою чергу можна записати

$$E_i = E_0 + \Delta E_i = E_0 + \Delta A_i, \quad (2.31)$$

$$J_{36}^{\Sigma} = J^I + J_{36}. \quad (2.32)$$

Початкову повну кінетичну енергію машини E_0 можна знайти відповідно до рис. 2.4 так:

$$\begin{aligned} E_0 &= (KN + O^*K) \cdot \mu_A = KN \cdot \mu_A + O^*K \cdot \mu_A = \\ &= ON \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max} \cdot \mu_A + O^*K \cdot \mu_A = \\ &= J^I \cdot \frac{\mu_A}{\mu_J} \cdot \frac{1}{2} \omega_{\max}^2 \frac{\mu_J}{\mu_A} + O^*K \cdot \mu_A = \\ &= \frac{J^I \cdot \omega_{\max}^2}{2} + O^*K \cdot \mu_A. \end{aligned} \quad (2.33)$$

У виразі (2.33) член $\frac{J^I \cdot \omega_{\max}^2}{2} = E_{\max}^I$.

Очевидно, що E_0 можна підрахувати також по формулі

$$E_0 = E_{\min}^I + O^*L \cdot \mu_A, \quad (2.34)$$

де $E_{\min}^I = \frac{J^I \cdot \omega_{\min}^2}{2}$.

Якщо ж точки K і L у межах креслення відсутні, тоді E_0 можна підрахувати відповідно до рис. 2.4 по формулах

$$E_0 = E_{\max}^I + O^*P \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max} \cdot \mu_A \quad (2.35)$$

або

$$E_0 = E_{min}^I + O^* Q \cdot \operatorname{tg} \psi_{min} \cdot \mu_A. \quad (2.36)$$

З урахуванням формул (2.31), (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) і (2.36)

знайдемо

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2(E_0 + \Delta A_i)}{J^I + J_{npi}}}. \quad (2.37)$$

Застережемо читача від деяких типових помилок.

По-перше, надлишкова робота ΔA_i може бути як додатною, так і від'ємною. Якщо знак ΔA_i не враховувати, то розрахунок дасть невірний результат.

По-друге, розрахункові значення ω_i повинні укладатися в обмежувальну умову

$$\omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max}. \quad (2.38)$$

Зауважимо також, що повинно бути

$$E_0 \gg \Delta A \text{ (Дж)}, \\ J^I \gg J_{зг} \text{ (кгм}^2\text{)}.$$

При побудові кривої $\Delta \omega_i = \omega_i - \omega_0$ (рис. 2.5) обов'язково варто провести обмежувальні лінії:

зверху

$$\Delta \omega_{max} = \omega_{max} - \omega_0$$

і знизу

$$\Delta \omega_{min} = \omega_{min} - \omega_0.$$

При плавному з'єднанні точок крива повинна доторкнутися обмежувальних ліній між деякими i -ми точками зверху та знизу, що можна уточнити по місцях торкання дотичних до петлі енергомас (див. рис. 2.4).

Подальші дії по визначенню значень кутового прискорення ε_i головного вала вже описані в попередньому параграфі і проілюстровані на рис. 2.5.

2. Метод Мерцалова

Метод Мерцалова М. І., на відміну від розглянутого вище методу Віттенбауера, є наближеним методом визначення моменту інерції маховика по заданому коефіцієнту нерівномірності ходу машини δ . При значеннях $\delta \leq 0,03$ помилка методу Мерцалова несуттєва.

При більш високих значеннях δ варто застосовувати або метод Віттенбауера, або використовувати метод Мерцалова з поправкою Лукічова.

Основною вигодою методу Мерцалова є одночасна з відшукуванням момента інерції маховика побудова залежності кутової швидкості ω головного вала машини від кута його повороту φ .

Метод Мерцалова заснований на виділенні з загальної кінетичної енергії E машини кінетичної енергії E^I ланок I-ї групи, що мають постійний зведений до головного вала моментом інерції J^I .

Повну кінетичну енергію машин E можна розписати через суму кінетичних енергій ланок I-ї і II-ї груп

$$E = E^I + E^{II}. \quad (2.39)$$

Звідси знайдемо

$$E^I = E - E^{II}. \quad (2.40)$$

У свою чергу можна записати на підставі формули (2.31)

$$E = E_0 + \Delta A,$$

тоді одержимо

$$E^I = E_0 + \Delta A - E^{II}. \quad (2.41)$$

Проаналізуємо всі члени формули (2.41).

1. Величина
$$E^I = \frac{J^I \cdot \omega^2}{2}.$$

Тому що $J^I = \text{const}$, помічаємо, що зміна E^I цілком визначається тільки і тільки зміною ω . Якщо знайдемо криву E^I , тоді будемо мати і криву зміни ω

2. Величина
$$E_0 = \text{const}.$$

На характер кривої E^I вона впливати не може, тому при побудовах її можна попросту відкинути, тобто не враховувати, тим більше, що вона при невідомому моменті інерції маховика також поки невідома. Після визначення моменту інерції маховика можна буде визначити при необхідності й E_0 .

3. Величина
$$\Delta A.$$

Вона може бути визначена так, як це було показано в п. 2.3, шляхом зведення сил із наступним їхнім інтегруванням і вирахуванням від роботи рушійних сил роботи сил опору.

У цій частині метод Мерцалова йде цілком по шляху методу енергомас Віттенбауера. Далі методи розходяться.

4. Величина
$$E^{II} = \frac{J_{зг} \cdot \omega^2}{2}.$$

Помічаємо, що зміна E^{II} залежить від зміни величин $J_{зг}$ і ω . Але, якщо величина $J_{зг}$ звичайно змінюється на сотні відсотків (тобто в декілька

разів), то величина ω , навпаки, змінюється несуттєво, звичайно на одиниці або навіть частку одиниці відсотків. Мерцалов М. І. й запропонував впливом зміни ω на зміну E^{II} зневажити. Саме в цій обставині і схована похибка методу. При $\delta \leq 0,03$ зміна ω менше трьох відсотків. Зневага впливом зміни ω на зміну E^{II} у цьому випадку цілком виправдана.

У результаті можемо записати

$$E^{II} \cong \frac{J_{\text{зв}} \cdot \omega_{\text{сеп}}^2}{2}. \quad (2.42)$$

Очевидно, що для побудови графіка E^{II} необхідно здійснити зведення мас машини.

На рис. 2.6 подані графіки функцій ΔA і E^{II} у тому самому масштабі μ_A .

Потім графічно здійснене вирахування від ΔA величини E^{II} , у результаті чого знайдена крива E^I .

Максимальний розмах у кривої E^I являє собою не що інше, як ΔE_{max}^I у масштабі μ_A .

Вимірявши розмах у (в мм) і примноживши його на μ_A , одержимо величину ΔE_{max}^I (Дж).

Очевидно, що

$$\Delta E_{\text{max}}^I = \frac{J^I \cdot \omega_{\text{max}}^2}{2} - \frac{J^I \cdot \omega_{\text{min}}^2}{2}. \quad (2.43)$$

Звідси знайдемо

$$J^I = \frac{2E_{\text{max}}^I}{\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2},$$

а з урахуванням (2.25) одержимо

$$J^I = \frac{y \cdot \mu_A}{\delta \cdot \omega_{cp}^2}. \quad (2.44)$$

Помічаємо, що формула (2.44) із методу Мерцалова дуже близька до формули (2.26) із методу Віттенбауера. І там і там відрізки у і KL у масштабі μ_A зображують величину максимальної зміни кінетичної енергії ланок I-ї групи ΔE_{max}^I .

За пропозицією Д. М. Лукічова величину ординати у можна уточнити за допомогою такої формули

$$y_{\text{уточн.}} = y - \delta \cdot (a+b) \text{ (мм)}, \quad (2.45)$$

де a і b - ординати (в мм) із графіка E'' (рис. 2.6), що відповідають максимуму і мінімуму кривої, по яких фіксувалося наближене значення ординати y .

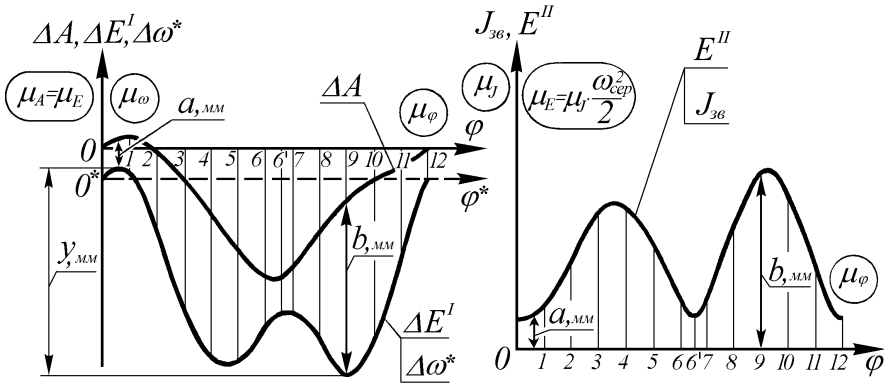


Рис. 2.6. Визначення кінетичної енергії ланок I-ї групи по методу Мерцалова

Само собою зрозуміло, що величина $\delta \cdot (a+b)$ невелика в порівнянні з y .

Тому що значення величини поправки Лукічова від'ємне, можна зробити висновок, що метод Мерцалова має помилку при визначенні J' убік його збільшення.

А раз це так, то помилка методу Мерцалова має як наслідок більш рівномірний рух машини, ніж допускається величиною δ .

Якби усе було навпаки, то було б гірше. Адже помилка, що дає запас, - завжди краща, ніж помилка, що дає недостатність.

Зауважимо, що графік E'' є одночасно (приблизно) і графіком J_{36} , тому що між ними є постійний співмножник $\frac{\omega_{сep}^2}{2}$. Це дозволяє записати

$$\text{значення } \mu_J = \mu_A \cdot \frac{2}{\omega_{сp}^2}.$$

Покажемо, що графік зміни E'' (рис. 2.6) одночасно приблизно є і графіком зміни ω , тобто графіком $\Delta \omega^*$ з віссю аргументу, позначеною як φ^* .

На підставі рис. 2.6 можна записати

$$\Delta E^I = E^I - E_0^I, \quad (2.46)$$

де E_0^I - початкове (нульове) значення кінетичної енергії ланок I-ї групи.

Тому що

$$E^I = \frac{J^I \cdot \omega^2}{2},$$

$$E_0^I = \frac{J^I \cdot \omega_0^2}{2},$$

послідовно отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta E^I &= \frac{J^I \cdot \omega^2}{2} - \frac{J^I \cdot \omega_0^2}{2} = \frac{1}{2} J^I (\omega^2 - \omega_0^2) = \\ &= \frac{1}{2} J^I \cdot (\omega + \omega_0) \cdot (\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Тому що

$$\begin{aligned} (\omega + \omega_0) &\cong 2\omega_{сер}, \\ (\omega - \omega_0) &= \Delta\omega, \end{aligned}$$

а
остаточно запишемо

$$\Delta E^I \cong J^I \cdot \omega_{сер} \cdot \Delta\omega \quad (2.48)$$

Аналіз виразу (2.48) показує, що між ΔE^I і $\Delta\omega$ просліджується приблизно лінійна залежність із постійним співмножником $(J^I \cdot \omega_{сер})$.

Залишається знайти масштаб μ_ω графіка $\Delta\omega$.

Тому що $\omega_{max} - \omega_{min} = \delta \cdot \omega_{сер},$

то

$$\mu_\omega = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{y} = \frac{\delta \cdot \omega_{сер}}{y}. \quad (2.49)$$

Далі можна диференціювати графік $\Delta\omega$ і визначати кутове прискорення ε головного вала машини, як це було зроблено в п. 2.3 і проілюстровано на рис. 2.5.

3. Рівняння руху машини в диференціальній формі

Дотепер у розділі II аналіз руху машини під дією заданих сил був поданий в інтегральній формі: $\Delta E = \Delta A$.

Інтегральна форма рівнянь руху, як було показано вище, дозволяла не тільки знайти закон руху головного вала машини, але і вирішувати інші задачі, як наприклад, задачу розрахунку моменту інерції маховика по заданому коефіцієнту нерівномірності ходу машини δ .

Якщо ж не ставиться задача в такій широкій постановці, а лише необхідно обчислити кутове прискорення головного вала машини в його окремих положеннях, тоді зручно скористатися рівнянням руху машини в диференціальній формі. Воно, на відміну від рівняння руху в інтегральній формі, дозволяє вирішувати задачу не тільки для випадку позиційних сил, цілком обумовлених положенням машини, але і для випадку залежності зовнішніх сил від часу t , від величини швидкості ω і ін.

Рівняння руху в диференціальній формі для першої динамічної моделі машини (рис. 2. 1а) можна записати в такому вигляді:

$$dE=dA=P_{36}^{\Sigma} \cdot dS_A,$$

де

$$P_{36}^{\Sigma} = P_{36}^p - P_{36}^o.$$

Тому що

$$E = \frac{m_{36}^{\Sigma} \cdot V_A^2}{2},$$

де m_{36}^{Σ} - сумарна зведена маса ланок першої і другої груп, послідовно можемо записати

$$\begin{aligned} P_{36}^{\Sigma} = dE/dS_A &= d\left(\frac{m_{36}^{\Sigma} \cdot V_A^2}{2}\right) / dS_A = m_{36}^{\Sigma} \cdot V_A \cdot \frac{dV_A}{dS_A} + \frac{V_A^2}{2} \cdot \frac{dm_{36}^{\Sigma}}{dS_A} = \\ &= m_{36}^{\Sigma} \cdot W_A^{\tau} + \frac{V_A^2}{2} \cdot \frac{dm_{36}^{\Sigma}}{dS_A}. \end{aligned}$$

Отриманий вираз являється ні чим іншим як другим законом Ньютона для випадку тіла змінної маси. Якщо покласти $m_{36}^{\Sigma} = const$, тоді одержимо звичний вираз для другого закону Ньютона

$$P_{36}^{\Sigma} = m_{36}^{\Sigma} \cdot W_A^{\tau}.$$

Для другої динамічної моделі машини (рис. 1. 2б) рівняння руху в диференціальній формі можна записати у виді:

$$dE=dA=M_{36}^{\Sigma} \cdot d\varphi,$$

звідкіля одержимо

$$M_{36}^{\Sigma} = \frac{dE}{d\varphi}. \quad (2.50)$$

Тому що

$$M_{36}^{\Sigma} = M_{36}^p - M_{36}^o \quad (\text{див. рис. 2.3}),$$

$$E = \frac{J_{36}^{\Sigma} \cdot \omega^2}{2},$$

$$J_{36}^{\Sigma} = J^I + J_{36} ,$$

послідовно можемо записати

$$\begin{aligned} M_{36}^{\Sigma} &= d \left(\frac{J_{36}^{\Sigma} \cdot \omega^2}{2} \right) / d\varphi = J_{36}^{\Sigma} \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{36}^{\Sigma}}{d\varphi} = \\ &= J_{36}^{\Sigma} \cdot \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{36}^{\Sigma}}{d\varphi} . \end{aligned}$$

Звідси знайдемо

$$\varepsilon = \frac{M_{36}^p - M_{36}^o - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dJ_{36}^{\Sigma}}{d\varphi}}{J^I + J_{36}} . \quad (2.51)$$

Аналіз формули (2.51) показує, що кутове прискорення головного вала машини залежить як від дії зовнішніх сил (M_{36}^{Σ}), так і від зміни інертності машини (J_{36}^{Σ}).

Останній член чисельника формули (2.51) включає дві перемінні: кутову швидкість головного вала машини ω , а також похідну величини J_{36}^{Σ} по куту повороту кривошипного вала φ .

Тому що при користуванні формулою (2.51) частіше усього величина ω невідома, можна скористатися її середнім значенням $\omega_{\text{ср}}$, від якого поточне значення ω дуже мало відрізняється.

Друга ж перемінна

$$\frac{dJ_{36}^{\Sigma}}{d\varphi} = \frac{d(J^I + J_{36})}{d\varphi} = \frac{dJ_{36}}{d\varphi}$$

дуже істотно змінюється по величині (і за знаком теж), і саме від неї, в основному, залежить кінцевий результат обчислень величини ε .

Величина $\frac{dJ_{36}^{\Sigma}}{d\varphi}$ може бути визначена графічно за графіком

залежності J_{36} від φ .

Нехай, наприклад, відповідно до рис. 2.3 у 4-му положенні механізму необхідно відшукати значення кутового прискорення ε головного вала машини.

З першого графіка M_{36} знайдемо M_{364}^{Σ} як

$$M_{3\phi 4}^{\Sigma} = -z_4 \cdot \mu_M. \quad (2.52)$$

Тут знак "мінус" означає, що ордината z_4 - від'ємна, тому що вимірюється вниз від осі φ^* .

З четвертого графіка $J_{3\phi}$ знайдемо $\frac{dJ_{3\phi 4}}{d\varphi}$ як

$$\frac{dJ_{3\phi 4}}{d\varphi} = - \frac{y_4 \cdot \mu_I}{x_4 \cdot \mu_{\varphi}}. \quad (2.53)$$

Знак "мінус" в останньому виразі показує, що похідна $\frac{dJ_{3\phi 4}}{d\varphi}$ - від'ємна величина.

Справді, дотична до графіка в точці 4 йде відносно осі аргументу під тупим кутом α_4 , тангенс якого від'ємний, адже по геометричному змісту похідна

4. Контрольні запитання

1. Як визначається момент інерції ланок I-й групи J^I по заданому коефіцієнту нерівномірності ходу машини δ методом Віттенбауера?
2. Як визначається момент інерції ланок I-й групи J^I по заданому коефіцієнту нерівномірності ходу машини δ методом Мерцалова?
3. У чому полягає похибка методу Мерцалова визначення моменту інерції маховика і як можна її зменшити?
4. Як побудувати діаграму залежності кутової швидкості головного вала машини по методу Мерцалова?
5. Запишіть рівняння руху машини в диференціальній формі.
6. Як визначити кутове прискорення головного вала машини в заданому положенні по рівнянню руху в диференціальній формі?

Лекція 22

Тема: **Силовий розрахунок механізмів**

Зміст: 1. Методи силових розрахунків.

2. Статична визначеність кінематичних ланцюгів.

3. Визначення інерційних навантажень на ланки.

4. Застосування принципу Даламбера під час силового аналізу.

5. Контрольні запитання.

1. Методи силових розрахунків

Силові розрахунки механізмів можуть бути виконані методом статики або методом кінетостатики.

Метод статики застосовується в випадках, коли інерційними навантаженнями ланок можна знехтувати. Це може мати відношення до тихохідних механізмів.

Метод кінетостатики прийнятний для швидкісних механізмів, у яких інерційні навантаження ланок можуть бути не тільки сумірними з силами корисного опору, а навіть перевищувати їх.

Який з методів обрати, вирішує інженер-конструктор, попередньо зробивши порівняння сил корисного опору і інерційних навантажень.

Силами тяжіння ланок також можна в деяких випадках знехтувати, як і інерційними навантаженнями.

Нижче розглянуті задачі силових розрахунків механізмів методом кінетостатики, який базується на основі принципу Даламбера.

2.Статична визначеність кінематичних ланцюгів

Після визначення закону руху головного вала машини можна приступити до визначення сил взаємодії ланок механізмів машини, тобто сил тиску в кінематичних парах або, по іншому, сил реакцій, що діють на ланки з боку інших (відкинутих) ланок.

У кожній окремо взятій кінематичній парі в процесі роботи машини сили взаємодії ланок, як правило, змінюються і по величині й по напрямку. Вони залежать не тільки від робочих навантажень, обумовлених силами корисного опору, але також і від динамічних інерційних навантажень, обумовлених масовими характеристиками ланок і законом їхнього руху.

Сила взаємодії ланок, що утворюють нижчу кінематичну пару, являє собою рівнодіючу елементарних сил, розподілених по поверхні контакту ланок. Як відомо з курсу теоретичної механіки, результуюча сила взаємодії

двох стичних тіл (без урахування тертя) спрямована по загальній нормалі до їхньої поверхні.

У поступальній кінематичній парі (рис. 2.7а), наприклад, сила реакції $\bar{R}_{0-1}$, прикладена до повзуна 1 з боку направляючої 0, спрямована по нормалі $n-n$ до поверхні зіткнення ланок.

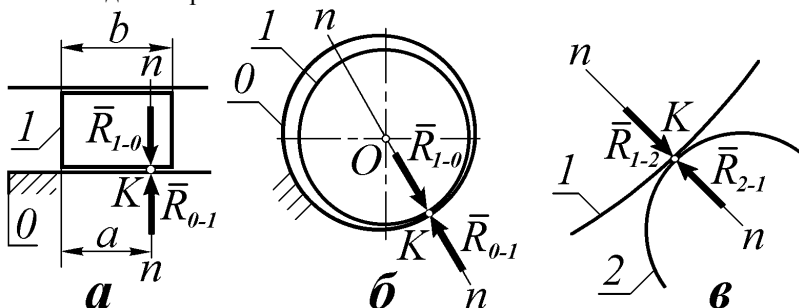


Рис. 2.7. Сили реакцій в кінематичних парах

Модуль (величина) сили R_{0-1} і відстань a невідомі і повинні бути визначені в процесі силового розрахунку. Зауважимо, що в окремих випадках може навіть спостерігатися $a > b$, що відбувається при перекиданні повзуна на направляючих і виникненні крайових сил тиску на повзун із двох боків (див. докладніше задачу 2.3).

Відповідно до третього закону Ньютона $\bar{R}_{1-0} = -\bar{R}_{0-1}$, тому знаходимо, що в кожній поступальній кінематичній парі при силовому розрахунку будемо мати всього дві невідомі.

В обертальній кінематичній парі (рис. 2.7б) при неврахуванні сил тертя сила $\bar{R}_{1-0}$ спрямована по нормалі $n-n$ до циліндричних поверхонь зіткнення обох ланок, тобто проходить через центр шарніра O .

Положення центру шарніра завжди відомо, але модуль сили R_{0-1} і напрямок загальної нормалі $n-n$ - невідомі. Бачимо, що й у кожній обертальній кінематичній парі при силовому аналізі буде всього дві невідомі.

Отже, від кожної сили тиску, що діє в будь-якій нижчій кінематичній парі, в розрахункових рівняннях при силовому аналізі з'являються дві невідомі величини.

У вищій кінематичній парі (рис. 2.7в), як відомо, контакт ланок може бути або точковим, або лінійчатим.

Силова взаємодія ланок при точковому контакті характеризується зосередженою силою, а при лінійчатому - навантаженням, розподіленим по лінії контакту. У останньому випадку під силою взаємодії розуміють рівнодіючу елементарних розподілених сил.

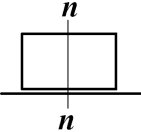
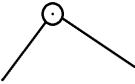
Якщо тертям зневажити, сила $\overline{R}_{1-2}$ буде спрямована по відомій загальній нормалі $n-n$. Отже, для сили $\overline{R}_{1-2}$ відома як точка прикладення (точка K), так і лінія дії, й невідомою залишається тільки її величина.

Таким чином, при силовому розрахунку механізму кожна вища кінематична пара вносить тільки одну невідому.

У таблиці 2.1 показано, які параметри сил взаємодії ланок у кінематичних парах відомі, а які ні.

Параметри сили (R) взаємодії ланок у кінематичних парах

Таблиця 2.1

Кінематична пара	Величина R	Напрямок R	Точка прикладення R
	?	+	?
	?	?	+
	?	+	+

Для відшукування небезпечних максимальних значень сил тиску і їхніх напрямків у всіх кінематичних парах механізмів машини необхідно виконати силовий розрахунок у n положеннях машини.

Після цього можна побудувати годограф або епюру зміни величини і напрямку сили тиску в кожній із кінематичних пар. На підставі отриманих із силового розрахунку даних можна потім здійснити вибір матеріалу, раціональне конструювання форм деталей ланок машини, призначення виду

мастила, місця і способу його подачі до тертьових елементів кінематичних пар і ін.

Кінетостатичний силовий розрахунок виконується на основі принципу д'Аламбера, відповідно до якого в умовній рівновазі можна розглядати окремі частини машини під дією сил трьох груп: зовнішніх активних сил, сил реакцій відкинутих зв'язків і, фіктивно прикладених як зовнішні, інерційних навантажень.

Зовнішні активні сили будемо вважати заданими, тобто відомими.

Інерційні навантаження можна визначити при відомому законі руху машини через масові характеристики ланок.

Невідомими в цьому випадку будуть сили реакцій відкинутих зв'язків.

Розчленовуючи машину на окремі складові частини, можна відшукати у вигляді реакцій відкинутих зв'язків сили тиску у всіх кінематичних парах.

Як уже було показано ([8]: у п. 1.4 і на прикладах рішення задач 1.7, 1.8 і 1.9), плоскі важільні механізми машини розчленовують на початковий механізм (який, як правило, має ступінь свободи $w=1$) і на групи Ассура, що є, як було вище сказано без доказу, статично визначними елементарними кінематичними ланцюгами з нульовою рухливістю (тобто з $w=0$), для яких число рівнянь рівноваги і число невідомих збігається.

Розглянемо статичну визначність будь-якого плоского механізму без надлишкових зв'язків, до складу якого входять n рухомих ланок, p_n нижчих і p_e вищих кінематичних пар, що володіє одним ступенем рухливості ($w=1$).

Оскільки для кожної ланки механізму можна записати три розрахункові рівняння кінетостатичної рівноваги, то загальне число рівнянь для всіх його n ланок складе

$$N_y = 3n.$$

Вище було показано, що кожна нижча кінематична пара вносить у розрахункові рівняння дві невідомі величини, а кожна вища - одну. Тому всі кінематичні пари вносять невідомих

$$N_F = 2p_n + p_e.$$

Запишемо для плоского механізму формулу Чебишева ((1.3), [8])

$$w = 3n - (2p_n + p_e).$$

Співставивши з нею вирази для N_y і N_F , отримаємо

$$N_y = N_F + w.$$

Таким чином, число рівнянь N_y достатньо для визначення всіх N_F внутрішніх сил тиску в кінематичних парах. Звідси випливає принципово важливий висновок: механізм без надлишкових зв'язків статично визначений.

Одне рівняння (при $w=1$), що залишилося, звичайно використовується для перевірки точності виконаного силового розрахунку.

Структурна формула для нормального кінематичного ланцюга плоского важільного механізму (групи Ассура), як відомо ([8], стор. 20), має вигляд

$$w = 3n - 2p_n = 0.$$

Помічаємо, що для групи Ассура число рівнянь кінетостатичної рівноваги $N_y = 3n$ збігається з числом невідомих $N_F = 2p_n$ у цих рівняннях (при цьому $p_e = 0$).

Це означає, що група Ассура є статично визначним кінематичним ланцюгом.

Тому при силовому аналізі, як і при кінематичному, аналізований механізм машини, з метою максимального спрощення аналізу, також розчленовується на початковий механізм і групи Ассура.

Силовий розрахунок починається з розгляду кінетостатики самої віддаленої від початкового механізму групи Ассура (не потребуючої додаткової, ще невідомої інформації), а потім продовжується послідовно по інших групах Ассура в напрямку до початкового механізму. Такий порядок проведення аналізу дозволяє послідовно знайти сили тиску у всіх кінематичних парах із найменшими труднощами. При цьому результати розрахунку попередньої групи Ассура, як уже відомі, використовуються при розрахунку наступної.

Початковий механізм розглядається останнім. Він також знаходиться в умовній кінетостатичній рівновазі з одним зайвим рівнянням рівноваги, що не має невідомих сил. По цьому рівнянню і перевіряється вірність (точність) виконаного кінетостатичного аналізу всієї машини в цілому.

Методика кінетостатичного аналізу груп Ассура і початкового механізму без урахування сил тертя буде показана нижче на прикладі рішення задач 2.2, ..., 2.7.

При необхідності конструктор може звернутися до спеціальної довідкової літератури, де приведена методика як кінематичного, так і кінетостатичного розрахунку різноманітних груп Ассура.

Перед тим, як перейти до кінетостатичних розрахунків, покажемо, як визначаються інерційні навантаження на ланки.

3. Визначення інерційних навантажень на ланки

Нагадаємо, що інерційні навантаження не є зовнішніми силами. Вони виникають як розподілені внутрішні сили внаслідок інертного опору елементарних мас тіла руху з прискореннями, результуючі яких передаються через зв'язки.

Якщо розглядати їх як зовнішні, то з усією визначеністю варто сказати, що таких сил не існує. Тому сили інерції часто і називають фіктивними - у тому розумінні, що насправді вони прикладені не до тих тіл: відповідно до принципу д'Аламбера їх прикладають до тіл, які "прискорюються", а насправді вони прикладені до тіл, які "прискорюють". Так, наприклад, при прискореному рухові автопоїзда виникаюча сила інерції причепа реально діє в зчепному устрої на автомобіль-тягач, а не на причеп.

Інерційні навантаження викликають у тілах внутрішні динамічні напруження, що можуть призвести навіть до руйнації цих тіл.

Тому вірніше було б говорити не про фіктивність інерційних навантажень, а про фіктивність прикладення реальних інерційних внутрішніх навантажень в якості зовнішніх сил, коли вже вони такими не являються.

Як бачимо, питання фіктивності інерційних навантажень фактично зводиться до питання, що розуміти під цими навантаженнями.

У поступальному русі ланки її інерційне навантаження зводиться до однієї рівнодіючої сили інерції F_{in} , що прикладається фіктивно в центрі мас ланки протилежно прискоренню ланки:

$$\overline{F}_{in} = -m \cdot \overline{W} \quad (H), \quad (2.54)$$

де m - маса ланки в кг,
 $\overline{W}$ - прискорення ланки в м/с.

Знак "мінус" показує, що вектор сили інерції $\overline{F}_{in}$ спрямований протилежно вектору прискорення ланки $\overline{W}$.

В обертальному русі ланки навколо центральної осі його інерційне навантаження зводиться до рівнодіючої пари сил (моменту сил) інерції M_{in} , що прикладається фіктивно ззовні в площині обертання:

$$\overline{M}_{in} = -J_S \cdot \overline{\varepsilon} \quad (Hm), \quad (2.55)$$

де J_S - момент інерції ланки відносно центральної осі, що співпадає з віссю обертання, в кгм,

$\overline{\varepsilon}$ - кутове прискорення ланки в рад/с.

Знак "мінус" показує, що вектор моменту сил інерції $\overline{M}_{in}$ спрямований протилежно вектору кутового прискорення $\overline{\varepsilon}$ ланки.

У плоскопаралельному русі ланки її інерційне навантаження (при зведенні елементарних розподілених сил інерції до центру мас ланки S) зводиться до головного вектора сил інерції $\overline{F}_{in}$ (нижче - просто сила інерції) і до головного моменту сил інерції $\overline{M}_{in}$ (нижче - просто момент сил інерції):

$$\overline{F}_{in} = -m \cdot \overline{W}_S \quad (H), \quad (2.56)$$

де m - маса ланки в кг,

$\overline{W}_S$ - прискорення центру мас ланки в m/c^2 ,

знак "мінус" показує, що вектор сили інерції $\overline{F}_{in}$ спрямований протилежно вектору $\overline{W}_S$;

$$\overline{M}_{in} = -J_S \cdot \overline{\varepsilon} \quad (Hm), \quad (2.57)$$

де J_S - центральний момент інерції ланки в площині обертання в $кгм^2$,

ε - кутове прискорення ланки в площині обертання в $рад/с^2$,

знак "мінус" показує, що вектор моменту сил інерції $\overline{M}_{in}$ спрямований протилежно вектору кутового прискорення $\overline{\varepsilon}$ ланки.

Відзначимо, що в обертальному русі ланки навколо нецентральної осі O (при зведенні елементарних розподілених сил інерції до центру мас ланки S) також виникають сила інерції $\overline{F}_{in} = -m \cdot \overline{W}_S$ і момент сил інерції $\overline{M}_{in} = -J_S \cdot \overline{\varepsilon}$, як і при складному плоскопаралельному русі.

При зведенні елементарних розподілених сил інерції до центру обертання O очевидно збережеться той же вплив інерційних сил на кінетостатичну рівновагу ланки, що й у попередньому випадку зведення сил інерції до точки S .

У такий спосіб можемо визначити, що величина і напрямок вектора сили інерції $\overline{F}_{in} = -m \cdot \overline{W}_S$ залишаться тими ж. Але тому, що точка прикладення вектора сил інерції переміститься з S у O , при цьому зміниться величина моменту сил інерції ($\overline{M}_{in}$ перейде в $\overline{M}_{inO}$). Значення моменту сил інерції M_{inO} можемо підрахувати, узявши за основу випадок зведення сил інерції до точки S .

Якщо вектор сили інерції $\overline{F}_{in}$ розкласти на дві складові: $\overline{F}_{in}^n = -m \cdot \overline{W}_S^n$, що не дає моменту навколо точки O , і $\overline{F}_{in}^\tau = -m \cdot \overline{W}_S^\tau$, що дає момент навколо точки O на плечі l_{OS} , тоді будемо мати результуючий момент сил інерції навколо точки O , рівний

$$\begin{aligned} M_{inO} &= M_{in} + F_{in}^\tau \cdot l_{OS} = J_S \cdot \varepsilon + m \cdot W_S^\tau \cdot l_{OS} = \\ &= J_S \cdot \varepsilon + m \cdot l_{OS} \cdot \varepsilon \cdot l_{OS} = (J_S + m \cdot l_{OS}^2) \cdot \varepsilon = J_O \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

та спрямований протилежно кутовому прискоренню ε .

Зауважимо, що $J_O = (J_S + m \cdot l_{OS}^2)$ є моментом інерції ланки навколо осі, що проходить через точку O (тобто через вісь обертання ланки).

При рішенні практичних задач кінтостатики зручно замінити вектори сил інерції $\overline{F}_{in}$ і моменти сил інерції $\overline{M}_{in}$ кожної з i -х ланок одною рівнодіючою силою $\overline{F}_{in}^*$.

На рис. 2.8а показана ланка AB , що здійснює плоскопаралельний рух. Будемо вважати, що прискорення центру мас ланки $\overline{W}_S$ і кутове прискорення ланки ε були знайдені при кінематичному аналізі.

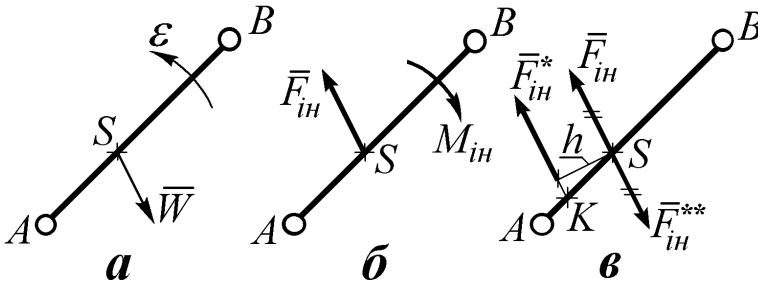


Рис. 2.8. Визначення результуючої сили інерції при плоскопаралельному русі

На рис. 2.8б показаний головний вектор сил інерції $\overline{F}_{in}$ і напрямок дії M_{in} головного моменту сил інерції $\overline{M}_{in}$, що можуть бути обчислені за формулами (2.56) та (2.57).

Замість M_{in} можна прикласти пару сил F_{in}^* і F_{in}^{**} , кожна з яких дорівнює по величині силі F_{in} (рис. 2.8в). Плечем пари сил F_{in}^* і F_{in}^{**} буде відстань h , величина якої може бути обчислена по формулі:

$$h = \frac{M_{in}}{F_{in}} \text{ (м)}.$$

Пару сил F_{in}^* і F_{in}^{**} варто прикласти до ланки так, щоб одна з них (наприклад, F_{in}^{**}) співпала по лінії дії з силою F_{in} , але була б їй протилежна.

У результаті на кінтостатичну рівновагу ланки буде впливати тільки сила F_{in}^* , що і може бути названа рівнодіючою всіх інерційних навантажень ланки AB . Точка K ланки AB , через яку проходить лінія рівнодіючої сили F_{in}^* , називається *центром хитання ланки*.

При плоскопаралельному русі ланки точка K може змінювати своє місце розташування на лінії AB .

У випадку чистого обертання ланки навколо нерухомого шарніра (наприклад, у коромисла) центр його хитання (точка K) займає постійне положення на лінії ланки (на більшому віддаленні від центру обертання ланки в порівнянні з віддаленням центру мас S ланки), що спрощує рішення задачі кінетостатики (у n положеннях) механізму. Змінну результуючу силу інерції F_{in} такої ланки прикладають у всіх n положеннях в одній, лише один раз знайденій точці K , у напрямку, протилежному напрямку вектора прискорення центру мас S , без якихось додаткових розрахунків.

Заміна розподілених інерційних навантажень ланки при його плоскопаралельному русі одною рівнодіючою силою F_{in}^* також спрощує кінетостатичний аналіз.

Позбувшись таким же чином M_{ini} усіх ланок механізму, у результаті можна вирішувати задачу кінетостатики без урахування масштабу довжин μ_l . При вирішенні рівнянь моментів сил у цьому випадку можна плечі сил брати в mm прямо з креслення (μ_l є у всіх членах рівнянь і тому скорочується).

Якщо ж вирішувати задачу кінетостатики, у якій поряд із силами є моменти сил, тоді всі плечі сил у рівняннях рівноваги моментів треба обчислювати (у m) з урахуванням масштабу довжин μ_l , що менш зручно і може обумовити додаткові помилки в розрахунках.

4. Контрольні запитання

1. У чому полягає мета кінетостатичного розрахунку механізмів машини?
2. Прокоментуйте принцип д'Аламбера з теоретичної механіки стосовно до механізму машини.
3. У чому полягає фіктивність прикладення інерційних навантажень до ланок механізму?
4. Яка послідовність виконання кінетостатичного розрахунку механізму?
5. Як визначаються інерційні навантаження на ланки при їх поступальному русі?
6. Як визначаються інерційні навантаження на ланки при їх обертальному русі?
7. Як визначаються інерційні навантаження на ланки при їх плоскопаралельному русі?

Лекція 23

Тема: Кінетостатика груп Ассура

- Зміст: 1. Група Ассура II класу 2^{-го} порядку 1^{-го} виду.
2. Група Ассура II класу 2^{-го} порядку 2^{-го} виду.
3. Група Ассура II класу 2^{-го} порядку 3^{-го} виду.
4. Контрольні запитання.

1. Група Ассура II класу 2^{-го} порядку 1^{-го} виду

Виконаємо в загальному вигляді кінетостатичний розрахунок групи Ассура II-го класу 2-го порядку 1-го виду за заданою її кінематичною схемою в заданому положенні (рис. 2.9а). Задано також сили $P_2(H)$ і $P_3(H)$, що є рівнодіючими усіх зовнішніх активних сил і інерційних навантажень, прикладених відповідно до ланок 2 і 3.

Розрахунок виконаємо в наступному порядку.

1. Покажемо в довільних напрямках невідомі зовнішні реакції $\overline{R}_A$ і $\overline{R}_C$ відкинутих зв'язків у шарнірах A і C і розкладемо кожен з них на дві складові за напрямками ланок 2 і 3 і впоперек до них.

2. Для кожної окремої ланки 2 та 3 знайдемо відповідно складові $\overline{R}_A^r$ і $\overline{R}_C^r$, розглянувши рівняння моментів сил навколо точки B . При цьому в рівняннях моментів брати участь не будуть ні складові R_A^n і R_C^n , ні поки що невідомі реакції R_{3-2} і R_{2-3} у шарнірі B , тому що лінії їхньої дії проходять через точку B .

Для ланки 2: $\sum M_B(P) = 0, P_2 \cdot h_2 - R_A^r \cdot AB = 0,$

$$R_A^r = P_2 \cdot \frac{h_2}{AB} (H).$$

Для ланки 3: $\sum M_B(P) = 0, P_3 \cdot h_3 - R_C^r \cdot BC = 0,$

$$R_C^r = P_3 \cdot \frac{h_3}{BC} (H).$$

Зауважимо, що плечі сил у рівняннях у даному випадку можна брати в мм прямо з креслення незалежно від масштабу довжин μ_l , тому що в рівняннях відсутні пари сил.

3. Для всієї групи Ассура запишемо векторне рівняння рівноваги сил:

$$\underline{\overline{R}}_A^n + \underline{\overline{R}}_A^r + \underline{\overline{P}}_2 + \underline{\overline{P}}_3 + \underline{\overline{R}}_C^r + \underline{\overline{R}}_C^n = 0.$$

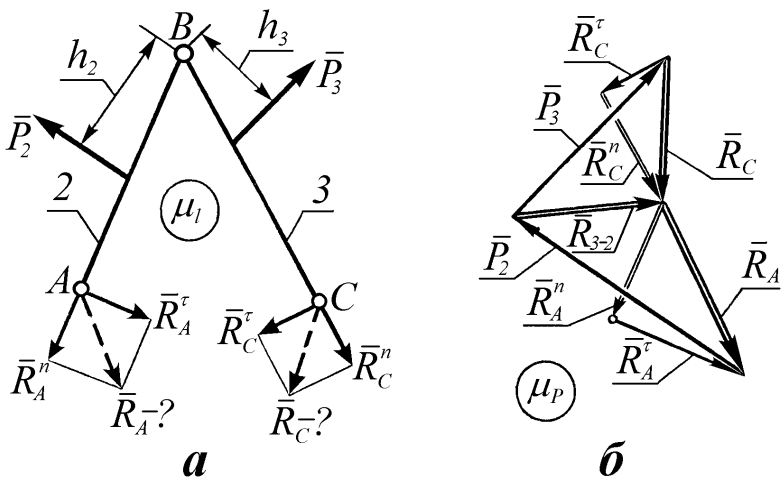


Рис. 2.9. Кінестатика групи Ассура II-го класу 2-го порядку 1-го виду

Аналіз рівняння показує, що воно може бути вирішене, тому що містить тільки дві невідомі (величини сил реакцій R_A^n і R_C^n).

Тут і далі умовимося підкреслювати двома лініями вектори сил, величина і напрямок яких відомі, і однією лінією - вектори, у яких невідомі або напрямок, або величина.

Вирішимо рівняння графічно, побудувавши так званий план сил.

По найбільшій відомій силі виберемо масштаб сил μ_p і в цьому масштабі послідовно (відповідно до векторного рівняння) відкладемо усі відомі вектори, починаючи з $\bar{R}_A^\tau$ і закінчуючи $\bar{R}_C^\tau$.

Потім із початку першого вектора $\bar{R}_A^\tau$ (позначено кружком на рис. 2.9б) проведемо лінію, паралельну ланці 2, на якій будемо шукати довжину невідомого вектора $\bar{R}_A^n$, а з кінця останнього відомого вектора $\bar{R}_C^\tau$ проведемо лінію паралельно ланці 3, на якій будемо шукати невідому довжину вектора $\bar{R}_C^n$.

Перетинання двох названих ліній, паралельних ланкам 2 і 3, закоординує шукані довжини векторів $\bar{R}_A^n$ і $\bar{R}_C^n$.

Всі перераховані дії зроблені на рис. 2.9б. Тут же побудовані результуючі вектори $\overline{R}_A$ і $\overline{R}_C$.

4. Силу тиски в шарнірі B знайдемо, наприклад, як реакцію R_{3-2} відкинутої ланки 3 на ланку 2, розглянувши векторне рівняння рівноваги сил, що діють на ланку 2:

$$\overline{R}_A + \overline{P}_2 + \overline{R}_{3-2} = 0.$$

Сила $\overline{R}_{3-2}$ знайдена на загальному плані сил. Вона утворить із силами $\overline{R}_A$ і $\overline{P}_2$ замкнений трикутник сил, що знаходяться в рівновазі (всі стрілки сил спрямовані при обході векторного трикутника в одному загальному напрямку - у даному випадку за годинниковою стрілкою).

2. Група Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду

Виконаємо в загальному вигляді кінестатичний розрахунок групи Ассура II-го класу 2-го порядку 2-го виду за заданою його кінематичною схемою в заданому положенні (рис. 2.10а). Задано також сили P_2 (Н) і P_3 (Н), що є рівнодіючими всіх зовнішніх активних сил і інерційних навантажень, прикладених відповідно до ланок 2 та 3.

прикладених відповідно до ланок 2 і 3.

Розрахунок виконаємо в наступному порядку.

1. Покажемо реакції відкинутих зв'язків: $\overline{R}_A$ - у шарнірі A та $\overline{R}_{0-3}$ - з боку направляючої 0 на повзун 3.

Тому що напрямок $\overline{R}_A$ невідомий, розкладемо її на дві складові $\overline{R}_A^n$ - уздовж ланки 2 і $\overline{R}_A^r$ - впоперек ланки 2.

Напрямок $\overline{R}_{0-3}$ відомий. Без урахування сил тертя реакція направляючої на повзун $\overline{R}_{0-3}$ спрямована перпендикулярно напрямку скозання повзуна, але лінія дії $\overline{R}_{0-3}$ (тобто положення точки K) невідома. Точка K показана тому на ланці 0 в довільному місці.

2. Для ланки 2 запишемо рівняння моментів сил:

$$\Sigma M_B(P) = 0,$$

$$P_2 \cdot h_2 - R_A^r \cdot AB = 0.$$

Звідси знайдемо величину

$$R_A^r = P_2 \cdot \frac{h_2}{AB}.$$

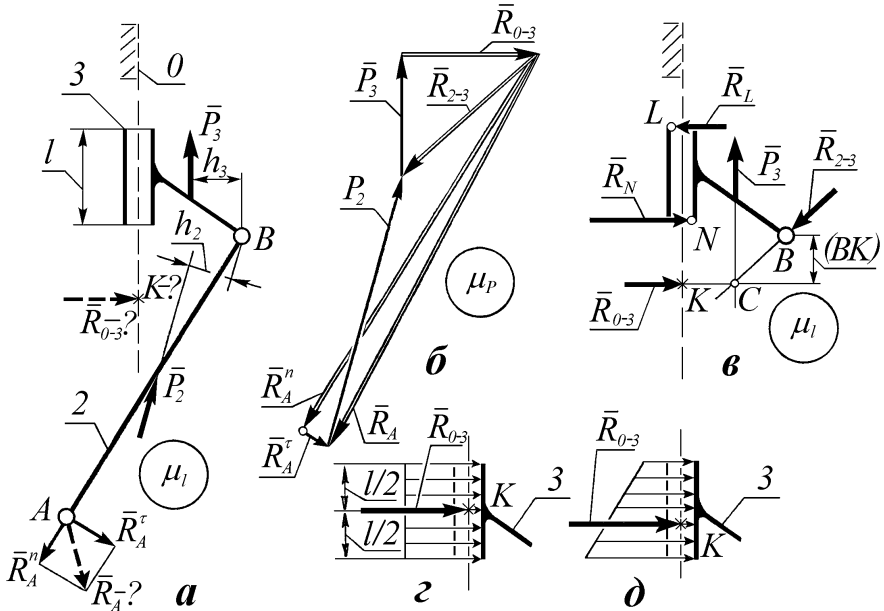


Рис. 2.10. Кінетостатика групи Ассур II-го класу 2-го порядку 2-го виду

3. Для всієї групи Ассур запишемо векторне рівняння рівноваги сил

$$\underline{\bar{R}}_A^n + \underline{\bar{R}}_A^r + \underline{\bar{P}}_2 + \underline{\bar{P}}_3 + \underline{\bar{R}}_{0-3} = 0.$$

Аналіз рівняння показує, що воно може бути вирішене, тому що містить тільки дві невідомі (величини сил реакцій R_A^n і R_{0-3}).

Вирішимо рівняння графічно шляхом побудови плану сил. Масштаб μ_P виберемо по найбільшій із відомих сил. Відкладемо послідовно в масштабі μ_P відомі вектори сил $\bar{R}_A^r$, $\bar{P}_2$ і $\bar{P}_3$. Потім проведемо через початок вектора $\bar{R}_A$ (позначено кружком) паралельно ланці 2 лінію, на якій будемо шукати довжину вектора $\bar{R}_A^n$, а через кінець вектора $\bar{P}_3$ горизонтальну лінію, на якій будемо шукати довжину вектора $\bar{R}_{0-3}$.

Перетинання зазначених вище ліній закоординує шукані довжини векторів $\overline{R}_A^n$ і $\overline{R}_{0-3}$ (у масштабі μp).

Перелічені вище дії виконані на рис. 2.10б. Тут же проведено результуючий вектор $\overline{R}_A$.

4. Силу тиску в шарнірі B знайдемо з розгляду рівноваги окремо взятої ланки 3, для якої можемо записати

$$\overline{P}_{=3} + \overline{R}_{=0-3} + \overline{R}_{2-3} = 0.$$

Сила $\overline{R}_{2-3}$, як реакція в шарнірі B 3-ї ланки на 2-гу, знайдена тут же на загальному плані сил. Вона утворить із силами $\overline{P}_3$ і $\overline{R}_{0-3}$ замкнутий трикутник рівноваги сил (сили йдуть одна за іншою в одному напрямку - за годинниковою стрілкою).

5. Положення точки K , в якій прикладена рівнодіюча сила реакції $\overline{R}_{0-3}$ направляючої 0 на повзун 3, можна відшукати, наприклад, скориставшись відомою теоремою про три сили з теоретичної механіки, відповідно до якої лінії дії трьох сил, що знаходяться в рівновазі, обов'язково перетинаються в одній точці.

На ланку 3 (рис. 2.10в) діють три сили: $\overline{P}_3$, $\overline{R}_{0-3}$ і $\overline{R}_{2-3}$. Їхні лінії дії перетинаються в точці C , отже точка K лежить на одній горизонталі з точкою C .

Положення точки K також можна було б знайти з рівняння рівноваги моментів сил, що діють на ланку 3, навколо точки B :

$$\sum M_B(P) = 0; P_3 \cdot h_3 - R_{0-3} \cdot BK = 0;$$

$$BK = h_3 \cdot (P_3 / R_{0-3}).$$

Тут як BK позначена вертикальна проекція відстані між точками B і K .

Помітимо, що точка K виявилася на рис. 2.10в за межами довжини повзуна l . Що це значить?

Якби точка K знаходилася посередині довжини повзуна l , тоді очевидно, що повзун притискався б до направляючої по всій довжині l рівномірно, тобто з постійною по довжині епюрою питомих тисків (рис. 2.10г).

Якби точка K знаходилася в межах довжини l повзуна, але не посередині, тоді епюра тисків була б нерівномірною (рис. 2.10д).

Якщо ж точка K вийшла за межі довжини l повзуна, тоді спостерігається перекіс (перекидання) повзуна на направляючій з крайовими тисками в зонах L і N (рис. 2.10б).

Крайові реакції $\bar{R}_L$ і $\bar{R}_N$ є складовими повної реакції направляючої на повзун $\bar{R}_{0-3}$.

Відповідно до теореми теоретичної механіки про рівнодіючу паралельних сил, можемо записати:

$$\begin{aligned} R_{0-3} &= R_N - R_L, \\ R_N \cdot LN &= R_{0-3} \cdot LK. \end{aligned}$$

Маємо систему рівнянь із двома невідомими R_N і R_L . З неї знайдемо:

$$\begin{aligned} R_N &= R_{0-3} \cdot \frac{LK}{LN}, \\ R_L &= R_N - R_{0-3}. \end{aligned}$$

Аналіз отриманих формул показує, що крайові сили тиску можуть перевищувати (кожна або одна з них) результуючу силу. У цьому таїться велика небезпека.

По-перше, питомі тиски на краях повзуна через зосередження сил на малих площах можуть викликати перевантаження матеріалу деталей ланок.

По-друге, від великих крайових реакцій можуть генеруватись великі сили тертя, які можуть не тільки сприяти інтенсивному зносу деталей, але і призвести до заклинення поступальної кінематичної пари.

Зі сказаного вище випливає, що перекіс повзуна на направляючій неприпустимий.

Перекіс можна запобігти двома шляхами:

1) бажано укоротити повідка повзуна, а ще краще зробити його нульовим (тобто шарнір B помістити по центрі повзуна - там же тоді виявиться і точка K).

2) якщо не можна укоротити повідка повзуна, тоді варто подовжити повзун (збільшити l);

При нульовому повідку повзун стає самовстановленим на направляючій і перекосу не може бути в принципі, незалежно від величини l . Саме тому в більшості конструкцій повзун виконується з нульовим повідком.

3. Група Ассура II класу 2-го порядку 3-го виду

Виконаємо в загальному вигляді кінетостатичний розрахунок групи Ассура II-го класу 2-го порядку 3-го виду за заданою його кінематичною схемою в заданому положенні (рис. 2.11а). Задано також сили P_2 (H) і P_3

(H), що є рівнодіючими всіх зовнішніх активних сил і інерційних навантажень, прикладених відповідно до ланок 2 і 3.

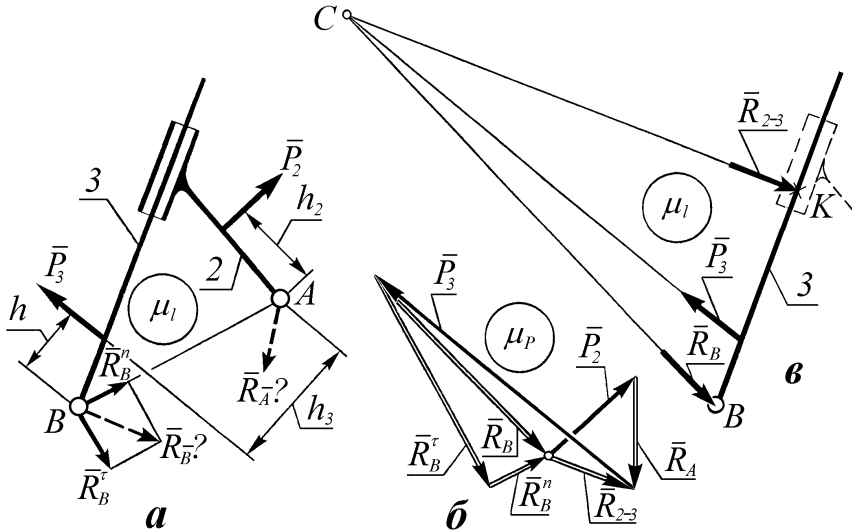


Рис. 2.11. Кінетостатика групи Ассура II-го класу 2-го порядку 3-го виду

Розрахунок виконаємо в наступному порядку.

1. Покажемо реакції відкинутих зовнішніх зв'язків:

$\bar{R}_A$ - у шарнірі A (невідомі по величині і по напрямку);

$\bar{R}_B$ - у шарнірі B (невідомі по величині і по напрямку).

Очевидно, що для всієї групи Ассура план сил побудувати відразу ж можливості немає.

Тому будемо орієнтуватися на побудову плану сил, починаючи, наприклад, з окремо взятої ланки 3. Для цього розкладемо силу $\bar{R}_B$ на дві складові: $\bar{R}_B^n$, спрямовану вздовж лінії AB, і $\bar{R}_B^r$, спрямовану перпендикулярно лінії AB.

2. З рівняння рівноваги моментів сил відносно точки A, записаного для всієї групи Ассура, визначимо складову $\bar{R}_B^r$:

$$\Sigma M_A(P) = 0,$$

$$P_2 \cdot h_2 + P_3 \cdot h_3 - R_B^r \cdot AB = 0.$$

Звідси знайдемо величину

$$R_B^{\tau} = \frac{P_2 \cdot h_2 + P_3 \cdot h_3}{AB}.$$

3. Тепер для окремо взятої ланки 3 (рис. 2.11б) побудуємо план сил по векторному рівнянню

$$\underline{\overline{R}}_{2-3} + \underline{\overline{P}}_3 + \underline{\overline{R}}_B^{\tau} + \underline{\overline{R}}_B^n = 0.$$

Аналіз рівняння показує, що воно вирішується, тому що містить тільки дві невідомі величини сил R_{2-3} і R_B^n . Напрямки векторів $\overline{R}_{2-3}$ і $\overline{R}_B^n$ відомі. Так, вектор сили $\overline{R}_{2-3}$ спрямований перпендикулярно ланці 3 (сили тертя при відносному ковзанні ланки 2 уздовж ланки 3 не враховуються), а вектор сили $\overline{R}_B^n$ спрямований, нагадаємо, уздовж лінії AB .

Послідовність побудов така. Спочатку відкладемо в обраному масштабі μ_P два відомих вектори $\overline{P}_3$ і $\overline{R}_B^{\tau}$. Потім із початку вектора $\overline{P}_3$ проведемо лінію, перпендикулярну ланці 3, а з кінця вектора $\overline{R}_B^{\tau}$ - лінію, паралельну AB .

Перетинання вищезазначених ліній і закоординує довжини векторів $\overline{R}_{2-3}$ і $\overline{R}_B^n$. Всі чотири вектори рівняння рівноваги сил ланки 3 утворюють замкнутий чотирикутник сил з обходом проти годинникової стрілки (рис. 2.11б).

На плані сил показана також рівнодіюча $\overline{R}_B$ сил $\overline{R}_B^{\tau}$ і $\overline{R}_B^n$.

4. Положення на ланці 3 точки K (рис. 2.11б), через яку проходить лінія дії вектора результуючої сили реакції $\overline{R}_{2-3}$ можна знайти будь-яким із двох способів: або знайти відповідно до теореми про три сили точку C перетинання ліній дії сил $\overline{R}_B$ і $\overline{P}_3$, а потім через неї провести перпендикуляр до ланки 3, основою якого і буде точка K ; або скласти рівняння рівноваги моментів сил навколо точки B для ланки 3

$$\Sigma M_B(P) = 0, \quad P_3 \cdot h_3 - R_{2-3} \cdot BK = 0,$$

звідкіля

$$BK = \frac{P_3 \cdot h_3}{R_{2-3}}, \quad \text{а} \quad l_{BK} = BK \cdot \mu.$$

Аналіз взаємодії повзуна 2 і направляючої 3 тут не приводиться, тому що він абсолютно аналогічний аналізу взаємодії повзуна і направляючої, виконаному в попередній задачі.

5. Нарешті можна визначити силу реакції $\overline{R}_A$, побудувавши план сил для всієї групи Ассура відповідно до векторного рівняння:

$$\overline{P}_{\equiv 3} + \overline{R}_{\equiv B} + \overline{P}_{\equiv 2} + \overline{R}_A = 0.$$

Перші два вектори $\overline{P}_3$ і $\overline{R}_B$ вже були побудовані (див. п. 3) на плані сил ланки 3 (рис. 2.11б). Тепер залишилося відкласти в тому ж масштабі μ_P із кінця вектора $\overline{R}_B$ відомий вектор $\overline{P}_2$, а з його кінця провести шуканий вектор $\overline{R}_A$ у початок першого вектора рівняння $\overline{P}_3$.

4. Контрольні запитання

1. Наведіть послідовність силового кінетостатичного розрахунку групи Ассура II-го класу 2-го порядку 1-го виду.

2. Наведіть послідовність силового кінетостатичного розрахунку групи Ассура II-го класу 2-го порядку 2-го виду.

3. Наведіть послідовність силового кінетостатичного розрахунку групи Ассура II-го класу 2-го порядку 3-го виду.

4. Від чого виникає перекіс повзуна на направляючій? Які його можливі наслідки?

5. Як можливо зменшити або усунути цілком шкідливе явище перекосу повзуна на направляючій?

6. Які рівняння кінетостатичної рівноваги Ви знаєте?

Лекція 24

Тема: Кінетостатика механізмів

Зміст: 1. Кінетостатика тангенсного механізму.
2. Кінетостатика сіноусного механізму.
3. Кінетостатика початкового механізму.
4. Контрольні запитання.

1. Кінетостатика тангенсного механізму

Виконаємо в загальному вигляді кінетостатичний розрахунок тангенсного механізму за його кінематичною схемою в заданих положенні і масштабі μ_l (рис. 2.12а). Крім того задані: сила P (H) корисного опору, прикладена до ланки 3, маси ланок m_2 ($кг$) і m_3 ($кг$), а також кутова швидкість кривошипного вала $\omega_l = const$ (c^{-1}).

Силами тяжіння ланок 2 і 3 зневажити.

Перед тим, як почати кінетостатичний розрахунок тангенсного механізму, необхідно виконати його структурний і кінематичний аналіз (такий аналіз утримується в [8] - у поясненнях до рис. 1.17, а також у рішенні задачі 2.9 з рис. 2.17). Скористаємося тут цією інформацією.

Розрахунок виконаємо в наступній послідовності.

1. Розчленуємо тангенсний механізм на початковий механізм (0-1) і групу Ассура II-го класу 2-го порядку 4-го виду (2-3), а також покажемо сили реакції відкинутих зв'язків.

На вихідному механізмі (рис. 2.12б) це буде сила реакції $\bar{R}_{2-1}$, а також зовнішній момент рушійних сил M_p .

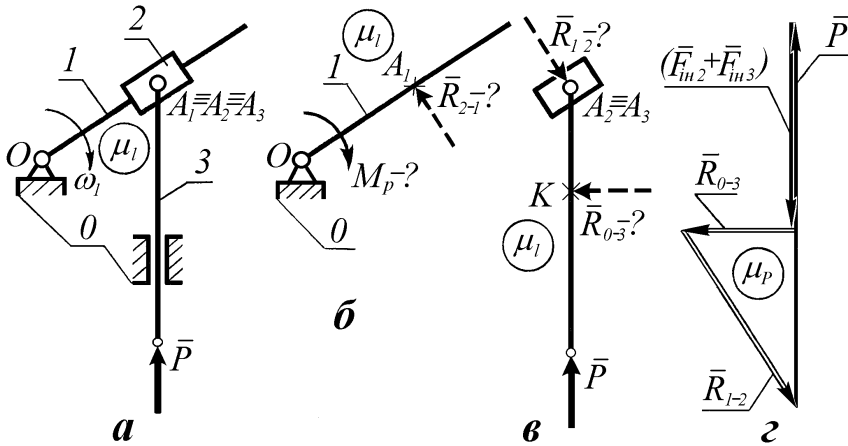


Рис 2.12. Кінетостатика тангенсного механізму

На групі Ассур (2-3) (рис. 2.12б) це будуть сили реакцій відкинутих зв'язків $\bar{R}_{1-2}$ та $\bar{R}_{0-3}$.

Без урахування сил тертя вектори сил $\bar{R}_{1-2}$ і $\bar{R}_{2-1}$ будуть йти перпендикулярно ланці 1 у протилежних напрямках, а вектор $\bar{R}_{0-3}$ буде спрямований перпендикулярно ланці 3.

Точка K прикладення сили реакції $\bar{R}_{0-3}$ направляючої 0 на повзун 3 невідома.

2. Визначимо інерційні навантаження на ланки 2 і 3. Тому що прискорення точок A_2 і A_3 рівні одна одній ($\bar{W}_{A_2} = \bar{W}_{A_3}$) і спрямовані вертикально нагору (див. план прискорень для тангенсного механізму в [8] на рис. 2.17б), вектори сил інерції $\bar{F}_{in2}$ і $\bar{F}_{in3}$ будуть спрямовані вертикально униз по одній лінії (уздовж ланки 3).

Величини сил F_{in2} і F_{in3} можна обчислити за формулами

$$F_{in2} = m_2 \cdot W_{A_2},$$

$$F_{in3} = m_3 \cdot W_{A_3}.$$

Моментів сил інерції в ланок 2 і 3 виникати не буде, тому що ланка 2 обертається за умовою задачі рівномірно ($\omega_2 = \omega_1 = const$), а ланка 3 рухається поступально.

Прикладемо інерційні сили $\overline{F}_{in2}$ і $\overline{F}_{in3}$ фіктивно як зовнішні до ланок 2 і 3. Умовно ці сили прикладені в точках $A_2 \equiv A_3$, тому що центри мас ланок 2 і 3 не обговорені в умові задачі. Ланка 2 звичайно виконується конструктивно так, щоб центр її мас знаходився в точці A . Що стосується ланки 3, то центр її мас S_3 може знаходитися в будь-якому місці між точками A_3 і B .

3. Побудуємо план сил для групи Ассура (2-3) відповідно до векторного рівняння рівноваги сил:

$$\overline{R}_{1-2} + \overline{P} + \overline{F}_{in2} + \overline{F}_{in3} + \overline{R}_{0-3} = 0.$$

Рівняння вирішується, тому що містить усього дві невідомі величини сил реакцій R_{1-2} і R_{0-3} .

Послідовність побудов (рис. 2.122) така. Спочатку в обраному масштабі μ_P відкладемо відомі вектори сил $\overline{P}$, $\overline{F}_{in2}$ і $\overline{F}_{in3}$. Потім із початку вектора $\overline{P}$ проведемо лінію, перпендикулярну напрямку ланки 1, а з кінця останнього відомого вектора $\overline{F}_{in3}$ - лінію, перпендикулярну напрямку ланки 3.

Дві вищезазначені лінії своєю точкою перетинання закоординують у масштабі μ_P довжини векторів $\overline{R}_{1-2}$ (мм) і $\overline{R}_{0-3}$ (мм).

Знайдемо величини сил

$$R_{1-2} = \overline{R}_{1-2} \cdot \mu_P (H) \quad \text{і} \quad R_{0-3} = \overline{R}_{0-3} \cdot \mu_P (H).$$

4. Знайдемо точку K прикладення сили реакції $\overline{R}_{0-3}$ направляючої 0 на повзун 3 відповідно до рівняння рівноваги моментів сил, прикладених до ланки 3, відносно точки A_3 :

$$\sum M_{A_3} (P) = 0,$$

$$R_{0-3} \cdot A_3 K = 0.$$

Звідси знайдемо $A_3 K = 0$, тому що $R_{0-3} \neq 0$.

Це означає, що точка K збігається з точкою A_3 . Отже ланка 3 має перекіс на направляючій 0.

Крайові тиски на направляючу з боку повзуна можна було б визначити, як це робилося в задачі 2.3. Проте для цього знадобилася б додаткова інформація про геометричні величини деяких елементів ланок тангенсного механізму.

5. Тепер розглянемо кінетостатику початкового механізму (рис. 2.126). Силу R_{2-1} знайдемо за умовою:

$$\overline{R}_{2-1} = -\overline{R}_{1-2},$$

тобто величини в сил R_{2-1} і R_{1-2} однакові, а напрямки - протилежні.

Момент рушійних сил M_p знайдемо по рівнянню:

$$R_{2-1} \cdot l_{OA_1} - M_p = 0.$$

$$\text{Звідси} \quad M_p = R_{2-1} \cdot l_{OA_1},$$

$$\text{де} \quad l_{OA_1} = OA_1 \cdot \mu_l.$$

Зауважимо, що момент зовнішніх сил, прикладених до кривошипного вала, який забезпечує його рівномірне обертання, прийнято називати зрівноважуючим моментом сил $M_{зр}$. В даний час це поняття застаріло і рідко використовується при силовому аналізі механізмів, тому що практично мало зустрічається випадків, коли $\omega_l = const$.

2. Кінетостатика сіноусного механізму

Виконаємо в загальному вигляді кінетостатичний розрахунок сіноусного механізму за його кінематичною схемою та заданими положенню механізму і масштабу μ_l (рис. 2.13а). Відомі також: прикладена до ланки 3 у точці B зовнішня сила P (H), маси ланок 2 і 3 m_2 ($кг$) і m_3 ($кг$), а також постійна кутова швидкість кривошипа $\omega_l = const$ ($c-1$).

Перед тим, як почати кінетостатичний розрахунок механізму, необхідно виконати його структурний і кінематичний аналізи. Такі аналізи утримуються в [8] (у поясненнях до рис. 1.18, а також у рішенні задачі 2.10). Скористаємося цією інформацією.

Розрахунок виконаємо в наступній послідовності.

1. Розчленуємо сіноусний механізм на початковий механізм (0-1) і групу Ассура II-го класу 2-го порядку 5-го виду (2-3).

Покажемо сили реакцій відкинутих зв'язків.

На початковому механізмі (рис. 2.13б) це буде невідома ні по величині ні по напрямку сила $\overline{R}_{2-1}$, а також зовнішній момент сил опору M_o , тому що задана зовнішня сила $\overline{P}$ спрямована в бік руху ланки 3 (тобто є рушійною силою).

На групі Ассура (2-3) (рис. 2.13в) це будуть сила реакції $\overline{R}_{1-2}$, рівна силі $\overline{R}_{2-1}$ і протилежно їй спрямована, а також сила реакції $\overline{R}_{0-3}$, спрямована по вертикалі, тому що сили тертя не враховуються.

Точка K прикладення сили $\overline{R}_{0-3}$ не відома.

2. Визначимо інерційні навантаження на ланки 2 і 3:

$$\bar{F}_{in2} = -m_2 \cdot \bar{W}_{S_2},$$

$$\bar{F}_{in3} = -m_3 \cdot \bar{W}_{S_3}.$$

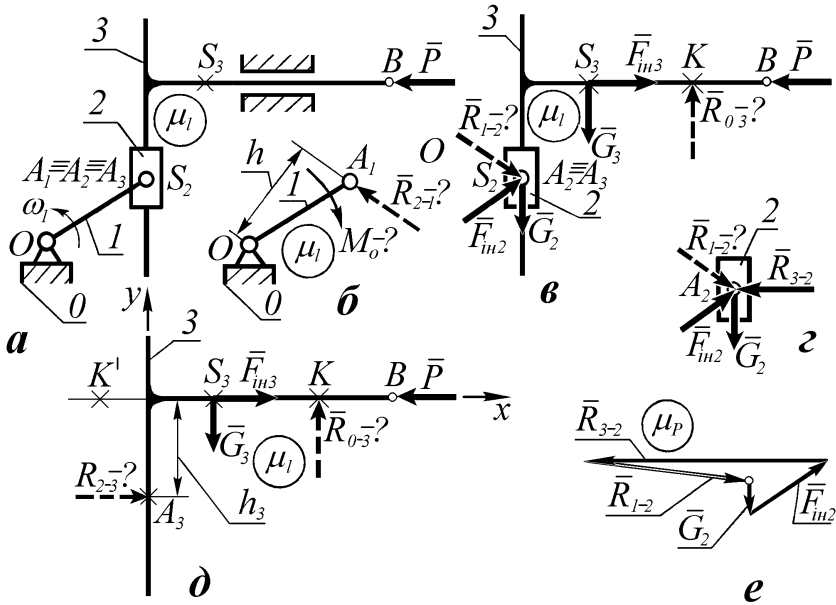


Рис. 2.13. Кінетостатика синусного механізму

Прискорення $\bar{W}_{S_2}$ і $\bar{W}_{S_3}$ знайдені з плану прискорень ([8] рис. 2.18).

Вектор прискорення точки S_2 дорівнює

$$\bar{W}_{S_2} = \bar{W}_{A_2} = \bar{W}_{A_1}.$$

Його величина $W_{S_2} = W_{A_1} = \omega_1^2 \cdot l_{OA} \text{ (м/с}^2\text{)}$.

Спрямовано прискорення $\bar{W}_{S_2}$ від точки A до точки O , як нормальне прискорення точки A_1 , у її рівномірному обертанні навколо точки O .

Вектор прискорення точки S_3 дорівнює

$$\bar{W}_{S_3} = \bar{W}_{A_3} = \bar{W}_B.$$

Його величина $W_{S_3} = W_{A_3} = |p_W a_3| \cdot \mu_W$ ([8] - рис. 2.18б).

Спрямоване прискорення $\overline{W}_{S_3}$ вліво.

Таким чином, вектор сили $\overline{F}_{in2}$ спрямований паралельно ланці 1 у напрямку від точки O до точки A , а вектор сили $\overline{F}_{in3}$ спрямований вправо.

Моментів сил інерції ланки 2 і 3 механізму не мають, тому що рухаються обидва без обертання.

Прикладемо до ланок 2 і 3 інерційні сили $\overline{F}_{in2}$ і $\overline{F}_{in3}$ фіктивно як зовнішні, як це показано на рис. 2.13б, у центрах мас ланок (у точках S_2 та S_3).

3. Аналіз складу сил, прикладених до групи Ассура (2-3), показує, що рівняння рівноваги моментів і векторне рівняння рівноваги сил відразу для всієї групи Ассура поки не можуть бути вирішені, тому що вони будуть мати надлишкову кількість невідомих.

Тому спочатку розглянемо кінетостатичну рівновагу окремо взятої ланки 3 (рис. 2.13д).

Відкинемо ланку 2 і замість відкинутого зв'язку прикладемо силу реакції зв'язку $\overline{R}_{2-3}$ в горизонтальному напрямку (без урахування сил тертя, що були б спрямовані вертикально).

Тому що сили, прикладені до ланки 3, спрямовані в двох взаємно перпендикулярних напрямках, можна обійтися без побудови плану сил.

З рівняння $\Sigma P_y = 0, R_{0-3} - G_3 = 0$
знайдемо $R_{0-3} = G_3 = m_3 \cdot g (H).$

З рівняння $\Sigma P_x = 0, R_{2-3} + F_{in3} - P = 0$
знайдемо $R_{2-3} = P - F_{in3} (H).$

Далі визначимо місце розташування точки K .

Спочатку точка K була показана умовно безпосередньо в місці відкинутого зв'язку, що накладається на повзун 3 з боку направляючої 0 (стояка). Але, відомо, що у випадку перекоосу повзуна на направляючій точка K може піти убік за межі довжини контакту повзуна і направляючої (див., наприклад, задачу 2.3).

Складемо рівняння рівноваги моментів навколо точки S_3 для окремо взятої ланки 3:

$$\Sigma M_{S_3}(P) = 0,$$
$$R_{0-3} \cdot S_3K + R_{2-3} \cdot h_3 = 0.$$

Звідси знайдемо $S_3K = -\frac{R_{2-3}}{R_{0-3}} \cdot h_3.$

Знак "мінус" при визначенні відрізка S_3K говорить про те, що відрізок потрібно відкласти в зворотному напрямку від точки S_3 , тобто вліво, а не вправо. І тоді точка K займе положення K' . Вона може виявитися навіть за межами довжини ланки 3, адже це уявлювана точка, через яку проходить рівнодіюча крайових складових сили реакції R_{0-3} при перекосі повзуна на направляючій.

А в даному випадку очевидний істотний перекис повзуна 3 на направляючій 0.

4. Тепер можемо розглянути кінетостатичну рівновагу окремо взятої ланки 2 (рис. 2.13з).

Складемо векторне рівняння кінетостатичної рівноваги сил, що діють на ланку 2:

$$\overline{G}_{=2} + \overline{F}_{=u2} + \overline{R}_{=3-2} + \overline{R}_{1-2} = 0.$$

Очевидно, що в рівнянні невідома по величині і напрямку тільки сила реакції R_{1-2} кривошипа 1 на камінь 2 і воно може бути вирішено.

Зауважимо, що сила ваги ланки 2 $G_2 = m_2 \cdot g$, а сила $\overline{R}_{3-2} = -\overline{R}_{2-3}$. Сила ж $\overline{R}_{2-3}$ була знайдена при силовому аналізі ланки 3.

Графічне рішення останнього векторного рівняння шляхом побудови плану сил подане на рис. 2.13е. Кругечком позначено початок (і кінець) побудови. Перші три вектори сил $\overline{G}_2$, $\overline{F}_{in2}$ і $\overline{R}_{3-2}$ відкладені послідовно в обраному масштабі μ_r . Останній (невідомий) вектор сили $\overline{R}_{1-2}$ з'єднав кінець третього і початок першого векторів.

5. Кінетостатичний розрахунок початкового механізму дозволяє знайти момент сил опору M_o , прикладений ззовні до кривошипного вала 1. Тут момент сил M_o також відіграє роль зрівноважуючого (моменту сил, що забезпечує рівномірність обертання ланки 1, тобто $\omega_1 = const$).

$$\text{З рівняння } \sum M_o(P) = 0, R_{2-1} \cdot h \cdot \mu_l - M_o = 0$$

знайдемо $M_o = R_{2-1} \cdot h \cdot \mu_l$,

де h - показана на рис. 2.13 б відстань у мм,

а $\overline{R}_{2-1} = -\overline{R}_{1-2}$, тобто сила R_{2-1} дорівнює по величині знайденій вище силі R_{1-2} і протилежно їй спрямована.

3. Кінетостатика початкового механізму

Розглянемо кінетостатику початкового механізму та визначимо відносну похибку кінетостатичного розрахунку важільного механізму, якщо

в результаті цього розрахунку знайдена сила реакції $R_{2-1}=20 \text{ кН}$, що діє на кривошип у точці A горизонтально вліво. Положення кривошипа показане на рис. 2.14. Відомі також такі вихідні дані: $OA=30 \text{ мм}$; $\mu_l=2 \cdot 10^{-3} \text{ м/мм}$; $\varphi=45^\circ$; $J^I=55,2 \text{ кгм}^2$; $\varepsilon_I=-10 \text{ с}^{-2}$, $M_p=260 \text{ Нм}$; кривошип обертається за годинниковою стрілкою.

Розрахунки виконаємо в наступній послідовності.

1. Визначимо момент сили реакції R_{2-1} навколо точки O

$$\begin{aligned} M_O(R_{2-1}) &= R_{2-1} \cdot h \cdot \mu_l = \\ &= 20 \cdot 21,2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,8485 \text{ кНм} = \\ &= 848,5 \text{ Нм}, \end{aligned}$$

де

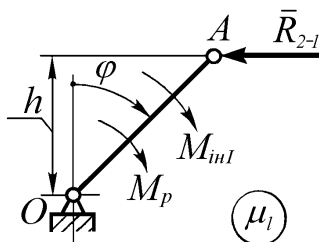


Рис. 2.14. Кінетостатика початкового механізму

$$\begin{aligned} h &= OA \cdot \cos \varphi = OA \cdot \cos 45^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 21,2 \text{ мм}. \end{aligned}$$

2. Знайдемо момент сил інерції ланок I-ї групи

$$M_{in} = J^I \cdot \varepsilon_I = 55,2 \cdot 10 = 552 \text{ Нм}.$$

Зауважимо, що момент M_{in} спрямований по напрямку обертання кривошипного вала (головного вала машини), тому що знак "мінус" у вихідних даних

величини кутового прискорення ε_I означає, що кривошипний вал обертається з уповільненням.

3. У даній постановці задачі рівняння рівноваги моментів сил, прикладених до кривошипного вала, є надлишковим. По ньому можна визначити похибку виконаного кінетостатичного розрахунку.

$$\begin{aligned} \text{Запишемо рівняння} \quad \Sigma M_O(P) &= 0, \\ M_p + M_{in} - R_{2-1} \cdot h \cdot \mu_l &= 0. \end{aligned}$$

Відзначимо, що якщо рівняння задовольнялося абсолютно, то це означало б, що похибка в кінетостатичному розрахунку відсутня.

Якщо ж $\Sigma M_O(P) = \Delta M \neq 0$, тоді похибка в кінетостатичному розрахунку є.

Визначимо величину

$$\Delta M = M_p + M_{in} - R_{2-1} \cdot h \cdot \mu_l = 260 + 552 - 848,5 = -36,5 \text{ Нм}.$$

Знак "мінус" величини ΔM говорить лише про те, що величина сили R_{2-1} знайдена із "недостачею", тому нижче він не враховується.

4. Тому що абсолютна похибка обчислень недостатньо інформативна, варто визначити відносну похибку $\Delta M\%$ (у %).

І тут виникає питання: стосовно якої величини визначати відносну похибку?

Найбільше достовірною величиною рівняння моментів сил є величина моменту рушійних сил M_p , тому що вона, по-перше, знаходиться найпершою з усіх інших складових рівняння (тобто самим коротким шляхом обчислень), а по-друге, вона знаходиться за допомогою інтегрування роботи сил за цикл, де дуже низька можливість помилки.

Проте, як правило, величина M_p сама маленька з усіх трьох складових рівняння моментів сил, тому відносна похибка може стати завищеною.

Знайдемо відносну похибку $\Delta M\%$ відносно величини рушійного моменту сил M_p :

$$\Delta M_p\% = \frac{\Delta M}{M_p} \cdot 100\% = \frac{36,5}{260} \cdot 100\% = 14\%.$$

Як бачимо, дійсно відносна похибка істотна. В окремих випадках вона може бути ще більшою, але ж відомо, що інженерні розрахунки повинні укладатися в 5%-ну похибку обчислень.

Як же бути?

Пропонується такий спосіб усередненої оцінки відносної похибки $\Delta M\%$:

$$\Delta M\% = \frac{|\Delta M|}{M_{\Sigma} / 2} \cdot 100\%,$$

де $M_{\Sigma} / 2$ - усереднений момент сил рівняння рівноваги моментів, що можна визначити по формулі

$$\begin{aligned} M_{\Sigma} / 2 &= \frac{|M_{\oplus}| + |M_{\ominus}|}{2} = \frac{|M_p + M_{inl}| + |R_{2-1} \cdot h \cdot \mu_l|}{2} = \\ &= \frac{|260 + 552| + |848,5|}{2} = 830,25 \text{ Нм.} \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta M\% &= \frac{|\Delta M|}{M_{\Sigma} / 2} \cdot 100\% = \\ &= \frac{36,5}{830,25} = 4,3\%. \end{aligned}$$

У даному випадку дотримується $\Delta M\% < 5\%$.

Це говорить про те, що усереднена відносна похибка обчислення всіх основних величин (J^I , ε_I , M_p , R_{2-I}), а також інших проміжних величин динамічних і кінематичних розрахунків не перевищує 5%-ного припустимого порога.

Зауважимо, що при курсовому проектуванні звичайно допускається подвоєна похибка $\Delta M\% \leq 10\%$, оскільки розрахунки ведуться всього по 12-ти положеннях механізму, а не по 24-х або 36-ти, і крім того починаючий інженерну практику студент ще не має достатнього досвіду виконання проектних робіт.

4. Контрольні запитання

1. У чому полягає мета кінетостатичного розрахунку механізмів машини?
2. Прокоментуйте принцип д'Аламбера з теоретичної механіки стосовно до механізму машини.
3. У чому полягає фіктивність прикладення інерційних навантажень до ланок механізму?
4. Яка послідовність виконання кінетостатичного розрахунку механізму?
5. Наведіть послідовність силового кінетостатичного розрахунку групи Ассура II-го класу 2-го порядку 4-го виду.
6. Наведіть послідовність силового кінетостатичного розрахунку групи Ассура II-го класу 2-го порядку 5-го виду.
7. Які рівняння кінетостатичної рівноваги Ви знаєте?
8. Як визначається відносна похибка кінетостатичного розрахунку механізмів машини?
9. У чому полягають особливості силового аналізу початкового механізму?

Лекція 25

Тема: Кулачкові механізми

- Зміст: 1. Призначення кулачкових механізмів.
2. Різновиди схем кулачкових механізмів.
3. Зведення споріднених схем. Дійсний і теоретичний профілі.
4. Методи кінематичного аналізу.

1. Призначення кулачкових механізмів

Кулачкові механізми призначені для здійснення руху вихідної ланки (штовхача) із будь-яким наперед заданим законом.

Як правило, входним рухом кулачкового механізму є обертальний рух кулачкового вала. Нижче для спрощення викладу матеріалу будемо вважати входну швидкість обертання кулачкового вала постійною ($\omega_l = \text{const}$).

У кулачкових механізмів з одним ступенем свободи ($w=1$) найбільше часто зустрічається вихідний рух - зворотно-поступальний або зворотно-хитальний.

Найпоширенішим випадком поступального і хитного (коромислового) руху штовхача є випадок циклічного руху (за заданою циклограмою) із чотирма фазами: віддалення (підйому), дальнього вистою, повернення (опускання) і ближнього вистою.

Закон руху штовхача при віддаленні і поверненні в загальному випадку може бути довільним, але частіше всього він вибирається з декількох найпоширеніших законів руху, що характеризуються кусочно-лінійною або гармонійною зміною прискорень або швидкостей штовхача.

Нижче будуть розглянуті тільки найпоширеніші типові схеми плоских кулачкових механізмів і типові закони руху штовхачів.

Серед типових задач, що ставляться відносно кулачкових механізмів, можна виділити задачу аналізу геометрії профілів кулачків, задачу кінематичного аналізу, задачу силового аналізу, а також задачу кінематичного синтезу з урахуванням окремих динамічних властивостей.

Дуже важливим динамічним параметром кулачкового механізму є кут тиску δ кулачка на штовхач, від якого багато в чому залежить ККД кулачкового механізму, знос тертьових елементів кінематичних пар, а також виникнення такого шкідливого явища, як заклинення штовхача.

2. Різновиди кулачкових механізмів

На рис. 3.1 показані найпоширеніші схеми плоских кулачкових механізмів.

Тут: 1-кулачок; 2-штовхач. Відзначимо, що в більшості конструкцій кулачкових механізмів передбачається зворотна пружина, яка забезпечує силове замикання вищої кінематичної пари при динамічних інерційних навантаженнях, що відривають штовхач від кулачка (при максимальних від'ємних прискореннях штовхача) і здійснює зворотний хід штовхача. Але тому що пружина не є власне ланкою кулачкового механізму, на схемах вона і не показана. Нерухома (0-ова) ланка механізму (*стояк*) на схемах для спрощення не позначена виносками.

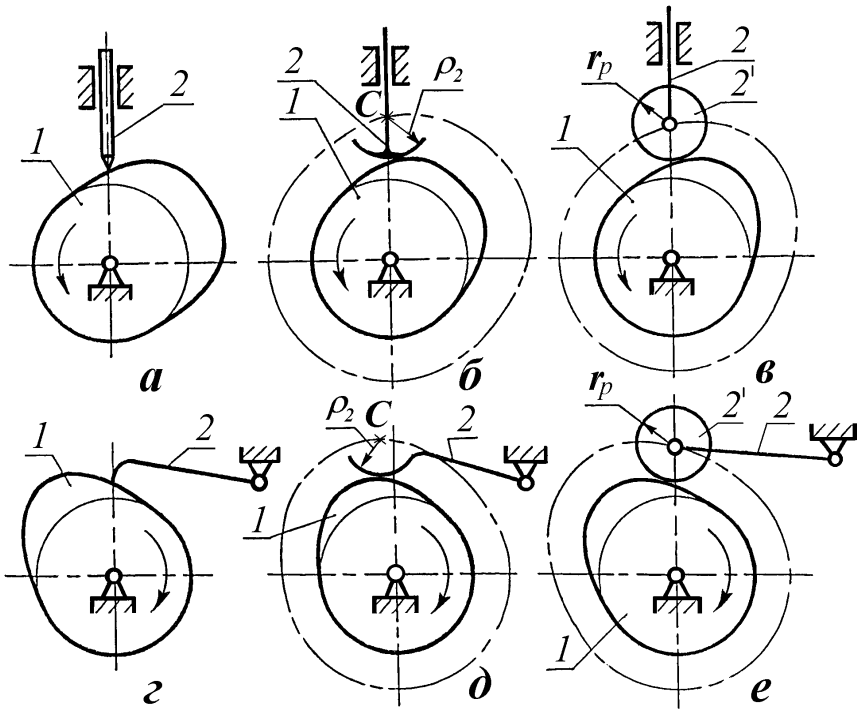


Рис. 3.1 Розповсюджені типи кулачкових механізмів

На рис. 3.1 *а, б і в* показані кулачкові механізми зі штовхачем, що рухається зворотно-поступально.

На рис. 3.1 *г, д і е* показані кулачкові механізми з коромисловим штовхачем, що рухається зворотно-хитально.

Показаний на рис. 3.1 ***a*** і ***z*** штовхач називається гострим або голчастим.

На рис. 3.1 ***б*** і ***д*** схематично зображені штовхачі зі сферичною (або циліндричною) робочою поверхнею, що сковзають по циліндричній поверхні обертowego кулачка.

На рис. 3.1 ***в*** і ***е*** показані штовхачі, оздоблені циліндричними роликами, які котяться по поверхні кулачка, за рахунок чого досягається високий ККД механізму і підвищується довговічність кулачка і штовхача.

3. Зведення споріднених схем. Дійсний і теоретичний профілі

Незважаючи на відмінність схем кулачкових механізмів, зображених на рис. 3.1 ***a***, ***б*** і ***в***, всі вони можуть бути подані одним єдиним різновидом кінематичної схеми, по якій можна вирішувати задачі кінематичного аналізу і синтезу цих кулачкових механізмів.

Те ж саме можна сказати й у відношенні кулачкових механізмів, поданих на рис. 3.1 ***z***, ***д*** і ***е***.

У такий спосіб усі шість типів кулачкових механізмів, показані на рис. 3.1, зведуться усього лише до двох кінематичних схем: схеми ***б*** і ***в*** будуть зведені до схеми ***a***; схеми ***д*** і ***е*** будуть зведені до схеми ***z***.

Введемо поняття: *робочий* (дійсний) *профіль* кулачка; *теоретичний* (центровий) *профіль* кулачка.

На схемах ***a*** і ***z*** є тільки робочий профіль кулачка, який умовно можна вважати і теоретичним.

На схемах ***в*** і ***е*** робочим профілем є дійсний профіль кулачка 1, по якому котиться ролик штовхача 2.

Центровим же профілем буде вважатися уявлювана крива лінія, по котрій відносно кулачка буде переміщатися центр ролика. Це еквідистантна (рівновіддалена) крива робочому профілю.

Теоретичний профіль на схемах ***в*** і ***е*** показаний штрих-пунктирною лінією. Він віддалений від робочого профілю на відстань, що дорівнює радіусу ролика r_p .

На схемах ***б*** і ***д*** центровий профіль утворений як траєкторія відносного переміщення центру кривизни C сферичної або циліндричної поверхні штовхача 2 відносно кулачка 1. Він віддалений від робочого профілю на відстань, що дорівнює радіусу кривизни робочої поверхні штовхача ρ_2 .

Побудова теоретичного профілю по робочому і навпаки (робочого профілю по теоретичному) методом огинання дугових засічок показана на рис. 3.2.

В обох випадках центри дуг засічок позначені числами від 0 до 17. У принципі, число засічок може бути довільним.

При побудові теоретичного профілю робочий профіль вважається заданим.

При побудові робочого профілю вважається вже знайденим теоретичний профіль.

У обох випадках радіус ролика r_p (або ρ_2 при сферичній поверхні штовхача) повинен бути відомий.

Побудова профілів кулачка методом огинання дугових засічок застосовується тільки в межах його кута підйому φ_n і кута опускання φ_o .

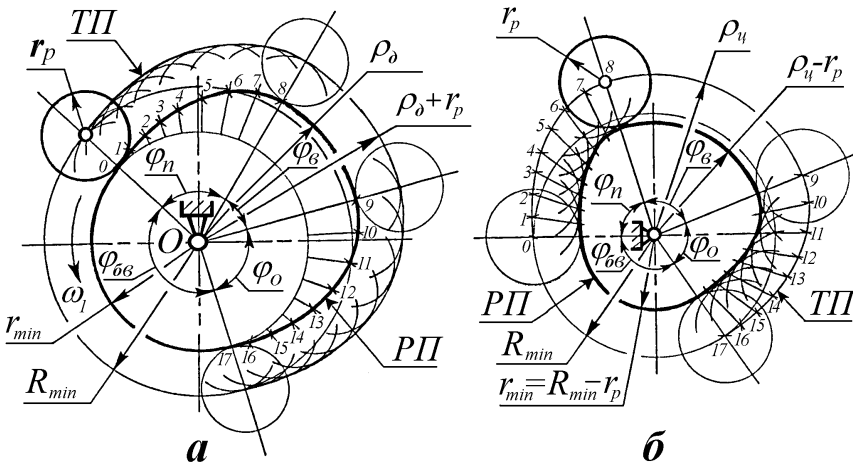


Рис. 3.2. Побудова теоретичного (а) і робочого (б) профілів кулачка

У межах же кутів дальнього вистою φ_6 і ближнього вистою φ_{66} профілі кулачка окреслюються дугами окружностей із центром у точці O , що лежить на осі обертання кулачка.

При переході від робочого профілю до теоретичного (рис. 3.2а) до радіусів кривизни дуг дальнього ρ_d і ближнього r_{min} вистоїв необхідно додати радіус кривизни ролика r_p (або ρ_2).

При переході від центрального профілю до робочого (рис. 3. 2б) від радіусів кривизни дуг дальнього ρ_4 і ближнього R_{min} вистоїв необхідно відняти радіус кривизни ролика r_p (або ρ_2).

Окружності мінімальних радіусів робочого профілю - r_{min} і центрального профілю - R_{min} служать базою відліку переміщень штовхачів, тому їх викреслюють цілком (тонкими лініями).

Розміри кутів φ_n , φ_v , φ_o , φ_{ov} визначаються робочим процесом, що обслуговується кулачковим механізмом.

Робочим кутом профілю кулачка вважається сума кутів підйому, дальнього вистою й опускання

$$\varphi_p = \varphi_n + \varphi_v + \varphi_o. \quad (3.1)$$

У залежності від робочого процесу φ_p може мати величину від декількох десятків градусів до 360° .

Іноді кут дальнього вистою $\varphi_v = 0$, тобто дальній вистій відсутній. Тоді відразу ж після закінчення підйому починається опускання штовхача.

У літературі можна зустріти описання кулачкового механізму з так називаним плоским тарілчастим штовхачем. Його схема відповідає схемі (рис. 3.1б), якщо $\rho_2 \rightarrow \infty$.

Для цього механізму застосовується окремий математичний підхід, тому що математичне забезпечення інших схем, показаних на рис. 3.1, для кулачкового механізму з плоским тарілчастим штовхачем не підходить.

Але в силу того, що штовхачі з плоскою тарілкою через свою геометричну хибу (з появою зносу тарілка штовхача набуває від'ємної кривизни, після чого нормальна робота механізму порушується) практично не застосовуються, тут вони надалі не розглядаються.

4. Методи кінематичного аналізу кулачкових механізмів

Існує принаймні три відмінних один від одного методів кінематичного аналізу кулачкових механізмів:

1. *Аналітичний метод*, що застосовується для високоточного кінематичного аналізу швидкісних кулачкових механізмів із кулачками, обкресленими частіше усього сполученими дугами з різними постійними радіусами кривизни (дугами окружностей) або з профілями, які побудовані на основі функцій $\sin$ чи $\cos$.

2. *Метод побудови планів швидкостей і прискорень*, що застосовується для точного кінематичного аналізу швидкісних кулачкових механізмів із кулачками, обкресленими в межах робочого профілю дугами перемінної кривизни. Цей метод спрощується при використанні так названих замінних шарнірно-важільних механізмів, що не містять в собі вищі кінематичні пари.

3. *Метод кінематичних діаграм*, що застосовується для рішення інженерних задач (із припустимою похибкою до 5% по діаграмі прискорень штовхача), пов'язаних із кінематичним аналізом і кінематичним синтезом середньошвидкісних кулачкових механізмів середньої точності.

Останній метод надзвичайно простий і наглядний. Особливо ефективний він у навчальному процесі, як перший ступінь пізнання. Розібравшись у ньому, можна переходити до більш складних методів, що на

заключних стадіях фактично збігаються з його методикою, заснованою на опрацюванні кінематичних діаграм, тільки забезпечують одержання більш точних результатів.

5. Контрольні запитання

1. Яке призначення кулачкових механізмів?
2. Які типи кулачкових механізмів Ви знаєте?
3. Перерахуйте типи штовхачів кулачкових механізмів.
4. З якою метою застосовуються штовхачі з роликом?
5. Що з себе уявляють робочий (дійсний) і теоретичний (центровий) профілі кулачків?
6. Як відтворити по робочому профілю кулачка його теоретичний профіль і, навпаки, по теоретичному профілю - робочий?
7. З яких кутів складається звичайно робочий кут профілю кулачка?
8. Які методи кінематичного аналізу кулачкових механізмів Вам відомі?

Лекція 26

Тема: Кінематичний аналіз кулачкових механізмів методом діаграм

- Зміст: 1. Центральний механізм з голчастим штовхачем.
2. Нецентральний механізм з голчастим штовхачем.
3. Механізм з коромисловим штовхачем.
4. Кут тиску кулачка на штовхач.
5. Контрольні запитання.

1. Центральний механізм з голчастим штовхачем

Розглянемо рішення деяких задач кінематичного аналізу кулачкових механізмів за методом кінематичних діаграм.

Якщо необхідно зробити кінематичний аналіз кулачкового механізму з роликівим, сферичним або циліндричним штовхачем, спочатку необхідно побудувати центровий профіль, а вже по ньому вирішувати задачу.

Визначимо в загальному вигляді закони руху штовхача центрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем по заданим його кінематичній схемі і профілю кулачка (рис. 3.3). Вважатимемо також відомими кутову швидкість ω обертання кулачка і масштаб довжин μ .

Виконаємо кінематичний аналіз механізму в наступній послідовності.

1. Відзначимо, що механізм називається центральним (або аксіальним) тому, що вісь (пряма лінія) переміщення штовхача 2 перетинається з віссю обертання кулачка 1. Якщо прийняти обертання кулачка проти годинникової стрілки, тоді можна вважати, що штовхач знаходиться на початку робочого ходу віддалення (або підйому).

Для побудови діаграми залежності переміщення S штовхача 2 від кута φ повороту кулачка (або також від часу t при $\omega = \text{const}$, тому що при цьому буде просліджуватися лінійна залежність між часом t і кутом φ повороту кулачка $\varphi = \omega t$) обернемо рух механізму, надавши йому мислено, не порушуючи відносного руху ланок, додаткову кутову швидкість $(-\omega)$.

Тоді будемо спостерігати кулачок 1 нерухомим (зупиненим), а штовхач разом із стояком буде повертатися навколо нього за годинниковою стрілкою зі швидкістю ω .

Лінія осі стрижня штовхача 2 при цьому увесь час буде спрямована до центру O кулачка 1.

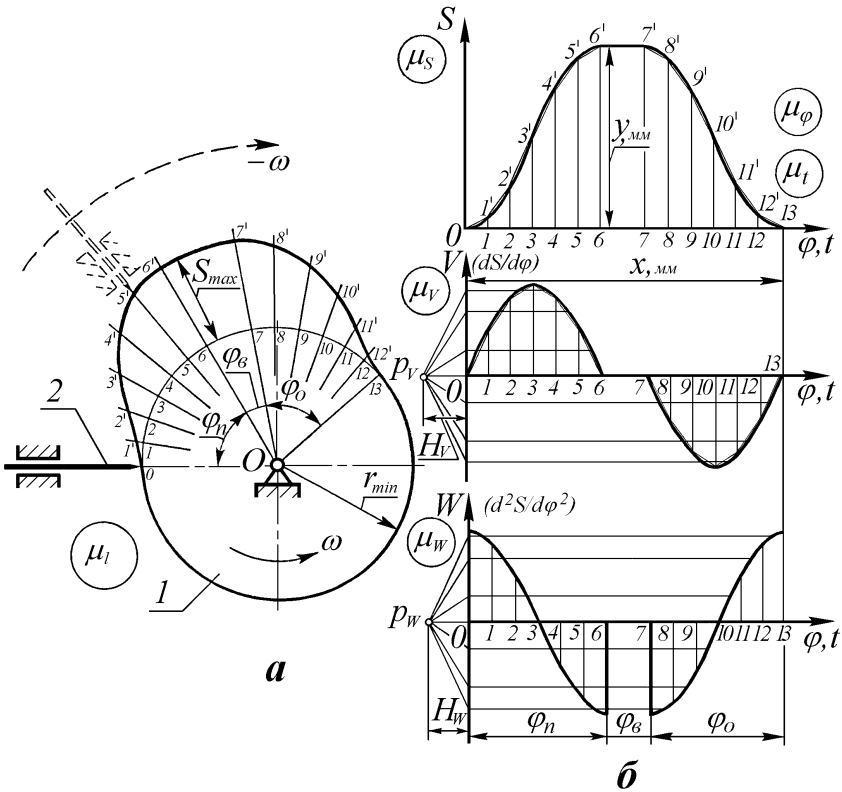


Рис. 3.3. Кінематика центрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем

Розіб'ємо окружність мінімального радіуса r_{min} у межах кутів φ_n і φ_o на деяке число частин (так, на рис. 3.3а кути φ_n і φ_o розбиті кожний на 6 рівних частин).

Через отримані точки на окружності мінімального радіуса r_{min} : 1, 2, 3 і т. д. проведемо з точки O радіальні промені. Ці промені перетнуться з профілем кулачка в точках 1^1 , 2^1 , 3^1 і т. д.

Очевидно, що відстані $1-1^1$, $2-2^1$, $3-3^1$ і т. д. на кінематичній схемі кулачкового механізму і є шуканими переміщеннями штовхача 2 у моменти часу t_1 , t_2 , t_3 і т. д. у масштабі μ_l .

Побудуємо діаграму залежності S штовхача 2 від кута φ повороту кулачка 1.

Для цього виберемо місце на кресленні для трьох графіків.

Розіб'ємо обрану площу на три (приблизно рівні) смуги.

Розрахуємо масштаб переміщень μ_S (котрий необов'язково буде дорівнювати μ_l) за формулою

$$\mu_S = \frac{S_{max}}{y}, \quad (3.2)$$

де S_{max} - максимальне переміщення (в m) штовхача 2, яке можна знайти по кінематичній схемі механізму

$$S_{max} = |b - b^I| \cdot \mu_l \text{ (м)}.$$

Відкладемо у масштабі μ_S на графіку переміщення S_1, S_2, S_3 і т. д. як ординати $|I - I^I| = \frac{S_1}{\mu_S}$; $|2 - 2^I| = \frac{S_2}{\mu_S}$; $|3 - 3^I| = \frac{S_3}{\mu_S}$ і т. д. у точках 1, 2, 3 і т. д. на осі φ .

При цьому масштаб μ_φ можна розрахувати по формулі

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi_p}{x} = \frac{\varphi_n + \varphi_e + \varphi_o}{x} \text{ (рад/мм)}. \quad (3.3)$$

Масштаб часу μ_t можна розрахувати по формулі

$$\mu_t = \frac{t_p}{x} = \frac{\varphi_n + \varphi_e + \varphi_o}{\omega \cdot x} \text{ (с/мм)}, \quad (3.4)$$

де t_p - час робочого руху (в секундах), розрахований як відношення кута φ_p (у радіанах) до кутової швидкості ω (у радіанах за секунду).

Як впливає з формул (3.3) і (3.4.), між масштабами μ_φ і μ_t існує залежність

$$\mu_\varphi = \mu_t \cdot \omega$$

З'єднаємо плавною кривою лінією вершини усіх відкладених ординат і одержимо діаграму залежності переміщення S штовхача від кута φ повороту кулачка.

Далі графічно продиференціюємо графік залежності S за часом t (див. п. 2.2. [8]).

У результаті одержимо графік залежності лінійної швидкості V штовхача 2 від кута φ та від часу t .

Друге диференціювання дасть можливість побудувати діаграму залежності прискорення W штовхача 2 від кута повороту кулачка або від часу t .

Побудовані діаграми S , V і W показані на рис. 3.3б.

Масштаби швидкості V і прискорення W , а також аналога швидкості

$S^I = \frac{dS}{d\varphi}$ і аналога прискорення $S^{II} = \frac{d^2S}{d\varphi^2}$ розраховуються по наведених

нижче формулах (див. п. 2. [8]).

Масштаб аналога швидкості μ_{S^I} можна знайти по формулі

$$\mu_{S^I} = \frac{\mu_S}{\mu_\varphi \cdot H_V} \left(\frac{M}{mm} \right) \quad (3.5)$$

Масштаб швидкості μ_V штовхача знаходиться по формулі

$$\mu_V = \frac{\mu_S}{\mu_t \cdot H_V} \left(\frac{M / c}{mm} \right). \quad (3.6)$$

або

$$\mu_V = \mu_{S^I} \cdot \omega.$$

Масштаб аналога прискорення $\mu_{S^{II}}$ штовхача можна знайти по формулі

$$\mu_{S^{II}} = \frac{\mu_{S^I}}{\mu_\varphi \cdot H_W} \left(\frac{M}{mm} \right). \quad (3.7)$$

Масштаб прискорення μ_W штовхача знаходиться по формулі

$$\mu_W = \frac{\mu_V}{\mu_t \cdot H_W} \left(\frac{M / c^2}{mm} \right). \quad (3.8)$$

або

$$\mu_W = \mu_{S^{II}} \cdot \omega^2.$$

У формулах (3.5) і (3.6) H_V - полюсна відстань графіка швидкості V (і аналога швидкості $S^I = \frac{dS}{d\varphi}$), взята в mm .

У формулах (3.7) і (3.8) H_W - полюсна відстань графіка прискорення W (і аналога прискорення $S^{II} = \frac{d^2S}{d\varphi^2}$), взята в mm .

Докладно методика вибору полюсних відстаней H_V і H_W , а також методика процесу графічного диференціювання викладені в [8] - п. 2.2.

Знайдені три графіки в сукупності і є шуканим законом руху штовхача.

2. Нецентральний механізм з голчастим штовхачем

Визначимо переміщення штовхача 2 у залежності від кута повороту кулачка 1 нецентрального (дезаксiального) кулачкового механізму з голчастим штовхачем по заданій його кінематичній схемі і профілю кулачка (рис. 3.4). Будемо вважати, що масштаб довжин μ_l , в якому накреслена кінематична схема кулачкового механізму, відомий.

На рис. 3.4 позначено:

e - ексцентриситет (дезаксiал) механізму, що є найкоротшою відстанню від осювої лінії штовхача до центру (осі) кулачка O ;

r_{min} і r_{max} - мінімальний і максимальний радіус кривизни профілю в межах кутів ближнього і дальнього вистойв.

Розв'язання поставленої задачі виконаємо в наступній послідовності.

1. Розіб'ємо профіль кулачка (рис. 3.5) на чотири характерних ділянки :

AB - дуга підйому профілю на куті φ_1 ;

BP - дуга вистою профілю на куті φ_2 ;

CD - дуга опускання профілю на куті φ_3 ;

DA - дуга ближнього вистою профілю.

Вузлові точки A , B , C і D знайдені в місцях сполучення окружностей радіусів r_{min} і r_{max} із ділянками профілю, що мають перемінну кривизну.

2. Обернемо рух кулачкового механізму, мислено надавши всьому механізму додаткову кутову швидкість $(-\omega)$.

Кулачок у оберненому русі механізму буде нерухомим, а стояк разом із штовхачем будуть повертатися навколо зупиненого кулачка за годинниковою стрілкою з кутовою швидкістю ω .

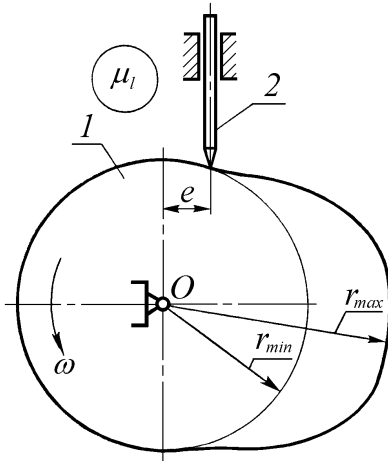


Рис. 3.4. Кінематична схема нецентрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем

Лінія осі штовхача при цьому буде постійно залишатися на відстані e від центру кулачка, тобто буде весь час спрямованою по дотичній до окружності з радіусом e .

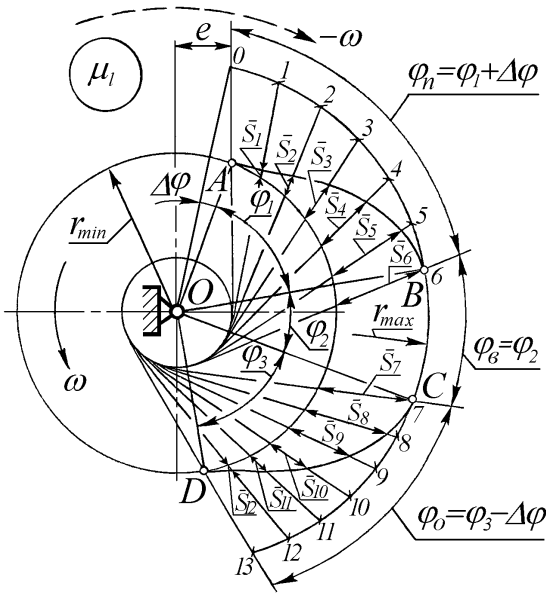


Рис. 3.5. Визначення переміщень голчастого штовхача нецентрального кулачкового механізму

точки C (яка збігається з точкою 7), підуть точки 8, 9, 10 і т. д. до точки 13.

4. Через всі отримані точки 0, 1, 2, 3, ... 13 проведемо, де ще не проведено, дотичні до окружності радіуса e .

Ці дотичні і відітнуть між профілем кулачка й окружністю мінімального радіуса r_{min} відрізки, рівні шуканим переміщенням $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \dots, \bar{S}_{12}, \bar{S}_{13}$ у масштабі μ_l .

Якщо це необхідно, по знайдених величинах переміщення можна побудувати графік залежності S від φ .

Двічі його продиференціювавши, можна одержати графіки аналогів швидкості і прискорення штовхача.

Якщо ж буде відома величина кутової швидкості кулачка, тоді можна буде визначити абсолютні величини швидкостей і прискорень штовхача.

3. Через точки A , B , C і D проведемо лінії обернених положень штовхача, дотичні до окружності радіуса e .

Продовжимо окружність із радіусом r_{max} в один та інший бік від точок B і C до перетинання з осьовими лініями штовхача в оберненому русі, що відповідають початку його підйому і кінцю опускання.

Розіб'ємо утворені додаткові дуги радіуса r_{max} на деяке число рівних частин (на рис. 3.5 взято по 6 таких частин) і одержимо точки 0, 1, 2, 3 і т. д. до точки B (яка збігається з точкою 6), потім після

Зауважимо, що величина кута повороту кулачка за час підйому штовхача φ_n при наявності ексцентриситету e виявилась декілька більше від величини центрального кута φ_I (на деяку величину $\Delta\varphi$, що залежить від величини ексцентриситету e), а величина кута повороту кулачка за час опускання штовхача φ_o - дещо менше від відповідного кута φ_3 (на ту ж саму величину $\Delta\varphi$).

Якщо при цьому кулачок симетричний, тоді буде $\varphi_n > \varphi_o$, у той час як $\varphi_I = \varphi_3$. Тобто бачимо, що при наявності ексцентриситету e виник перерозподіл часу робочого руху штовхача в бік збільшення часу підйому за рахунок зменшення часу опускання.

При цьому, очевидно, умови роботи механізму на ході підйому декілька поліпшуються, у той час як на ході опускання - погіршуються.

Таке конструктивне рішення (наявність ексцентриситету e) буде правильним, якщо навантаження механізму на ході підйому буде більшим, ніж навантаження механізму на ході опускання.

3. Механізм з коромисловим штовхачем

По заданому теоретичному профілі (III) кулачка і по розташуванню відносно нього коромислового штовхача на кінематичній схемі кулачкового механізму (рис. 3.6) визначимо окружні переміщення центру ролика і кутові переміщення коромисла в залежності від кута повороту кулачка. Напрямок обертання кулачка задано проти годинникової стрілки. Масштаб довжин μ_l відомий.

$$\varphi_o < \varphi_3 \text{ (тому що } \varphi_o = \varphi_3 - \Delta\varphi \text{)}.$$

Таким чином, виявляємо, що тут, як і у випадку нецентрального кулачкового механізму зі штовхачем, що поступально рухається, (див. задачу 3.2), за рахунок взаємного розташування кулачка і коромислового штовхача можна домогтися поліпшення умов роботи механізму на робочого ходу за рахунок погіршення умов роботи на холостому ходу.

Тільки в попередньому випадку це досягалося за рахунок вибору відповідної величини ексцентриситету e , тут же (див. рис. 3.6) того ж ефекту можна домогтися за рахунок деякого зсуву коромислового штовхача відносно кулачка (збільшення міжосьової відстані a). При цьому говорити про ексцентриситет кулачкового механізму з коромисловим штовхачем не прийнято, тому що в нього немає такої константи.

4. Розіб'ємо обернену траєкторію точки O_2 у межах кутів φ_n і φ_o на деяке число частин.

На рис. 3.7 узято по шість рівних частин у межах дуги $O-6$ і в межах дуги $7-13$.

5. З усіх отриманих точок $0, 1, 2, 3, \dots, 13$ розчином циркуля, рівним довжині l , від окружності мінімального радіуса R_{min} до перетинання з теоретичним профілем кулачка проведемо дуги, що і є шуканими окружними переміщеннями центру ролика штовхача $\check{S}_0, \check{S}_1, \check{S}_2, \check{S}_3, \dots, \check{S}_{13}$ у масштабі μ_l кінематичної схеми.

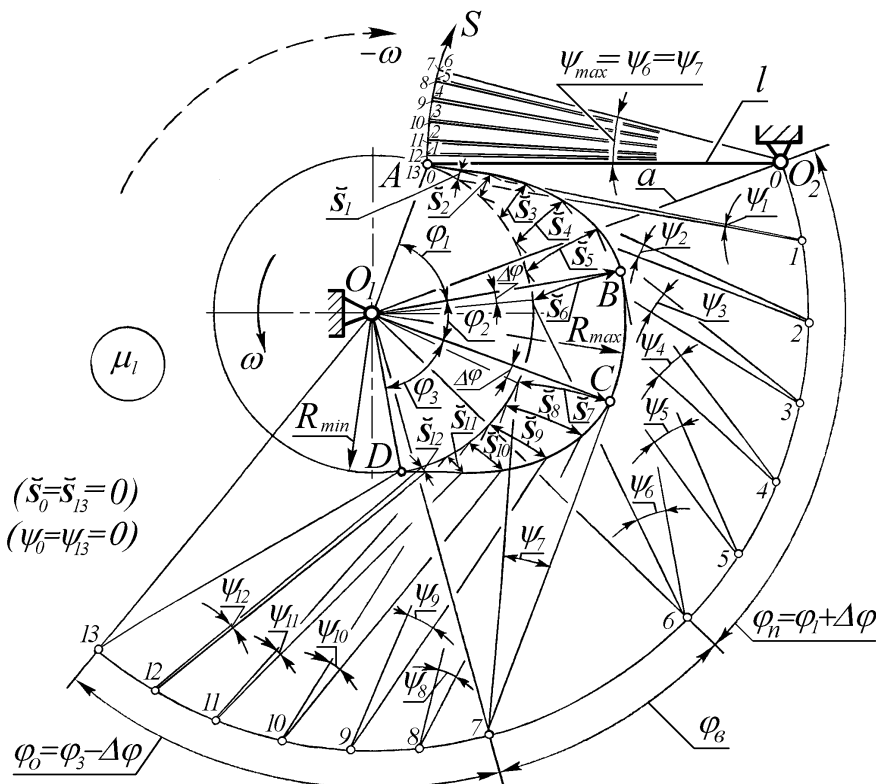


Рис. 3.7. Визначення окружних переміщень центра ролика і кутових переміщень коромисла

Кутовими переміщеннями коромисла будуть кути $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{13}$, що стягаються дугами $\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \dots, \tilde{S}_{13}$ (із радіусом l).

4. Кут тиску кулачка на штовхач

Як уже було сказано вище, кут тиску δ - це кут між вектором сили тиску і вектором швидкості точки прикладення цієї сили.

Для кулачкового механізму дане формулювання можна перефразувати так: кут тиску δ - це кут між вектором сили тиску кулачка на штовхач і вектором швидкості руху штовхача.

Якщо штовхач коромисловий, то у формулюванні розуміється вектор швидкості або кінця загостреного штовхача, або центру ролика, або центру заокруглення штовхача. При цьому сила тиску кулачка на штовхач умовно переноситься по лінії її дії (без урахування сил тертя) у центр ролика або в центр заокруглення.

На рис. 3.8 для центрального кулачкового механізму з роликівим штовхачем, що поступально рухається, показане розкладання сили $\bar{F}_n$ тиску кулачка на штовхач (без урахування сил тертя) на дві складові:

$(F_n \cdot \cos \delta)$ - корисна рушійна сила, спрямована уздовж осі штовхача;

$(F_n \cdot \sin \delta)$ - шкідлива сила, спрямована поперек руху штовхача.

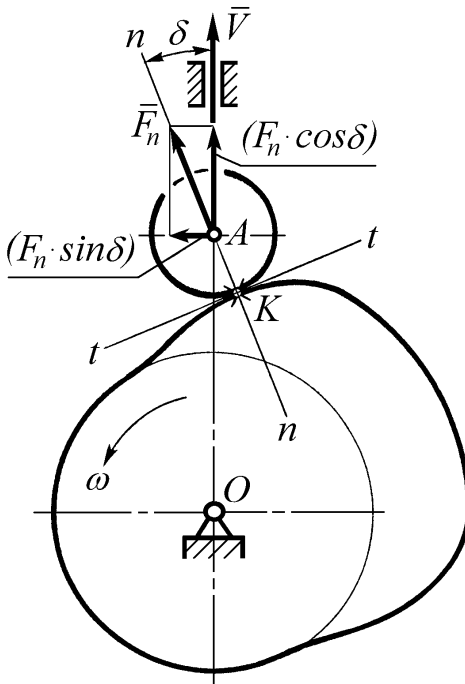


Рис. 3.8. Розкладання сили тиску кулачка на штовхач

Вектор сили $\bar{F}_n$ перенесений умовно з точки контакту K кулачка і штовхача уздовж загальної нормалі $n-n$ у центр ролика (у точку A). Такий прийом цілком допустимий при рішенні інженерних задач статичного або кінетостатичного аналізів.

З рисунка очевидно, що кут тиску δ утворений загальною нормаллю $n-n$ і віссю штовхача. Тому надалі вектор сили тиску і вектор швидкості штовхача при відшукуванні кутів тиску показувати не будемо - достатньо буде провести загальну нормаль у точці контакту кулачка і штовхача і визначити кут її нахилу до осі штовхача.

Очевидно, що в межах кутів дальнього і ближнього вистоя кулачка кут тиску буде дорівнювати нулю. Звідси випливає, що кут тиску δ у межах віддалення φ_n росте від нуля, а потім знову зменшується до нуля. Те ж саме можна сказати про зміну кута тиску в межах кута повернення φ_o . Максимальне значення змінного кута тиску δ повинно бути обмежено деяким допустимим значенням $\delta_{дон}$.

Отже, можна записати додаткову динамічну умову, яку обов'язково необхідно враховувати при синтезі кулачкових механізмів

$$\delta \leq \delta_{don}. \quad (3.9)$$

Допустимий кут тиску δ_{don} вибирається з досвіду в залежності від типу кулачкового механізму, його навантаженості, відповідальності машини й ін.

У середньому, при штовхачі, що поступально рухається, приймають $\delta_{don} = 15^0 \dots 28^0$.

При коромисловому штовхачі δ_{don} звичайно більше і може прийматися в межах $\delta_{don} = 20^0 \dots 35^0$.

Від величини обраного допустимого кута тиску δ_{don} істотно залежать ККД кулачкового механізму, довговічність його деталей, умови виникнення перекосів штовхача і навіть його заклинення.

Пояснити менші значення δ_{don} у кулачкового механізму зі штовхачем, що поступально рухається, можна тим, що наявність поступальної кінематичної пари робить цей механізм більш схильним до заклинення, на відміну від механізму з коромисловим штовхачем, який практично ніколи не заклинює і звичайно має більш високий ККД.

Особливо небезпечно виявляється перекіс штовхача в області максимальних сил тиску кулачка на штовхач, коли вони діють при великих значеннях кутів тиску.

Очевидно, що таке несприятливе сполучення сил і кутів тиску звичайно спостерігається на робочому ході кулачкового механізму, тобто при підйомі (віддаленні) штовхача, що супроводжується подоланням сил корисного опору.

На холостому ході кулачкового механізму, тобто при опусканні (поверненні) штовхача у початкове положення на ближній вистій, звичайно сили тиску кулачка на штовхач менші по величині, ніж на робочому ході. Перекіс штовхача при цьому менше небезпечний.

У розумних межах на холостому (оберненому) ході кулачкового механізму можна допустити або великі кути тиску, або великі швидкості (а виходить, і великі прискорення) штовхача.

Тому іноді центральні кулачкові механізми виконують із несиметричним кулачком, коли $\varphi_n > \varphi_o$.

Практично того ж ефекту можна домогтися застосовуючи зсув осі штовхача щодо центру симетричного кулачка на відстань e , називане ексцентриситетом або дезаксіалом кулачкового механізму (див. задачу 3.2).

Звісно ж можна комбінувати і те й інше разом узятє.

Дуже важливим питанням при синтезі кулачкових механізмів є питання вибору закону руху штовхача.

5. Контрольні запитання

3.4. Запитання для самопідготовки по розділу III

1. Які методи кінематичного аналізу кулачкових механізмів Вам відомі?
2. Поясніть методику визначення масштабів кінематичних діаграм кулачкових механізмів.
3. Що з себе уявляють аналоги швидкості і прискорення штовхача кулачкового механізму?
4. Які особливості кінематичного аналізу нецентрального (дезаксіального) кулачкового механізму?
5. Які особливості побудови діаграми окружних переміщень коромислового штовхача?
6. Як визначити кути повороту коромислового штовхача в різних положеннях кулачкового механізму?
7. У чому полягає задача кінематичного синтезу кулачкових механізмів?
8. Що таке кут тиску в кулачкових механізмах? Чому кут тиску обмежують допустимим значенням?
9. Як значення мінімального радіуса кулачка впливає на величину кута тиску?
10. Назвіть орієнтовані діапазони значень допустимих кутів тиску різних кулачкових механізмів.
11. Чому в окремих випадках кулачки виконують несиметричними, а кулачкові механізми - нецентральними?

Лекція 27

Тема: Кінематичний синтез кулачкових механізмів

- Зміст: 1. Вибір закону руху штовхача.
2. Визначення мінімального радіуса кулачка.
3. Профілювання кулачка.
4. Вибір радіуса ролика штовхача. Загострення кулачка.
5. Контрольні запитання.

1. Вибір закону руху штовхача

Розглянемо, які наслідки може викликати неправильний вибір закону руху.

На рис. 3.9 показана схема найпростішого кулачкового механізму з клиновим кулачком 1, що рухається зворотно-поступально, і з роликівим штовхачем 2, що також рухається зворотно-поступально.

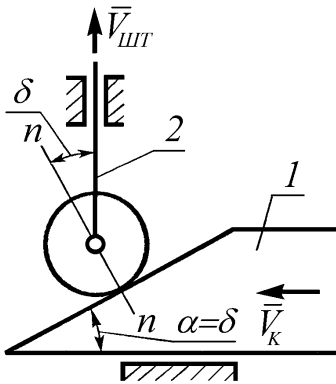


Рис. 3.9. Клиновий кулачковий механізм

Для простоти прийнята прямолінійна форма похилої робочої поверхні клина. Очевидно, що кут клина α без урахування сил тертя буде дорівнювати куту тиску δ .

При постійній швидкості кулачка V_K будемо мати постійну швидкість руху штовхача $V_{шт}$.

Очевидно, що тут дотримується залежність

$$V_{шт} / V_K = \operatorname{tg} \alpha.$$

За рахунок вибору кута α можна збільшувати або зменшувати швидкість штовхача $V_{шт}$ при тій же швидкості кулачка V_K .

При цьому необхідно дотримувати умови $\alpha < \delta_{дон}$.

Помінявши напрямок V_K одержимо зворотний рух штовхача.

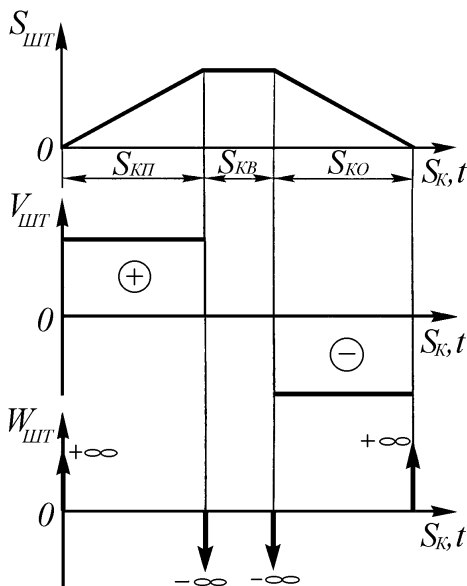


Рис. 3.10. Закон руху штовхача клинового кулачкового механізму

На рис. 3.10 показаний закон руху штовхача 2 у залежності від переміщення клинового кулачка 1.

Діаграма залежності переміщення $S_{шт}$ штовхача від переміщення S_K кулачка має очевидний лінійний вид.

Припустимо, що кулачок 1 приводиться в рух від гідроциліндра з миттєвим спрацюванням і з постійною витратою рідини (на прямому й зворотному ході), тоді вісь аргументу S_K буде бути одночасно і віссю часу t .

Продиференціюємо функцію $S_{шт}$ за часом, тоді одержимо графік залежності $V_{шт}$.

Очевидно, що підйом штовхача буде відбуватися з постійною швидкістю $V_{шт}$ (додатною). Опущання буде йти з тією же постійною швидкістю $V_{шт}$ (тільки від'ємною).

Ще раз зробимо диференціювання тепер уже $V_{шт}$ за часом (тобто знайдемо d^2S/dt^2).

Похідна від постійної величини, як відомо, дорівнює нулю. Проте, прискорення будуть спостерігатися в момент появи і зникнення швидкості штовхача.

При обговорених вище умовах стрибки прискорення будуть досягати нескінченно великих значень ($+\infty$ або $-\infty$).

Оскільки штовхач має кінцеву масу, динамічні інерційні навантаження в зазначених положеннях механізму також будуть відчувати стрибки в $\pm\infty$, що буде супроводжуватися дуже дошкульними ударами, названими "жорсткими".

"Жорсткі" удари в механізмах машин неприпустимі, тому запропонована форма клинового кулачка не годиться.

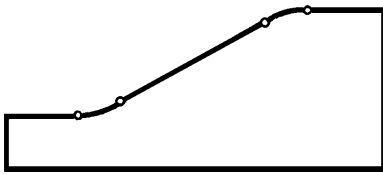


Рис. 3.11. Форма клинового кулачка, який не допускає "жорстких" ударів

Клиновий кулачок варто було б зробити з заокругленнями на початку і наприкінці зони підйому, наприклад, як це показано на рис. 3.11.

Причому геометричні розміри заокруглень обумовлять величини і тривалість кінцевих значень прискорень на початку і наприкінці опускання.

При цьому закон руху штовхача клинового кулачкового механізму зміниться, як це

показано на рис. 3.12 (у порівнянні з рис. 3.10).

Помічаємо, що тепер стрибки прискорень штовхача мають кінцеві значення.

У моменти стрибків прискорень штовхача також будуть відбуватися удари в механізмі, але вони не будуть такими небезпечними, як "жорсткі" удари. Тому їх називають "м'якими".

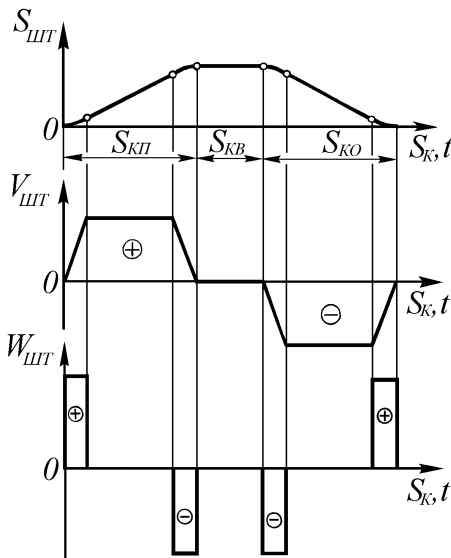


Рис. 3.12. Закон руху штовхача клинового (з округленнями) кулачкового механізму

"М'які" удари припускаються в тихохідних і середньошвидкісних механізмах.

У високошвидкісних механізмах бажано згладжувати стрибки прискорень, наприклад, невеликими похилими ділянками на графіку W .

При цьому епюри окремих ділянок на графіку W одержують або форму трапецій, або трикутників, або ж синусоїдальну форму.

Можна навести деяку аналогію розглянутому вище прикладу з області рейкового транспорту.

Так, при прокладці рейок для трамвая на перехресті прямолінійні ділянки рейок стикають із закругленою ділянкою. Потім, після повороту

стикують закруглену ділянку з наступною прямолінійною ділянкою.

У момент входу трамвая в поворот стрибком з'являється поперечне прискорення, спрямоване до центру заокруглення (доцентрове прискорення). Прискорення виникає спочатку в передній частині вагона, потім у задній частині вагона.

Пасажири при цьому відчувають неприємні "м'які" удари об сусід або об крісла, стінки і т. п. частини вагона.

При вході в поворот і виході з повороту бажано за що-небудь триматися, інакше "м'який" удар об твердий предмет може показатися не дуже м'яким. Рекомендуємо звернути на описане явище свою увагу.

Якби по такому ж принципу здійснювалася прокладка рейкових доріг для швидкісного залізничного транспорту, тоді вхід у поворот міг би не обмежитися тільки неприємними відчуттями.

Тому на залізницях при вході в поворот застосовують спеціальні перехідні ділянки рейок, радіус кривизни яких змінюється плавно від нескінченної величини до величини конкретного радіуса кривизни закругленої ділянки залізниці. Крім того, здійснюють невеличкий ухил дороги убік центру заокруглення.

Рекомендуємо зафіксувати увагу на своїх відчуттях при вході потягу в поворот. "М'які" удари не будуть помічені, а от інерційні відцентрові сили в поперечному напрямку руху можуть бути помічені. Ці сили нарастають і убувають плавно.

З сказаного вище випливає, що при виборі законів руху штовхача слід насамперед вибирати графік прискорення (або аналога прискорення).

Вид графіка прискорень насамперед залежить від того, наскільки спроектований кулачковий механізм швидкісний.

Найпоширенішими різновидами графіків аналогів прискорень штовхача є графіки, зображені на рис. 3.13.

Графік **a** називається параболическим, тому що при його подвійному інтегруванні утворюється графік переміщень S , обкреслений на ділянках підйому й опускання квадратичними параболою.

Графік **б** - косинусоїдальний.

Графік **в** - трапецеїдальний.

Графік **г** - синусоїдальний.

Всі ці графіки (закони руху) можуть бути несиметричними, як показано на рис. 3.13. **a**, **б** і **г**, або симетричними (рис. 3.13**в**) відносно середини. Від цього, а також від вибору величини ексцентриситету e залежить симетричність або несиметричність форми спроектованого кулачка.

Закон руху **a** дозволяє здійснити найбільшу з усіх можливих висоту підйому штовхача (при порівнянних умовах).

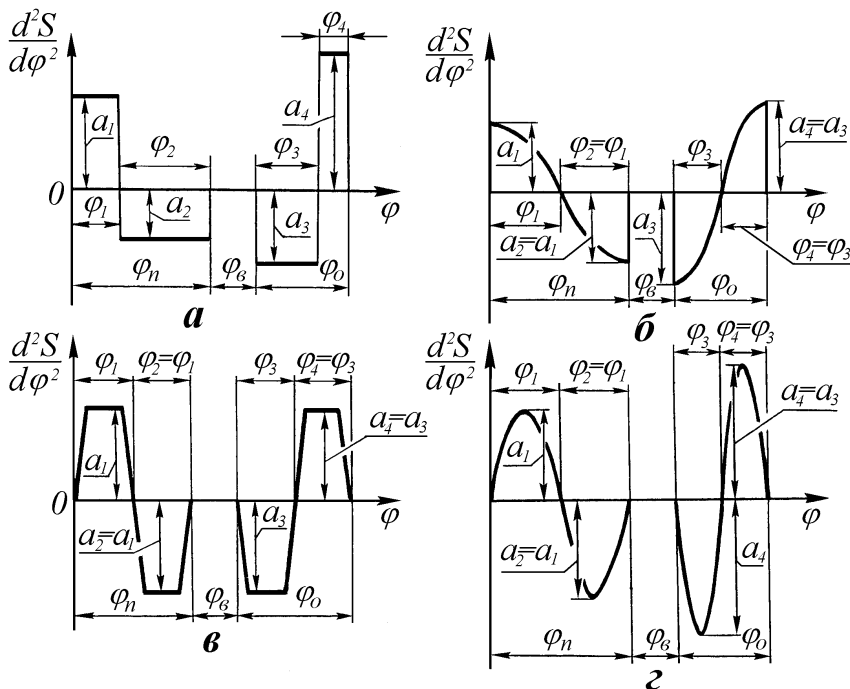


Рис. 3.13. Різновиди графіків аналогів прискорень штовхача

Закони руху **a** і **б** мають зони "м'яких" ударів. Закон руху **a** має зону подвійного "м'якого" удару в середині ходу підйому штовхача. Цим він гірше від закону руху **б**, але закон руху **a** дозволяє здійснити підйом штовхача на найбільшу висоту.

Графіки **в** і **г** несуттєво відрізняються один від одного. Фактично графік **в** є наближеною апроксимацією графіка **г**. Обидва вони забезпечують дуже плавну роботу кулачкових механізмів.

Закон руху **г** можна порекомендувати для високошвидкісних кулачкових механізмів, як такий, що забезпечує найвищу плавність роботи механізму.

Величини ординат a_1 , a_2 , a_3 , a_4 графіків можуть бути всі однаковими або різними. Це залежить від того, які співвідношення прийняті для фазових кутів φ_1 , φ_2 , φ_3 і φ_4 .

Прийняті співвідношення величин ординат a_i і величин фазових кутів φ_i повинні бути такими, щоб забезпечувалася умова рівності висоти підйому і висоти опускання штовхача.

Дане питання тут докладно не розглядається. Зауважимо лише, що при законі руху штовхача, приведеному на рис. 3.12, умова рівності переміщення S_{um} штовхача на підйомі й опусканні буде дотримуватися, якщо на графіку швидкості V_{um} додатна площа $\oplus$ буде дорівнює від'ємній площі $\ominus$. А площі ці будуть однакові, якщо відповідно на графіку прискорень W_{um} штовхача також буде спостерігатися рівність додатних і від'ємних площ.

Якби графік S_{um} не був симетричний, тоді шукана умова виконувалася б при значно більшому числі обмовлень, які впливають із геометричних властивостей інтегрування, що, як відомо, зводиться до визначення площ фігур графіків W_{um} (або $\frac{d^2 S}{dt^2}$), а потім V_{um} (або $\frac{dS}{dt}$).

Обравши закони руху штовхача можна приступити до визначення мінімального радіуса кулачка R_{min} .

2. Визначення мінімального радіуса кулачка

Розглянемо визначення мінімального радіуса кулачка на прикладі центрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем (рис. 3.14а).

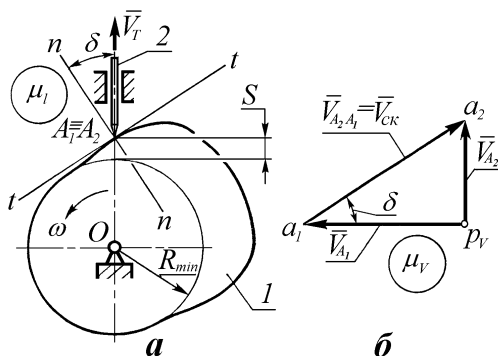


Рис. 3.14. До визначення мінімального радіуса кулачка R_{min}

(прийmemo $\omega = const$).

На рис. 3.14б показаний план швидкостей механізму.

Швидкість точки A_1 , що належить профілю кулачка, можна визначити відповідно до рис. 3.14а по формулі

$$V_{A_1} = \omega \cdot (R_{min} + S),$$

де S - переміщення штовхача, починаючи з ближнього вистю,

ω - кутова швидкість кулачка

Швидкість точки штовхача A_2 є першою похідною переміщення штовхача за часом, тобто

$$V_{A_2} = V_{um} = \frac{dS}{dt} = \omega \cdot \frac{dS}{d\varphi}.$$

Вектори швидкостей $\vec{V}_{A_1}$, $\vec{V}_{A_2}$ і $\vec{V}_{ск} = \vec{V}_{A_2 A_1}$ утворюють прямокутний векторний трикутник із гострим кутом δ відповідно до векторного рівняння:

$$\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_{A_1} + \vec{V}_{A_2 A_1}.$$

Звідси знайдемо, що

$$tg \delta = \frac{\vec{V}_{A_2}}{\vec{V}_{A_1}} = \frac{V_{A_2}}{V_{A_1}} = \frac{\omega \cdot (dS / d\varphi)}{\omega \cdot (R_{min} + S)} = \frac{dS / d\varphi}{R_{min} + S} \leq tg \delta_{oon}. \quad (3.10)$$

Зауважимо, що в останній частині виразу (3.10) змінними є величини S і $\frac{dS}{d\varphi}$, а невідома шукана величина R_{min} і величина припустимого кута тиску δ_{oon} є константами.

Вирішимо рівняння (3.10) щодо R_{min} :

$$R_{min} \geq \frac{dS / d\varphi}{tg \delta_{oon}} - S. \quad (3.11)$$

Права частина виразу (3.11) являє собою перемінну функцію. Шукана величина R_{min} може бути прийнята рівною екстремуму правої частини, тобто

$$R_{min} = \left(\frac{dS / d\varphi}{tg \delta_{oon}} - S \right)_{max}. \quad (3.12)$$

Аналітичне рішення виразу (3.12) утруднено, тому що перемінні S і $\frac{dS}{d\varphi}$ звичайно задаються графічно.

Покажемо графічне рішення задачі по визначенню R_{min} .

Обравши закон зміни аналога прискорення штовхача $\frac{d^2 S}{d\varphi^2}$, зробимо його подвійне графічне інтегрування по $d\varphi$ у межах φ_n і φ_o (рис. 3.15).

Потім у тому самому загальному масштабі $\mu_S = \mu_{S'}$ побудуємо діаграму залежності S від $\frac{dS}{d\varphi}$ (фазовий портрет), що має замкнутий вид (рис. 3.15б).

Рівність масштабів μ_S і $\mu_{S'}$ можна забезпечити, наприклад, вибором відповідної полюсної відстані H_V . Тому що відповідно до формули (3.5) $\mu_{S'} = \frac{\mu_S}{\mu_\varphi \cdot H_V}$, очевидно звідси, що для задоволення рівності $\mu_S = \mu_{S'}$ повинно бути $\mu_\varphi H_V = 1$ або

$$H_V = 1/\mu_\varphi. \quad (3.13)$$

На фазовому портреті під кутами $+\delta_{don}$ і $-\delta_{don}$ відносно осі S проведемо дотичні до петлі діаграми (до їхнього взаємного перетинання).

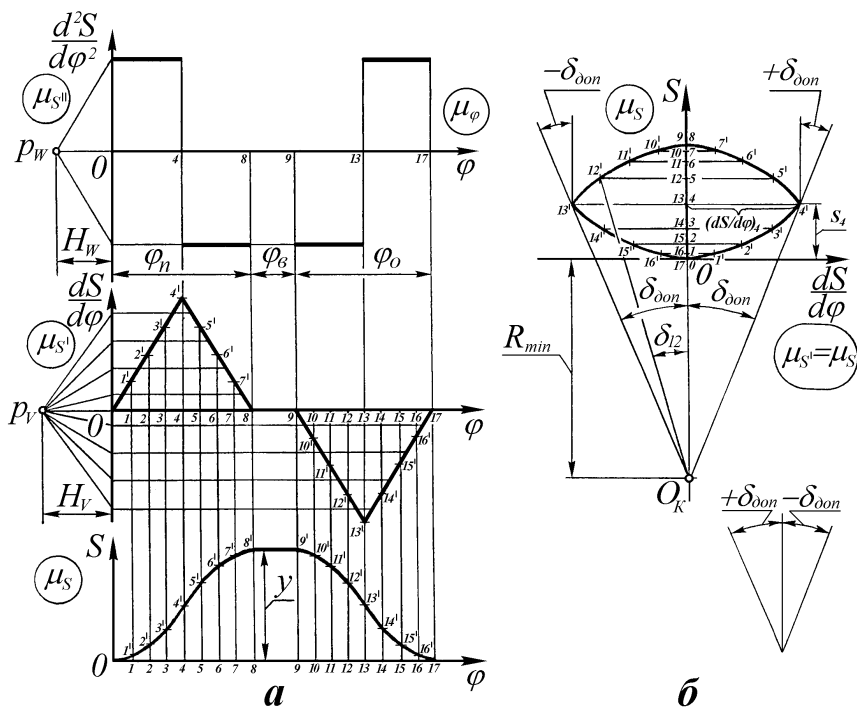


Рис. 3.15. Графічне визначення R_{min}

При симетричному законі $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$ дотичні на фазовому портреті

перетнуться на продовженні осі S .

Відповідно до рівняння (3.10) відрізок $O_K\theta$ можна прийняти за R_{min} , відкладений у масштабі μ_S , тобто

$$R_{min} = \overline{O_K\theta} \cdot \mu_S.$$

Фазовий портрет дає можливість визначити величини кутів тиску в будь-якому положенні механізму. Так, наприклад, показана величина кута тиску δ_{I2} для 12-го положення механізму.

З аналізу діаграми очевидно, що максимальні кути тиску будуть спостерігатися на діаграмі поблизу екстремальних значень $dS/d\varphi$ (або V_{um})

Тому формулу (3.12) можна переписати так

$$R_{min} \cong 1,05 \left(\frac{V_{um \max}}{\omega \cdot \operatorname{tg} \delta_{don}} - S_{V \max} \right). \quad (3.14)$$

Тут: $1,05$ - коефіцієнт, що враховує похибку визначення R_{min} ;

$V_{um \max}$ - максимальне значення швидкості штовхача;

$S_{V \max}$ - переміщення штовхача на момент досягнення штовхачем максимальної швидкості $V_{um \max}$.

Розглянутий приклад визначення R_{min} безпосередньо відноситься до центрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем. Очевидно, що він може бути застосований також для визначення R_{min} теоретичного (центрового) профілю центрального кулачкового механізму з роликовим або зі сферичним штовхачем.

Виявлені графічні прийоми з деякими доповненнями можуть бути також застосовані і до інших типів кулачкових механізмів, показаних на рис. 3.1.

При цьому можуть бути несиметричними і графіки аналогів

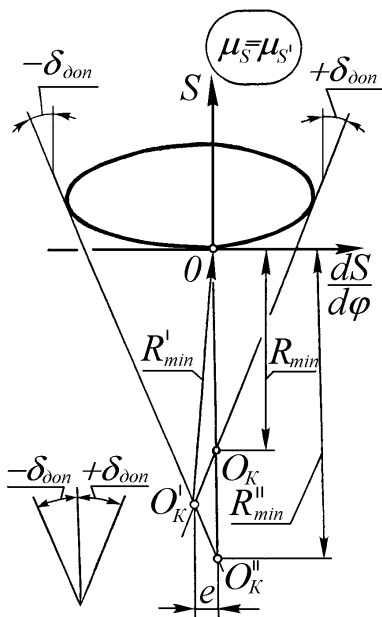


Рис. 3.16. Несиметричний фазовий портрет кулачкового механізму зі штовхачем, який рухається поступально

прискорень $d^2S/d\varphi^2$ і кулачки, а також бути в наявності ексцентриситет e .

Розглянемо деякі приклади графічного визначення мінімальних радіусів центрових профілів кулачків.

На рис. 3.16 показаний випадок несиметричного фазового портрета, що одержаний від несиметричного графіка аналога прискорення штовхача $d^2S/d\varphi^2$.

Очевидно, що опускання штовхача буде супроводжуватися більшими швидкостями, ніж при підйомі. Прямі, дотичні до петлі діаграми (під кутами $+\delta_{don}$ і $-\delta_{don}$), перетнуться осторонь від осі S . При цьому виникає декілька можливих варіантів вибору R_{min} .

Якщо ексцентриситет e кулачка неприпустимий ($e=0$), а кути тиску і на прямому і на оберненому ходах повинні підпорядковуватися вимозі (3.9): $\delta \leq \delta_{don}$, тоді прийдеться в якості мінімального радіуса центрального профілю кулачка прийняти значення R_{min}^{II} . На підйомі штовхача при цьому кути тиску не будуть досягати значення допустимого кута тиску δ_{don} .

Вибір ексцентриситету кулачка, рівного e , дозволяє зменшити габарити кулачка. У якості мінімального радіуса теоретичного профілю кулачка тоді можна прийняти значення R_{min}^I .

При цьому і при підйомі і при опусканні штовхача кути тиску будуть досягати допустимого значення кута тиску δ_{don} .

Можливий також, третій варіант вибору мінімального радіуса центрального профілю центрального кулачка, рівного значенню R_{min} . У цьому випадку на ході підйому штовхача кут тиску досягне допустимої величини δ_{don} , а на ході опускання навіть перевершить її. Такий варіант ще більше зменшує габарити кулачкового механізму, але він прийнятний лише в тому випадку, якщо обернений хід штовхача відбувається зі значно меншими навантаженнями, ніж хід підйому.

Відзначимо також, що при симетричному фазовому портреті можливо теж призначення ексцентриситету e кулачка, що забезпечить перерозподіл кутів тиску на ходах підйому й опускання на користь ходу підйому.

Тепер розглянемо приклад графічного визначення мінімального радіуса центрального профілю кулачка кулачкового механізму з коромисловим штовхачем.

У цьому випадку спочатку здійснюється вибір закону зміни аналога дотичного прискорення $\overline{W}_{um}^{\tau}$ (або $d^2S^{\tau}/d\varphi^2$) центру ролика (центру заокруглення) штовхача.

Потім проводиться подвійне графічне інтегрування аналога дотичного прискорення $d^2S^\tau/d\varphi^2$ центру ролика штовхача по $d\varphi$ у межах φ_n і φ_o .

Перше інтегрування дає графік аналога окружної лінійної швидкості $dS^\tau/d\varphi$ центру ролика, а друге інтегрування - графік дугового (окружного) переміщення S^τ центру ролика.

Для подальших побудов можна звернутися в якості вихідного матеріалу до рис. 3.15а (індекс τ при цьому в величині $d^2S/d\varphi^2$ і $dS/d\varphi$ опускається).

Фазовий портрет будемо будувати в системі координат із криволінійною віссю ординат (рис. 3.17), тому що переміщення центру ролика штовхача здійснюється по дуговій траєкторії.

Відкладемо відому довжину коромислового штовхача l у масштабі μ_S . При цьому відзначимо, що обов'язково повинно виконуватися умова

$$l > (dS/d\varphi)_{\max}. \quad (3.15)$$

Потім розчином циркуля, рівним l із точки O_2 центру хитання коромисла проведемо криволінійну окружну вісь S переміщення центру ролика штовхача.

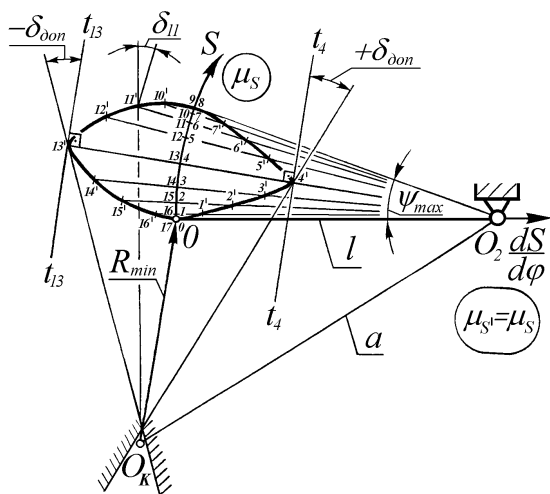


Рис. 3.17. Фазовий портрет кулачкового механізму з коромисловим штовхачем

По криволінійній осі S будемо відкладати дугові переміщення $0-1$, $0-2$, $0-3$ і т. д. центру ролика штовхача в масштабі μ_S , а по нормальним до осі S напрямкам будемо відкладати в масштабі $\mu_S = \mu_{S1}$ величини ординат аналогів $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$ і т. д. окружних швидкостей центру ролика $dS/d\varphi$ (додатні значення - убік точки O_2 , а від'ємні - у протилежному напрямку). До отриманої петлі в точках

екстремальних значень $dS/d\varphi$ проведемо промені, що йдуть до дотичних $t-t$ під кутами $\pm\delta_{oon}$ до їхнього взаємного перетинання.

Поблизу точки перетинання променів убік збільшення мінімального радіуса кулачка на $5...10\%$ виберемо точку O_K , через яку буде проходити вісь обертання кулачка.

У результаті описаних побудов одержимо значення величин мінімального радіуса центрального профілю кулачка R_{min} і міжосьової відстані a у масштабі μ_S .

Діаграма фазового портрета також дозволяє знайти величини кутів тиску δ_i у будь-якому положенні механізму.

Так, наприклад, для 11-го положення значення δ_{11} знайдемо такою уявою. У точці 11^I петлі проведемо перпендикуляр до лінії 11^I-O_2 (до лінії коромисла в 11-му положенні). Потім із точки O_K через точку 11^I проведемо промінь, що із вищезазначеним перпендикуляром і утворить кут δ_{11} .

Знак величини кута тиску δ_i визначається відносним положенням перпендикуляра до лінії коромисла і променя, що йде з точки O_K .

Якщо перпендикуляр відхилений від променя проти годинникової стрілки, тоді передбачається знак δ_i додатний, а якщо за годинниковою стрілкою - від'ємний.

На підставі вищесказаного знаходимо, що знак δ_{11} - від'ємний.

Після визначення R_{min} можна приступати до побудови теоретичного (центрального) профілю кулачка.

Задача профілювання кулачка вирішується в точно зворотному порядку стосовно задачі кінематичного аналізу кулачкового механізму.

3. Профілювання кулачка

Пояснимо на прикладах рішення декількох задач процес побудови профілів кулачків за допомогою тих же рисунків, що використовувалися при кінематичному аналізі.

Синтезуємо (спроєкуємо) профіль кулачка центрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем за заданим законом руху штовхача (рис. 3.36) і обраним мінімальним радіусом кулачка r_{min} .

Синтез виконаємо в наступному порядку.

1. Виберемо масштаб довжин μ_l , у якому будемо будувати профіль кулачка. У практичних задачах найкраще вибирати $\mu_l = \mu_S$, тому що це застерігає від додаткових похибок, пов'язаних при $\mu_l \neq \mu_S$ із перерахунками обмірюваних величин в інший масштаб.

2. У обраному масштабі μ_l із точки O радіусом r_{min} проведемо окружність.

Початок побудови робочого профілю здійснимо від горизонтальної центральної лінії.

Відкладемо у напрямку, протилежному уявному напрямку обертання кулачка зі швидкістю ω , послідовно відомі кути φ_n , φ_e , і φ_o .

Розіб'ємо φ_n і φ_o , наприклад, на шість рівних частин кожний. Тоді одержимо на окружності мінімального радіуса відповідно точки 0 , 1 , 2 , 3 , ..., 13 .

3. З точки O центру кулачка проведемо радіальні промені через точки окружності 0 , 1 , 2 , 3 , ..., 13 .

4. У масштабі μ_l відкладемо (на підставі графіка S) величини переміщень штовхача $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$, ..., $12-12'$.

5. Плавними кривими лініями через точки 0 , $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ у межах кута φ_n і через точки $7'$, $8'$, $9'$, $10'$, $11'$, $12'$, 13 у межах кута φ_o окреслимо робочі дуги профілю кулачка.

6. У межах кута дальнього вистоя φ_e окреслимо профіль кулачка дугою окружності (між точками $6'$ і $7'$) із центром у точці O .

На цьому рішення задачі завершено.

Примітка. У вузлових точках профілю 0 , 6 , 7 і 13 профіль не повинний мати зламів, тобто, іншими словами, профіль повинний бути плавною кривою.

Тепер побудуємо профіль кулачка нецентрального (дезаксіального) кулачкового механізму з голчастим штовхачем за заданими: законом руху штовхача (рис. 3.3б), ексцентриситетом кулачка e і мінімальним радіусом кулачка r_{min} .

Синтез виконаємо в наступному порядку.

1. Виберемо масштаб довжин μ_l , у якому будемо будувати профіль кулачка.

2. У обраному масштабі μ_l із точки O радіусом r_{min} проведемо окружність (рис. 3.5а).

3. У обраному масштабі μ_l із точки O радіусом e проведемо другу окружність.

4. Проведемо вертикальну пряму лінію, дотичну до окружності радіуса e справа від неї. Приймемо точку A перетинання вертикальної прямої лінії з окружністю мінімального радіуса r_{min} за початок робочого профілю.

5. Відкладемо на вертикальній прямій лінії вгору з точки A відрізок $A-O$, що відбиває в обраному масштабі μ_l повну максимальну висоту підйому штовхача h .

6. Проведемо від точки O на куті $\varphi_p = \varphi_n + \varphi_\theta + \varphi_o$ дугу допоміжної окружності з центром у точці O радіуса r_{max} , що зіллється з дугою окружності дальнього вистою профілю кулачка.

7. Проведемо послідовно, починаючи від вертикальної лінії OA , під кутами φ_n , φ_θ і φ_o дотичні до окружності радіуса e , у результаті чого одержимо точки B , C і D , що розділяють шуканий профіль кулачка на дуги підйому, вистою й опускання.

8. З точок A , B , C і D проведемо до центру кулачка (т. O) промені, що утворять центральні кути кулачка φ_1 ($\varphi_1 < \varphi_n$), φ_2 ($\varphi_2 = \varphi_\theta$) і φ_3 ($\varphi_3 > \varphi_o$).

9. Розіб'ємо дуги $0-6$ (точка 6 збігається з B) і $7-13$ (точка 7 збігається із C) допоміжної окружності на шість рівних частин кожна. З утворених точок $1, 2, 3, \dots, 12$ проведемо дотичні до окружності радіуса e і відкладемо у масштабі μ_l (на підставі заданого графіка S) від окружності мінімального радіуса r_{min} переміщення штовхача $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \dots, \bar{S}_{12}$.

10. Плавною кривою з'єднаємо кінці відкладених переміщень, у результаті чого й одержимо шуканий профіль кулачка.

Тепер побудуємо теоретичний (центровий) профіль кулачка кулачкового механізму з коромисловим штовхачем за заданими: законом руху штовхача (рис. 3.3б), довжиною коромислового штовхача l і обраним по фазовому портрету мінімальному радіусу центрального профілю кулачка R_{min} і міжосьовою відстанню a .

Побудову виконаємо в наступному порядку.

1. Виберемо масштаб довжин μ_l , у якому будемо будувати центровий профіль кулачка (рис. 3.7).

2. У обраному масштабі μ_l побудуємо трикутник $\triangle O_1AO_2$ із сторонами $O_1A = R_{min}$, $AO_2 = l$, $O_1O_2 = a$. Нехай сторона AO_2 зображує коромисловий штовхач у горизонтальному положенні на початку його руху при віддаленні.

3. Радіусом a від точки O_2 у напрямку, протилежному напрямку обертання кулачка, із точки O_1 як із центру проведемо дугу окружності в межах $\varphi_p = \varphi_n + \varphi_\theta + \varphi_o$.

4. Розіб'ємо дуги цієї окружності в межах кутів φ_n і φ_o , наприклад, на шість рівних частин кожна. Одержимо точки $0, 1, 2, 3, \dots, 13$.

6. З'єднавши кінці дугових переміщень $\check{S}_0, \check{S}_1, \check{S}_2, \check{S}_3, ..., \check{S}_{13}$ плавною лінією, одержимо шуканий теоретичний (центровий) профіль кулачка.

вправо по дві короткі хорди: (1-0 і 1-2) і (4-3 і 4-5). У середніх точках хорд встановимо перпендикуляри до їхнього взаємного перетинання в деяких точках E і F .

3. З E і F як із центрів через точки 0, 1 і 2 (та 3, 4 і 5) проведемо дві допоміжні окружності. Одна з них буде мати менший радіус, що і приймемо за величину ρ_{min} .

4. Обчислимо максимально можливий радіус ролика $(r_p)_{max}$ по залежності (3.16)

$$(r_p)_{max} = 0,8\rho_{min}.$$

Відзначимо, що звичайно за умовою компонування підшипників кулачкового вала і ролика приймають значення

$$r_p \leq 0,4R_{min}. \quad (3.17)$$

При цьому обов'язково повинне дотримуватися співвідношення

$$r_p \leq (r_p)_{max},$$

у протилежному випадку може відбутися загострення дійсного профілю кулачка, що неприпустимо, тому що в місці загострення робочого профілю кулачка контактні напруги теоретично сягнуть в нескінченність (практично - досягнутий неприпустимих значень) і може бути спотворений заданий закон руху штовхача.

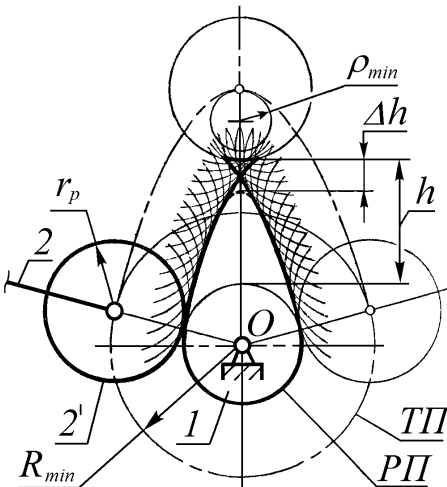


Рис. 3.19. Загострення робочого профілю (PP) кулачка

На рис. 3.19 показано, до чого призводить вибір радіуса ролика з величиною $r_p > \rho_{min}$.

З рисунка очевидно, що при побудові робочого профілю PP (по теоретичному профілю TP) у випадку $r_p > \rho_{min}$ його дуги підйому й опускання перетинаються, створюючи уявну ділянку у виді "риб'ячого хвоста".

Очевидно, що такий робочий профіль кулачка здійснити заданий закон руху штовхача не зможе. Центр ролика на вершині загостреного кулачка опише більш низьку траєкторію відносного руху, тобто теоретичний профіль спотвориться.

Загострена вершина робочого профілю буде сприймати

при роботі механізму великі контактні напруги.

У процесі припрацювання вершина робочого профілю кулачка округлиться (показано пунктирною лінією), після чого теоретичний профіль потерпить подальше спотворення. При цьому різко зменшиться максимальна висота підйому штовхача h (на величину Δh).

5. Контрольні запитання

1. Поясніть, що таке "жорсткі" і "м'які" удари в кулачкових механізмах? Як вони залежать від вибору закону руху штовхача?
2. Який взаємозв'язок ординат аналогів прискорень штовхача і фазових кутів кулачка?
3. Як аналітично визначається мінімальний радіус кулачка r_{min} центрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем?
4. Поясніть графічний спосіб визначення мінімального радіуса кулачка r_{min} механізму зі штовхачем, що поступально рухається.
5. Як враховується при графічному визначенні r_{min} кулачка ексцентриситет кулачкового механізму e і несиметричність закону руху штовхача?
6. Поясніть графічний спосіб визначення мінімального радіуса r_{min} кулачка кулачкового механізму з коромисловим штовхачем?
7. Покажіть послідовність профілювання кулачка центрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем.
8. Покажіть послідовність профілювання кулачка нецентрального кулачкового механізму з голчастим штовхачем.
9. Покажіть послідовність профілювання кулачка кулачкового механізму з коромисловим штовхачем.
10. Як здійснюється вибір радіуса ролика штовхача?
11. Що таке загострення і самопересічення профілю кулачка і які наслідки воно спричиняє?

Лекція 28

Тема: **Урахування тертя в машинах**

- Зміст: 1. Прояви тертя в побуті та в техніці.
2. Види тертя. Класифікація.
3. Визначення сил тертя ковзання.
4. Визначення сил тертя кочення.
5. Контрольні запитання.

1. Прояви тертя в побуті та в техніці

Тертя в машинах може відігравати як негативну, так і позитивну роль.

Якщо сили тертя забезпечують у машині робочий процес, то в цьому випадку можна говорити про позитивний прояв тертя. Більш того, тоді приймаються конструктивні й експлуатаційні заходи для підтримки необхідної величини сил тертя.

Наприклад, при роботі фрикційних і пасових передач сили тертя забезпечують окружні корисні сили, які передають потік потужності від ведучого вала до веденого.

Для забезпечення тягової спроможності пасової передачі необхідно здійснити відповідний натяг ремня. Для цього застосовуються різні конструктивні устрої.

У процесі експлуатації пасової передачі необхідно стежити за тим, щоб сили тертя між ремнем і шківом не зменшилися з різних причин.

Усі також погодяться з тим, що сили тертя в гальмах просто необхідні.

Те ж можна сказати про колісного рушія автомобілів, тракторів та інших колісних машин. Тертя коліс об дорожню поверхню бажане для здійснення штовхаючих і гальмових сил. На протекторній поверхні коліс виконують ґрунтозачеми відповідної форми або, як говорять, відповідного рисунка, що збільшують зчеплення колеса з дорожньою поверхнею.

Можна навести багато інших прикладів корисного прояву сил тертя.

Усе ж можна стверджувати, що в переважній більшості випадків взаємодії ланок механізмів машин сили тертя відіграють негативну роль. Вони переводять частину потоку потужності в тепло, знижуючи цим самим коефіцієнт корисної дії (ККД) машини.

У результаті дії сил тертя відбувається знос елементів кінематичних пар, порушується їхня точність, що спричиняє за собою погіршення роботи машини. Це погіршення насамперед виражається в зниженні точності руху

вихідних ланок механізмів, у підвищенні шумності роботи машин, у збільшенні динамічних шкідливих навантажень на ланки.

Явище тертя настільки багатофакторне, що незважаючи на сучасні досягнення науки і техніки, його можна назвати маловивченим, а точніше, що на сьогодні ще не має задовільного математичного опису, який дозволив би аналітично прогнозувати величину сил тертя в різноманітних умовах.

Тому дотепер для обчислення сил тертя застосовуються найпростіші емпіричні залежності, які забезпечують задовільний результат відшукування сил тертя тільки в сполученні з експериментами, що моделюють умови, максимально наближені до реальних умов роботи пар тертя в машині.

2. Види тертя. Класифікація

Види тертя розрізняють по відносному руху тертьових тіл.

При *терті сковзання* (терті першого роду) спостерігається відносна лінійна швидкість тертьових тіл, що має постійну величину по всій поверхні контакту (по плямі контакту).

При *терті кочення* (терті другого роду) відносна лінійна швидкість тертьових тіл відсутня по всій плямі контакту.

Якщо одночасно відбувається і сковзання і кочення тертьових тіл, тоді прийнято говорити про *комбіноване тертя*. Принцип суперпозиції при лінійному рішенні задач дозволяє в цьому випадку визначати сили тертя окремо при сковзанні й окремо при коченні, а потім сумувати їх.

Існує ще один різновид тертя, називаний *тертям вертіння*. У цьому випадку спостерігається окружне сковзання тертьових тіл навколо деякого центру з перемінною відносною лінійною швидкістю по всій плямі контакту.

Древні люди (і навіть деякі сучасні племена, що ведуть первісний спосіб життя) шляхом вертіння сухої дерев'яної палички в лунці колоди добували вогонь. Самий цей факт говорить про те, що краще в машинах не застосовувати руху з тертям вертіння, щоб не припускати місцевого перегріву окремих елементів деталей машин від сил тертя при їхньому вертінні.

3. Визначення сил тертя сковзання

Розглянемо визначення сил тертя сковзання в поступальній кінематичній парі.

На рис. 4.1 показана в збільшеному вигляді поверхня контакту сухого шорсткого повзуна 1, що сковзає по сухій шорсткій нерухомій направляючій 0.

Повзун 1 рівномірно рухається вправо з лінійною відносною швидкістю $\bar{V}_{1-0} = const$ під дією горизонтальної рушійної сили $\bar{P}$.

На повзун діє вертикальне навантаження $\bar{Q}$.

У місцях контакту гребінців нерівностей виникають миттєві сили реакцій $\bar{R}_i$, кожна з яких має свою величину і свій напрямок (у тому числі, мабуть, можуть бути і такі, що спрямовані у бік руху повзуна). Якщо кожен із сил $\bar{R}_i$ розкласти на дві складові $\bar{N}_i$ і $\bar{F}_i$, то очевидно, їхні суми по двох напрямках будуть рівні:

$$\begin{aligned}\sum \bar{N}_i &= \bar{N} = -\bar{Q}, \\ \sum \bar{F}_i &= \bar{F} = -\bar{P}.\end{aligned}$$

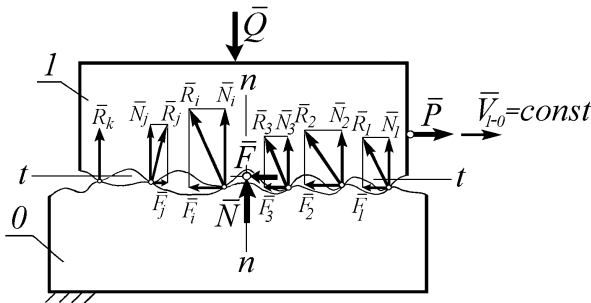


Рис. 4.1. Сковзання шорсткого повзуна по шорсткій направляючій

Досвід показує, що результуюча сила $\bar{F} = \sum \bar{F}_i$ зберігає своє значення в стабільних умовах відносного руху повзуна 1 по направляючій 0. Цю силу і прийнято називати *силою тертя сковзання*. Вона завжди спрямована у бік, протилежний

напрямку вектора швидкості відносного руху повзуна по направляючій $\bar{V}_{l-0}$, навіть і в тому випадку, коли направляюча повзуна сама рухається.

Існує також поняття - *сила тертя спокою*, яка може змінюватися в межах від 0 до деякого максимального значення F_{max} , тільки після досягнення якого можливо виникнення режиму сковзання.

Величина сили тертя сковзання F , як показують експерименти, істотно залежить від величини нормального навантаження на повзун $N = \sum N_i$ з боку направляючої (у напрямку загальної нормалі n - n до поверхні тертя).

Крім того, на величину сили тертя сковзання F у різному ступені впливає великий ряд різноманітних чинників, серед яких можна назвати: величину швидкості відносного руху, площу контакту (інакше, питомий тиск у контакті), вологість середовища, температуру тіл тертя, клас частоти

поверхонь повзуна і направляючої, різновид матеріалу повзуна і направляючої і багато чого ін.

Поки що мова йшла про сухі (знежирені) повзун і направляючу, між якими не було ніяких включень (третіх речовин).

Якщо ж повзун і направляюча не знежирені, або в зону контакту потрапила яка-небудь речовина, або - суміш яких-небудь речовин, тоді величина сили тертя сковзання F може зменшитися в десятки, у сотні і навіть у тисячі разів.

У залежності від наявності в контакті третіх речовин прийнято розрізняти такі різновиди тертя сковзання:

1. *Тертя без змащування* (устарілий термін - *сухе тертя*).

2. *Граничне тертя* - тертя повзуна і направляючої, покритих найтоншою плівкою залишку мастила, яка через невеличку товщину набула характеристики твердого тіла і не може бути видалена інакше, як тільки спеціальними прийомами знежирення.

3. *Напівсухе тертя* - суміш граничного тертя і тертя без мастила (через прорив найтоншої плівки мастила в окремих місцях контакту при високих питомих тисках).

4. *Напіврідинне тертя* - суміш граничного тертя і тертя, при якому повзун і направляюча частково розділені прошарком мастила достатньої товщини з характеристиками рідини.

5. *Рідинне тертя* - тертя повзуна і направляючої, цілком розділених прошарком рідкого мастила (у тому числі, іноді в якості мастила застосовується вода, або який-небудь газ, або навіть просто повітря).

Як уже говорилося вище, тертя сковзання для математичного моделювання являє собою настільки складне явище, що дотепер немає задовільної математичної моделі, у якій би враховувалася більшість чинників впливу.

І в даний час, як і багато років тому, для визначення сили тертя сковзання F застосовується найпростіша формула, приписувана Амонтону,

$$F = f \cdot N(H), \quad (4.1)$$

де f - коефіцієнт тертя сковзання, що являє собою безрозмірну величину, яка змінюється в залежності від виду тертя і від типів тертьових матеріалів у межах приблизно від 1 (в окремих випадках - навіть від декількох одиниць) до 0,0001;

N - нормальна складова сили реакції направляючої на повзун, у H .

Як бачимо, *формула Амонтона* (4.1) враховує окремо вплив лише одного силового чинника, а інші чинники впливу поглинені коефіцієнтом тертя f .

Яку ж вибирати величину коефіцієнта тертя f , якщо він може змінюватися в тисячі разів?

Наприклад, для пари тертя “сталі по сталі” при відсутності мастила вказується значення $f=0,1...0,3$. Як бачимо, діапазон можливих значень f дуже широке, тому точне визначення величини сили тертя по довідковим даним неможливе.

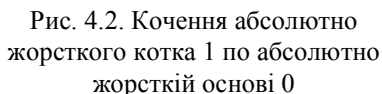
Відповідь є єдина. Треба проводити експеримент, при котрому необхідно максимально точно відтворити умови роботи пари тертя.

Іншими словами, перед початком сковзання необхідно переборювати дещо більший опір, ніж після початку руху. Надалі з ростом швидкості сковзання сила тертя сковзання може змінюватися як убик зниження, так і в бік збільшення. Значення ж коефіцієнта тертя сковзання f для використання в практичних розрахунках необхідно визначати для цілком конкретного сполучення зовнішніх умов.

4. Визначення сил тертя кочення

Досвід показує, що на величину сил тертя кочення дуже впливає пружність тіл кочення (котка і опори), а також їх гістерезисні і пластичні властивості.

На рис. 4.2 показано абсолютно жорсткий (непружний) круглий коток 1 радіуса r , що котиться по абсолютно жорсткій горизонтальній опорі 0 із постійною швидкістю $\bar{V}_{1-0}$ і



навантажений вертикальною силою $\bar{Q}$.

З досвіду відомо, що для підтримання $\bar{V}_{l-o} = \text{const}$ необхідно прикласти до котка деяку рушійну силу $\bar{P}$. При цьому з боку опори 0, на коток 1 будуть діяти (за аналогією з тертям сковзання) дві складові від повної сили реакції: $\bar{N}$ - уздовж загальної нормалі $n-n$ і $\bar{F}$ - уздовж дотичної $t-t$ у точці контакту.

Силу F і прийнято називати *силою тертя кочення*. Спробуємо знайти її.

Скористаємося рівняннями статки, справедливими при дотриманні умови $\bar{V}_{l-o} = \text{const}$.

З рівняння $\sum P_y = 0$ знайдемо $N = Q$.

З рівняння $\sum P_x = 0$ знайдемо $P = F$.

З рівняння $\sum M_O = 0$ знайдемо $F \cdot r = 0$.

Останній вираз, тому що $r \neq 0$, свідчить про те, що в даній постановці задачі $F = P = 0$.

Дійдемо висновку, що без урахування деформацій тіл кочення величину сили тертя кочення F визначити неможливо.

Разом із цим напрошується й інший висновок: чим буде вище жорсткість тіл кочення, тим менше - сила тертя кочення. Це підтверджується досвідом.

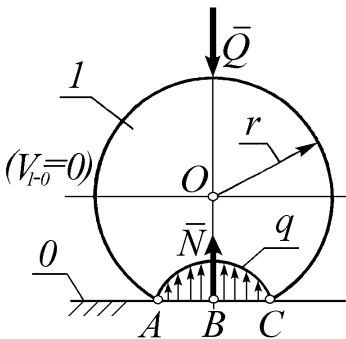


Рис. 4.3. Пружний коток, що не котиться, під навантаженням

Наприклад, на рейковому транспорті, де застосовуються жорсткі сталеві колеса і жорсткі сталеві рейки, сили тертя кочення невеликі.

Відомі дослідження, коли зусиллям однієї людини по горизонтальних рейках переміщався 60-тонний вагон.

На рис. 4.3 показано нерухомий пружний коток 1, здеформований під дією навантаження Q на жорсткій опорі 0, деформаціями якої, через їхню малість, можна зневажити.

Якщо коток однорідний

(ізотропний), тоді епюра питомих сил тиску в контакті буде мати симетричну еліптичну форму, описану Герцом.

Результуюча реакція опори на коток в цьому випадку буде включати тільки одну складову $\bar{N}$, спрямовану по одній лінії і протилежну силі $\bar{Q}$, причому $N=Q$.

Тепер нехай здійснюється кочення котка 1 уліво з $\bar{V}_{1-0} = \text{const}$ (рис. 4.4). Для цього до котка прикладена відповідна горизонтальна штовхаюча сила $\bar{P}$. У площині контакту при цьому виникне сила тертя другого роду $\bar{F}$.

У процесі кочення тіло котка 1 у передній частині зони контакту (від A до B) буде перетерплювати наростаючу деформацію стиску. З фізики пружного тіла відомо, що внутрішнє тертя перешкоджає зміні деформації, тому в зоні $A-B$ контакту сили внутрішнього тертя будуть додаватися до сил пружності, збільшуючи епюру питомих тисків q .

У задній частині контакту (від B до C) спостерігається розпрямлення котка під дією сил пружності. Сили внутрішнього тертя і тут будуть перешкоджати зміні деформації, і тому вони будуть відраховуватися із сил пружності, зменшуючи епюру питомих тисків q .

Таким чином, результуюча епюра питомих тисків у зоні контакту q спотвориться так, як це показано на рис. 4.4.

Результуюча нормальна сила $\bar{N}$ пройде в цьому випадку через центр ваги фігури епюри питомих тисків q на деякій відстані

Рис. 4.4. Кочення пружного котка по жорсткій основі

k попереду від вертикальної центральної лінії.

Очевидно, що відповідно до рівнянь статки і тут сила $N=Q$, а сила $P=F$.

З рівняння $\sum M_O = 0$, з урахуванням $r_\partial \approx r$, одержимо вираз $F \cdot r = N \cdot k$, звідкіля знайдемо

$$F = \frac{k}{r} \cdot N. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) зветься *формулою Кулона*.

Тут r_0 - динамічний радіус котка, який залежить від його деформації під навантаженням,

r - статичний радіус котка (при відсутності навантаження).

Плече k зносу вектора нормальної реакції $\overline{N}$ вперед по ходу руху названо *коефіцієнтом кочення, або коефіцієнтом тертя другого роду*.

Коефіцієнт тертя кочення k звичайно вимірюється в *сантиметрах*.

Експериментами встановлено, що величина коефіцієнта тертя кочення k залежить насамперед від матеріалу тіл кочення і мало залежить від кривизни котка.

У довідковій літературі можна знайти таблицю орієнтованих значень коефіцієнта k (см) для різних пар тіл кочення. Наприклад, для тіл кочення з незагартованої сталі $k \approx 0,005$ см, для тіл кочення з загартованої сталі $k \approx 0,001$ см, для тіл кочення з дерева $k \approx 0,05$ см.

Звичайно безрозмірне відношення k/r виявляється значно менше від коефіцієнта тертя сковзання f , тому кочення супроводжується значно меншими втратами потужності, ніж це спостерігається при здійсненні сковзання.

Якщо враховувати деформації не тільки котка, але і опори, а особливо, якщо опора має пластичні деформації (коток в цьому випадку залишає за собою колію), тоді опис явища кочення котка істотно ускладнюється. З'являються пружні деформації не тільки вертикального, але і горизонтального напрямку, перед котком може виникати валик спученої опорної поверхні. Опір коченню різко зростає.

Усе ж і в цьому випадку запропонована вище модель кочення котка може бути використана, тільки плече k зносу нормальної складової $\overline{N}$ від повної реакції $\overline{R}$ опори на коток необхідно визначити експериментально в умовах близьких до реальних.

5. Контрольні запитання

1. Яку роль відіграє тертя в машинах?
2. Назвіть приклади корисного прояву тертя в машинах.
3. Назвіть приклади шкідливого прояву тертя в машинах.
4. У якому стані в даний час знаходиться *трибоніка* - наука про тертя?
5. Назвіть відомі Вам *види тертя*.
6. Які фактори впливають на величину сили тертя сковзання?

7. Які різновиди тертя ковзання розрізняють у залежності від наявності між тілами тертя третіх речовин?
8. Запишіть формулу Амонтона для визначення величини сили тертя ковзання.
9. Що таке *коефіцієнт тертя ковзання* і як його можна визначити?
10. Розкрийте фізичну сутність явища тертя кочення.
11. Що таке *коефіцієнт тертя кочення*? Яку він має розмірність?
12. Запишіть формулу Кулона для визначення сили тертя кочення і проаналізуйте її.

Лекція 29

Тема: Тертя в поступальній парі

- Зміст: 1. Коефіцієнт тертя. Закон тертя Амонтона.
2. Кут та конус тертя. Явище заклинення повзуна.
3. Клиновий повзун. Зведені коефіцієнт та кут тертя.
4. Контрольні запитання.

1. Коефіцієнт тертя. Закон тертя Амонтона

На рис. 4.5 зображена модель тертя ковзання в поступальній кінематичній парі, що витікає з інформації, викладеної в п. 2 (лекція 28).

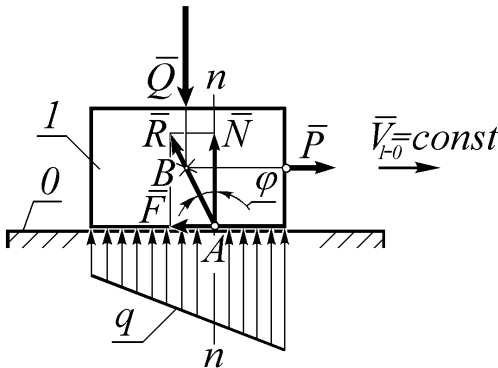


Рис. 4.5. Модель тертя ковзання в поступальній кінематичній парі

Показано сили, що діють на повзун 1, який рухається поступально з $\vec{V}_{1-0} = \text{const}$.

Оскільки на повзун ззовні діє три сили (навантаження $\vec{Q}$, рушійна сила $\vec{P}$ і реакція опорної поверхні направляючої $\vec{R}$), лінії їхньої дії перетинаються в деякій точці B .

У зв'язку з цим точка A прикладення результуючої реакції $\vec{R}$

направляючої 0 на повзун 1 зміщується від середини повзуна вперед по ходу руху.

Іншими словами, повзун 1 сприймає деяку перекидну дію від сил тертя в контакті з направляючою 0, так що еюра питомих тисків q стає нерівномірною. Вона зростає попереду по ходу руху і зменшується позаду.

Розкладемо силу реакції $\vec{R}$ направляючої на повзун на дві складові $\vec{N}$ і $\vec{F}$. Як уже було показано в п. 4.1: $F=P$, а $N=Q$.

Кут φ між повною силою реакції $\vec{R}$ і її складовою $\vec{N}$ прийнято називати *кутом тертя*. Знайдемо величину кута тертя φ .

2. Кут та конус тертя Явище заклинення повзуна

Очевидно, що $\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N}$, а з урахуванням формули Амонтона (4.1)

одержимо

$$\operatorname{tg} \varphi = f, \quad \varphi = \operatorname{arctg} f. \quad (4.3)$$

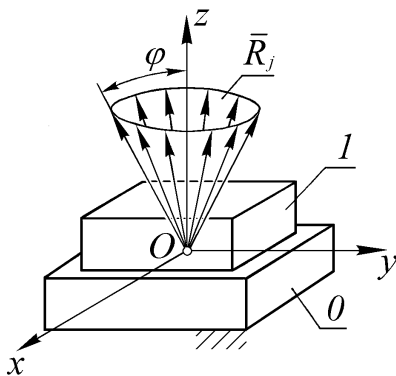


Рис. 4.6. Конус тертя

Таким чином, кутом тертя називається кут φ , тангенс якого дорівнює коефіцієнту тертя скозвання f . На цей кут від нормалі n - n відхиляється результуюча сила реакції $\bar{R}$ направляючої на повзун за рахунок сил тертя у бік, протилежний напрямку відносного руху повзуна по направляючій.

Виявлена закономірність дозволяє спростити рішення деяких задач, як це буде показано нижче.

Якщо повзун здійснює не плоский рух, а просторовий, тоді сила реакції $\bar{R}$, відхиляючись на кут

φ у протилежний бік від вектора відносної швидкості руху може описати конічну поверхню (рис. 4.6).

Повзун 1 у просторовій поступальній кінематичній парі може переміщатися в площині xOy у будь-якому напрямку відносно направляючої 0. У цьому випадку прийнято говорити про конус тертя з конусним кутом

$$\varphi = \operatorname{arctg} f.$$

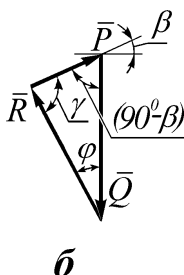
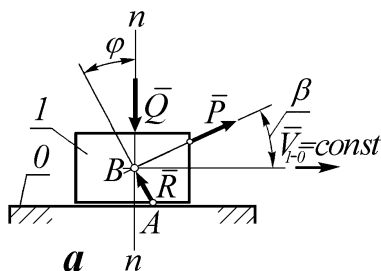


Рис. 4.7. До визначення рушійної сили плоского повзуна

Розглянемо горизонтальний рівномірний рух під дією довільно спрямованої рушійної сили $\bar{P}$ плоского повзуна 1, що несе вертикальне навантаження $\bar{Q}$, на направляючій 0 (рис. 4.7а).

Знайдемо

величину рушійної сили P , вважаючи відомими Q , β і $\varphi = \arctg f$.

Для відшукування величини сили P побудуємо замкнутий векторний трикутник сил за умовою їхньої рівноваги (рис. 4.76).

Скористаємося теоремою синусів із тригонометрії, відповідно до якої можна записати:

$$\frac{P}{\sin \varphi} = \frac{Q}{\sin \gamma}.$$

Кут γ знайдемо з умови рівності суми кутів трикутника 180° :

$$\gamma = 180^\circ - \varphi - (90^\circ - \beta) = 90^\circ + (\beta - \varphi).$$

Тому що
отримаємо

$$P = Q \frac{\sin \varphi}{\cos(\beta - \varphi)}. \quad (4.4)$$

Аналіз формули (4.4) показує, що при постійному значенні коефіцієнта тертя сковзання f величина рушійної сили P буде змінюватися зі зміною кута β .

Очевидно, що мінімальне значення сили P_{min} буде при максимальному значенні знаменника, тобто при

$$\cos(\beta - \varphi) = 1.$$

Тоді $P_{min} = Q \cdot \sin \varphi$,

якщо буде дотримуватися рівність $\beta = \varphi$.

Звідси слідує, що при переміщенні різних вантажів по горизонтальній поверхні необхідно правильно вибирати напрямки рушійних сил.

Іноді, наприклад, при такому переміщенні вантажу “помічник” штовхає його позаду зверху.

Нижче ми зможемо переконатися, що якщо при цьому зусилля “помічника” йде під кутом, що від вертикалі складає величину, рівну куту φ , тоді від такої помочі немає ніякого пуття. При більш крутому натисканні на вантаж “помічник” узагалі буде гальмувати рух.

Розглянемо так називане явище заклинення повзуна (рис. 4.8).

Нехай на повзун 1 зверху діє деяка сила $\overline{P}$ під кутом α до вертикалі. Чи буде при цьому повзун 1 рухатися по направляючій 0?

Будемо вважати величину сили P такою, що в багато разів переважає силу тяжіння повзуна G , тому величиною сили G зневажимо.

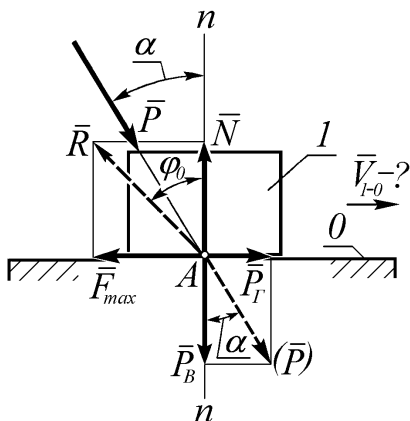


Рис. 4.8. Явище заклинення повзуна

можливої сили тертя спокою F_{max} , спрямованої в протилежний бік від напрямку очікуваного руху.

При цьому, як уже було встановлено вище,

$$F_{max} = f_0 \cdot N. \quad (4.5)$$

Пояснимо це так.

Якби, наприклад, на повзун впливала тільки сила P_θ , а P_z дорівнювала б нулю, то сили тертя спокою $F < F_{max}$ узагалі б не існувало.

Адже сила тертя спокою з'являється тільки при наявності дотичних (у даному випадку, горизонтальних) сил. Причому з ростом дотичної сили P_z спостерігався б і ріст сили тертя. І лише перед початком руху повзуна була б досягнута максимальна величина сили тертя спокою F_{max} .

У даному випадку поки невідомо, чи буде повзун рухатися, але перешкоджати руху повзуна буде сила тертя, значення якої може змінюватися від 0 до F_{max} .

Очевидно, що рух повзуна може виникнути лише при дотриманні умови

$$P_z > F_{max}. \quad (4.6)$$

Знайдемо значення величини сили F_{max} через величину сили P_z . Для цього послідовно запишемо

$$F_{max} = f_0 \cdot N = f_0 \cdot P_\theta = f_0 \cdot \frac{P_z}{\tan \alpha} = P_z \cdot \frac{\tan \varphi_0}{\tan \alpha}. \quad (4.7)$$

Підставимо остаточний вираз (4.7) у (4.6), тоді одержимо

$$P_e > P_e \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \alpha}$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi_0 = f_0. \quad (4.8)$$

Отримана формула (4.8) показує, що рух можливий тільки в тому випадку, коли

$$\alpha > \varphi_0. \quad (4.9)$$

При величині ж

$$\alpha < \varphi_0$$

буде спостерігатися заклинення повзуна.

Збільшення сили P без зміни її напрямку відносно заклиненого повзуна ні до чого призвести не може. Повзун рухатися все рівно не буде.

Рівність

$$\alpha = \varphi_0$$

можна вважати умовою можливості виникнення початку руху повзуна під дією сили P .

Для здійснення прискореного руху повзуна необхідно збільшувати кут α до величини, що перевищує значення φ_0 , тобто повинно бути

$$\alpha > \varphi_0.$$

З вищевикладеного випливає висновок, що зовнішні рушійні сили, які діють на повзун, завжди повинні мати рівнодіючу, що перебуває за межами кута тертя φ_0 , інакше повзун може заклинити.

В окремих випадках із визначеними цілями, у т. ч. для збільшення сил тертя сковзання, повзуну надають клиновидну форму.

3. Клиновий повзун. Зведені коефіцієнт та кут тертя

Розглянемо визначення сил тертя у випадку клиновидного (або клинового) повзуна.

На рис. 4.9 у двох ортогональних ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) і одній аксонометричній ($\mathbf{e}$) проєкціях показаний клиновий повзун 1, що переміщається рівномірно по жолобку клиновидної форми направляючої 0 із відомим кутом 2γ . На повзун діють вертикальне навантаження $\overline{Q}$, горизонтальна рушійна сила $\overline{P}$, а також дві нормальні сили реакцій $\overline{N}$, що генерують у місцях контакту дві сили тертя $\overline{F}$, спрямовані протилежно рушійній силі $\overline{P}$.

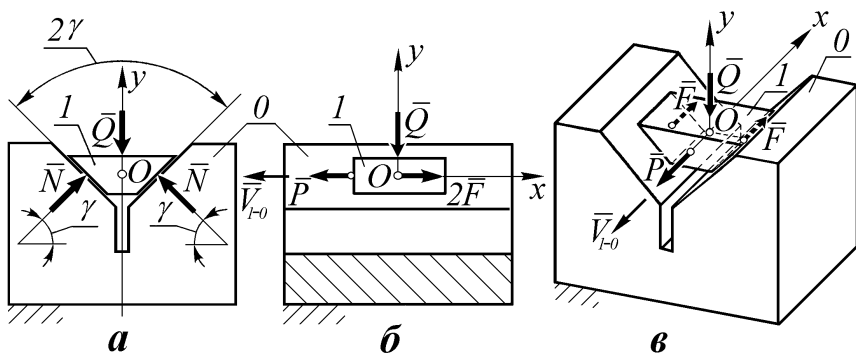


Рис .4.9. Рух клинчастого повзуна по жолобу клиновидної форми

З рівняння рівноваги сил $\sum P_y = 0$ маємо

$$-Q + 2N \cdot \sin \gamma = 0,$$

$$N = \frac{Q}{2 \sin \gamma}. \quad (4.10)$$

Відповідно до формули (4.1) сила тертя $F = f \cdot N$,

де f - коефіцієнт тертя сковзання для пари тертя “повзун - направляюча”, який будемо вважати відомим.

З рівняння $\sum P_x = 0$ знайдемо

$$2F - P = 0,$$

$$P = 2F. \quad (4.11)$$

Перепишемо вираз (4.11) з урахуванням (4.10) і (4.1)

$$P = 2F = 2f \cdot N = Q \frac{f}{\sin \gamma}. \quad (4.12)$$

Порівняємо формулу (4.12) із формулою для випадку плоского повзуна, записану для тих же самих зовнішніх умов (з урахуванням $2\gamma = 180^\circ$), що буде мати вигляд

$$P = Qf. \quad (4.13)$$

Формули (4.12) і (4.13) відрізняються лише наявністю у формулі

(4.12) у знаменнику величини $\sin \gamma$, у той час як у формулі (4.13) $\sin \gamma = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ відсутній.

$$\text{Прийнято} \quad f^I = \frac{f}{\sin \gamma} \quad (4.14)$$

називати зведеним коефіцієнтом тертя, тоді формула (4.12) перепишеться у вигляді

$$P = Q f^I,$$

Очевидно, що при клинчастій формі повзуна сила тертя буде більшою, ніж при плоскій формі. Зі зменшенням γ зведений коефіцієнт тертя f^I буде зростати.

Так, при куті клина $2\gamma = 40^\circ$ одержимо

$$f^I = \frac{f}{\sin \gamma} = \frac{f}{\sin 20^\circ} = \frac{f}{0,34} \approx 3f. \quad (4.15)$$

Значення кута $2\gamma = 40^\circ$ прийнято, наприклад, у клинопасовій передачі. При цьому, як витікає з формули (4.15), тягова спроможність клинопасової передачі виявляється приблизно в 3 рази вищою, ніж плоскопасової, за інших рівних умов.

Подальше зменшення кута γ в клинопасовій передачі з метою підвищення її тягової спроможності небезпечно з погляду можливого заклинення ремня в канавці шківів, тому що при цьому відбувається прискорена руйнація (розшарування) ремня.

Усім відомий ефект заклинення сокири в пеньку при колці дров, коли сокира не розколовши пень на дві частини, застрягне в ньому настільки сильно, що витягти її назад коштує дуже великих зусиль.

Пояснити заклинення сокири можна дуже великими силами тертя, обумовленими, відповідно до формули (4.15), великим значенням зведеного коефіцієнта тертя f^I через малу величину кута 2γ клина леза сокири, що складає усього лише декілька градусів.

Краще при колці дров використовувати колун, який відрізняється від сокири тим, що в нього кут 2γ робочого носка (який складає біля 30°) значно більше, ніж у сокири.

Крім того колун не має сенсу гостро заточувати. З-за цього навіть має ходіння прислів'я: "тупий, як колун". Проте, той, хто хоч раз колов дрова колуном, міг оцінити позитивно його якості.

Клиновидна форма пар тертя також часто застосовується з метою збільшення сил тертя у фрикційних передачах і в деяких інших механізмах.

У тих випадках, коли буде розглядатися тертя тіл клиновидної форми, варто застосовувати ті ж математичні залежності, що будуть виведені для тіл тертя плоскої форми, із тією лише різницею, що замість значення

коефіцієнта тертя f необхідно у формулах записувати значення зведеного коефіцієнта тертя f^I .

По тій же аналогії, при клиновидній формі пар тертя також слід замість значення кута тертя φ у формулах записувати значення зведеного кута тертя

$$\varphi^I = \arctg f^I. \quad (4.16)$$

Такий підхід істотно полегшує рішення різних задач силового аналізу механізмів з урахуванням тертя.

4. Контрольні запитання

1. Що таке *кут тертя* і *конус тертя*?
2. Доведіть, під яким кутом повинна діяти мінімальна рушійна сила на повзун для здійснення його рівномірного горизонтального руху?
3. Опишіть явище заклинення повзуна. Встановіть умови заклинення.
4. Накресліть схему клинового повзуна на направляючій жолобчастої форми. Визначте результуючу силу тертя повзуна.
5. Що таке *зведений коефіцієнт тертя* клинового повзуна? Від чого залежить його значення?
6. Приведіть приклади використання клиновидної форми тіл тертя.
7. Що таке *зведений кут тертя* і як його можна визначити?

Лекція 30

Тема: **Силове дослідження найпростіших механізмів з урахуванням тертя**

Зміст: 1. Постановка задачі. Припущення. Коефіцієнт корисної дії. Самогальмування.
2. Нахилена площина. Підйом і опускання вантажу.
3. Клиновий прес.
4. Гвинтовий домкрат.
5. Контрольні запитання.

1. Постановка задачі. Припущення. Коефіцієнт корисної дії. Самогальмування

Найпростішими будемо вважати такі механізми, у яких зберігається постійне співвідношення між діючими силами в усьому робочому діапазоні.

Нижче будуть розглянуті задачі силового аналізу найпростіших механізмів з урахуванням тертя в наступній постановці.

Заданими будемо вважати: силу корисного навантаження; геометричні параметри механізму; коефіцієнти (або кути) тертя.

Підлягають відшукуванню: рушійні сили (моменти сил) при прямому ході; утримуючі сили (моменти сил) при зворотному ході; коефіцієнт корисної дії механізму при прямому ході; коефіцієнт корисної дії механізму при зворотному ході; умови самогальмування механізму.

Самогальмуванням механізму називається явище відсутності зворотного ходу під дією тільки сили корисного навантаження (при відкинутих рушійних силах).

Нагадаємо відомості про коефіцієнт корисної дії (ККД).

Як відомо з фізики, *коефіцієнтом корисної дії η називається відношення корисної частини виконаної роботи до усієї витраченої роботи.*

У межах вище сформульованої постановки задачі під ККД будемо розуміти відношення роботи сил корисного опору $A_{ко}$ до роботи рушійних сил A_p :

$$\eta = \frac{A_{ко}}{A_p} . \quad (4.17)$$

Очевидно, що в аналізованому випадку

$$A_p = A_{ко} + A_{тер}, \quad (4.18)$$

де $A_{тер}$ - робота сил тертя.
Тоді формула (4.18) переписється у вигляді

$$\eta = \frac{A_p - A_{тер}}{A_p} = 1 - \psi, \quad (4.19)$$

де ψ - коефіцієнт утрат, рівний

$$\psi = \frac{A_{тер}}{A_p}. \quad (4.20)$$

Якщо при підрахунку виявиться, що $\psi > 1$, тоді це буде означати, що сили тертя спроможні поглинути роботу, більшу, ніж можуть виконати рушійні сили. При цьому буде

$$\eta < 0, \quad (4.21)$$

тобто має місце самогальмування механізму.

Для найпростіших механізмів, як це буде показано нижче, відношення робіт можна звести до відношення діючих сил. Тому для підрахунку ККД прямого ходу можна скористатися дуже простою і зручною формулою

$$\eta = \frac{P_{i0}}{P_p}, \quad (4.22)$$

де P_{i0} - ідеальна рушійна сила, яка була б потрібна для рівномірного руху механізму на прямому ході при відсутності тертя, тобто при $f = 0$ (або $\varphi = 0$).

Формула (4.22) не потребує особливих окремих доказів, тому що P_{i0} і є та частина рушійної сили P_p , що виконує корисну частину роботи, а робота в найпростіших механізмах пропорційна відповідним силам.

2. Нахилена площина. Підйом і опускання вантажу

Серед найпростіших вантажопідйомних устроїв відома нахилена площина, яка застосовується в екстрених випадках при відсутності вантажопідйомної машини. Розгляд нахиленої площини важливий не сам по собі, а остільки, оскільки він є базовим для розгляду роботи гвинтової кінематичної пари, передачі "гвинт - гайка", гвинтової, гіпоїдної і черв'ячної передач.

Розглянемо силовий аналіз процесу рівномірного підйому вантажу G по нахиленій площині з кутом підйому α , якщо відомий коефіцієнт тертя f (або кут тертя φ) (рис. 4.10). Прикладемо до вантажу 1 рушійну силу P під

обраним (тобто, відомим) кутом β до напрямку вектора швидкості переміщення вантажу $\vec{V}_{I-0} = \text{const}$.

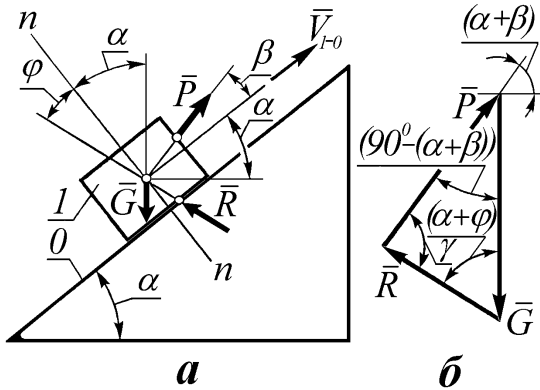


Рис. 4.10. Підйом вантажу по нахилений площині

На вантаж 1 також будуть діяти: сила тяжіння вантажу G (вертикально униз) і сила реакції нахиленої площини R (під кутом φ стосовно нормалі $n-n$ із відхиленням убік, протилежний напрямку відносного руху вантажу).

Лінії дії трьох сил, що прикладені до вантажу при його рівномірному підйомі: P , G і R , обов'язково при

цьому перетнуться в одній точці.

Можна скласти замкнутий трикутник названих векторів сил (рис. 4.10б), із котрого відповідно до теореми синусів знайдемо рушійну силу P :

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{G}{\sin \gamma};$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \varphi) - (90^\circ - (\alpha + \beta)) = 90^\circ + (\beta - \varphi);$$

$$P = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(90^\circ + (\beta - \varphi))} = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}. \quad (4.23)$$

Кількісний аналіз формули (4.23) показує, що найменше значення рушійної сили P_{min} буде при виборі кута β , рівного значенню :

$$\beta = \varphi. \quad (4.24)$$

По формулі (4.22) з урахуванням (4.23) знайдемо ККД ходу підйому

$$\eta = \frac{P_{io}}{P} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos(\beta - \varphi)}{\cos \beta \cdot \sin(\alpha + \varphi)}, \quad (4.25)$$

де

$$P_{id} = G \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta},$$

тому що при підрахунку P_{id} по формулі (4.23) слід вважати відсутніми сили тертя, тобто $\varphi = 0$.

Становить інтерес випадок, коли рушійна сила P спрямована горизонтально.

Близький до горизонтального напрямок рушійної сили може бути здійснений, наприклад, коли сила P^2 прикладається до вантажу через довгий трос із боку якого-небудь механічного тягача, що істотно полегшує задачу підйому важкого вантажу по нахилений площині.

Очевидно, що при цьому формули (4.23) і (4.25) можуть бути використані, якщо в них підставити значення кута $\beta = -\alpha$.

Тоді

$$P^2 = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)} = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(-\alpha - \varphi)} = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)},$$

тобто

$$P^2 = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi), \quad (4.26)$$

$$\eta^2 = \frac{\sin \alpha \cdot \cos(\beta - \varphi)}{\cos \beta \cdot \sin(\alpha + \varphi)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos(-\alpha - \varphi)}{\cos(-\alpha) \cdot \sin(\alpha + \varphi)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \varphi)}{\cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi)},$$

тобто

$$\eta^2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (4.27)$$

У формулах (4.26) і (4.27) прийнято $\cos(-\alpha - \varphi) = \cos(\alpha + \varphi)$ і $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, тому що $\cos$ - функція парна.

З кількісного аналізу формули (4.27) витікає, що ККД підйому вантажу η^2 буде максимальним при значенні

$$\alpha = 45^\circ - \varphi/2. \quad (8.28)$$

При значеннях $\alpha = 0$ або $\alpha = 90^\circ - \varphi$ ККД підйому перетворюється в нуль.

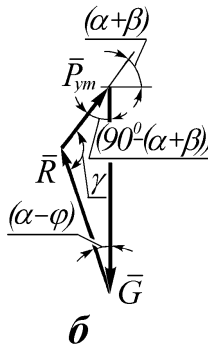
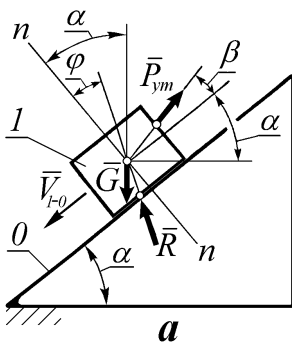
Тепер розглянемо рівномірне опускання того ж вантажу G по нахилений площині (рис. 4.11) при тих же геометричних умовах (α і β) і тому ж значенні коефіцієнта тертя f (або φ).

Прикладемо до вантажу 1 під тим же обраним кутом β (що і при підйомі) утримуючу силу P_{ym} , при якій буде спостерігатися рівномірне опускання вантажу з $\bar{V}_{1-0} = \text{const}$.

На вантаж 1 також будуть діяти: сила тяжіння вантажу G (вертикально) і сила реакції нахиленої площини R (під кутом φ стосовно нормалі $n-n$ із відхиленням убік, протилежний напрямку відносного руху).

І в цьому випадку лінії дії трьох сил P_{ym} , G і R перетнуться в одній точці.

Тут також можна скласти трикутник вищезгаданих векторів сил (рис. 4.11б), із котрого відповідно до теореми синусів знайдемо утримуючу силу P_{ym} :



$$\frac{P_{ym}}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{G}{\sin \gamma};$$

$$\gamma = 180^\circ - (90^\circ - (\beta + \alpha)) - (\alpha - \varphi) = 90^\circ + (\beta + \varphi);$$

$$P_{ym} = G \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} \quad (4.29)$$

Зауважимо, що у формулі (4.29) для визначення P_{ym} у порівнянні з формулою (4.23) для визначення P тільки перед φ помінялися знаки на

Рис 4. 11. Опускання вантажу по нахиленій площині

протилежні.

Надалі будемо користуватися цим спостереженням і для інших найпростіших механізмів без виводу будемо записувати формули для утримуючої сили P_{ym} зворотного ходу, взявши за основу формули для рушійної сили прямого ходу P , тільки помінявши у них перед φ знаки на протилежні.

Кількісний аналіз формули (4.29) показує, що величина утримуючої сили більше залежить від зміни значення кута α , ніж від зміни β .

Так, при $\alpha = \varphi$ утримуюча сила $P_{ym} = 0$, а при $\alpha < \varphi$ буде $P_{ym} < 0$.

Якщо ж $\alpha > \varphi$, тоді і $P_{ym} > 0$.

Зміна ж β (незначна, тому що звичайно напрямок P_{ym} мало відхиляється від лінії напрямку руху), з урахуванням того, що $\cos$ - функція парна, має малий вплив на зміну величини P_{ym} . При цьому значення $\cos(\beta + \varphi)$ мало відрізняється в реальних випадках від 1.

Таким чином, якщо при підйомі вантажу для досягнення найбільшого ККД, відповідно до формул (4.28) і (4.24), найкращим значенням кута α буде значення $\alpha = 45^0 - \varphi/2$, а найкращим значенням кута β буде значення $\beta = \varphi$, то при опусканні вантажу величина кута β мало впливає на величину утримуючої сили P_{ym} (і його можна, у принципі, взяти будь-яким невеличким), а величина кута α повинна бути обрана поблизу значення

$$\alpha = \varphi. \quad (8.31)$$

Знайдемо тепер ККД зворотного ходу (опускання) - η_{on} .

При опусканні вантажу рушійною силою будемо вважати силу тяжіння вантажу G , а за силу корисного опору умовно приймемо P_{ym} .

Скористаємося формулою (4.17)

$$\eta_{on} = \frac{A_{ko}}{A_p}.$$

Спроекуємо сили $\bar{G}$ і $\bar{P}_{ym}$ на напрямок руху вантажу і підрахуємо

$$A_{ko} = P_{ym} \cdot \cos \beta \cdot \Delta S, \quad (4.31)$$

$$A_p = G \cdot \sin \alpha \cdot \Delta S. \quad (4.32)$$

Підставимо вирази (4.29), (4.31) і (4.32) у формулу (4.17), тоді одержимо

$$\begin{aligned} \eta_{on} &= \frac{A_{ko}}{A_p} = \frac{P_{ym} \cdot \cos \beta \cdot \Delta S}{G \cdot \sin \alpha \cdot \Delta S} = \\ &= \frac{G \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} \cdot \frac{\cos \beta \cdot \Delta S}{G \cdot \sin \alpha \cdot \Delta S}, \\ \text{тобто} \quad \eta_{on} &= \frac{\cos \beta \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha \cdot \cos(\beta + \varphi)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Зауважимо, що формула (4.33) від формули (4.25), по якій визначався ККД при підйомі вантажу, відрізняється тим, що, по-перше, у формулі (4.33) скрізь перед φ став протилежний знак, а по-друге, у формулі (4.33) чисельник і знаменник, стосовно формули (4.25), помінялися місцями.

Надалі також будемо користуватися цим спостереженням і для інших найпростіших механізмів без виводу будемо записувати формули для визначення ККД зворотного ходу η_{on} , узявши за основу формули для ККД прямого ходу η , тільки обернувши їх і помінявши у них знаки перед φ .

Перепишемо тепер формули (4.29) і (4.33) для випадку, коли і при опусканні вантажу вибрано значення кута $\beta = -\alpha$, тобто коли утримуюча сила горизонтальна. З урахуванням парності косинусоїдальної тригонометричної функції одержимо

$$P_{ym}^2 = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi), \quad (4.34)$$

$$\eta_{on}^2 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (4.35)$$

Кількісний аналіз отриманих формул (4.33) і (4.35) показує, що величина ККД при опусканні вантажу, як і величина утримуючої сили P_{ym} , незначно залежить від вибору значення кута β і значно залежить від величини кута α .

Так, при величині $\alpha = \varphi$, ККД опускання дорівнює нулю, при $\alpha > \varphi$ знаходимо $\eta_{on} > 0$, а при $\alpha < \varphi$ виявляємо $\eta_{on} < 0$.

Рекомендації на вибір значень кута α і кута β при опусканні вантажу, що витікають з аналізу формул (4.33) і (4.35), цілком збігаються з тими, що були визначені при аналізі формули (4.29), по якій визначалась величина утримуючої сили P_{ym} .

Тепер, у завершення розгляду нахиленої площини, як вантажопідйомного устрою, визначимо умову самогальмування вантажу.

Відповідно до формули (4.21) самогальмування вантажу буде спостерігатися в тому випадку, якщо

$$\eta_{on} < 0. \quad (4.36)$$

Як було встановлено вище, це дотримується при значенні кута

$$\alpha < \varphi. \quad (4.37)$$

Очевидно, що відповідно до формул (4.29) і (4.34), при цьому будемо мати

$$P_{ym} < 0. \quad (4.38)$$

Що ж це означає?

Це означає, що рівномірний рух вантажу униз по нахиленій площині при дотриманні умови самогальмування можливий тільки в тому випадку, коли утримуюча сила P_{ym} перетвориться у свою протилежність, тобто стане не гальмуючою, а рушійною силою.

Не буде діяти сила P_{ym} від'ємного (протилежного) напрямку, тоді не буде і руху опускання вантажу.

Таким чином, надалі, умову самогальмування будь-якого найпростішого механізму будемо перевіряти по одній з формул: (4.36) або (4.38).

Нижче приведені рішення деяких задач силового аналізу інших найпростіших механізмів і деяких кінематичних пар з урахуванням тертя ковзання і кочення.

3. Клиновий прес

Виконаємо в загальному вигляді силовий аналіз з урахуванням тертя плоского клинового преса (рис. 4.12а).

Нехай, заданими величинами є значення кута клина α , коефіцієнта f (або кута φ) тертя, а також сили корисного опору $\bar{Q}$.

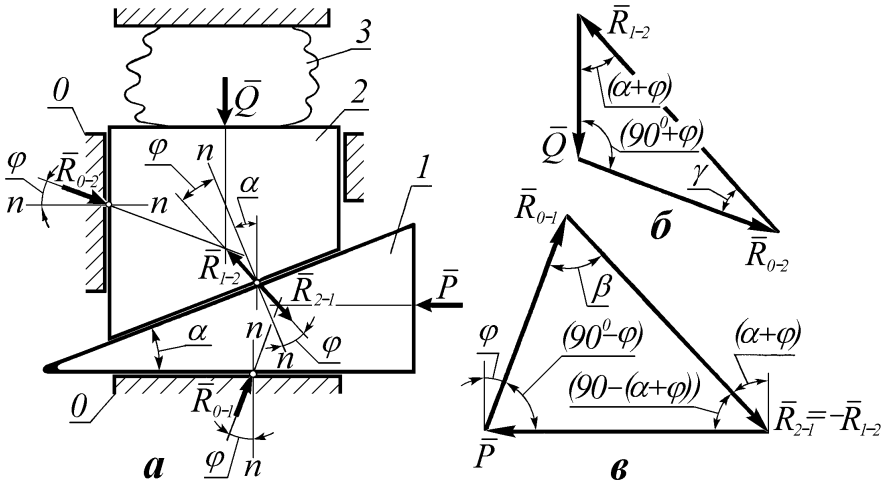


Рис. 4.12. Силовий аналіз клинового преса

Аналіз виконаємо в наступній послідовності.

1. Структурний аналіз механізму плоского клинового преса був розглянутий при рішенні задачі 1.6 [8].

При силовому аналізі механізму клинового преса прийемо такі допущення:

- 1) Перекося в направляючих відсутні.
- 2) Плунжер 2 притискається до направляючої 0 тільки з одного боку.
- 3) Умови тертя у всіх поступальних кінематичних парах однакові.

Зауважимо, що робоче тіло 3 до складу ланок механізму клинового преса не входить.

2. Прикладемо силу корисного опору Q із боку робочого тіла 3 до плунжера 2, а також рушійну силу P до клина 1. Це зовнішні сили, що діють на ланки механізму клинового преса.

Робочий процес обтиснення робочого тіла 3 будемо вважати рівномірним, тому інерційні сили враховувати не будемо.

З метою зменшення кількості окремих зображень на рис. 4.12, не розриваючи зв'язок, покажемо сили реакцій, прикладені до клина 1 і до плунжера 2.

Відзначимо, що як на клин 1, так і на плунжер 2 діє по три сили, лінії дії яких перетинаються у відповідних точках.

Всі сили, що діють на клин 1 невідомі, тому силовий аналіз почнемо з плунжера 2.

3. На рис. 4.12б показаний замкнутий векторний трикутник сил $\overline{Q}$, $\overline{R}_{1-2}$ і $\overline{R}_{0-2}$, які діють на плунжер 2 і знаходяться в рівновазі.

По теоремі синусів відшукаємо величину сили реакції $\overline{R}_{1-2}$:

$$\begin{aligned}\frac{R_{1-2}}{\sin(90^\circ + \varphi)} &= \frac{Q}{\sin \gamma}, \\ \gamma &= 180^\circ - (90^\circ + \varphi) - (\alpha + \varphi) = 90^\circ - (\alpha + 2\varphi), \\ \sin(90^\circ - (\alpha + 2\varphi)) &= \cos(\alpha + 2\varphi), \\ \sin(90^\circ + \varphi) &= \cos \varphi, \\ R_{1-2} &= Q \frac{\cos \varphi}{\cos(\alpha + 2\varphi)}.\end{aligned}\quad (4.39)$$

4. Тепер побудуємо замкнутий векторний трикутник сил $\overline{P}$, $\overline{R}_{0-1}$ і $\overline{R}_{2-1}$, які діють на клин 1 і знаходяться в рівновазі (рис. 4.12в).

Також відповідно до теореми синусів знайдемо рушійну силу P :

$$\begin{aligned}\frac{P}{\sin \beta} &= \frac{R_{2-1}}{\sin(90^\circ - \varphi)}, \\ \beta &= 180^\circ - (90^\circ - \varphi) - (90^\circ - (\alpha + \varphi)) = \alpha + 2\varphi, \\ \sin \beta &= \sin(\alpha + 2\varphi), \\ \sin(90^\circ - \varphi) &= \cos \varphi, \\ P &= R_{2-1} \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\cos \varphi}.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Підставимо у формулу (4.40) вираз (4.39), тому що сили реакцій $\overline{R}_{2-l}$ і $\overline{R}_{l-2}$ рівні по величині, тоді одержимо

$$P = Q \frac{\cos \varphi}{\cos(\alpha + 2\varphi)} \cdot \frac{\sin(\alpha + 2\varphi)}{\cos \varphi} = Q \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi). \quad (4.41)$$

5. ККД клинового преса на прямому ході обтиснення робочого тіла 3 знайдемо по формулі (4.22)

$$\eta = \frac{P_{io}}{P} = \frac{Q \cdot \operatorname{tg} \alpha}{Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi)}. \quad (4.42)$$

Величину утримуючої сили P_{ym} можна знайти, як це було показано вище, використовуючи формулу (4.41), тільки в останній слід поміняти знак перед φ на протилежний:

$$P_{ym} = P(-\varphi),$$

тобто

$$P_{ym} = Q \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi). \quad (4.43)$$

7. ККД клинового преса на зворотному ході під дією сили Q також знайдемо, використовуючи формулу (4.42).

Як було показано вище, для цього варто взяти зворотне значення (4.42) і крім того, перед φ необхідно змінити знак на протилежний:

$$\eta_{звор} = \frac{1}{\eta(-\varphi)},$$

тобто

$$\eta_{звор} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (4.44)$$

8. Знайдемо умову самогальмування механізму клинового преса.

Відповідно до формул (4.36) і (4.38) самогальмування буде спостерігатися за умови $P_{ym} < 0$ і $\eta_{звор} < 0$, а це можливо, якщо буде

$$\alpha < 2\varphi. \quad (4.45)$$

4. Гвинтовий домкрат

Виконати в загальному вигляді силовий аналіз механізму гвинтового домкрата (рис. 4.13) з урахуванням тертя.

Гвинт і гайка мають нарізку прямокутної форми.

Сила корисного навантаження Q відома.

Також відома геометрія (d_2, ψ, s, p, z) гвинтової пари і величина коефіцієнта f (або кута φ) тертя між гвинтом і гайкою.

Аналіз виконаємо в наступній послідовності.

1. У першому наближенні можна вважати, що розподілена результуюча сила реакції R_{0-1} нерухомої гайки 0 на гвинт 1 діє по гвинтовій лінії на середньому діаметрі d_2 .

Оскільки за умовою задачі необхідно визначити тільки результуючий момент рушійних сил T , що діють на гвинт, а не розподіл навантаження між гвинтом і гайкою, силу реакції R_{0-1} можна умовно зосередити в одній довільній точці середньої гвинтової лінії. Будемо вважати такою передню центральну точку середньої гвинтової лінії.

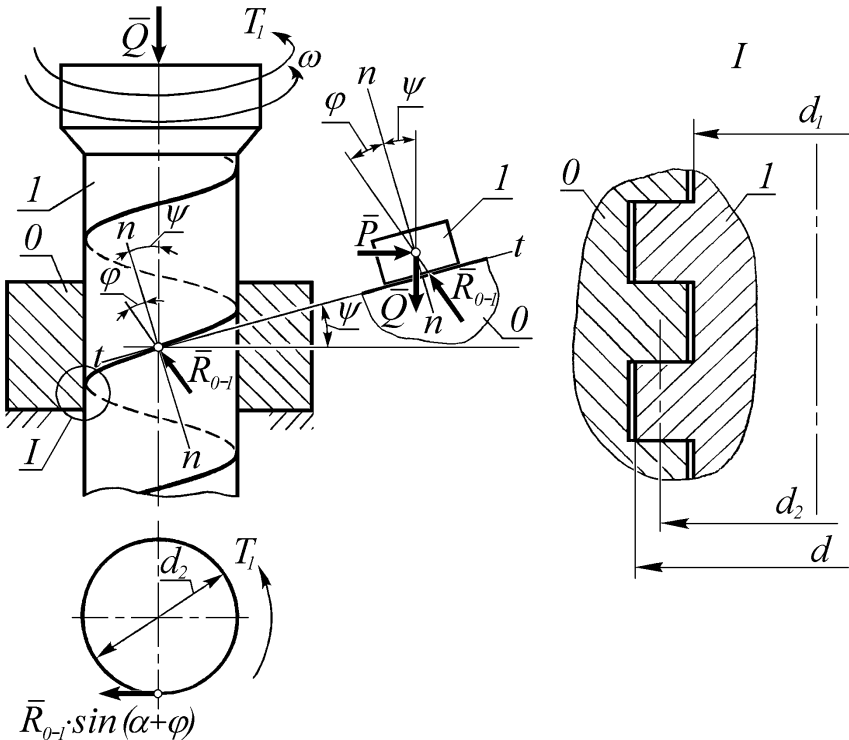


Рис. 4.13. Гвинтовий домкрат з нарізкою прямокутного профілю

Вектор сили реакції $\overline{R}_{0-I}$ відхилимо від загальної нормалі $n-n$ до середньої гвинтової лінії в обраній точці на відомий кут φ убік, протилежний напрямку сковзання передньої частини гвинта (тобто вліво - при заданому напрямку обертання гвинта проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\omega=const$).

Таким чином, від осі гвинта вектор сили реакції відхилиться на кут

$$(\psi + \varphi),$$

де ψ - кут підйому гвинтової лінії.

Тангенс кута ψ можна знайти через відношення величин ходу гвинта s і довжини окружності з діаметром d_2 (по плоскій розгортці середнього циліндра гвинта):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{s}{\pi \cdot d_2}. \quad (4.46)$$

Якщо гвинт багатозахідний із числом заходів z , тоді хід гвинта s можна відшукати по формулі

$$s = p \cdot z, \quad (4.47)$$

де p - шаг гвинтової нарізки.

Тому що за умовою задачі геометрія гвинтової кінематичної пари відома, отже значення кута ψ можна обчислити по формулах (4.46) і (4.47).

2. Зауважимо, що задача з прийнятими допущеннями фактично звелася до задачі підйому вантажу по нахиленій площині, тільки відносний рух елемента гвинта (аналога вантажу) здійснюється не по прямій лінії (під дією рушійної сили), а по гвинтовій - під дією моменту рушійних сил T .

Таким чином, за умовою $\sum M = 0$ навколо осі гвинта (із горизонтальної проекції) одержимо

$$T = \frac{d_2}{2} \cdot R_{0-I} \cdot \sin(\psi + \varphi). \quad (4.48)$$

А з умови $\sum P = 0$ уздовж осі гвинта (з вертикальної проекції) знайдемо

$$R_{0-I} \cdot \cos(\psi + \varphi) = Q. \quad (4.49)$$

З виразу (4.49) відшукаємо величину R_{0-I} і підставимо її значення у формулу (4.48), тоді одержимо

$$T = \frac{d_2}{2} \cdot Q \cdot \operatorname{tg}(\psi + \varphi). \quad (4.50)$$

3. ККД підйому гвинтового механізму домкрата можна визначити за допомогою формули (4.22), трансформованої для випадку обертального руху

$$\eta = \frac{T_{i\partial}}{T} . \quad (4.51)$$

Тому що $T_{i\partial} = T(\varphi = 0)$,

тобто

$$T_{i\partial} = \frac{d_2}{2} \cdot Q \cdot \operatorname{tg} \psi,$$

знайдемо

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi)} . \quad (4.52)$$

Зауважимо, що формула (4.52) також цілком ідентична формулі (4.27), отриманій для випадку підйому вантажу по нахиленій площині під дією горизонтальної рушійної сили.

4. Далі, прийнявши $T_{ym} = T(-\varphi)$, одержимо

$$T_{ym} = \frac{d_2}{2} \cdot Q \cdot \operatorname{tg}(\psi - \varphi). \quad (4.53)$$

5. ККД зворотного ходу під дією сили корисного навантаження Q знайдемо аналогічно, як це робилося при аналізі опускання вантажу по нахиленій площині:

$$\eta_{on} = \frac{\operatorname{tg}(\psi - \varphi)}{\operatorname{tg} \psi} . \quad (4.54)$$

6. Умова самогальмування знайдемо, поклавши

$$T_{ym} < 0$$

або

$$\eta_{on} < 0.$$

При цьому одержимо, що самогальмування буде спостерігатися при дотриманні нерівності

$$\psi < \varphi. \quad (4.55)$$

Звичайно параметри гвинтового домкрата при його проектуванні вибирають так, щоб умова самогальмування завжди витримувалася. Це необхідно з погляду виконання правил техніки безпеки.

Базуючись на результатах попереднього дослідження, проаналізуємо роботу гвинтової пари з трикутною нарізкою з урахуванням сил тертя. Нехай, геометричні параметри різьби трикутного профілю (d , d_1 , d_2 , p , z , β , ψ) відомі (рис. 4.14). Також відома осьова сила Q корисного навантаження і величина коефіцієнта тертя f між гвинтом 1 і гайкою 0.

Аналіз виконаємо в наступній послідовності.

1. Насамперед визначимо, чим відрізняється силова взаємодія гвинтової пари з трикутною нарізкою від силової взаємодії гвинтової пари з прямокутною нарізкою?

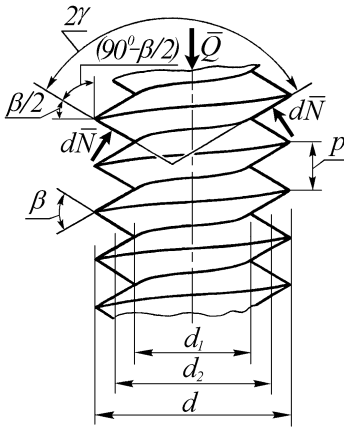


Рис. 4.14. Гвинт з трикутним профілем різьби

трикутної різьби:

$$\gamma = 90^\circ - \beta / 2. \quad (4.56)$$

Тоді можна визначити зведений коефіцієнт тертя гвинтової пари

$$f^I = \frac{f}{\sin \gamma} = \frac{f}{\sin(90^\circ - \beta / 2)} = \frac{f}{\cos(\beta / 2)}. \quad (4.57)$$

Зведеному коефіцієнту тертя буде відповідати зведений кут тертя

$$\varphi^I = \arctg \frac{f}{\cos(\beta / 2)}. \quad (4.58)$$

2. У іншому можна скористатися формулами (4.50), (4.52), (4.53), (4.54) і (4.55), отриманими при рішенні попередньої задачі, тільки замість значення кута тертя φ потрібно підставляти в цих формулах значення зведеного кута тертя φ^I .

Як бачимо, тут умова самогальмування легше виконати, тому що

$$\varphi^I > \varphi.$$

Тому різьби з трикутним профілем використовуються в кріпильних різьбових виробках.

Особливо добре самостопоряться кріпильні різьбові з'єднання при дрібному шагу різьби (із малими кутами ψ).

Очевидно тим, що трикутна нарізка забезпечує клиновий ефект, чим посилює генерацію сил тертя сковзання (див. аналогію з рис. 4.9).

Тут, правда, здійснюється інший вид відносного руху ланок ніж той, що спостерігався в клиновій поступальній кінематичній парі. Але, оскільки мова йде не про розподіл сил тертя по поверхні контакту, а про визначення моменту рушійних (або утримуючих) сил, то цілком можливо скористатися висновками про зведений коефіцієнт тертя f^I , отриманими при силовому аналізі руху клинового повзуна.

Як очевидно з рис. 4.14, половинну величину γ клинового кута 2γ можна визначити через величину кута β профілю

Відомо, що для надійності стопоріння різьбових з'єднань застосовуються також різноманітні додаткові конструктивні устрої (пружинні шайби, шайби з пелюстками, що відгинаються, шплінти, дріт, що просмикується в отвори голівок болтів після їхньої затяжки і т. п.).

Поряд із цим використовується так назване контріння різьб додатковими контргайками, які збільшують сили тертя спокою в різьбових з'єднаннях за рахунок збільшення нормальних сил притискання витків без небажаного додаткового осьового навантаження тіла гвинтового стрижня, тобто без зниження несучої (навантажувальної) спроможності різьбового з'єднання.

Застосування контргайок дозволяє, крім надійного стопоріння різьб, здійснити тонке осьове регулювання з'єднання, наприклад, при регулюванні зазорів у газорозподільному механізмі двигуна внутрішнього згорання.

ККД гвинтових пар із прямокутною або трапецеїдальною нарізками значно вищий, ніж у гвинтових пар із трикутною нарізкою.

Тому перші в кріпильних різьбових з'єднаннях не застосовуються, а використовуються в так названих ходових різьбових устроях (ходові гвинти токарно-гвинторізних верстатів, гвинтові домкрати, регулювальні упори і т. п.).

5. Контрольні запитання

1. Сформулюйте постановку задачі силового аналізу найпростіших механізмів з урахуванням тертя.
2. Що таке *самогальмування* механізмів?
3. Що таке *коефіцієнт корисної дії* (ККД)? Які Ви знаєте формули для визначення ККД?
4. Що таке *ідеальна рушійна сила*?
5. Знайдіть рушійну силу і ККД підйому вантажу по нахиленій площині.
6. Знайдіть утримуючу силу і ККД опускання вантажу по нахиленій площині.
7. Визначите умову самогальмування вантажу на нахиленій площині.
8. Виконайте в загальному вигляді силовий аналіз з урахуванням тертя плоского механізму клинового преса.
9. Опишіть роботу гвинтового домкрата з урахуванням сил тертя.
10. Від чого залежить ККД гвинтової пари?
11. Визначте зведений кут тертя різьби з трикутним профілем.

Лекція 31

Тема: Тертя в обертальній кінематичній парі та тертя гнучкої нитки

- Зміст: 1. Тертя шина в підшипнику. Круг тертя.
2. Тертя між п'ятою в підп'ятнику.
3. Тертя гнучкої нитки. Формула Ейлера.
Приклади застосування.
4. Контрольні запитання.

1. Тертя шина в підшипнику. Круг тертя

Базуючись на попередньому матеріалі розділу, визначимо в загальному вигляді момент сил тертя в обертальній кінематичній парі. Вважатимемо відомими: зовнішнє навантаження Q , радіус шипа r і коефіцієнт тертя f між шипом і підшипником.

Визначення виконаємо в наступному порядку.

1. Для спрощення силового аналізу обертальної кінематичної пари з урахуванням тертя будемо вважати напрямком зовнішньої сили Q спочатку вертикальним і незмінним, тому підшипник 0 на рис. 4.15 зобразимо перебільшено тільки частково з боку сприйняття навантаження.

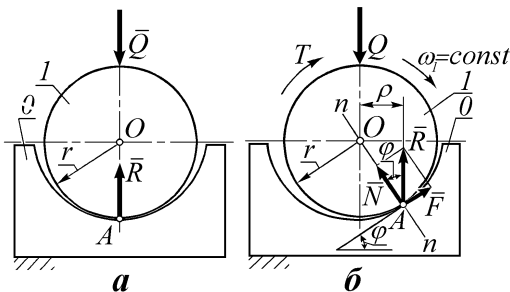


Рис. 4.15. Силовий аналіз обертальної кінематичної пари

Якщо шип 1 не обертається (рис. 4.15а), то сила реакції R підшипника 0, прикладена до шипа 1, буде спрямована по лінії дії зовнішнього навантаження Q у протилежному їй напрямку. Очевидно, що $R = Q$.

Якщо шип 1 обертається з постійною кутовою швидкістю ω_l (рис. 4.15б) під дією зовнішнього

моменту рушійних сил T , то (при відсутності мастила) він буде ковзати по поверхні підшипника 0 у точці A , у котрій дотична лінія до окружності шипа спрямована під кутом тертя φ стосовно горизонтальної осі. Справді, нижче

точки A шип 1 буде накочуватися на поверхню підшипника без прослизання, а вище точки A він буде зсковзувати з неї.

Після деякого часу, протягом якого точка A можливо буде коливатися по поверхні підшипника 0 (це відоме явище фрикційних автоколивань), установиться її постійне місце розташування.

І в цьому випадку буде дотримуватися рівність

$$R = Q. \quad (4.59)$$

Проте лінії дії сил Q і R не будуть збігатися. Між ними виникне деяка відстань ρ , яку можна визначити з рівняння

$$\sum M_o = 0, \\ T - R \cdot \rho = 0. \quad (4.60)$$

Тут момент рушійних сил T невідомий, проте його можна визначити, тому що він витрачається на подолання сил тертя в обертальній кінематичній парі.

Розкладемо силу реакції $\bar{R}$ на два взаємно перпендикулярні напрямки. Одержимо нормальну силу $\bar{N}$ притискання шипа 1 до підшипника 0 і дотичну силу $\bar{F}$, що є силою тертя.

Складова $\bar{N}$ момента навколо точки O не дає, тому можна записати, що

$$T = M_{тер} = F \cdot r. \quad (4.61)$$

Спільне рішення рівнянь (4.59), (4.60) і (4.61) дає вираз

$$\rho = \frac{F \cdot r}{Q}. \quad (4.62)$$

Сила тертя F може бути знайдена з розкладання сили R як

$$F = R \cdot \sin \varphi = Q \cdot \sin \varphi. \quad (4.63)$$

Після підстановки (4.63) у (4.62) одержимо

$$\rho = r \cdot \sin \varphi. \quad (4.64)$$

При малих значеннях коефіцієнта тертя f можна вважати

$$\sin \varphi \approx \tan \varphi = f,$$

тоді остаточно знайдемо формулу для підрахунку ρ .

$$\rho \approx r \cdot f. \quad (4.65)$$

2. Відзначимо, що відстань ρ має такий фізичний смисл.

Насамперед вона є плечем зносу сили реакції $\bar{R}$ підшипника назустріч обертанню шипа. Тут явно проглядається аналогія з коефіцієнтом тертя кочення k .

Крім того відстань ρ прийнято називати *радіусом кола тертя*.
Покажемо, що це означає.

Будемо вважати, що сила зовнішнього навантаження $\bar{Q}$ в процесі

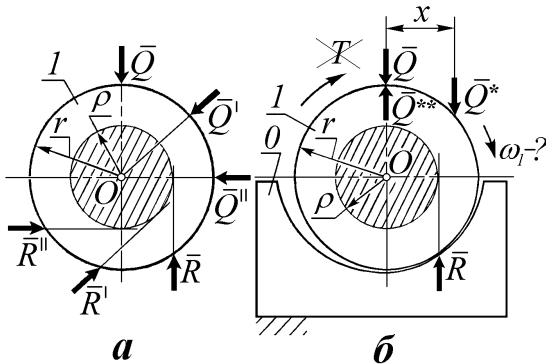


Рис. 4.16. Круг тертя в обертовій кінематичній парі

роботи обертової кінематичної пари змінює свій напрямок (рис. 4.16а).

Нехай вектор сили $\bar{Q}$ плавно змінює свій напрямок, займаючи поспідовно деякі положення $\bar{Q}$, $\bar{Q}'$, $\bar{Q}''$ і т. д. При цьому вектор сили реакції $\bar{R}$ підшипника 0, прикладеної до шипа 1, також буде плавно

змінювати свій напрямок займаючи поспідовно відповідні положення $\bar{R}$, $\bar{R}'$, $\bar{R}''$ і т. д. В усіх положеннях вектор сили $\bar{R}$ буде спрямований по дотичній до кола радіуса ρ .

Повернемося тепер до попереднього розгляду роботи обертової кінематичної пари при незмінному положенні лінії дії сили зовнішнього навантаження $\bar{Q}$ (рис. 4.16б).

Будемо вважати момент T зовнішніх рушійних сил також відомим.

При цьому необхідно визначити, як буде обертатися шип - прискорено, рівномірно чи уповільнено?

Отже, до шипа 1 прикладені ззовні сили $\bar{Q}$, $\bar{R}$, а також момент сил T .

Замінімо момент сил T парою сил $Q^* = Q^{**} = Q$. Тоді плечем дії пари сил Q^* і Q^{**} буде відстань x , яку можна підрахувати по формулі

$$x = \frac{T}{Q}. \quad (4.66)$$

Замість моменту рушійних сил T прикладемо еквівалентну йому пару сил Q^* і Q^{**} із плечем x так, щоб одна з цих сил, наприклад сила Q^{**} ,

виявилася на лінії дії сили зовнішнього навантаження Q у протилежному їй напрямку.

Друга сила Q^* пари сил - при цьому буде відстояти від сили зовнішнього навантаження Q на відстані x і давати навколо осі O обертовий момент $M_{об}$, рівний добутку

$$M_{об} = Q^* \cdot x = Q \cdot x = T. \quad (4.67)$$

Сили Q і Q^{**} , як рівні і протилежно спрямовані по одній лінії, на умови обертання шипа впливати не будуть.

Після заміни сили зовнішнього навантаження Q і моменту рушійних сил T одною силою Q^* будемо спостерігати рух шипа 1 під дією тільки двох сил Q^* і R , рівних по величині, протилежно спрямованих, але таких, що мають різні лінії дії. Сила R буде давати гальмуючий обертання шипа 1 момент

$$M_{гальм} = R \cdot \rho = Q \cdot \rho. \quad (4.68)$$

Очевидно тепер, що обертання буде прискореним, якщо порівняння виразів (4.67) і (4.68) покаже, що

$$M_{об} > M_{гальм},$$

а це буде мати місце за умови

$$x > \rho. \quad (4.69)$$

Обертальний рух буде рівномірним, відповідно, за умови

$$x = \rho. \quad (4.70)$$

Обертання буде уповільненим, а потім обертальна пара заклинить, якщо буде спостерігатися умова

$$x < \rho. \quad (4.71)$$

3. З виконаного вище аналізу витікає, що якщо рівнодіюча усіх зовнішніх сил і моментів сил, що діють на обертальну кінематичну пару, має лінію дії, що проходить через коло тертя, то буде спостерігатися заклинення обертальної кінематичної пари.

Тут очевидна спорідненість понять “кут тертя”, “конус тертя” і “коло тертя”.

На закінчення зауважимо, що вище був проаналізований випадок тертя шипа 1 об підшипник 0 при відсутності змащення.

Незважаючи на те, що наявність змащення, а особливо гідродинамічний або ж гідростатичний режим змащення підшипника, змінюють загальну картину відносного положення шипа в підшипнику, прийнято користуватися при силовому розрахунку й у цих випадках тими ж залежностями (4.59), ..., (4.71).

2. Тертя між п'ятою і підп'ятником

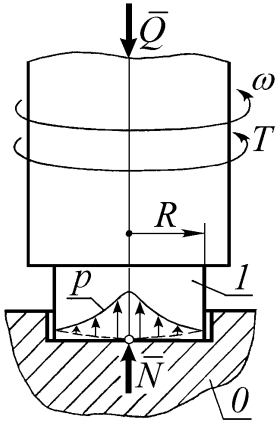


Рис. 4.17. Кінематична пара «п'ята - підп'ятник» з суцільною п'ятою

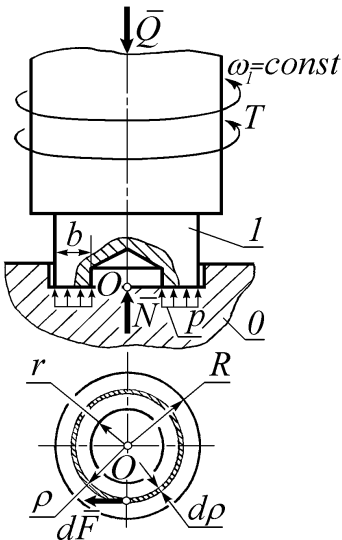


Рис. 4.18. Кільцева кінематична пара «п'ята – підп'ятник»

Визначимо в загальному вигляді момент сил тертя в кінематичній парі «п'ята - підп'ятник». Вважатимемо відомими: зовнішнє осьове навантаження Q , геометричні розміри елементів кінематичної пари R і r , а також коефіцієнт тертя f між п'ятою і підп'ятником.

Визначення виконаємо в наступному порядку.

1. Покажемо на рис. 4.17 кінематичну пару «п'ята - підп'ятник» з суцільною п'ятою 1, коли $r=0$.

Якщо спочатку питомир тиск p буде рівномірно розподілений по всьому контакті, то згодом через більший знос периферійної частини п'яти, обумовленого більшими шляхами тертя на периферії, ніж у центрі п'яти, питомир тиск p , як показано на рисунку, стане більшим у центрі і меншим на периферії (характер зносу п'яти 1 показаний перебільшено пунктирною лінією).

При цьому, як показує досвід, виділення тепла концентрується в центрі суцільної п'яти і вона в буквальному значенні підгорає, що супроводжується утратою твердості п'яти через її відпалювання.

Надалі спостерігається інтенсивна руйнація п'яти і втрата точності осьової фіксації ротора 1.

Внаслідок описаного явища в даний час суцільні п'яти не застосовуються.

2. На рис. 4.18 показана в двох проекціях кільцева п'ята 1, що спирається на нерухомий підп'ятник 0.

Приймемо допущення, що питомир тиск p між п'ятою 1 і підп'ятником 0 постійний по всій площі контакту. Досвід підтверджує прийнятність такого допущення, особливо коли ширина кільця b значно менше R (і r):

$$b = R - r \ll R.$$

Тоді питомий тиск p можна обчислити з урахуванням вихідних даних по формулі

$$p = \frac{Q}{\pi(R^2 - r^2)}. \quad (4.72)$$

Для того, щоб відшукати $T = M_{тер}$ виділимо на п'яті елементарне кільце із середнім радіусом ρ і шириною $d\rho$.

Можемо записати рівняння

$$dM_{тер} = dF \cdot \rho, \quad (4.73)$$

де dF - елементарна окружна сила тертя на елементарному кільці, яку можна знайти відповідно до формули Амонтона

$$dF = dN \cdot f. \quad (4.74)$$

Елементарну силу тиску dN знайдемо шляхом множення величини питомого тиску p на елементарну площу кільця dA :

$$dN = p \cdot dA, \quad (4.75)$$

де

$$dA = 2\pi\rho d\rho. \quad (4.76)$$

Після підстановок (4.74), (4.75) і (4.76) у (4.73) одержимо

$$dM_{тер} = 2\pi p f \cdot \rho^2 \cdot d\rho. \quad (4.77)$$

Проінтегруємо вираз (4.77) у межах від r до R , тоді послідовно одержимо:

$$\begin{aligned} M_{тер} &= \int_r^R 2\pi \cdot p \cdot f \cdot \rho^2 \cdot d\rho = 2\pi p f \cdot \int_r^R \rho^2 d\rho = \\ &= 2\pi p f \cdot \left(\frac{1}{3} (R^3 - r^3) \right). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Після підстановки (4.72) у (4.78) знайдемо

$$M_{тер} = \frac{2}{3} Q f \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \quad (4.79)$$

Отримана формула (4.79) може вважатися точною, якщо дійсно питомий тиск $p = const$, у протилежному випадку величина моменту сил тертя $M_{тер}$, підрахована по формулі (4.79), буде наближеною.

В окремих випадках прийнято використовувати спрощену формулу для визначення моменту сил тертя в кільцевій кінематичній парі “п'ята - підп'ятник”, записану без інтегрування, за допомогою прийняття за радіус дії окружної сили тертя середнього радіуса кільця

$$R_{cep} = \frac{R + r}{2}.$$

Тоді можна записати

$$M_{мер}^* \approx Qf \frac{R + r}{2}. \quad (4.80)$$

У випадку вузького кільця формули (4.79) і (4.80) дають близькі результати і застосування спрощеної формули (4.80) можна вважати виправданим, тим більше, що головна невизначеність формул (4.79) і (4.80) полягає в невизначеності величини коефіцієнта тертя f , значення якого точно знайти практично неможливо.

Завжди має сенс говорити про максимально і мінімально можливі величини моменту сил тертя, обумовлені ймовірним розкидом значення коефіцієнта тертя f .

Усе ж представляється доцільним порівняти формули (4.79) і (4.80) для випадку суцільної п'яти, коли $r = 0$.

Тоді формула (4.79) переписеться у вигляді

$$M_{мер} = \frac{2}{3} Qf. \quad (4.81)$$

а формула (4.80) буде мати вигляд

$$M_{mp}^* = \frac{1}{2} QfR. \quad (4.82)$$

Помітна істотна відмінність формул (4.81) і (4.82).

При виконанні умови $p = const$, формула (4.81) дасть точний результат, а спрощена формула (4.82) - наближений. Відносна похибка формули (4.82) складе

$$\Delta M\% = \frac{M_{мер} - M_{мер}^*}{M_{мер}} \cdot 100\% = \frac{\frac{2}{3} QfR - \frac{1}{2} QfR}{\frac{2}{3} QfR} \cdot 100\% = 25\%.$$

Як бачимо, спрощена формула (4.82) занижує при обчисленнях величину моменту сил тертя. Це варто мати на увазі, щоб не допустити прорахунків, які могли б призвести до непрацездатності механізму, що розраховується, або якогось іншого устрою.

3. Тертя гнучкої нитки. Формула Ейлера. Приклади застосування

Визначимо в загальному вигляді силу тертя сковзання гнучкої нитки по круглому нерухомому барабану. Вважатимемо відомими: силу корисного навантаження Q , кут обхвату барабана гнучкою ниткою α (рад) і коефіцієнт тертя f .

Визначення виконаємо в наступному порядку.

1. Відзначимо, що дана задача вперше була вирішена Леонардом Ейлером. До цього явище тертя гнучкої нитки по круглому барабану вважалося загадковим і не піддавалося кількісному опису. Тут ми, попросту, повторимо рішення Ейлера та проаналізуємо його результат.

На рис. 4.19 зображена схема рівномірного ($V=const$) сковзання гнучкої нитки по круглому нерухомому барабані при підйомі вантажу Q .

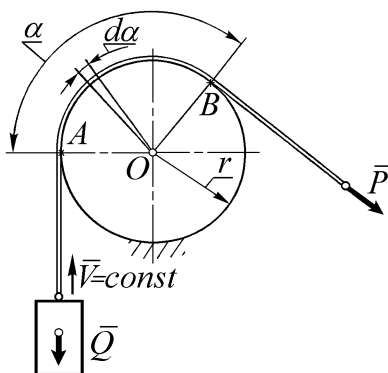


Рис. 4.19. Сковзання гнучкої нитки по круглому барабану

Нехай рівномірний підйом вантажу здійснюється під дією невідомої рушійної сили P .

Для спрощення рішення задачі гнучку нитку будемо вважати ідеальною, тобто: невагомою, нерозтяжимою і абсолютно гнучкою.

Іншими словами, зневажимо масою нитки, її пружністю при вигині і податливістю при розтягу.

Очевидно, що нитка притискається до барабана на ділянці охоплення барабана AB нерівномірно з наростанням притискання від точки A до точки B , тому що рушійна сила P (справа) перевищує силу корисного

навантаження Q (зліва) на величину невідомої окружної сили тертя $F_{тер}$.

Перераховані три сили знаходяться в окружній рівновазі, тому можемо записати

$$\sum M_O = 0, \\ F_{тер} = P - Q. \quad (4.83)$$

Внаслідок нерівномірного притискання нитки до барабана й окружна сила тертя $F_{тер}$ розподілена по дузі обхвату з кутом α також нерівномірно, поступово наростаючи від точки A до точки B .

Очевидно, що варто проінтегрувати перемінні величини в межах кута обхвату.

Виріжемо елементарну ділянку гнучкої нитки на елементарному куті $d\alpha$ і прикладемо до неї сили реакцій відкинутих зв'язків (рис. 4.20).

Позначимо силу натягу нитки зліва як S , тоді справа сила натягу нитки буде більше на елементарний приріст сили натягу dS .

З боку відкинутого барабана на елементарну ділянку гнучкої нитки буде діяти елементарна результуюча нормальна реакція dN і елементарна результуюча окружна сила тертя dF .

Всі показані на рис. 4.20 сили знаходяться в динамічному рівноважному стані, тому можемо записати:

$$\sum P_y = 0,$$

$$dN - S \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - (S + dS) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = 0. \quad (4.84)$$

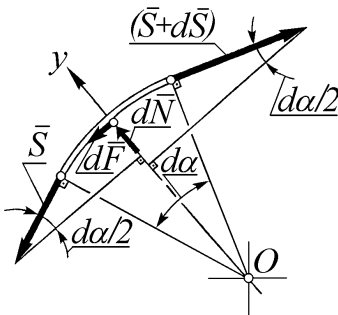


Рис. 4.20. Сили, які діють на елементарну ділянку гнучкої нитки

Диференціальне рівняння (4.84) можна спростити з урахуванням відомого з вищої математики виразу (першої чудової межі)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Тоді одержимо

$$dN - S \cdot \frac{d\alpha}{2} - (S + dS) \cdot \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Після розкриття дужок у рівнянні і зневаги членом другого порядку малості

$$(dS \cdot \frac{d\alpha}{2}) \text{ остаточно знайдемо}$$

$$dN - S \cdot d\alpha = 0. \quad (4.85)$$

З рівняння
$$\sum M_O = 0,$$

$$S \cdot r - (S + dS) \cdot r + dF \cdot r = 0,$$

виявимо

$$dF = dS. \quad (4.86)$$

Скористаємося також формулою Амонтона у вигляді

$$dF = dN \cdot f. \quad (4.87)$$

Спільне рішення рівнянь (4.85), (4.86) і (4.87) дає можливість записати диференціальне рівняння з перемінними, що розділяються, у вигляді:

$$\frac{dS}{S} = f \cdot d\alpha. \quad (4.88)$$

Зробимо інтегрування лівої і правої частин у зазначених нижче межах

$$\int_Q^P \frac{dS}{S} = \int_0^\alpha f \cdot d\alpha,$$

тоді послідовно одержимо

$$\begin{aligned} \ln|_Q^P S &= f \cdot \alpha|_0^\alpha, \\ \ln P - \ln Q &= f\alpha - 0, \\ \ln \frac{P}{Q} &= f \cdot \alpha. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Виконаємо потенціювання рівняння (4.89) і остаточно запишемо

$$\frac{P}{Q} = e^{f\alpha}$$

або

$$P = Q \cdot e^{f\alpha}, \quad (4.90)$$

де $e = 2,718\dots$ - основа натурального логарифма.

Тепер підставимо (4.90) у (4.83) і знайдемо формулу для визначення окружної сили тертя

$$F_{тер} = Q \cdot (e^{f\alpha} - 1). \quad (4.91)$$

Формули (4.90) і (4.91) мають ім'я Ейлера. Проаналізуємо їх.

Перший, дуже важливий висновок полягає в тому, що на величину сили тертя $F_{тер}$ гнучкої нитки вирішальний вплив робить величина кута обхвату α , яку реально можна змінювати в дуже великих межах.

Так, наприклад, застосування натяжного ролика (шківів) у пасовій передачі крім завдання здійснення попереднього натягу ремня вирішує також і завдання збільшення кута обхвату α_I на малому ведучому шківі (рис. 4.21), що забезпечує підвищення тягової спроможності передачі.

Для чисельного порівняння підвищення тягової спроможності пасової передачі за рахунок використання натяжного ролика приймемо значення коефіцієнта тертя $f \approx 0,33$. Нехай, відповідно до рис. 4.21, кут обхвату $\alpha_I \approx 3 \text{ рад}$ збільшиться в 1,17 разів (до значення $\alpha_I' \approx 3,5 \text{ рад}$).

Розрахунки з використанням формули (4.91), якщо виходити з умови сталості сили натягу ведучої гілки, показують, що при цьому тягова спроможність пасової передачі, за інших рівних умов, зростає приблизно в 1,08 раз.

Якщо ж виходити з умови сталості сили натягу веденої гілки, тягова спроможність передачі підвищиться в 1,27 раз.

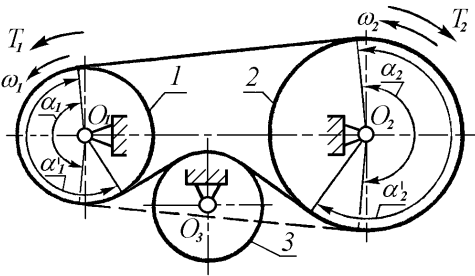


Рис. 4.21. Пасова передача з натяжним роликом

При збільшенні кута обхвату α_1 , наприклад, у 1,5 раз виявимо можливість підвищення тягової спроможності пасової передачі відповідно в 1,23 і в 2,03 раз.

Зміна коефіцієнта тертя f також могла б істотно впливати на величину сили тертя, проте, у реальних випадках використання тертя гнучких ланок у механізмах

коефіцієнт тертя f змінюється несуттєво, тому нижче будемо вважати його незмінним.

Другий висновок варто сформулювати так: сили тертя гнучкої нитки практично не залежить від радіуса r барабана.

На перший погляд це парадоксальний висновок. Проте він вірний для ідеальної нитки.

Якщо ж враховувати згинну жорсткість гнучкої ланки, то зі зменшенням радіуса барабана можна виявити зменшення сили тертя.

Звідси витікає, що формули Ейлера (4.90) і (4.91) треба застосовувати з обов'язковою оцінкою похибки розрахунків. Як приклад такого випадку, при якому формули Ейлера будуть сильно завищувати значення сил тертя, можна назвати тертя сталевого троса по балці круглого перерізу з відносно малим радіусом.

Третій висновок можна віднести до використання гнучкого органа при підйомі або опусканні вантажу.

Користуватися не обертовим блоком (барабаном) при підйомі вантажу не вигідно, тому що, як правило, $P \gg Q$.

При опусканні вантажу, навпаки, дуже вигідно користуватися не обертовим барабаном (блоком), тому що утримуюча сила $P_{ут}$ буде в багато разів менше сили тяжіння вантажу Q . Справді, формулу для визначення

утримуючої сили P_{ym} можна одержати з формули (4.90), якщо поміняти в ній знак перед коефіцієнтом тертя f на протилежний (що відповідає зміні напрямку дії сили тертя).

$$P_{ym} = Q \cdot e^{-f\alpha} = \frac{Q}{e^{f\alpha}}. \quad (4.92)$$

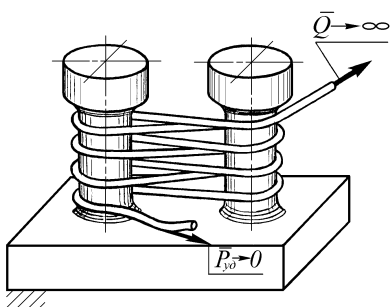


Рис. 4.22. Схема швартувальних кнехтів на причалах суден

Порівняння формул (4.90) і (4.92) показує, що в скільки разів рушійна сила P більша від сили тяжіння вантажу Q у стільки ж разів утримуюча сила P_{ym} буде менша від сили Q .

На закінчення зазначимо, що ефект тертя гнучкої нитки при великих кутах обхвату α широко використовується в техніці й у побуті: при швартуванні судів безпетльовим канатом на спарених кнехтах (рис.

4.22), при зав'язуванні вузлів на канатах, мотузках, взуттєвих шнурках і т. п.

В усіх цих і багатьох інших випадках величезні сили тертя виникають завдяки великим значенням сумарних кутів обхвату.

Звісно ж, завжди варто передбачати простий спосіб розв'язання вузлів, інакше прийдеться “розрубувати Гордієв вузол”.

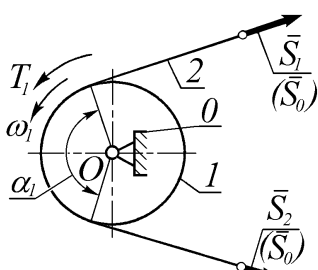


Рис. 4.23. До визначення максимального обертового момента пасової передачі

Визначимо в загальному вигляді максимальний рушійний обертовий момент T_{lmax} пасової передачі, якщо відомі: радіус r_1 ведучого шківів, сила попереднього натягу ремня S_0 , кут обхвату ведучого шківів α_1 (rad) і коефіцієнт тертя f ремня об шківів (рис. 4.23).

Визначення виконаємо в наступному порядку.

1. Будемо вважати, що ремінь 2 сприймає навантаження в межах пружних деформацій, тоді, очевидно, можна записати

$$S_1 = S_0 + \Delta S, \quad (4.93)$$

$$S_2 = S_0 - \Delta S. \quad (4.94)$$

Після додавання виразів (4.93) і (4.94) одержимо

$$S_1 + S_2 = 2S_0. \quad (4.95)$$

Максимальний обертовий момент $T_{I_{max}}$ виникне при зростанні навантаження на пасову передачу в момент зриву ведучого шківів 1 у режим буксування, коли можна вважати справедливою для пасової передачі формулу Ейлера (4.90) у вигляді:

$$S_1 = S_2 \cdot e^{f\alpha_1} . \quad (4.96)$$

2. При рівномірному обертанні шківів 1 має місце рівняння

$$\sum M_o = 0,$$

тобто

$$T_{I_{max}} + S_2 \cdot r_1 - S_1 \cdot r_1 = 0. \quad (4.97)$$

З рівняння (4.97) з урахуванням виразів (4.95) і (4.96) відшукаємо величину $T_{I_{max}}$:

$$T_{I_{max}} = 2S_0 r_1 \frac{(e^{f\alpha} - 1)}{(e^{f\alpha} + 1)} . \quad (4.98)$$

4. Контрольні запитання

1. Визначте в загальному вигляді момент сил тертя в обертовій кінематичній парі.

2. Що таке *коло тертя*? Розкрийте фізичний зміст цього поняття.

3. Визначте в загальному вигляді момент сил тертя в кінематичній парі “п'ята - підп'ятник”. Порівняйте точну і наближену формули для визначення моменту сил тертя.

4. Визначіть в загальному вигляді силу тертя сковзання гнучкої нитки по круглому барабану. Проаналізуйте *формули Ейлера*.

5. Приведіть приклади використання тертя гнучкої нитки в техніці й у побуті.

6. Визначіть в загальному вигляді максимальний рушійний обертовий момент пасової передачі.

Лекція 32

Тема: Урахування тертя кочення

Зміст: 1. Каток. Режими руху.

2. Підкладні котки. Режими руху.

3. Зведений коефіцієнт тертя причіпного візка.

4. Режими руху колісного тягача з причіпними ланками.

5. Контрольні запитання.

1. Каток. Режими руху

Визначимо режими руху котка (рис. 4.24), що переміщується рівномірно по горизонтальній опорній поверхні під радіальним навантаженням Q , якщо відомі: радіус котка r , коефіцієнт тертя сковзання котка по опорній поверхні f , коефіцієнт тертя кочення котка k .

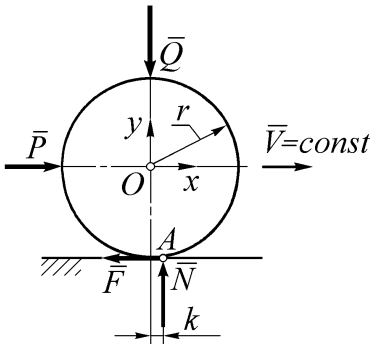


Рис. 4.24. Кочення котка по горизонтальній опорній поверхні

Визначення виконаємо в наступному порядку.

1. Зауважимо, що можливі два режими руху котка: його кочення або сковзання.

З досвіду відомо, що буде спостерігатися той режим руху, на здійснення якого буде потрібна менша рушійна сила.

2. Встановимо взаємозв'язок між силами, що діють на коток при його коченні.

З рівняння $\sum P_y = 0$ одержимо

$$N = Q. \quad (4.99)$$

З рівняння $\sum P_x = 0$ знайдемо

$$P = F. \quad (4.100)$$

З рівняння $\sum M_o = 0$ визначимо

$$F = Q \cdot \frac{k}{r}. \quad (4.101)$$

3. Сила тертя котка по опорній поверхні може досягнути максимального значення

$$F_{max}^{ck} = Q \cdot f, \quad (4.102)$$

який буде спостерігатися в момент зриву котка в режим сковзання.

4. Умовою кочення котка можна вважати дотримання нерівності

$$P < F_{max}^{ck},$$

тобто
$$Q \cdot \frac{k}{r} < Q \cdot f$$

або
$$\frac{k}{r} < f. \quad (4.103)$$

Наприклад, у рейкового транспорту, як правило, $\frac{k}{r} \ll f$ і тому звичайно спостерігається режим кочення коліс по рейках (режими сковзання загальмованих або буксуючих коліс тут у рахунок не йдуть).

5. Умовою сковзання котка буде дотримання нерівності

$$P > F_{max}^{ck},$$

тобто
$$f < \frac{k}{r}, \quad (4.104)$$

що спостерігається дуже рідко (наприклад на льоду).

2. Підкладні котки. Режими руху

Визначимо в загальному вигляді рушійну силу P , необхідну для рівномірного ($V=const$) переміщення платформи (рис. 4.25), що знаходиться під відомим навантаженням Q , за допомогою двох однакових підкладних котків 2 і 2¹ заданого діаметра d , і режими руху платформи.

Визначення виконаємо в наступному порядку.

Визначити в загальному вигляді рушійну силу P , необхідну для рівномірного ($V=const$) переміщення платформи (рис. 4.25), що знаходиться під відомим навантаженням Q , за допомогою двох однакових підкладних котків 2 і 2¹ заданого діаметра d , і режими руху платформи.

Вважати також відомими коефіцієнти: тертя сковзання f платформи по котках, тертя кочення платформи по підкладних котках k_1 і котків по опорній поверхні k_2 , а також силу тяжіння G підкладного котка.

Визначення виконаємо в наступному порядку.

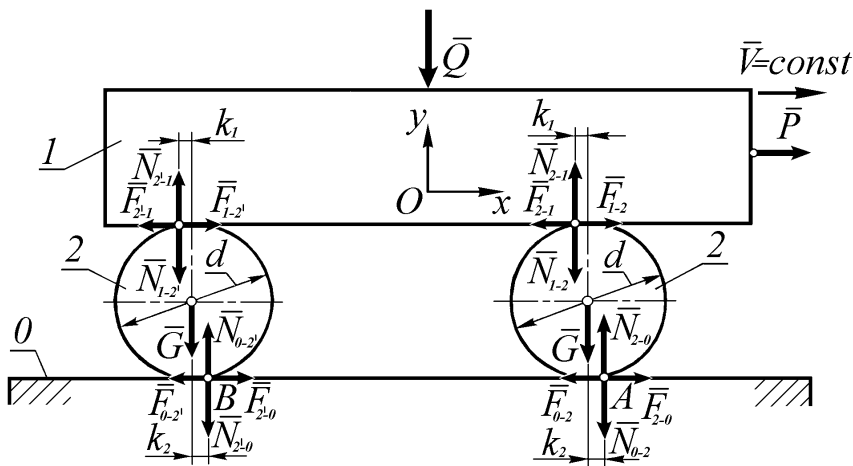


Рис. 4.25. Кочення платформи на підкладних котках

1. З метою зменшення числа рисунків покажемо сили взаємодії платформи 1 із котками 2 і 2¹ і котків з опорною поверхнею 0 без розриву зв'язків.

Порядок індексів у позначеннях сил відповідає послідовності: від якого тіла до якого тіла прикладена відповідна сила.

Не будемо зупинятися на розставлянні сил, тому що воно витікає з попереднього розгляду взаємодії котка й опорної поверхні, наприклад, у задачі 4.8.

Зауважимо, що сила Q у процесі кочення платформи буде розподілятися між котками в пропорції, що змінюється.

Нехай у зазначеному на рис. 4.25 положенні на коток 2 припадає частина навантаження платформи a , а на коток 2¹ - відповідно b .

При цьому, звичайно, дотримується умова

$$a + b = 1,$$

тоді

$$a Q + b Q = Q,$$

а нормальні сили

$$N_{2-1} = N_{1-2} = aQ$$

і

$$N_{2'-1} = N_{1-2'} = bQ.$$

2. З розгляду рівноваги платформи 1 знайдемо

$$\sum P_x = 0,$$

$$P = F_{2-1} + F_{2'-1}.$$

(4. 105)

3. З розгляду рівноваги котка 2 знайдемо

$$\sum M_A = 0,$$

$$G \cdot k_2 + N_{1-2}(k_1 + k_2) - F_{1-2} \cdot d = 0.$$

Звідси, з урахуванням $N_{1-2} = aQ$,

$$\text{одержимо} \quad F_{1-2} = \frac{G \cdot k_2 + aQ \cdot (k_1 + k_2)}{d} = F_{2-1}. \quad (4.106)$$

Аналогічно для котка 2¹ визначимо

$$F_{1-2^1} = \frac{G \cdot k_2 + bQ \cdot (k_1 + k_2)}{d} = F_{2^1-1}. \quad (4.107)$$

4. Підставимо (4.106) і (4.107) у (4.105), тоді знайдемо

$$P = \frac{2G \cdot k_2 + Q \cdot (k_1 + k_2)}{d}. \quad (4.108)$$

Зауважимо, що величина рушійної сили P не залежить від розподілу навантаження між котками.

Легко довести, що вона практично не залежить також і від кількості котків.

У більшості випадків силою тяжіння G котків можна зневажити, тоді формула (4.108) запишеться у вигляді

$$P = Q \frac{k_1 + k_2}{d}. \quad (4.109)$$

а, якщо прийняти

$$k_1 = k_2 = k \text{ і } d = 2r,$$

то тоді

$$P = Q \frac{2k}{d} = Q \frac{k}{r}, \quad (4.110)$$

тобто формула прийняла вигляд, отриманий у задачі для окремо узятій котка, - вигляд формули (4.101).

5. Тепер визначимо режими руху котка.

Відзначимо, що платформа 1 може або котитися по котках, або сковзати по ним.

При сковзанні платформи буде виникати сила тертя сковзання (4.102):

$$F_{\max}^{ck} = Q \cdot f.$$

Кочення буде спостерігатися в тому випадку, якщо буде дотримуватися нерівність

$$P < F_{\max}^{ck},$$

тобто

$$\frac{k_1 + k_2}{d} < f. \quad (4.111)$$

Якщо ж буде виконуватися зворотна нерівність

$$f < \frac{k_1 + k_2}{d}, \quad (4.112)$$

тоді буде здійснюватися режим сковзання платформи по нерухомих котках.

Тут також буде спостерігатися той режим руху, на здійснення якого будуть потрібні менші енергетичні затрати.

3. Зведений коефіцієнт тертя причіпного візка

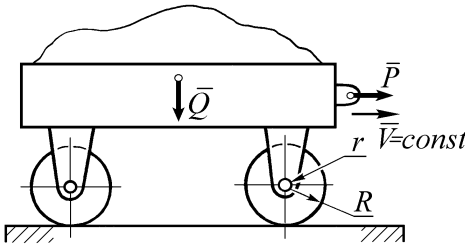


Рис. 4.26. Причіпний візок

Визначимо в загальному вигляді рушійну силу $\bar{P}$ причіпного візка (рис. 4.26), що знаходиться під навантаженням $\bar{Q}$. Вважатимемо заданими: радіус коліс візка R , радіус підшипників сковзання коліс r , коефіцієнт тертя сковзання f коліс по опорній поверхні, коефіцієнт тертя сковзання f_n в

підшипниках коліс і коефіцієнт тертя кочення k коліс по опорній поверхні.

Знайти також умови існування режиму кочення і режиму сковзання візка по опорній поверхні.

Силою тяжіння коліс зневажити.

Визначення виконаємо в наступному порядку.

1. Визначимо рушійну силу $\bar{P}$ при рівномірному коченні візка.

Зауважимо, що рушійна сила $\bar{P}$ витрачається при коченні візка на подолання сил тертя сковзання в підшипниках і сил тертя кочення коліс по опорній поверхні.

При усталеному коченні візка зі швидкістю $V = \text{const}$ буде справедлива рівність робіт за один оберт колеса:

$$A_p = A_{ck} + A_k, \quad (4.113)$$

Робота A_p рушійної сили $\bar{P}$ може бути підрахована по формулі

$$A_p = \bar{P} \cdot 2\pi R. \quad (4.114)$$

Робота сил тертя сковзання в підшипниках A_{ck} може бути знайдена по формулі

$$A_{ck} = \bar{Q} f_n \cdot 2\pi r. \quad (4.115)$$

Робота сил тертя кочення коліс A_k по опорній поверхні може бути визначена по формулі

$$A_k = Q \cdot k \cdot 2\pi. \quad (4.116)$$

Підставимо вирази (4.114), (4.115) і (4.116) у (4.113), тоді одержимо

$$P = Q \frac{k + f_n \cdot r}{R}. \quad (4.117)$$

2. Визначимо умови існування можливих режимів руху причіпного візка.

У випадку режиму сковзання коліс по опорній поверхні буде розвиватися сила тертя (4.102):

$$F_{\max}^{ck} = Q \cdot f.$$

Якщо буде дотримуватися нерівність

$$P < F_{\max}^{ck},$$

тобто

$$\frac{k + f_n \cdot r}{R} < f, \quad (4.118)$$

то тоді буде відбуватися кочення візка.

Якщо ж буде спостерігатися зворотна нерівність,

тобто

$$f < \frac{k + f_n \cdot r}{R}, \quad (4.119)$$

то тоді буде відбуватися сковзання візка по опорній поверхні.

Зауважимо на закінчення, що вираз

$$f^1 = \frac{k + f_n \cdot r}{R} \quad (4.120)$$

прийнято називати зведеним коефіцієнтом опору руху причіпного візка.

4. Режими руху колісного тягача з причіпними ланками

Визначимо умови виникнення режимів кочення і буксування колісного тягача (рис. 4.27). Вважати заданими: силу опору руху P_o ведених елементів поїзда, силу зчіпної ваги G тягача, що припадає на ведучі колеса, радіус коліс тягача R , коефіцієнт тертя кочення k коліс і коефіцієнт тертя сковзання f коліс по опорній поверхні.

Визначення виконаємо в наступному порядку.

1. Підрахуємо роботу рушійних сил за один оборот коліс тягача при коченні A_k і при буксуванні A_{σ}

$$A_k = P_c \cdot 2\pi R + G \cdot k \cdot 2\pi + A_{\text{транс}}, \quad (4.121)$$

$$A_{\delta} = G \cdot f \cdot 2\pi R + A_{\text{транс}}, \quad (4.122)$$

де

$A_{\text{транс}}$ - робота з подолання сил тертя в трансмісії.

Зауважимо, що при буксуванні тягача робота з подолання сили опору руху P_o ведених елементів поїзда не виконується.

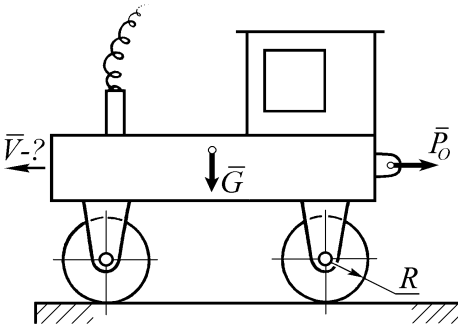


Рис. 4.27. Колісний тягач

2. Існує принцип механіки, відповідно до якого, якщо кінематично можливо декілька режимів (видів) руху, то відбувається той рух, на котрий треба затратити меншу роботу.

Тому умовою кочення тягача буде умова

$$A_k < A_{\delta}. \quad (4.123)$$

Після підстановки виразів (4.121) і (4.122) у (4.

123) одержимо цю умову у вигляді:

$$P_o < G \frac{fR - k}{R} = G \left(f - \frac{k}{R} \right). \quad (4.124)$$

Для рейкового транспорту звичайно $f > \frac{k}{R}$, тому приблизно умовою кочення локомотива можна вважати умову

$$P_o < Gf. \quad (4.125)$$

Умовою буксування буде являться зворотна нерівність

$$P_o > G \left(f - \frac{k}{R} \right). \quad (4.126)$$

5. Контрольні запитання

1. Визначте в загальному вигляді режими руху круглого котка по горизонтальній опорній поверхні.

2. Визначте в загальному вигляді рушійну силу, необхідну для рівномірного переміщення платформи на підкладних круглих котках.

3. Визначте в загальному вигляді рушійну силу причіпного візка. Опишіть можливі режими руху візка й умови їхнього виникнення.

4. Визначте в загальному вигляді умови виникнення режимів кочення і буксування колісного тягача.

Лекція 33

Тема: **Коефіцієнт корисної дії (ККД) планетарних передач**

- Зміст:
1. Загальні відомості
 2. Кінематичні залежності механізмів найпростіших планетарних передач
 3. Припущення, прийняті для аналітичного визначення ККД механізмів планетарних передач
 4. ККД механізмів Джемса
 5. ККД механізмів Давида
 6. Рекомендації з використання планетарних передач
 5. Контрольні запитання.

1. Загальні відомості

Планетарні механізми відрізняються малими габаритами і масою.

У [9] відзначені переваги планетарних передач, зазначені області їхнього застосування і дана методика синтезу.

По кінематичних можливостях всі існуючі схеми планетарних механізмів умовно можна розділити на дві групи. Це планетарні механізми типу Джемса і типу Давида.

Перші відрізняються звичайними кінематичними можливостями, але володіють високим ККД і використання схем Джемса в різноманітних механізмах не спричиняє ніяких неприємних несподіванок.

Другі відрізняються великими кінематичними можливостями, але застосування їх без ретельного аналізу й обґрунтування може призвести до провалу проекту.

У [9] дані тільки рецепти по використанню механізмів Давида і Джемса і приведені орієнтовані значення ККД. Це безумовно дає можливість конструктору достатньо упевнено використовувати всі схеми планетарних механізмів, але тільки в зазначених рамках.

Конструктор, розробляючи проект повинен мати більш надійні дані зі значень ККД, ніж ті рецептурні зведення, що приводяться в різних джерелах, у тому числі і в роботі [1]. На жаль у літературі рідко зустрічається інформація з методики розрахунку ККД планетарних механізмів, а якщо приводиться, то в обмеженому обсязі. Оскільки задачу вибору типу механізму передачі доводиться вирішувати заздалегідь, тобто до складання креслень майбутньої машини, а тим паче до її випробувань, великого значення набуває питання підвищення точності теоретичного прогнозування величини ККД передач того чи іншого типу.

У вказівках розглянуті питання аналітичного визначення ККД планетарних механізмів Джемса і Давида в різних варіантах, які набули досить широкого застосування в сучасних машинах, наприклад, в гідромеханічних передачах автомобілів.

Дані вказівки призначені для поглибленої підготовки студентів при курсовому проектуванні і вивченні теоретичного курсу.

Перш ніж розглядати питання аналітичного визначення ККД механізмів планетарних передач, необхідно уважно переглянути та засвоїти матеріал п. 3.2.2 [8] або [9]. Нижче буде використовуватись зазначена інформація без особливих додаткових (повторних) пояснень.

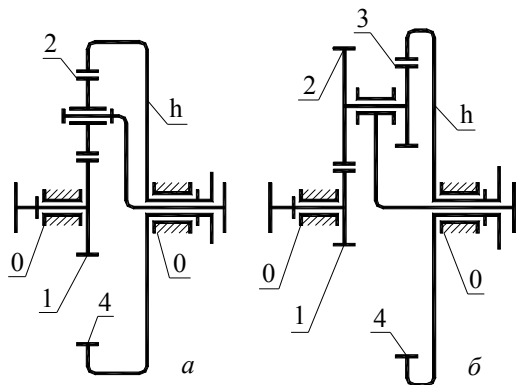


Рис. 1. Планетарні механізми Джемса

б). Схема **а** є частковим випадком схеми **б**, коли $z_2 = z_3$.

Коли ж до складу механізму входять два зачеплення одного й того ж знаку (або два зовнішні, а бо ж два внутрішні), тоді такі механізми мають загальну назву планетарних механізмів Давида (рис. 2, **а**, **б** і **в**).

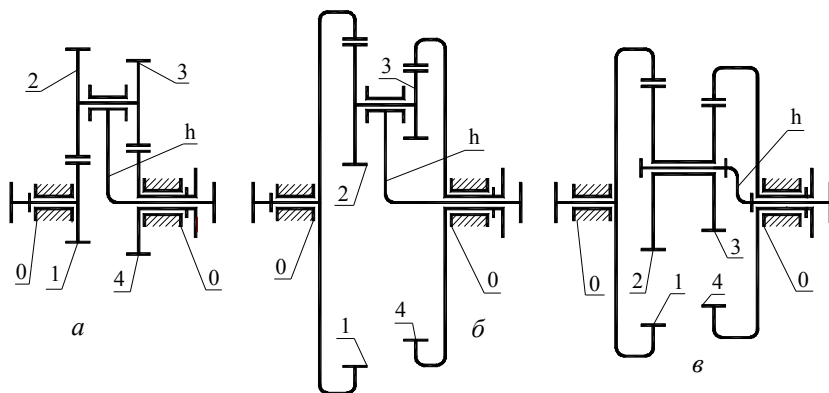


Рис. 2. Планетарні механізми Давида

Найпростішими механізмами планетарних зубчастих передач будемо вважати такі, які утворені не більше ніж двома зубчастими зачепленнями.

Нагадаємо, що найпростіші механізми планетарних зубчастих передач, до складу яких входять два різнознакові (одне зовнішнє та одне внутрішнє) зачеплення, мають загальну назву планетарних механізмів Джемса (рис. 1, **а** і

Механізми Джемса мають загальне рівняння руху (формулу Вілліса), а також, як це буде наведено нижче, загальні формули для розрахунків ККД в режимі редуктора, а також загальні формули для розрахунків ККД в режимі прискорювача.

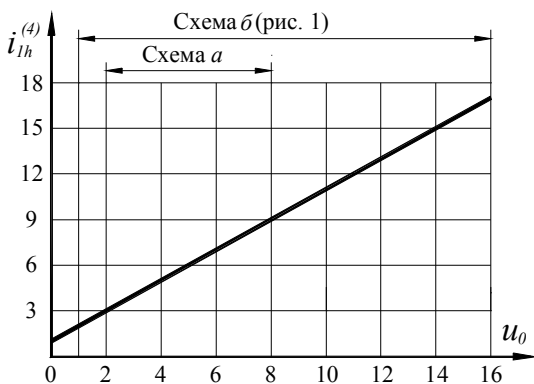


Рис. 3. Залежність $i_{1h}^{(4)}$ редукторів Джемса від значення u_0

Те ж саме можна сказати і по відношенню механізмів Давида.

Тому нижче буде розглянуто виведення формул для розрахунків ККД з розгляду лише двох схем (рис. 1б та рис. 2а).

Чисельні ж розрахунки значень ККД для інших схем буде здійснено з урахуванням їх особливостей.

Перед тим, як розпочати розгляд питання аналітичного визначення ККД механізмів планетарних передач, наведемо їх кінематичні залежності у вигляді формул Вілліса та відповідних їм графіків.

2. Кінематичні залежності механізмів найпростіших планетарних передач

2. 1. Механізм Джемса в режимі редуктора

Формула Вілліса для механізмів Джемса в режимі редуктора має вигляд

$$i_{1h}^{(4)} = 1 - i_{14}^{(h)}, \quad (1)$$

$$i_{14}^{(h)} = -\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = -u_0. \quad (2)$$

В формулі (2) чисельне значення відношення $\frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$, позначене як передаточне число u_0 , будемо вважати відомим. Більш того, оберемо величину u_0 за аргумент, в залежності від якого будемо в подальшому визначати ККД механізмів планетарних передач. Це буде особливо слушно для механізмів Давида, тому що u_0 для цих механізмів, як відомо, часто мало

відрізняється від I , в той час як передаточне відношення планетарної передачі може набувати будь-яких значень (теоретично від $-\infty$ до $+\infty$).

Тоді формулу (1) з урахуванням (2) перепишемо у вигляді

$$i_{1h}^{(4)} = 1 + u_0. \quad (3)$$

Графічно ця залежність (3) показана на рис. 3.

2. 2. Механізм Джемса в режимі прискорювача

Відповідно для прискорювача Джемса формула Вілліса набуває вигляду

$$i_{h1}^{(4)} = \frac{1}{1 + u_o}. \quad (4)$$

Графічно залежність (4) показана на рис.4.

2. 3. Механізм Давида (вхід – водило)

Формула Вілліса для механізмів Давида, коли за вхідну ланку прийнято водило h , має вигляд

$$i_{h1}^{(4)} = \frac{1}{1 - i_{14}^{(h)}}, \quad (5)$$

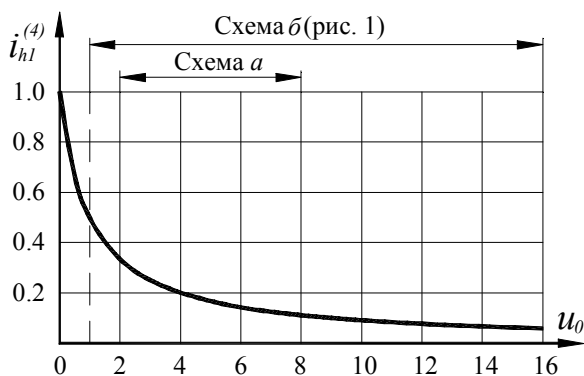


Рис. 4. Залежність $i_{h1}^{(4)}$ прискорювачів Джемса від значення u_0

де

$$i_{14}^{(h)} = + \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} = + u_o. \quad (6)$$

З урахуванням (6) формула (5) набуває вигляду

$$\dot{i}_{hl}^{(4)} = \frac{I}{I - u_o}. \quad (7)$$

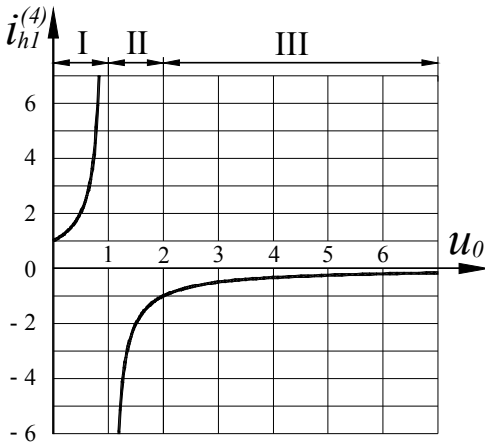


Рис.5. Залежність передаточного відношення $\dot{i}_{hl}^{(4)}$ механізмів Давида від u_o

Графічно залежність (7) зображена на рис.5.

Значимо, що на рис. 5 помічені три зони.

В зоні I механізми Давида існують в режимі редуктора з додатнім необмеженим значенням передаточного

відношення $\dot{i}_{hl}^{(4)}$ (напрямки обертання вхідної і вихідної ланок співпадають).

В зоні II механізми Давида існують в режимі редуктора з від'ємним необмеженим значенням передаточного відношення (напрямки

обертання вхідної і вихідної ланок протилежні).

В зоні III механізми Давида існують в режимі прискорювача з обмеженим від'ємним значенням передаточного відношення.

2. 3. Механізм Давида (вихід – водило)

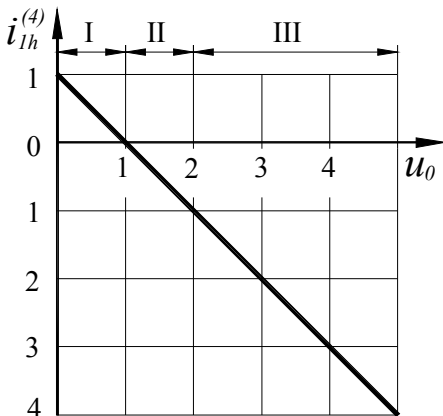


Рис. 6. Залежність передаточного відношення $\dot{i}_{lh}^{(4)}$ механізмів Давида від u_o

Формула Вілліса для механізмів Давида, коли водило прийняте за вихідну ланку, має вигляд

$$\dot{i}_{lh}^{(4)} = 1 - u_o. \quad (8)$$

Графічно залежність (8) зображена на рис. 6. Тут теж помічено три зони.

В зоні I механізми Давида можуть існувати в режимі прискорювача з додатнім необмеженим значенням

передаточного відношення $\dot{i}_{lh}^{(4)}$.

В зоні II механізми Давида можуть існувати в режимі прискорювача

з від'ємним необмеженим значенням передаточного відношення $i_{1h}^{(4)}$.

В зоні III механізми Давида можуть існувати в режимі редуктора з

від'ємним обмеженим значенням передаточного відношення $i_{1h}^{(4)}$.

Як бачимо механізми Давида мають на перший погляд дуже привабливі кінематичні можливості. Тим більше треба обережно використовувати цю їхню властивість, за якою, як побачимо нижче, стоять неприємні прояви різкої залежності величини ККД від значення u_o (особливо поблизу $u_o = 1$).

3. Припущення, прийняті для аналітичного визначення ККД механізмів планетарних передач

Відомо, що шкідливі витрати потужності в механічних передачах йдуть на долаття сил тертя в кінематичних парах, серед яких можна скласти дві групи: сили тертя в зубчастих зачепленнях і сили тертя в підшипниках.

Крім того, існують шкідливі витрати потужності на перемішування мастила (так звані борботажні витрати). Останні, звичайно мало помітні в загальному балансі витрат, стають досить помітними, коли сателіти передач повністю занурені в мастило. Якщо ж змащування передач забезпечено тільки в мінімально необхідних межах (мастильним туманом від спеціального насоса), тоді борботажними витратами можна навіть знехтувати.

У всякому разі визначення борботажних витрат - це окреме питання, яке треба вивчати окремо і яке тут не розглядається.

Якщо в передачі застосовані підшипники ковзання, тоді витрати на долаття тертя в них мають великий діапазон можливих значень, в залежності від матеріалів підшипника, типу мастила, робочої температури, відносної швидкості шипів та підшипників, способу подачі мастила в підшипники, характеру тертя (рідинне, напіврідинне) та таке інше. Це теж питання для окремого дослідження.

Якщо ж в передачі застосовані підшипники кочення, то тоді досить легко врахувати витрати в них, тому що характеристики опору коченню в таких підшипниках мають сталий характер і добре вивчені.

В зубчастих зачепленнях за умов картерного надійного змащування сили тертя також мають досить сталі статистичні характеристики і їх теж можна надійно передбачити.

Таким чином сформулюємо перше припущення: борботажними витратами нехтуємо, а витрати в зачепленнях та підшипниках кочення

вважаємо відомими з попереднього досвіду (статистичні дані витрат в зачепленнях та в підшипниках кочення наведені, наприклад, в довідниках та в учбовій літературі з курсу деталей машин).

Так, одне зовнішнє якісне зачеплення сталевих зубців під час роботи поглинає на додання тертя близько 2% потужності, яка передається цим зачепленням.

Внутрішнє зачеплення поглинає близько 1% потужності, що ним передається.

В підшипниках кочення відповідні витрати потужності не перевищують (0,5...1)% в розрахунку на кожну пару підшипників.

Це повністю можна віднести до підшипників кочення, на які опирається сателіт або блок сателітів.

Що ж до витрат в підшипниках центральних валів планетарної передачі, то тут можна зазначити два можливі варіанти:

1. Якщо число сателітів $k \geq 3$, а сонячне зубчасте колесо має самовстановлення (більшість конструкцій влаштовані саме так). Тоді радіальні навантаження підшипників центральних валів можна вважати відсутніми, а витратами на додання тертя кочення в таких підшипниках можна обґрунтовано знехтувати.

2. Якщо число сателітів $k=1$ (схема рис. 2б), тоді витрати потужності на додання тертя в підшипниках кочення центральних валів треба враховувати, тому що вони також знаходяться під радіальним навантаженням, як і підшипники осі сателіта (чи блоку сателітів).

Друге припущення стосується впливу на витрати потужності відцентрових сил (сил інерції) сателітів.

Ці сили додатково навантажують підшипники осей сателітів, що призводить до збільшення витрат на додання сил опору їх коченню.

Виникає питання, наскільки ці витрати помітні в загальному балансі витрат потужності на додання сил тертя в механізмі передачі?

В швидкісних передачах, коли доцентрове прискорення осі сателіта досягає десятків і навіть сотень g , відцентрові сили інерції можуть бути сумірними з окружними силами, що діють на осі сателітів. Тобто витрати потужності на додання сил опору коченню можуть подвоїтись і навіть збільшитись в декілька разів. В конкретних випадках ці додаткові витрати потужності можна врахувати.

В тихохідних та середньошвидкісних передачах витрати потужності, обумовлені відцентровими силами інерції сателітів, малопомітні в загальному балансі витрат потужності на додання сил тертя в механізмі і ними можна знехтувати. Треба зазначити, що наведені вище міркування на пряму відносяться до випадку, коли схеми механізмів Джемса та Давида використовуються як прості непланетарні, тобто за умови нерухомості водила h .

Такі випадки зустрічаються на практиці. Наприклад, схема механізму Джемса з нерухомим водилом h використовується в бортовій

передачі автомобілів МАЗ та інших. Вхідною ланкою бортової передачі є сонячне колесо 1, вихідною ланкою є коронне зубчасте колесо 4, а сателіти 2 відіграють роль простих паразитних коліс (дивися як на прототип бортової передачі на рис.1а).

Відносно ж планетарних варіантів використання схем механізмів Джемса і Давида (тобто коли водило h рухається) зазначимо, що наведені вище міркування повною мірою можна застосувати лише при розгляді обернених цих механізмів, тобто тих, які спостерігаються після надання механізмам додаткової кутової швидкості $-\omega_h$.

Іншими словами, будемо вважати, що ККД оберненого механізму $\eta^{(h)}$ може бути досить точно спрогнозоване на основі відомих емпіричних даних. Так, для схеми Джемса з одновінцевими сателітами (рис.1а) можна прийняти $\eta^{(h)} \geq 0,96$.

Для схеми Джемса з двовінцевими блоками сателітів (рис. 1б) можна рахувати $\eta^{(h)} \geq 0,95 \div 0,96$.

Для схеми Давида з двома зовнішніми зачепленнями (рис. 2а) можна прийняти $\eta^{(h)} \geq 0,94 \div 0,95$.

Для схем Давида з двома внутрішніми зачепленнями (рис. 2б, в) можна вважати $\eta^{(h)} \geq 0,97 \div 0,98$, причому з наближенням значення u_o до 1 величина $\eta^{(h)}$ зростає. Це обумовлюється тим, що з наближенням чисел зубців коліс у внутрішньому зачепленні відносна швидкість скочвання зубців зменшується.

Наведені вище пересічні значення ККД обернених планетарних механізмів не відносяться до швидкісних механізмів, які потребують індивідуального підходу, тобто вказані вище значення $\eta^{(h)}$ визначені без урахування впливу відцентрових сил інерції сателітів на витрати потужності.

Якщо стисло підсумувати прийняті припущення, то можна іншими словами зазначити: розподіл зусиль і моментів сил на зубчастих колесах та водилі в нешвидкісному планетарному варіанті передачі та її оберненому варіанті будемо вважати одним і тим же.

Відносно швидкісних планетарних передач можна зазначити, що підхід до задачі можна залишити таким же, але відповідні значення $\eta^{(h)}$ треба дещо знизити, в залежності від розмірів передачі та кутових швидкостей її валів.

Враховуючи вище сформульовані припущення, визначимо підхід до визначення ККД планетарних механізмів.

Тому що витрати потужності (потужності сил тертя) залежать тільки від сил (моментів) і відносних швидкостей, а ці величини, враховуючи прийняті припущення, для планетарного і оберненого (непланетарного) механізмів залишаються однаковими, тоді

$$N_{TP}^{ПЛ} = N_{TP}^{ОБ},$$

де $N_{TP}^{ПЛ} = N^{ПЛ} (1 - \eta_{ПЛ})$ - потужність сил тертя планетарного механізму;

$N_{TP}^{ОБ} = N^{ОБ} (1 - \eta_{ОБ})$ - потужність сил тертя оберненого механізму.

Таким чином маємо: $N^{ПЛ} (1 - \eta_{ПЛ}) = N^{ОБ} (1 - \eta_{ОБ})$,
звідкіля коефіцієнт корисної дії планетарного механізму буде:

$$\eta_{ПЛ} = 1 - \frac{N^{ОБ}}{N^{ПЛ}} (1 - \eta_{ОБ}). \quad (а)$$

Зазначимо, що $N^{ОБ}$ і $N^{ПЛ}$ це вхідні потужності оберненого і планетарного механізмів.

Тепер можна перейти до складання математичних моделей для визначення ККД планетарних передач.

4. ККД механізмів Джемса

Як вже було вище вказано обидві схеми механізмів Джемса

потребують одного й того ж математичного підходу, тому розглянемо одну з них, наприклад, схему з двовісцевими сателітами.

Нехай вхідною ланкою механізму (рис.7) є сонячне колесо 1, а вихідною - водило h .

Тоді момент рушійних сил T_l на ведучому колесі 1 буде напрямлений в бік кутової швидкості ω_l .

Згідно з формулою (3) передаточне відношення

$i_{1h}^{(4)} = 1 + u_0 > 1$, тобто механізм

за вказаних вище умов буде існувати в режимі редуктора. Це означає, що кутова швидкість $\omega_h < \omega_l$, та крім того, напрямки кутових швидкостей ω_l та ω_h співпадають.

Момент сил опору T_h на веденій ланці буде мати напрямок, протилежний напрямку кутової швидкості ω_h , а його величина безумовно буде більша, ніж величина моменту сил на вхідній ланці, тобто $T_h > T_l$.

За умови рівноваги (при $\omega = const$) маємо

$$T_l + T_p = T_h. \quad (9)$$

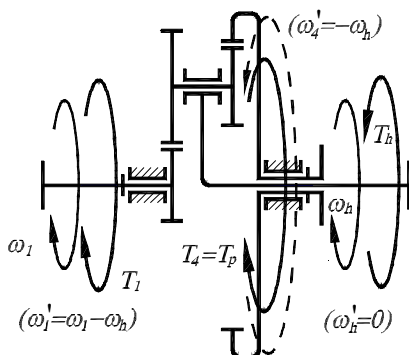


Рис. 7. Напрямки зовнішніх моментів сил в редукторі Джемса

Рівняння (9) можна пояснити так: реактивний момент сил T_p ($T_p = T_4$) має таку величину і такий напрямок, що він разом з меншим моментом сил T_l дорівнює більшому моменту сил T_h та врівноважує його. Тому на рис. 7 реактивний момент T_p напрямлений у бік вхідного моменту T_l .

Прийняті вище допущення дозволяють вважати моменти сил T_l , T_h і T_p незмінними після обернення механізму (за рахунок додаткової швидкості $-\omega_h$, що надається всьому механізму).

В дужках на рис. 7 записані кутові швидкості ланок оберненого механізму. Вони позначені відповідно штрихом.

Розгляд оберненого механізму дозволяє зробити висновок, що в нього ланка 1 залишилась ведучою (кутова швидкість ω_1^I має той же напрямок, що і ω_l , який співпадає з напрямком моменту сил T_l).

Оскільки водило h в оберненому механізмі нерухоме ($\omega_h^1 = 0$), момент сил T_h спостерігається в ньому в ролі реактивного.

Зубчате колесо 4 в оберненому механізмі спостерігається як ведене: момент сил на ньому $T_4 = T_p$ напрямлений у протилежний бік в порівнянні з кутовою швидкістю $\omega_4^I = -\omega_h$.

Обернений механізм має відомий ККД $\eta^{(h)}$, пересічні значення якого наведено вище.

Цей ККД можна розписати як відношення вихідної потужності до вхідної на зубчастих колесах оберненого механізму:

$$\eta^{(h)} = \frac{T_p \cdot \omega_h}{T_1 \cdot (\omega_1 - \omega_h)}. \quad (10)$$

Знайдемо з виразу (10) з врахуванням формули (3) невідоме відношення

$$\frac{T_p}{T_1} = \eta^{(h)} \cdot \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_h} = \eta^h (1 + u_0 - 1) = \eta^{(h)} \cdot u_0. \quad (11)$$

ККД планетарного механізму Джемса $\eta_{lh}^{(4)}$ теж можна розписати через відношення вихідної потужності до вхідної:

$$\eta_{lh}^{(4)} = \frac{T_h \cdot \omega_h}{T_1 \cdot \omega_1}. \quad (12)$$

З виразу (12) з врахуванням (9) і (11) одержимо:

$$\eta_{1h}^{(4)} = \frac{\eta^{(h)} \cdot u_0 + 1}{u_0 + 1}. \quad (13)$$

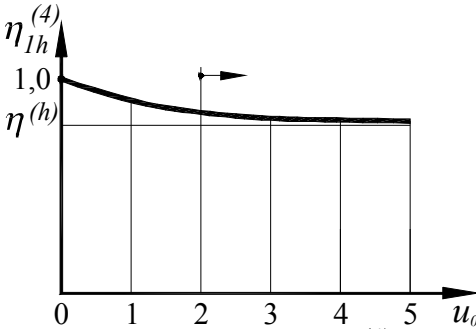


Рис. 8. Залежність ККД $\eta_{1h}^{(4)}$ планетарного редуктора Джемса від u_0

На рис. 8 показано загальний вигляд залежності

$\eta_{1h}^{(4)}$ від значення u_0 .

Видно, що зі збільшенням u_0 значення $\eta_{1h}^{(4)}$ асимптотично наближається зверху до величини $\eta^{(h)}$.

На практиці використовуються редуктори Джемса з $u_0 \geq 2$, в яких $\eta_{1h}^{(4)} \approx \eta^{(h)}$ (але завжди $\eta_{1h}^{(4)} > \eta^{(h)}$).

В таблицях 1 і 2 наведені чисельні значення ККД редукторів Джемса, розраховані за формулою (13).

Таблиця 1

ККД редуктора Джемса в залежності від u_0 за умовою $\eta^{(h)} = 0,96$

u_0	2	4	6	8
$\eta_{1h}^{(4)}$	0,973	0,968	0,9657	0,9644

Як бачимо, редуктор Джемса з одновінцевими сателітами має високий ККД. Завдяки цьому, та завдяки відносній простоті його устрою він має широке застосування.

Таблиця 2

ККД редуктора Джемса в залежності від u_0 за умовою $\eta^{(h)} = 0,95$ (з двовінцевими сателітами)

u_0	2	4	6	8	10	12	14	16
$\eta_{1h}^{(4)}$	0,967	0,96	0,957	0,956	0,9546	0,954	0,9533	0,9529

Таблиця 2 свідчить, що редуктор Джемса з двовінцевими сателітами має високий ККД. Його можна також використовувати без будь-яких пересторог.

Тепер розглянемо прискорювач Джемса (рис. 9).

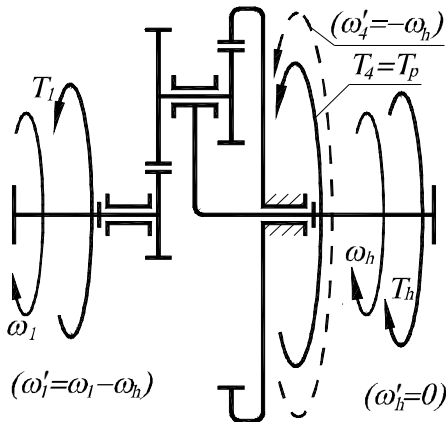


Рис. 9. Напрямки зовнішніх моментів сил в прискорювачі Джемса

Ведучою ланкою планетарного прискорювача Джемса є водило h : на ньому напрямки ω_h і T_h співпадають.

Веденою ланкою тоді буде сонячне зубчасте колесо 1: на його валі напрямки ω_1 і T_1 протилежні.

Реактивний момент T_p на нерухомому зубчастому колесі 4 разом з меншим моментом сил T_1 врівноважує більший момент сил T_h , тобто і тут справедлива залежність (9).

Але ж в оберненому механізмі тепер ведучою ланкою буде спостерігатись вічне колесо 4. Веденою ланкою буде залишатись те ж саме сонячне колесо 1.

Для оберненого механізму відомий ККД $\eta^{(h)}$ можна розписати як відношення потужностей на вході та на виході, тобто

$$\eta^{(h)} = \frac{T_1 \cdot (\omega_1 - \omega_h)}{T_p \cdot \omega_h}. \quad (14)$$

З виразу (14) знайдемо невідоме відношення

$$\frac{T_p}{T_1} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\eta^{(h)} \cdot \omega_h} = \frac{1 + u_0 - 1}{\eta^{(h)}} = \frac{u_0}{\eta^{(h)}}. \quad (15)$$

Тепер знову повернемося до планетарного прискорювача Джемса.

Його невідомий ККД $\eta_{h1}^{(4)}$ теж розпишемо як відношення вихідної та вхідної потужностей:

$$\eta_{h1}^{(4)} = \frac{T_1 \cdot \omega_1}{T_h \cdot \omega_h}. \quad (16)$$

Після підстановки в (16) виразів (9) та (15) знайдемо

$$\eta_{h1}^{(4)} = \frac{\eta^{(h)} (1 + u_0)}{\eta^{(h)} + u_0}. \quad (17)$$

На рис. 10 показано загальний вигляд залежності $\eta_{h1}^{(4)}$ від значення u_0 .

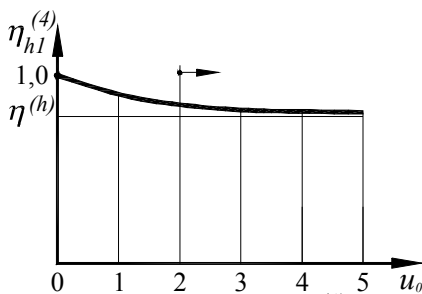


Рис. 10. Залежність ККД $\eta_{hl}^{(4)}$ планетарного прискорювача Джемса від u_0

Тут бачимо дуже схожу залежність на ту, яку було вище знайдено для редукторів Джемса.

Звичайно чисельні значення тут будуть дещо інші, але ж загальні висновки будуть ті ж самі: прискорювачі Джемса володіють високим ККД і їх можна без зайвих застережень широко використовувати, що й робиться на практиці.

В таблицях 3 і 4 наведені чисельні значення ККД прискорювачів Джемса, які розраховані за формулою (17).

Таблиця 3

ККД прискорювача Джемса в залежності від u_0 за умовою $\eta^{(h)} = 0,96$

u_0	2	4	6	8
$\eta_{hl}^{(4)}$	0,973	0,968	0,9655	0,9643

Таблиця 4

ККД прискорювача Джемса в залежності від u_0 за умовою $\eta^{(h)} = 0.95$
(з двовісцевими сателітами)

u_0	2	4	6	8	10	12	14	16
$\eta_{hl}^{(4)}$	0,966	0,96	0,957	0,955	0,954	0,9537	0,9532	0,9528

5. ККД механізмів Давида

Як було зазначено вище всі три схеми механізмів Давида мають спільне математичне забезпечення, тому розглянемо одну з них, наприклад, схему з двома зовнішніми зачепленнями.

Нехай вхідною ланкою механізму (рис. 11) є водило h .

З рис. 5 бачимо, що при цьому може бути три режими руху.

Розглянемо спочатку зону I ($u_0 = 0 \dots 1$), в якій механізм Давида існує в режимі редуктора з додатними передаточними відношеннями. В відповідності з цим на рис. 11 і показані напрямки кутових швидкостей та зовнішніх моментів сил.

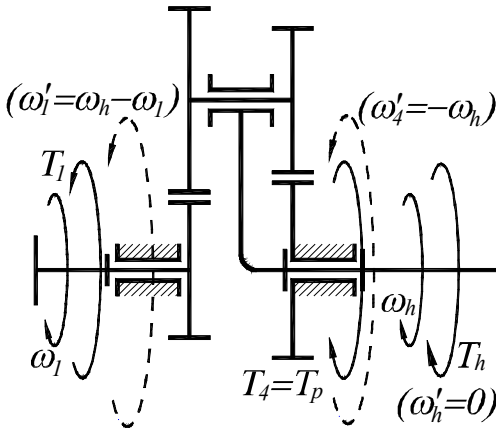


Рис. 11. Напрямки зовнішніх моментів сил в редукторі Давида (I зона з рис. 5), коли $u_0=0-1$

ведучою ланкою виявиться колесо 1, а веденою - колесо 4, відомий ККД $\eta^{(h)}$ розпишемо як

$$\eta^{(h)} = \frac{T_p \cdot \omega_h}{T_1 \cdot (\omega_h - \omega_1)}. \quad (20)$$

З виразу (20) з урахуванням (7) знайдемо невідоме відношення

$$\frac{T_p}{T_1} = \eta^{(h)} \frac{\omega_h - \omega_1}{\omega_h} = \eta^{(h)} \cdot u_0. \quad (21)$$

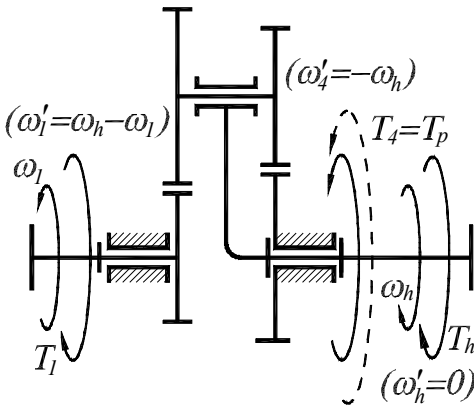


Рис. 12. Напрямки зовнішніх моментів сил в редукторі Давида (II зона з рис. 5), коли $u_0=1-2$

ККД планетарного механізму Давида $\eta_{h1}^{(4)}$ для зазначених умов будемо відшукувати як відношення потужності на вихідному валі колеса 1 до потужності на вхідному валі водила h :

$$\eta_{h1}^{(4)} = \frac{T_1 \cdot \omega_1}{T_h \cdot \omega_h}. \quad (18)$$

Рівновага зовнішніх моментів сил буде існувати, коли

$$T_h + T_p = T_1. \quad (19)$$

Для обережного механізму Давида, в якому

ведучою ланкою виявиться колесо 1, а веденою - колесо 4, відомий ККД $\eta^{(h)}$

Після підстановки в (18) виразів (19) та (21) з урахуванням (7) одержимо формулу для розрахунку ККД редуктора Давида (в зоні I):

$$\eta_{h1}^{(4)} = \frac{1 - u_0}{1 - \eta^{(h)} \cdot u_0}. \quad (22)$$

Тепер перейдемо до зони II ($u_0 = 1 \dots 2$), в якій механізм Давида існує теж у вигляді редуктора, але з протилежними напрямками обертання вхідного вала водила h та вихідного вала колеса 1 (рис. 12).

ККД $\eta_{h1}^{(4)}$ і в цьому випадку будемо відшукувати за виразом (18).

Оскільки вхідний момент сил T_h та вихідний момент сил T_l напрямлені в один бік, рівновага зовнішніх моментів сил буде спостерігатись за умовою

$$T_p = T_h + T_l. \quad (23)$$

Обернений механізм для зони II, як це видно з рис. 12 матиме в якості вхідної ланки колесо 4, а в якості вихідної ланки - колесо 1.

Його відомий ККД $\eta^{(h)}$ можна розписати як

$$\eta^{(h)} = \frac{T_1 \cdot (\omega_1 + \omega_h)}{T_p \cdot \omega_h}. \quad (24)$$

З виразу (24) з урахуванням (7) знайдемо невідоме відношення

$$\frac{T_p}{T_1} = \frac{u_0}{\eta^{(h)}}. \quad (25)$$

Після підстановки в (18) виразів (23) та (25) з урахуванням (7) одержимо формулу для розрахунку ККД редуктора Давида (в зоні II):

$$\eta_{h1}^{(4)} = \frac{\eta^{(h)} \cdot (u_0 - 1)}{u_0 - \eta^{(h)}}. \quad (26)$$

Тепер перейдемо до зони III (рис. 5).

Не дивлячись на те, що в зоні III механізм Давида з вхідною ланкою h існує в якості прискорювача, для нього повністю підійдуть рис. 11, та залежності (23), (24), (25) і (26). Це обумовлено збереженням напрямків всіх кутових швидкостей та напрямків зовнішніх моментів сил.

На рис. 13 показано загальний вигляд залежності $\eta_{h1}^{(4)}$ від значення u_0 для всіх трьох зон, розрахованої за формулами (22) та (26).

Аналіз залежності $\eta_{h1}^{(4)}$ від u_0 показує, що коли $u_0 \rightarrow I$, тоді

$$\eta_{h1}^{(4)} \rightarrow 0. \text{ При цьому передаточне відношення } i_{h1}^{(4)} \rightarrow \infty.$$

Проведемо чисельні розрахунки ККД $\eta_{h1}^{(4)}$ за формулами (22) та (26) для механізмів Давида окремо за схемами рис. 2а, б і в. Результати розрахунків наведені в таблицях 5 і 6.

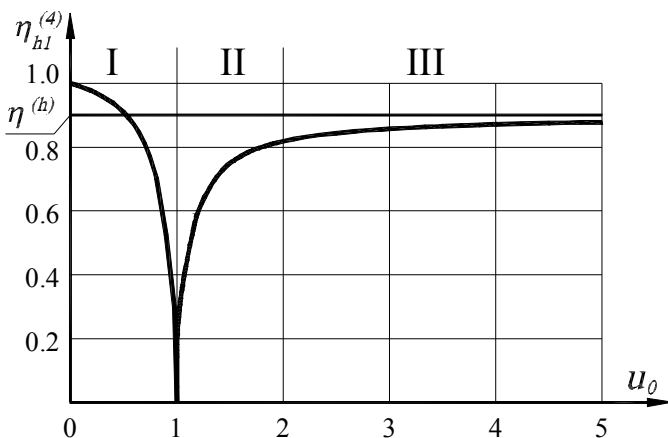


Рис.13. Залежність ККД $\eta_{hl}^{(4)}$ планетарних механізмів Давида від u_0

Таблиця 5

ККД механізму Давида з двома зовнішніми зачепленнями в залежності від u_0 за умовою $\eta^{(h)} = 0,94$

u_0	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$i_{hl}^{(4)}$	+1,0	+2,0	+10	+100	+1000	+10000
$\eta_{hl}^{(4)}$	1,0	0,943	0,649	0,144	0,0164	0,00166

(продовження таблиці 5)

u_0	1	1,1	1,5	2	5	11
$i_{hl}^{(4)}$	$\pm\infty$	-10	-2	-1,0	-0,25	-0,1
$\eta_{hl}^{(4)}$	0	0,59	0,84	0,89	0,926	0,934

Аналіз результатів розрахунків по таблиці 5 показує, що коли передаточне відношення $i_{hl}^{(4)}$ зростає, ККД редуктора Давида з двома зовнішніми зачепленнями різко знижується. Бачимо, що навіть при зростанні $|i_{hl}^{(4)}|$ до 10 ККД $\eta_{hl}^{(4)}$ стає досить низьким (близько 0,6). Це навіть значно гірше, ніж значення ККД черв'ячної передачі. Тому в силових передачах редуктори Давида з двома зовнішніми зачепленнями використовувати не слід.

Таблиця 6
ККД механізму Давида з двома внутрішніми зачепленнями
в залежності від u_0 за умовою $\eta^{(h)} = 0,98$

u_0	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$i_{h1}^{(4)}$	+1,0	+2,0	+10	+100	+1000	+10000
$\eta_{h1}^{(4)}$	1,0	0,98	0,847	0,34	0,05	0,005

(продовження таблиці 6)

u_0	1	1,1	1,5	2	5	11
$i_{h1}^{(4)}$	$\pm\infty$	-10	-2,0	-1,0	-0,25	-0,1
$\eta_{h1}^{(4)}$	0	0,82	0,942	0,961	0,975	0,978

Співставлення результатів розрахунків, наведених в таблицях 5 і 6, показує, що планетарний механізм Давида з двома внутрішніми зачепленнями має значно вищий ККД ніж планетарний механізм Давида з двома зовнішніми зачепленнями.

Так, в зоні провалу (поблизу $u_0=1$) його ККД

$\eta_{h1}^{(4)}$ приблизно втричі більший. При віддаленні від значення $u_0=1$ (в обидва боки) перевага планетарного механізму Давида з двома внутрішніми зачепленнями зменшується, але залишається суттєвою. Наприклад, коли маємо

$i_{h1}^{(4)} = 10$, ККД редуктора Давида з двома внутрішніми зачепленнями перевищує 0,8 (тобто сумірний з ККД черв'ячної передачі), в той же час, як ККД редуктора

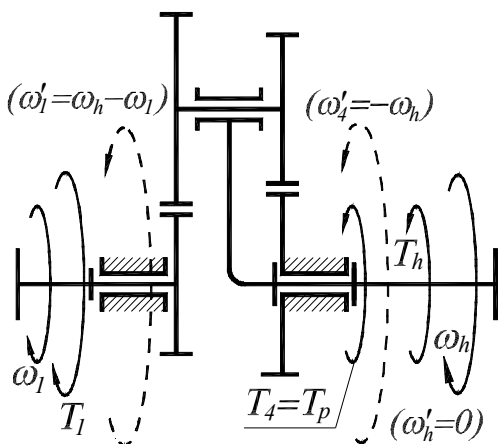


Рис. 14. Напрямки зовнішніх моментів сил
в прискорювачі Давида (І зона з рис. 5),
коли $u_0=0...1$

Давида з двома зовнішніми зачепленнями, як вже було сказано вище, дорівнює приблизно 0,6.

Наведені дані дозволяють зробити висновок, що механізм Давида з двома внутрішніми зачепленнями можна рекомендувати для застосування в силових передачах невеликої і навіть середньої потужності, коли значення $i_{h1}^{(4)}$ не перевищує 100.

Всі три схеми механізмів Давида в режимі прискорювача, коли $i_{h1}^{(4)} = 0,25$ та менше, мають досить високі значення ККД $\eta_{h1}^{(4)}$ - їх можна застосувати також і в силових передачах без будь яких обмежень.

Тепер розглянемо схеми механізму Давида в випадку, коли ведучою ланкою є зубчасте колесо 1 (рис. 14).

З рис. 6 бачимо, що при цьому може також бути три режими руху.

Розглянемо спочатку зону I ($u_0 = 0 \dots 1$), в якій механізм Давида існує в режимі прискорювача з додатними передаточними відношеннями.

В відповідності з цим на рис. 14 і показані напрямки кутових швидкостей та зовнішніх моментів сил.

ККД планетарного механізму Давида $\eta_{h1}^{(4)}$ для зазначених умов будемо відшукувати як відношення потужності на вихідному валі водила h до потужності на вхідному валі колеса 1:

$$\eta_{1h}^{(4)} = \frac{T_h \cdot \omega_h}{T_1 \cdot \omega_1}. \quad (27)$$

Рівновага зовнішніх моментів сил буде існувати, коли

$$T_h + T_P = T_1. \quad (28)$$

Для оберненого механізму Давида, в якому ведучою ланкою виявиться колесо 4, а веденою - колесо 1, відомий ККД $\eta^{(h)}$ розпишемо як

$$\eta^{(h)} = \frac{T_1 \cdot (\omega_h - \omega_1)}{T_p \cdot \omega_h}. \quad (29)$$

З виразу (29) з урахуванням (8) знайдемо невідоме відношення

$$\frac{T_p}{T_1} = \frac{(\omega_h - \omega_1)}{\eta^{(h)} \cdot \omega_h} = \frac{u_0}{\eta^{(h)}}. \quad (30)$$

Після підстановки в (27) виразів (28) та (30) з урахуванням (8) одержимо формулу для розрахунку ККД прискорювача Давида (в зоні I):

$$\eta_{1h}^{(4)} = \frac{\eta^{(h)} - u_0}{\eta^{(h)} \cdot (1 - u_0)}. \quad (31)$$

Тепер перейдемо до зони II ($u_0 = 1 \dots 2$), в якій механізм Давида існує теж у вигляді прискорювача, але з протилежними напрямками обертання вхідного вала колеса 1 та вихідного вала водила h (рис. 15).

ККД $\eta_{1h}^{(4)}$ і в цьому випадку будемо відшукувати за виразом (27).

Оскільки вхідний момент сил T_l та вихідний момент сил T_h напрямлені в один бік, рівновага зовнішніх моментів сил буде спостерігатись за умовою (23).

Обернений механізм для зони II, як це видно з рис. 15, матиме в якості вхідної ланки колесо 1, а в якості вихідної ланки - колесо 4.

Його відомий ККД $\eta^{(h)}$ можна розписати як

$$\eta^{(h)} = \frac{T_p \cdot \omega_h}{T_1 \cdot (\omega_1 + \omega_h)}. \quad (32)$$

З виразу (32) з урахуванням (8) знайдемо невідоме відношення

$$\frac{T_p}{T_1} = \eta^{(h)} \cdot \frac{\omega_1 + \omega_h}{\omega_h} = \eta^{(h)} \cdot u_0. \quad (33)$$

Зауважимо, що в формулі (33) відношення

$$\frac{\omega_1 + \omega_h}{\omega_h} = \frac{\omega_1}{\omega_h} + 1 = (u_0 - 1) + 1 = u_0. \quad (34)$$

де вираз

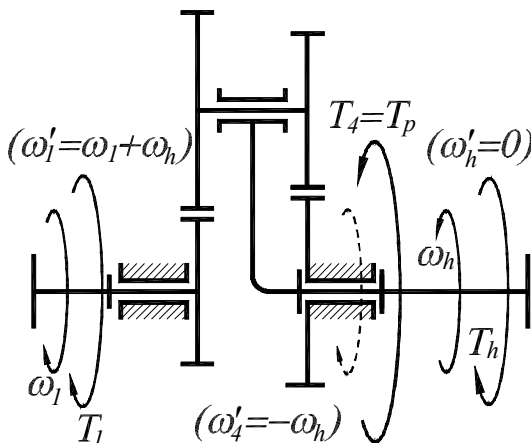


Рис. 15. Напрямки зовнішніх моментів сил в прискорювачі Давида (II зона з рис. 6), коли $u_0 = 1 \dots 2$

$$\frac{\omega_1}{\omega_h} = \left| \frac{\omega_1}{\omega_h} \right| = |1 - u_0| = -(u_0 - 1) = u_0 - 1, \quad (35)$$

взято без урахування знаку “мінус” (оскільки $u_0 > 1$), тому що при обчисленнях ККД відношення швидкостей береться тільки за величиною без урахування їх напрямків.

Після підстановки в (27) виразів (33) з урахуванням (8), (34) та (35) одержимо формулу для розрахунку ККД прискорювача Давида (в зоні II):

$$\eta_{lh}^{(4)} = \frac{\eta^{(h)} \cdot u_0 - 1}{u_0 - 1}. \quad (36)$$

Тепер перейдемо до зони III (відповідно з рис. 6).

Не дивлячись на те, що в зоні III механізм Давида з вхідною ланкою 1 існує в якості редуктора, для нього повністю підійде рис. 14 та залежності (23), (32), (33), (34), (35) і (36). Це обумовлено збереженням напрямків всіх кутових швидкостей та напрямків зовнішніх моментів сил.

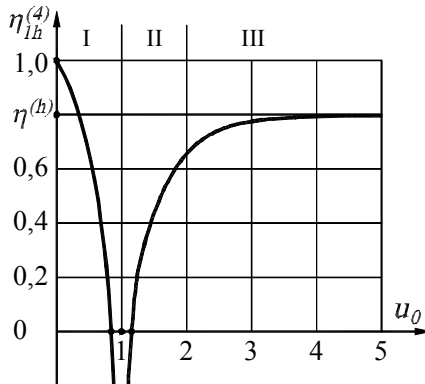


Рис.16. Залежність ККД $\eta_{lh}^{(4)}$ планетарних механізмів Давида від u_0

На рис. 16 показано загальний вигляд залежності $\eta_{lh}^{(4)}$ від значення u_0 для всіх трьох зон, розрахованої за формулами (31) та (36).

Перше, що треба відзначити з розгляду рис. 16 - це наявність області самогальмування з ККД $\eta_{hl}^{(4)} < 0$ (поблизу межі зон I і II).

Ця область зліва обмежена значенням $u_0 = \eta^{(h)}$, а справа вона обмежена значенням $u_0 = 1/\eta^{(h)}$.

В таблицях 7 і 8 наведені результати чисельних розрахунків за формулами (31) та (36) ККД планетарних механізмів Давида з колесом 1 в якості ведучої ланки.

Таблиця 7

ККД планетарного механізму Давида з двома зовнішніми зачепленнями, в залежності u_0 за умовою $\eta^{(h)} = 0,94$

u_0	0	0,5	0,75	0,9	0,94	0,9999	1,0
$i_{1h}^{(4)}$	+1,0	+0,5	+0,25	+0,1	+0,06	+0,0001	0
$\eta_{1h}^{(4)}$	1,0	0,936	0,81	0,43	0	-637,0	$-\infty$

(продовження таблиці 7)

u_0	1,064	1,25	1,5	2,0	5	11
$i_{1h}^{(4)}$	-0,036	-0,25	-0,5	-1,0	-4,0	-10,0
$\eta_{1h}^{(4)}$	0	0,7	0,82	0,88	0,925	0,934

Таблиця 8

ККД механізму Давида з двома внутрішніми зачепленнями в залежності від u_0 за умовою $\eta^{(h)} = 0,98$

u_0	0	0,5	0,75	0,9	0,98	0,99	0,9999
$i_{1h}^{(4)}$	+1,0	+0,5	+0,25	+0,1	+0,02	+0,01	+0,0001
$\eta_{1h}^{(4)}$	1,0	0,9796	0,939	0,82	0	-5,3	-211,0

(продовження таблиці 8)

u_0	1,0	1/0,98	1,25	1,5	2,0	5	11
$i_{1h}^{(4)}$	0	-0,02	-0,25	-0,5	-1,0	-4,0	-10,0
$\eta_{1h}^{(4)}$	$-\infty$	0	0,9	0,94	0,96	0,975	0,978

Аналіз результатів обчислень, що містяться в таблицях 7 і 8, показує високі витрати потужності на додання тертя в прискорювачах Давида, особливо в механізмі з двома зовнішніми зачепленнями. Його ККД при значенні $i_{1h}^{(4)} = 0,1$ становить всього лише $\eta_{1h}^{(4)} = 0,43$. При цьому ККД прискорювача Давида з двома внутрішніми зачепленнями майже вдвічі більший і становить 0,82. Останній можна застосовувати навіть в силових прискорювачах (не більше, ніж з десятикратним прискоренням).

В режимі редуктора (зона III, рис. 6 та рис. 15) ККД всіх трьох планетарних механізмів Давида досить високий і вони можуть застосовуватись без будь-яких застережень.

6. Рекомендації з використання планетарних передач

1. Розглянуті математичні моделі витрат потужності на додання тертя в найпростіших планетарних зубчастих механізмах за схемами Джемса та Давида дозволили вивести прості залежності для розрахунків ККД цих механізмів (дивіться формули (13), (17), (22), (26), (31) і (36) та їх аналіз).

2. Прийняті припущення дозволили виконати чисельні розрахунки ККД планетарних зубчастих механізмів Джемса і Давида в режимах редукторів та прискорювачів в повному діапазоні можливих передаточних відношень (дивіться таблиці 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 і 8 та їх аналіз).

На основі одержаних значень ККД планетарних механізмів можна здійснити обґрунтований вибір типу механізму при розробці передач машин, що проектуються.

3. Сформульовані застереження, які дозволять запобігти використанню планетарних механізмів з неприпустимо низькими значеннями ККД і навіть таких випадків, коли планетарні механізми можуть самогальмуватись (дивіться рис. 16 та його аналіз).

4. Знайомство з матеріалом розробки буде корисне при вивченні студентами розділу ТММ «Механізми передач». Воно дозволить поглибити знання з питання планетарних зубчастих передач, яке недостатньо висвітлене в підручниках з ТММ і тому обумовлює неглибоку підготовленість майбутніх інженерів з цього питання.

5. Матеріали розробки будуть корисними під час курсового проектування з питання синтезу планетарних передач.

7. Контрольні запитання

1. Від чого залежить ККД планетарних передач?

2. Виведіть формулу для визначення ККД редуктора Джемса і зобразіть графік його залежності від передаточного числа оберненої передачі.

3. Приведіть графічні залежності ККД планетарних зубчастих механізмів за схемою Давида.

4. Чому планетарні зубчасті механізми за схемою Давида з великими передаточними числами не рекомендується використовувати в якості силових передач?

Лекція 34

Тема: Зрівноважування мас ланок механізмів

Зміст: 1. Мета зрівноважування мас.

2. Зрівноважування мас, що обертаються в одній площині.

3. Зрівноважування мас, що обертаються в різних площинах.

4. Контрольні запитання.

1. Мета зрівноважування мас

У процесі роботи машини ланки механізмів здійснюють переміщення зі складними законами руху, супроводжувані істотними прискореннями мас.

Циклічний характер роботи машини визначає періодичний характер зміни динамічних інерційних навантажень, які можуть передаватися через корінні підшипники на корпусні деталі і далі на станини, рами, фундаменти, будівлі.

При збігу частоти зміни динамічних інерційних навантажень із власними частотами коливань корпусу машини (рами, фундаменту, будівлі) можуть виникати небезпечні резонансні і квазірезонансні явища, що можуть призвести до порушень у роботі машини і навіть до аварій або катастроф.

Тому метою зрівноважування мас ланок механізму є розвантаження корінних підшипників (рам, станин, фундаментів, будівель) від дії сил інерції рухомих ланок.

Це досягається установкою відповідних противаг, які не знищують сили інерції рухомих ланок, а додають власні сили інерції таким чином, щоб ці сили інерції в сукупності замикалися одна на одну всередині машини через рухомі ланки і не передавалися б на корпусну деталь.

Машина з погано зрівноваженими масами в процесі роботи вібрує. Вібрації передаються через рами і фундаменти на будівлю. При цьому може вібрувати інше устаткування, скла у вікнах, світильники і навіть перекриття і стіни будівлі.

Машина з добре зрівноваженими масами сама не вібрує і не передає свої вібрації іншому устаткуванню.

Слід зазначити, що звичайно розрізняють власне зрівноважування мас ланок машини, виконуване в процесі проектування машини по її кресленнях, і зрівноважування мас, обумовлене похибками виробництва машини, яке виконується дослідним шляхом.

Нижче умовимося називати перше - зрівноважуванням мас, а друге - балансуванням деталей та вузлів.

Якби машина була виготовлена ідеально, то балансування її деталей і вузлів не знадобилося б.

На практиці при проектуванні машин здійснюють або повне (динамічне), або часткове (статичне) зрівноважування.

Статичне зрівноважування полягає в зведенні до нуля тільки головного вектора сил інерції мас рухомих ланок машини.

Динамічне зрівноважування полягає в зведенні до нуля не тільки головного вектора, а також і головного моменту сил інерції мас рухомих ланок машини. Іноді останнє називають моментним зрівноважуванням.

Те ж саме можна сказати й у відношенні балансування.

Розглянемо зрівноважування мас ланок машини у випадках їх обертального, поступального і плоскопаралельного руху.

2. Зрівноважування мас, що обертаються в одній площині

На рис. 5.1а показано декілька мас m_1, m_2 і т. д. ($\kappa 2$), розташованих відносно осі обертання O на радіусах r_1, r_2 і т. д. (m), які обертаються з загальною постійною кутовою швидкістю ω .

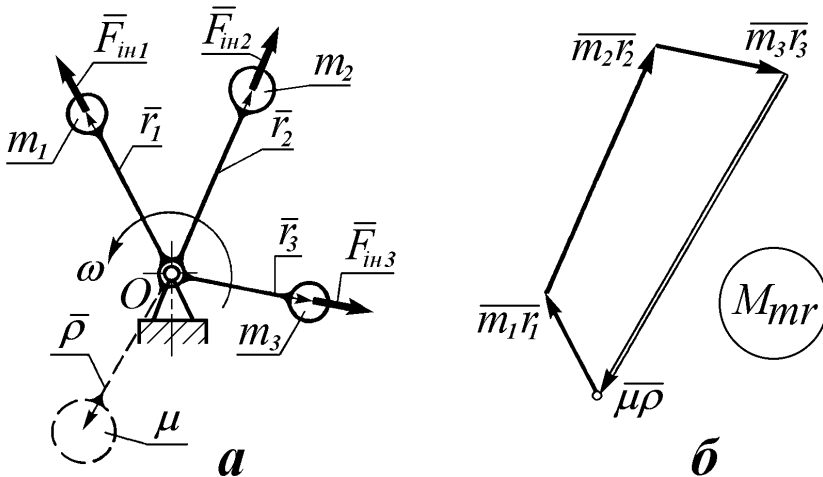


Рис. 5.1. Зрівноважування мас, які обертаються в одній площині

Кожна обертова маса має відцентрову силу інерції

$$\bar{F}_{in i} = \omega^2 m_i \bar{r}_i, \quad (5.1)$$

яка спрямована по своєму радіусу-вектору $\bar{r}_i$ і передається по повідку на загальний вал.

Система обертових в одній площині мас може вважатися зрівноваженою лише в тому випадку, якщо буде виконуватися умова - головний вектор усіх відцентрових сил інерції i -х мас дорівнює нулю:

$$\sum \bar{F}_{ini} = 0. \quad (5.2)$$

Очевидно, що скільки б обертових мас не було, зрівноважити їх можна усього лише одною противагою з невідомою масою μ і невідомим радіусом-вектором $\bar{\rho}$. Тоді рівняння (5.2) можна розписати у вигляді:

$$\omega^2 \cdot m_1 \cdot \bar{r}_1 + \omega^2 \cdot m_2 \cdot \bar{r}_2 + \dots + \omega^2 \cdot \mu \cdot \bar{\rho} = 0.$$

Тому що $\omega^2 \neq 0$, рівняння можна розділити на ω^2 , тоді одержимо рівняння статичних моментів мас

$$m_1 \cdot \bar{r}_1 + m_2 \cdot \bar{r}_2 + \dots + \mu \bar{\rho} = 0, \quad (5.3)$$

яке означає, що загальний центр усіх i -х мас і маси противаги лежить на осі обертання O .

Перепишемо рівняння (5.3) у вигляді:

$$\bar{m_1 r_1} + \bar{m_2 r_2} + \dots + \bar{\mu \rho} = 0,$$

де кожний доданок являє собою вектор (у мм), довжина якого пропорційна добуткові відповідної маси (у кг) і радіуса окружної траєкторії її центру (у м).

На рис. 5.1б подане графічне рішення векторного рівняння (5.3) в обраному масштабі

$$M_{mr} = \frac{m_1 \cdot r_1}{(\bar{m_1 r_1})} \left(\frac{\text{кгм}}{\text{мм}} \right). \quad (5.4)$$

Після побудови векторного багатокутника знайдемо

$$\mu \cdot \rho = (\bar{\mu \rho}) \cdot M_{mr} \quad (\text{кгм}). \quad (5.5)$$

Далі, знаючи добуток $\mu \rho$, можемо задатися або величиною маси противаги μ (кг), якщо важливе значення загальної маси ротора, або величиною радіуса ρ (м), якщо вирішальне значення мають розміри ротора.

Тоді друга невідома величина (ρ або μ) може бути легко знайдена по відомому добутку $\mu \rho$.

На закінчення відзначимо, що виконане зрівноважування є статичним.

3. Зрівноважування мас, що обертаються в різних площинах

На рис. 5.2а в двох проекціях показано декілька мас m_1, m_2 і т. д. (у κz), розташованих довільно в різних площинах на радіусах r_1, r_2 і т. д. (у m) і обертових із загальною постійною швидкістю ω .

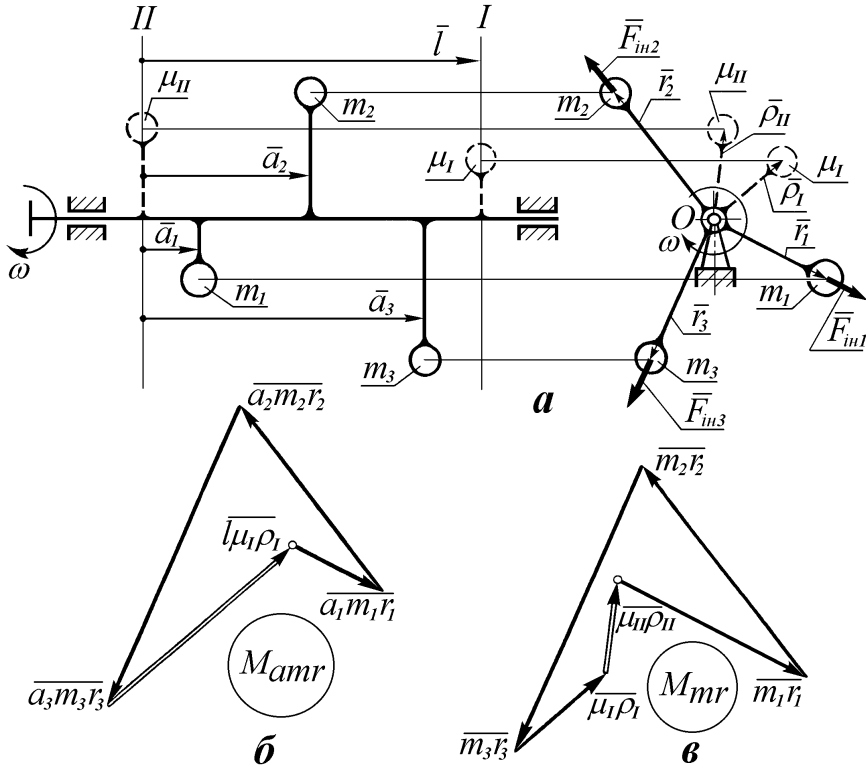


Рис. 5.2. Зрівноважування мас, які обертаються в різних площинах

У даному випадку відцентрові сили інерції обертових мас утворюють просторову систему сил.

З теоретичної механіки відомі умови рівноваги просторової системи сил у вигляді:

$$1) \sum \bar{F}_{ini} = 0; \quad (5.6)$$

$$2) \sum \bar{M}(F_{ini}) = 0. \quad (5.7)$$

Перше рівняння (5.6) означає, що головний вектор сил інерції дорівнює нулю. Друге рівняння (5.7) означає, що головний момент цих сил також дорівнює нулю.

Відзначимо, що якщо в результаті зрівноважування задовольняється тільки рівняння (5.6), то таке зрівноважування називається статичним (неповним). Якщо ж зрівноважування забезпечує задоволення обох рівнянь (5.6) і (5.7), то таке зрівноважування називається динамічним (повним).

Раніше, ніж почати вирішення рівнянь (5.6) і (5.7), варто визначити, скільки буде потрібно противаг для зрівноважування довільної множини мас.

Іноді пропонується число противаг, рівне числу зрівноважуваних мас.

Такий підхід до рішення задачі має право на використання. Так, наприклад, зрівноважуються деякі колінчасті вали.

Проте, не завжди є можливість установити велику кількість противаг по різних причинах конструктивного і технологічного характеру.

Покажемо, що будь-яке число просторово розташованих обертових мас можна зрівноважити всього лише двома противагами.

Для цього застосуємо так називаний уявний рознос мас.

Виберемо дві довільні площини I і II, перпендикулярні до осі обертання вала (рис. 5.2а).

Кожну з реальних мас m_1, m_2 і т. д. можна представити двома уявлюваними частинами m_i^I і m_i^{II} , що знаходяться на тих же радіусах r_1, r_2 і т. д. і рознесені в площини I і II.

Величина кожної з частин i -ї маси, зворотно пропорційна відстані від i -ї реальної маси до площини I і II, а сума цих частин дорівнює

$$m_i^I + m_i^{II} = m_i.$$

Тепер маємо рознесені уявлювані маси, еквівалентні реальним масам із поглядом впливу на загальний вал відцентрових сил інерції.

Справді, кожна відцентрова сила інерції i -тої реальної маси буде подана двома складовими, які задовольняють умові

$$\vec{F}_{ini}^I + \vec{F}_{ini}^{II} = \vec{F}_{ini}. \quad (5.8)$$

Відзначимо, що результуючий вектор $\vec{F}_{ini}$ рівняння (5.8) збігається із силою інерції i -ї маси не тільки по величині, але також по лінії дії і точці прикладення.

Далі можна забути про реальні маси і зайнятися зрівноважуванням еквівалентної системи мас, розташованих усього в двох обраних площинах I і II.

Фактично це означає, що треба двічі вирішити задачу попереднього параграфа: окремо в площині I і окремо в площині II.

Проте можна піти й іншим шляхом визначення невідомих параметрів двох противаг.

Нехай будемо шукати параметри противаг усе в тих же двох довільно обраних площинах I і II.

Перепишемо рівняння (5.6) з урахуванням (5.3) у вигляді нульової суми статичних моментів мас:

$$m_1 \underline{\underline{r}}_1 + m_2 \underline{\underline{r}}_2 + \dots + \mu_I \underline{\underline{\rho}}_I + \mu_{II} \underline{\underline{\rho}}_{II} = 0, \quad (5.9)$$

Відомо, що на відміну від $\sum \bar{F}_{ini}$ величина $\sum \bar{M}(F_{ini})$ залежить від вибору центру зведення. Проте, якщо $\sum \bar{M}(F_{ini}) = 0$, то положення центру зведення не має значення. Тому для зручності вибираємо центр зведення на осі обертання, наприклад, у площині I. Тоді рівняння (5.7) запишеться так:

$$\underline{\underline{a}} \times \omega^2 m_1 \underline{\underline{r}}_1 + \underline{\underline{a}}_2 \times \omega^2 \cdot m_2 \underline{\underline{r}}_2 + \dots + \underline{\underline{l}} \times \omega^2 \cdot \mu_I \cdot \underline{\underline{\rho}}_I = 0.$$

Тому що $\omega^2 \neq 0$, можна в останньому рівнянні скоротити ω^2 і переписати його у вигляді нульової суми відцентрових моментів мас відносно осі обертання:

$$\underline{\underline{a}} \times m_1 \underline{\underline{r}}_1 + \underline{\underline{a}}_2 \times m_2 \underline{\underline{r}}_2 + \dots + \underline{\underline{l}} \times \mu_I \underline{\underline{\rho}}_I = 0. \quad (5.10)$$

Проаналізуємо отримані рівняння (5.9) і (5.10).

Рівняння (5.9) означає, що загальний центр усіх зрівноважуваних i -х мас і мас противаг лежить на осі обертання. У векторному рівнянні (5.9) два останніх вектори невідомі ні по величині ні по напрямку, тому його не можна окремо вирішити.

Рівняння (5.10) означає, що вісь обертання вала є одночасно і головною віссю інерції зрівноважуваних i -х мас і мас двох противаг. Це векторне рівняння містить усього лише один невідомий вектор (останній) і його можна вирішити окремо. Розв'язавши рівняння (5.10), можна буде вирішити і рівняння (5.9), у котрому після рішення рівняння (5.10) також залишиться лише один невідомий вектор.

Займемося рішенням векторного рівняння (5.10).

По-перше, відзначимо, що кожний окремих член цього рівняння являє собою деякий вектор (назвемо його підсумковим), рівний векторному добутку двох інших векторів ($\underline{\underline{a}}_i$ і $\underline{\underline{r}}_i$, а також $\underline{\underline{l}}$ і $\underline{\underline{\rho}}_I$) із скалярним співмножником (m_i або μ_I).

Відомо, що векторний добуток двох векторів є вектор, який перпендикулярний до кожного з двох векторів, що перемножуються, і спрямований у бік, із кінця якого спостерігається поворот першого вектора

до другого на кут, менший 180^0 , проти годинникової стрілки (правило правого гвинта).

Модуль підсумкового вектора векторного добутку дорівнює добутку модулів векторів, що перемножуються, і синуса кута між ними.

У нашому випадку перемножуються взаємно перпендикулярні вектори, тому синус кута між ними дорівнює одиниці, що спрощує рішення рівняння.

Якщо всі підсумкові вектори рівняння (5.10) повернути в один і той самий бік на 90^0 до збігу їхніх напрямків із напрямком відповідних радіусів-векторів $\vec{r}_i$, тоді одержимо нове рівняння, еквівалентне рівнянню (5.10):

$$a_1 m_1 \cdot \vec{r}_1 + a_2 m_2 \cdot \vec{r}_2 + \dots + l \mu_1 \vec{\rho}_1 = 0. \quad (5.11)$$

Зауважимо, що в процесі рішення рівняння (5.11) відразу ж буде знайдений дійсний напрямок радіуса-вектора $\vec{\rho}_1$ розташування центру маси шуканої першої протизваги.

На рис. 5.26 подане графічне рішення векторного рівняння (5.11) в обраному масштабі

$$M_{amr} = \frac{a_1 m_1 r_1}{(a_1 m_1 r_1)} \text{ (кгм}^2\text{/мм)}.$$

У результаті рішення векторного рівняння (5.11) знайдемо довжину вектора $(l \mu_1 \rho_1)$ (мм). Після множення довжини знайденого вектора на масштаб знайдемо потрібний добуток

$$l \mu_1 \rho_1 = (\overline{l \mu_1 \rho_1}) \cdot M_{amr} \text{ (кгм}^2\text{)}. \quad (5.12)$$

Співмножник l (м) добутку (5.12) відомий.

Залишається, як це було показано в попередньому параграфі, задатися або величиною маси протизваги μ_1 (кг), або величиною радіуса ρ_1 (м), а третій невідомий співмножник знайти по уже відомому добутку $l \mu_1 \rho_1$.

Далі приступаємо до рішення векторного рівняння (5.9), у якому тепер залишився невідомим тільки останній вектор.

На рис. 5.26 подане графічне рішення векторного рівняння (5.9) в обраному масштабі M_{mr} (кгм/мм).

У результаті рішення знайдено вектор $(\overline{\mu_{II} \rho_{II}})$ (мм).

Після множення довжини знайденого вектора на масштаб знайдемо добуток

$$\mu_{II} \rho_{II} = (\overline{\mu_{II} \rho_{II}}) \cdot M_{mr} \text{ (кгм)}. \quad (5.13)$$

Далі задаємося або величиною маси другої протизаги μ_{II} (кг), або величиною радіуса ρ_{II} (м), а по відомому добутку (5.13) знаходимо другий співмножник.

На закінчення відзначимо, що установка розрахованих відповідно до рівнянь (5.9) і (5.10) двох протизаг забезпечує виконання умови: вісь обертання вала збігається з головною центральною віссю інерції i -х мас і мас протизаг. Таке зрівноважування, як уже було сказано вище, є динамічним.

4. Контрольні запитання

1. Які наслідки викликає незрівноваженість мас ланок механізмів машин?
2. Яка мета зрівноважування мас ланок?
3. У чому полягає відмінність між зрівноважуванням мас і балансуванням деталей і вузлів?
4. Яка умова зрівноваженості мас, що обертаються з загальною кутовою швидкістю в одній площині?
5. Скільки протизаг буде потрібно для зрівноважування мас, що обертаються в одній площині?
6. Скільки протизаг буде потрібно для зрівноважування множини мас, які обертаються навколо загальної осі в різних площинах?
7. Як визначаються маси протизаг і їхнє розташування при зрівноважуванні обертювих мас?
8. У чому полягає умова статичної зрівноваженості обертювих мас?
9. У чому полягає умова динамічної зрівноваженості обертювих мас?
10. Чому головна центральна вісь інерції обертювих мас повинна збігатися з віссю їхнього обертання?

Лекція 35

Тема: Балансування обертових деталей і вузлів

Зміст: 1. Мета балансування.

2. Статичне балансування.

3. Динамічне балансування за методом трьох спроб.

4. Динамічне балансування методом стробоскопії

5. Контрольні запитання.

1. Мета балансування

У переважній більшості випадків обертовим деталям і вузлам заздалегідь надають таку форму, при котрій відповідно до креслення вони повинні бути цілком зрівноваженими.

Проте, на практиці виявляється деяка незрівноваженість, обумовлена неточностями виготовлення, неточностями монтажу, неоднорідністю матеріалу, наявністю раковин і т. ін.

Так, наприклад, ротори електродвигунів, крильчатки насосів, маховики, шків, зубчасті колеса, колеса автомобіля і багато інших обертових деталей і вузлів по кресленню цілком зрівноважені, але в процесі їхнього обертання виникають вібрації, обумовлені залишковою незрівноваженістю, яку можна виявити й усунути тільки дослідним шляхом.

Те ж саме можна сказати й у відношенні деталей і вузлів, що піддавалися зрівноважуванню по кресленнях і на які були встановлені розраховані противаги.

Ці деталі і вузли також, як правило, мають залишкову незрівноваженість, обумовлену тими ж перерахованими вище причинами.

Які ж деталі і вузли варто піддавати балансуванню, а які - ні?

Існує ціла окрема наука - віброзахист машин, що охоплює також і питання балансування обертових деталей і вузлів. Вона і покликана відповісти на поставлене запитання.

Так, з інженерної практики відомо, що відповідальні масивні обертові деталі і вузли швидкохідних машин піддаються балансуванню всі без винятку.

Невідповідальні масивні деталі і вузли середньошвидкісних машин піддаються балансуванню вибірково. Приводом для їхнього балансування служать виявлені в процесі експлуатації машини неприпустимі вібрації.

У якості типового прикладу можна навести приклад часто виникаючого питання про необхідність балансування автомобільних коліс.

Відомо, що на вантажних автомобілях балансування коліс практично ніколи не здійснюють.

На легкових же автомобілях задні колеса балансують рідко, а передні - як правило, балансують.

Коротко на поставлене питання можна дати таку відповідь: балансуванню варто піддавати обертової деталі і вузли швидкісних машин і інших устроїв у тих випадках, коли частоти власних коливань машини або окремих її агрегатів знаходяться усередині діапазону робочих частот обертання валів.

Дослідним шляхом для таких деталей і вузлів установлюють граничні допустимі значення залишкової незрівноваженості або дисбалансу (дебалансу).

За аналогією з прикладом, розглянутим у п. 5.1.2, прийнято розрізняти *статичне балансування*, коли для елементарних мас обертового збалансованого тіла справедливо тільки рівняння (5.6), і *динамічне балансування* - коли справедливі обидва рівняння (5.6) і (5.7).

Розглянемо види балансування і деякі поширені способи їх здійснення.

2. Статичне балансування

Статичному балансуванню піддаються обертові деталі і вузли типу "диск", у яких відношення $d/l \ll 1$ (див. рис. 5.3).

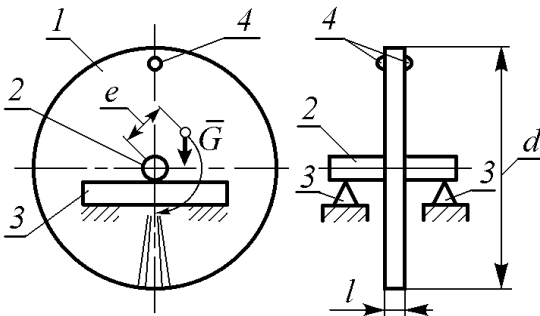


Рис. 5.3. Статичне балансування диска на призматичних горизонтальних опорах

Ознакою наявності статичного дисбалансу є відхилення центру мас деталі від осі обертання на деяку величину e (см). Кількісною характеристикою статичного дисбалансу деталі є статичний момент маси тіла відносно осі обертання, тобто добуток маси деталі m (e) і відстані e :

$$D_{cm} = me \text{ (гсм)}. \quad (5.14)$$

Іншими словами, статичний дисбаланс спостерігається тоді, коли вісь обертання деталі не є центральною.

Допустима величина статичного дисбалансу для різних деталей буває різною, так, наприклад, для коліс легкових автомобілів установлений межа

$$[D_{cm}] = 500 \text{ гсм}.$$

Обчислимо відстань e , яка буде при такому значенні статичного дисбалансу в колеса легкового автомобіля з масою

$$m = 20_{\text{кг}} = 20000 \text{ г.}$$

$$e = \frac{D_{\text{см}}}{m} = \frac{500}{20000} = 0,025 \text{ см} = 0,25 \text{ мм.}$$

Як бачимо, відхилення центру мас колеса від осі його обертання допускається зовсім незначне. Воно сумірне з похибкою центровки колеса при неправильному затягуванні гайок (болтів) кріплення колеса до ступиці.

Для статичного балансування оберткових деталей і вузлів застосовуються дуже прості пристосування.

Наприклад, деталь 1 насаджується нерухомо на загартовану оправку 2, а потім оправка встановлюється на старанно виставлених горизонтально також загартованих до високої твердості призматичних ножових опорах 3 (див. рис. 5.3).

Введемо поняття стійкої (рис. 5.4*а*), хиткої (рис. 5.4*б*) і байдужої (рис. 5.4*в*) рівноваги.

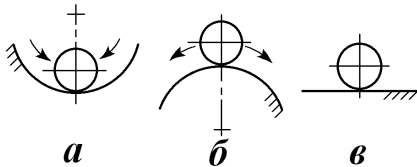


Рис. 5.4. Види рівноваги тіл

За аналогією з рис. 5.4 деталь з оправкою також може мати стійку, хитку і байдужу рівновагу.

Якщо статичний дисбаланс відсутній, то деталь займає на опорах байдуже положення.

Коли ж статичний дисбаланс деталі є, то можна виявити два положення - хиткої (коли центр мас знаходиться на центровій лінії вгорі) і стійкої (коли центр мас знаходиться на центровій лінії внизу) рівноваги.

Якщо таку деталь вивести зі стану рівноваги легким поштовхом, то після деякого погойдування деталь зупиняється практично в тому самому положенні, що відповідає стійкій рівновазі. У цьому випадку говорять, що деталь зайняла положення з “важкою точкою” внизу.

Після декількох дослідів визначають усереднене положення “важкої точки”, прокреслюючи щораз на зупиненій деталі вертикальну лінію.

Потім дослідним шляхом підбирають пластилінову протизагу 4 із такою масою, щоб після її закріплення на деталі з протилежного від “важкої точки” боку вона стала займати на ножових опорах байдуже положення.

Після цього зважують пластиліновий протизагу 4 і на тому ж місці приварюють металеву протизагу. Часто замість закріплення постійної протизаги 4 із протилежного боку (у місці розташування “важкої точки”) на тому ж радіусі висвердлюють “зайвий” матеріал із такою ж масою.

При невеличкій відносно діаметра d товщині диска l протизагу закріплюють з одного боку, якщо ж розмір l наближається до розміру d , то тоді краще протизагу розділити на дві частини і закріпити їх одну проти

одної на протилежних торцях балансованого диска, як це показано на рис. 5.3.

Остання рекомендація цілком може бути віднесена до статичного балансування автомобільних коліс.

Іноді замість ножових опор використовують дискові опори (рис. 5.5).

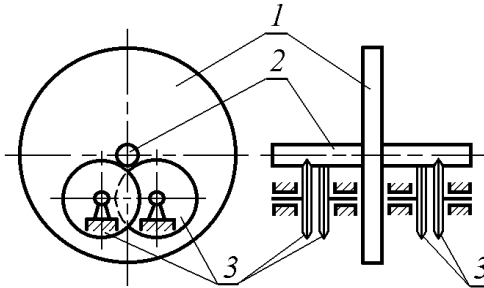


Рис. 5.5. Статичне балансування на дискових опорах

Такий балансирувальний верстат не потребує високої точності горизонтального розташування його станини: він дуже просто, як звичайне устаткування, доволіно встановлюється на горизонтальній підлозі.

Підшипники кочення чотирьох дисків 3 регулюються на мінімальний момент тертя.

Це досягається за рахунок різних конструктивних і експлуатаційних прийомів (зазор у підшипниках зводиться до нуля, мастило подається в малих кількостях і має мінімальну в'язкість і т. п.).

Остання конструкція відрізняється від попередньої більш стабільними показниками і більш зручна в роботі, але вона, очевидно, має більш високу вартість.

Слід зазначити, що чисто статичне балансування проводиться порівняно рідко, тому устаткування для статичного балансування деталей має мале поширення.

Майбутнім інженерам можна порекомендувати простий і випробуваний спосіб статичного балансування деталей і вузлів на власних підшипниках, попередньо промитих і відрегульованих на “нульовий зазор”.

Звичайно, необхідно подбати про те, щоб вісь колеса була виставлена перед статичним балансуванням горизонтально. Також варто звільнити балансоване колесо від зв'язків з іншими деталями.

Автор неодноразово балансував у такий спосіб автомобільні колеса різних типів і завжди результат був задовільним.

3. Динамічне балансування за методом трьох спроб

Динамічному балансуванню піддаються деталі і вузли типу ротор, у яких відношення $d/l \approx 1$ і більше.

Ознакою наявності динамічного дисбалансу є розбіжність осі обертання деталі або вузла з однією з його головних осей інерції. При цьому деталь, будучи встановленою на підшипниках, може займати байдужне положення.

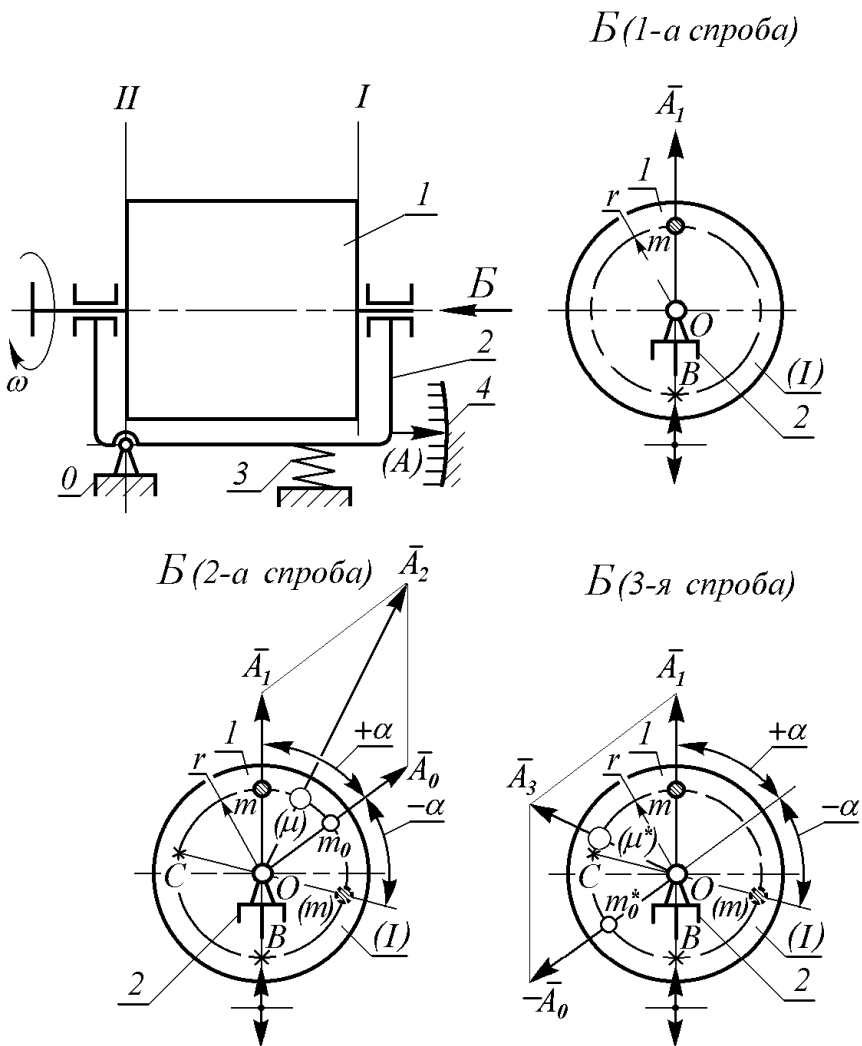


Рис. 5.6. Динамічне балансування ротора
на верстаті системи Шітікова

Частіше усього спостерігається динамічний дисбаланс у сукупності зі статичним, тоді з віссю обертання деталі або вузла не збігається головна центральна вісь інерції.

Динамічно збалансувати деталь - значить за рахунок балансирувочних противаг повернути її головну центральну вісь інерції до суміщення з віссю обертання.

Такий поворот можна здійснити за рахунок установки двох підібраних противаг у двох довільно обраних площинах. Тут також просліджується аналогія з установкою двох противаг для зрівноважування мас, що обертаються в різних площинах навколо загальної осі (див. п. 5.1.2).

Зі сказаного вище однозначно слідує, що динамічний дисбаланс можна виявити тільки обертаючи деталь із швидкістю, при якій будуть виникати поперечні коливання вала (корпусу корінних підшипників, рами і т. п.).

Самими підходящими для виявлення, а потім і усунення динамічного дисбалансу є резонансні коливання, хоча і необов'язково.

Існує множина конструкцій верстатів для динамічного балансування обертових деталей і вузлів. Сучасні верстати в сполученні з мікроелектронікою дозволяють після серії дослідів одержати на табло вказівки, куди і які балансирувочні противаги варто прикріпити.

У основі роботи багатьох із цих верстатів часто лежить так званий *метод трьох спроб*. Розглянемо цей метод у застосуванні до конструкції балансирувочного верстата системи Шітікова Б. В., при роботі якого здійснюються резонансні коливання обертового ротора, встановленого в підшипниках спеціальної підресореної колиски.

На рис. 5.6 показана схема балансирувочного верстата системи Шітікова.

Колиска 2 постачена ресорою 3. Коливання колиски 2 можуть бути записані реєструючим устроєм 4 (самописець, осцилограф, мікропроцесорний устрій).

Ротор 1 розташовується в підшипниках колиски 2 так, щоб вісь хитання колиски 0 співпала б з однією з площин I або II ротора, в яких слід у процесі балансування визначити і встановити балансирувочні противаги. Іншими словами, задача зводиться до визначення статичних моментів відносно осі обертання двох уявних незрівноважених мас, зведених до двох довільно обраних площин.

Звичайно це торці ротора, а іноді роль площини I і II приділяється спеціальним допоміжним дискам, передбаченим у конструкції верстата. У цьому випадку перерахунок мас противаг, підібраних у площинах допоміжних дисків, у маси противаг, які слід встановити для зберігання результату динамічного балансування на торцях ротора, слід здійснювати на основі дотримання умови рівності відцентрових моментів інерції мас противаг відносно центру мас ротора, що є умовою зберігання нового

положення його головної центральної осі інерції (співпадаючої з віссю обертання).

Колиска верстата з ротором являє собою коливальну систему з одним ступенем свободи, що має деяку власну кругову частоту коливань $\omega_{вл}$.

Очевидно, що будь-яка протизага (наявна або відсутня) у площині II, як це показано на рис. 5.5, на коливання ротора впливати не буде.

Амплітуда резонансних коливань колиски, як відомо з теорії коливань, у цьому випадку буде пропорційна величині виникаючої відцентрової сили інерції незрівноваженої маси $m_I = m$, зведеної до площини I:

$$A = K \cdot m \cdot r \omega_{вл}^2,$$

де K - коефіцієнт пропорційності (постійна верстата в зборі з даним ротором),

r - довільно обраний радіус положення зведеної незрівноваженої маси m .

Тому що $\omega_{вл} = const$, а r також можна прийняти для простоти розрахунків незмінним, тоді можна записати

$$A = k \cdot m,$$

де $k = K \cdot r \omega_c^2$.

Тому на другій проекції ротора зображена його площа I (вид B), у котрій спочатку і слід виявити величину і розташування зведеної незрівноваженої маси m , що здійснює вплив на коливання ротора в даному його положенні.

Коротко опишемо процес балансування і математичний бік визначення величини і місця розташування незрівноваженої маси m .

Проводиться *перша спроба*.

Ротор розганяється до кутової швидкості ω , що перевищує дещо величину $\omega_{вл}$, при якій спостерігаються резонансні коливання ротора 1 із колискою 2.

У процесі вибігу ротора реєструється амплітуда резонансних коливань колиски A_I .

При цьому можна записати

$$A_I = k \cdot m. \quad (5.16)$$

Далі здійснюється *друга спроба* (рис. 5.6, Б (2-а спроба)).

У довільному місці площини I на торці ротора (або на спеціальному допоміжному диску верстата в площині I) на обраному радіусі r під деяким, заздалегідь невідомим гострим кутом $\pm \alpha$ відносно невідомої по величині і

місцю розташування незрівноваженої маси m , закріплюється відома додаткова противага з масою m_0 .

Ротор розганяється до закритичної кутової швидкості, спостерігається його вибіг і реєструється амплітуда резонансних коливань колиски A_2 .

При цьому можна записати

$$A_2 = k\mu, \quad (5.17)$$

де μ - деяка умовна розрахункова незрівноважена маса, що враховує величину і взаємне розташування мас m і m_0 .

На рис. 5.6, Б (2-а спроба) побудови виконані при додатному значенні кута α .

Пояснимо докладніше, що таке умовна маса μ . Тому що коливання другої спроби визначаються відцентровими силами інерції (мас m і m_0) $\overline{F}_{in}$ і $\overline{F}_{in0}$, які векторно складаються за правилом паралелограма, то очевидно, що результуюча відцентрова сила інерції $\overline{F}_{in2} = \mu \cdot \omega_{\text{вл}}^2 r$ при незмінному доцентровому прискоренні $W^n = \omega_{\text{вл}}^2 r$ центрів мас m і m_0 буде відповідати умовній масі μ , яку можна розрахувати по формулі

$$\mu = \sqrt{m^2 + m_0^2 + 2m \cdot m_0 \cdot \cos \alpha}. \quad (5.18)$$

Для *третьої спроби* (рис. 5.6, Б (3-я спроба)) додаткова противага m_0 у площині I на тому ж радіусі r переставляється на 180° (або повертається на 180° допоміжний диск у площині I). Це положення додаткової противаги позначене як $m_0^* = m_0$. Тут також побудови виконані для додатного знака кута α .

Ротор знову розганяється, реєструється амплітуда резонансних коливань колиски A_3 , яка буде дорівнювати

$$A_3 = k \cdot \mu^*, \quad (5.19)$$

де за аналогією з міркуваннями, виконаними для другої спроби,

$$\mu^* = \sqrt{m^2 + m_0^2 - 2m \cdot m_0 \cdot \cos \alpha}. \quad (5.20)$$

Знак “мінус” у формулі (5.20) з'явився від того, що як відомо з тригонометрії

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha.$$

У результаті *трьох виконаних спроб* маємо три рівняння (5.16), (5.17) і (5.19) із трьома невідомими μ , k і α .

Як бачимо, інформації, із погляду математики, цілком достатньо для обчислення перерахованих вище невідомих.

Покажемо, як це можна зробити.

Перепишемо систему трьох рівнянь (5.16), (5.17) і (5.19), з урахуванням (5.18) і (5.20), у вигляді:

$$A_1 = km; \quad (5.21)$$

$$A_2 = k\sqrt{m^2 + m_0^2 + 2m \cdot m_0 \cdot \cos \alpha}; \quad (5.22)$$

$$A_3 = k\sqrt{m^2 + m_0^2 - 2m \cdot m_0 \cdot \cos \alpha}. \quad (5.23)$$

Розділимо (5.22) на (5.21), а потім (5.23) на (5.21).

У результаті одержимо два рівняння з двома невідомими m і α :

$$\lambda_2 = \frac{A_2}{A_1} = \sqrt{1 + (m_0 / m)^2 + 2(m_0 / m) \cdot \cos \alpha}, \quad (5.24)$$

$$\lambda_3 = \frac{A_3}{A_1} = \sqrt{1 + (m_0 / m)^2 - 2(m_0 / m) \cdot \cos \alpha}, \quad (5.25)$$

де λ_2 і λ_3 - відомі безрозмірні величини відношень відповідних амплітуд, вимірюваних у результаті трьох спроб.

Для спрощення подальших перетворень позначимо відношення $(m_0/m)=p$ і зведемо рівняння (5.24) і (5.25) у квадрат. У результаті одержимо:

$$\lambda_2^2 = 1 + p^2 + 2p \cdot \cos \alpha, \quad (5.26)$$

$$\lambda_3^2 = 1 + p^2 - 2p \cdot \cos \alpha. \quad (5.27)$$

Далі складемо рівняння (5.26) і (5.27), після чого знайдемо

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 2 + 2p^2. \quad (5.28)$$

Звідси виразимо

$$p = \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2}{2}}. \quad (5.29)$$

Тому що $p=m_0/m$, знайдемо

$$m = m_0 / \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2}{2}}. \quad (5.30)$$

Для відшукування величини кута α віднімемо з рівняння (5.26) рівняння (5.27), у результаті чого одержимо

$$\lambda_2^2 - \lambda_3^2 = 4p \cdot \cos \alpha. \quad (5.31)$$

Звідси

$$\cos \alpha = (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) / \left(4 \cdot \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2}{2}} \right). \quad (5.32)$$

Тому що косинус - функція парна, будемо мати два значення кута α :

$$\alpha = \pm \arccos \left((\lambda_2^2 - \lambda_3^2) / \left(4 \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2}{2}} \right) \right). \quad (5.33)$$

Корисно також обчислити значення коефіцієнта k

$$k = A_I / m. \quad (5.34)$$

При балансуванні інших таких же роторів, завдяки знанню величини k , можна буде після першої ж спроби визначити величину їхньої незрівноваженої маси m .

Це дає можливість більш вдало вибрати величину додаткової противаги m_0 , яку найкраще взяти рівною по величині незрівноваженій масі m .

Очевидно, що буде потрібна четверта (а може й п'ята) контрольна спроба для того, щоб пересвідчитися, яке ж із значень α істинне: додатне чи від'ємне?

Іншими словами: з якого боку від додаткової противаги m_0 знаходиться незрівноважена маса m - зліва чи справа?

Якщо незрівноважена маса m знаходиться зліва від положення додаткової противаги m_0 у другій спробі, тоді балансировочну противагу із масою m треба встановити в точці B (див. рис. 5.6).

Якщо ж - справа, то студент уже сам може легко знайти місце установки балансировочної противаги: очевидно, що це буде деяка точка C , симетрично розташована з точкою B під кутами $\pm \alpha$ відносно положення додаткової противаги m_0^* (у третій спробі).

Яке ж положення балансировочної противаги правильне?

Звісно те, при якому коливання ротора відсутні або дуже помітно зменшилися в порівнянні з коливаннями, що спостерігались при першій спробі.

На підставі вищевикладеного можна запропонувати дуже простий і наочний графічний метод рішення цієї ж задачі по визначенню величини незрівноваженої маси m , кута α і коефіцієнта k .

Після виконання трьох спроб, у результаті яких були знайдені амплітуди A_1 , A_2 і A_3 , на кресленні в довільному напрямку й у довільному масштабі слід відкласти вектор амплітуди $\bar{A}_1$ (рис. 5.7).

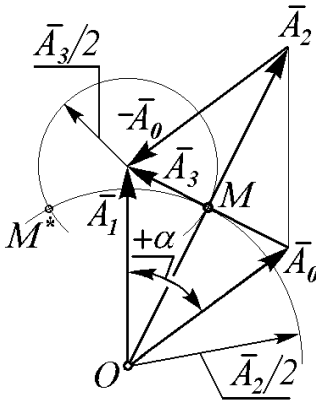


Рис. 5.7. Графічне рішення задачі динамічного балансування ротора

вектор $\bar{A}_0$, а вектор $-\bar{A}_0$ проведений із кінця вектора $\bar{A}_2$ в початок вектора $\bar{A}_3$.

Після виконання описаних побудов виявляємо, що як і повинно бути вектор $\bar{A}_2$ дорівнює сумі векторів $\bar{A}_1$ і $\bar{A}_0$, а вектор $\bar{A}_3$ дорівнює сумі векторів $\bar{A}_1$ і $-\bar{A}_0$.

Оскільки знайдена величина вектора амплітуди $\bar{A}_0$ пропорційна відомій масі додаткової протизваги m_0 , тепер можна розрахувати і незрівноважену масу m і коефіцієнт k :

$$m = m_0 \cdot (A_1 / A_0), \quad k = A_1 / m.$$

З його початку (т. O) як із центру треба зробити дугову засічку розчином циркуля, рівним половині довжини вектора амплітуди $\bar{A}_2/2$. Потім розчином циркуля, рівним половині вектора амплітуди $\bar{A}_3/2$, із кінця вектора $\bar{A}_1$ треба виконати другу дугову засічку. У результаті буде знайдено дві точки перетинання дугових засічок - точки M і M^* .

Подальші побудови на рис. 5.7 виконані з використанням точки M .

З точки O через точку M проведений повний вектор $\bar{A}_2$, а повний вектор $\bar{A}_3$ через ту ж точку M проведений у напрямку кінця вектора $\bar{A}_1$. Потім із точки O в початок вектори $\bar{A}_3$ проведений

Величина кута α уже знайдена по побудові, як величина кута між векторами $\overline{A}_1$ і $\overline{A}_0$.

Зауважимо, що при використанні точки M^* був би побудований векторний паралелограм, дзеркально симетричний побудованому на рис. 5.7. У цьому випадку було б знайдено від'ємне значення кута α . Таким чином робимо висновок, що обидві побудови були б рівнозначні, тому що знак при куті α умовний.

Тепер можна сказати, що півсправи зроблено.

Для відшукування величини і місця розташування балансирувочної противаги в площині II ротор 1 розвертають із підшипниками коліски 2 на 180° (тобто замінюють площини I і II місцями) і виконують другу половину роботи з динамічного балансування ротора.

Балансирувочні противаги, знайдені в процесі динамічного балансування і закріплені на роторі в знайдених місцях, повертають його головну центральну вісь інерції до суміщення її з віссю обертання, тобто усувають одночасно і динамічний і статичний дисбаланс.

Кількісно динамічний дисбаланс можна правильно оцінювати величиною залишкового відцентрового моменту інерції (від незрівноважених мас) відносно центра мас деталі в $гсм^2$, проте на практиці іноді динамічний дисбаланс, як і статичний, прийнято умовно характеризувати в $гсм$. При відомій відстані l між площинами зведення I і II це дає деяке усереднене уявлення про величину динамічного дисбалансу ротора.

Цим і пояснюється, що, наприклад, для коліс легкових автомобілів часто обмовляється допустимий не тільки статичний, але і сумарний дисбаланс $[D]=500 гсм$.

На закінчення слід зазначити, що балансування відповідальних роторів виконується дуже ретельно.

І хоча розглянутий метод носить найменування методу трьох спроб, тому що теоретично його можна здійснити за допомогою як мінімум трьох спроб, таких спроб приходить виконувати десятки, адже значення амплітуд резонансних коливань, що реєструються, залежать також і від початкових умов кожної спроби, тобто практично - від фази проходження резонансної зони.

Розкид амплітуд при тому самому стані ротора змушує проводити серію вибігів ротора однієї і тієї ж спроби, після чого амплітуда коливань даної спроби усереднюється.

Такий підхід дозволяє зменшити похибку визначення величини і місця розташування балансирувочної противаги.

Крім того результат динамічного балансування ротора після одного повного циклу "трьох спроб" може виявитися недостатнім унаслідок похибок

вимірів. Тоді варто здійснювати додаткову серію “трьох спроб”, яка дозволяє поліпшити результат балансування.

Іноді, при високих вимогах до точності динамічного балансування ротора, потрібно виконувати декілька серій “трьох спроб” за принципом послідовних наближень до наміченої мети.

4. Динамічне балансування методом стробоскопії

Покажемо застосування методу стробоскопії на прикладі балансування керованих коліс легкового автомобіля з незалежною підвіскою.

Автомобільне колесо кріпиться на ступиці за допомогою болтів або шпильок із гайками. Центровка голівки болтів або гайок звичайно здійснюється по конічних поясах.

У процесі експлуатації автомобіля центрувальні пояски розбиваються і, якщо в неправильній послідовності або під радіальним навантаженням здійснити затягування болтів або гайок кріплення колеса, то центровка колеса буде порушена.

При цьому виникне статичний дисбаланс, сумірний із допустимим $[D_{cm}] = 500 \text{ гсм}$, навіть якщо перед цим колесо, зняте з автомобіля, було старанно збалансоване на стенді.

Метод стробоскопії дозволяє з малими витратами часу зробити балансування колеса без зняття з автомобіля, чим він вигідно відрізняється від стендового балансування по методу трьох спроб.

Незалежна двоважільна підвіска автомобіля так улаштована, що на вертикальні коливання колеса на підвісці впливає практично тільки статичний дисбаланс колеса.

Коливання ж колеса навколо поворотної осі в горизонтальній (або близькій до неї) площині залежать як від статичного дисбалансу, так і від динамічного дисбалансу колеса.

Тому балансування методом стробоскопії здійснюється в два прийоми: спочатку усувається статичний дисбаланс колеса, а потім - динамічний.

На рис. 5.8 показана схема усунення дисбалансу колеса методом стробоскопії.

Стробоскопічне балансування колеса здійснюється в такій послідовності.

Автомобіль виважується за допомогою домкрата.

Під колесо 1, що балансується, підкочується візок із приводним роликком 2.

На стояку 3 осі колеса закріплюється за допомогою магнітної голівки акселерометричний датчик 4, за допомогою якого прилад 5 реєструє амплітуду вертикальних коливань колеса. Прилад 5 оснащений також

імпульсною стробоскопічною лампою 6, що спрямовується на колесо 1, яке балансується.

Колесо 1 розганяється вперед приводним роликом 2 до кутової швидкості

$$\omega > \omega_{кр}^{верт},$$

де $\omega_{кр}^{верт}$ - кругова частота резонансних вертикальних коливань колеса на підвісці.

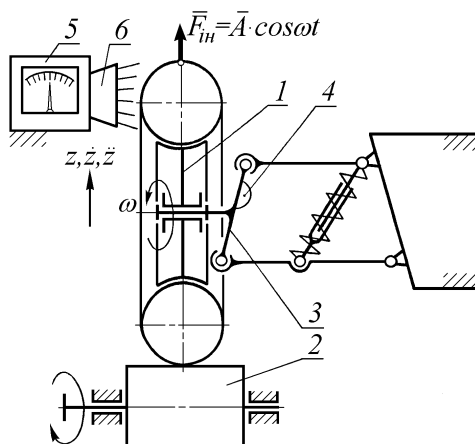


Рис. 5.8. Стробоскопічне балансування автомобільного колеса

датчика під час переходу з “мінуса” на “плюс”).

При цьому в момент спостереження резонансних коливань “важка точка” колеса знаходиться в нижній частині колеса, яку можна побачити візуально на нерухомому стробоскопічному зображенні колеса (принцип роботи стробоскопа можна знайти в підручниках фізики).

При коливаннях колеса в зарезонансній зоні його стробоскопічне зображення спостерігається повільно обертовим уперед із уявною кутовою швидкістю $(\omega - \omega_{кр}^{верт})$, а при коливаннях у дорезонансній зоні - стробоскопічне зображення здається повільно обертовим назад з кутовою швидкістю $(\omega_{кр}^{верт} - \omega)$.

Момент резонансу коливань фіксується по короткочасному припиненню обертання стробоскопічного зображення колеса.

При резонансі спостерігається амплітуда коливань, близька до максимальної. Її можна зафіксувати за показаннями приладу 5.

Потім спостерігається вибіг колеса, у процесі якого реєструється амплітуда його коливань по координаті z .

Дуже короткі спалахи імпульсної лампи синхронізовані з вертикальними коливаннями колеса.

Момент спалаху імпульсної стробоскопічної лампи 6 при реєстрації вертикальних коливань відповідає середньому по висоті положенню колеса під час руху вниз - при зміні знака прискорення $\ddot{z}$ (при обнуленні показань акселерометричного

Незрівноважена маса колеса пропорційна зафіксованій амплітуді резонансних коливань. Коефіцієнт пропорційності між показаннями приладу і величиною незрівноваженої маси встановлюється дослідним шляхом. Він звичайно відомий оператору з попередніх дослідів.

Таким чином, буквально в один прийом, знаходиться і величина незрівноваженої маси статичного дисбалансу колеса і її розташування на колесі. Залишається з діаметрально протилежного боку колеса, тобто вгорі, закріпити балансирувочну противагу (а краще: дві половинні противаги - з переднього й зворотного боків колеса).

Покажемо, чому “важка точка” колеса в зазначений момент обнулення прискорення $\ddot{z}$ при резонансних коливаннях знаходиться внизу.

З теорії коливань відомо лінійне диференціальне рівняння руху для коливальної системи з одним ступенем свободи:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + k^2 z = a \cdot \cos \omega t, \quad (5.35)$$

де n - розмірний коефіцієнт опору (демпфірування) коливальної системи,

k - розмірний коефіцієнт жорсткості коливальної системи,

a - розмірний коефіцієнт амплітудного значення збурюючої дії, (пропорційний величині відцентрової сили інерції незрівноваженої маси і чисельно рівний доцентровому прискоренню незрівноваженої маси $a = F_{in} / m_{незр.}$).

Частинне рішення цього рівняння показує вимушені коливання з гармонічно змінюваним відхиленням z від рівноважного стану

$$z = \frac{a}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \cdot \sin(\omega t - \varepsilon), \quad (5.36)$$

$$\varepsilon = \arctg \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}, \quad (5.37)$$

де ε - кут відставання фази переміщення z від фази впливу збурюючої відцентрової сили інерції незрівноваженої маси колеса.

При резонансі

$$k = \omega = \omega_{кр}^{верт}$$

і тоді
$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

З наведеного рішення диференціального рівняння вертикальних коливань слідує, що колесо при русі вниз буде мати прискорення $\ddot{z} = 0$ саме в момент проходження середнього рівноважного стану (при $z=0$), тому що в

цей самий час “важка точка” незрівноваженої маси піде на кут $\pi/2$ вперед і виявиться внизу колеса.

Коли колесо досягне самого нижнього положення, “важка точка” виявиться позаду колеса на рівні його осі.

Коли колесо досягне самого верхнього положення, “важка точка” виявиться попереду колеса на рівні його осі і т. д.

Завершивши статичне балансування колеса і переконавшись у відсутності вертикальних коливань колеса, можна приступити до усунення динамічного дисбалансу, який ще залишився.

Другий етап роботи багато в чому схожий на перший.

Спочатку повертають магнітну голівку датчика 4 на 90^0 для реєстрації коливань у горизонтальній площині.

Потім розганяють колесо вперед до швидкості $\omega > \omega_{kp}^{cop}$, після чого спостерігають вибіг колеса.

Стробоскопічне зображення колеса спочатку буде повільно обертатися вперед зі швидкістю $(\omega - \omega_{kp}^{cop})$, яка все зменшується, і в момент резонансу на мить зупиниться.

Візуально фіксують положення колеса на його нерухомому стробоскопічному зображенні і знімають показання амплітуди резонансних коливань із приладу 5.

По зафіксованій амплітуді коливань беруть пропорційні їй дві протизаваги, і після зупинення колеса в положенні його, яке відповідає стробоскопічному зображенню, закріплюють ці протизаваги вгорі на передньому боці і знизу на тильному боці колеса.

Таке розташування балансирувальних протизав пояснюється тим, що при реєстрації коливань колеса в горизонтальній площині момент спалаху імпульсної стробоскопічної лампи відповідає фазі коливання колеса в напрямку проти годинникової стрілки (при погляді зверху) при зміні знака кутового прискорення в рівноважному (середньому) положенні горизонтальних коливань (тобто при обнуленні показань акселерометричного датчика 4, який фіксує фактично тангенціальні лінійні прискорення точки стійки колеса, що коливається навколо поворотної осі).

Таким чином, зведені незрівноважені маси від динамічного дисбалансу колеса знаходяться на його стробоскопічному зображенні з зовнішнього (переднього) боку ободу внизу і з внутрішнього (тильного) боку - вгорі.

Можна і тут сказати, що ці незрівноважені маси, тобто “важкі точки” утекли вперед у момент резонансу на $1/4$ оберту колеса (на кут $\pi/2$).

На закінчення слід зазначити, що, незважаючи на менш високу точність методу стробоскопії при балансуванні коліс легкових автомобілів,

кінцевий результат балансування коліс без зняття з автомобіля виходить навіть кращий, ніж після ретельного балансування колеса на стаціонарному балансувальному верстаті зі зняттям колеса з автомобіля.

Запам'ятаємо також ту обставину, що балансування коліс повинне провадитися щораз, коли колесо знімалося з автомобіля і було перемонтоване.

5. Контрольні запитання

1. Зазначте ознаку наявності статичного дисбалансу оберткової деталі або вузла.

2. Які деталі піддаються статичному балансуванню, а які - динамічному?

3. Як кількісно характеризується статичний дисбаланс?

4. У чому полягає процес статичного балансування деталі або вузла?

5. Які методи динамічного балансування деталей і вузлів Ви знаєте?

6. У чому полягає динамічне балансування роторів по методу трьох спроб?

7. Накресліть схему балансировочного верстата системи Шитікова.

8. Які три спроби слід здійснити при динамічному балансуванні роторів?

9. Скільки противаг буде потрібно для усунення динамічного дисбалансу ротора?

10. Опишіть метод стробоскопічного балансування керованих коліс легкових автомобілів.

11. У чому складається перевага балансування колеса без зняття його з автомобіля?

12. Як виконати статичне балансування автомобільного колеса стробоскопічним методом?

13. Як виконати динамічне балансування автомобільного колеса стробоскопічним методом?

14. Як визначається величина і місце розташування балансировочних противаг при стробоскопічному методі балансування автомобільних коліс?

15. Як зафіксувати момент резонансних коливань коліс від дисбалансу при балансуванні по методу стробоскопії?

16. У чому полягають переваги стробоскопічного балансування автомобільних коліс?

Лекція 36

Тема: Зрівноваження мас, що рухаються поступально та плоскопаралельно

- Зміст:
1. Зрівноважування мас, що рухаються поступально.
 2. Сили інерції першого і вищих порядків. Механізм Ланчестера.
 3. Зрівноважування ланок у плоскопаралельному русі.
 4. Статичне зрівноважування важільних механізмів.
 5. Контрольні запитання.

1. Зрівноважування мас, що рухаються поступально

Розглянемо зрівноважування маси, яка поступально рухається, на прикладі зрівноважування маси повзуна центрального кривошипно-повзунного механізму (рис. 5.9).

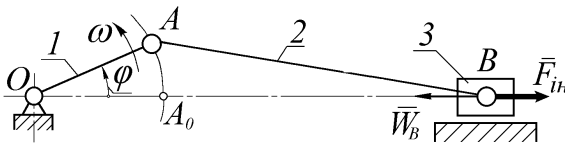


Рис. 5.9. До зрівноваження маси повзуна

Під час руху повзун 3 сприймає прискорення, обумовлене формулою (1.8) із

[8]:

$$W \cong r\omega^2 (\cos\varphi - \lambda \cos 2\varphi), \quad (5.38)$$

де $r = l_{OA}$ - довжина (радіус) кривошипа 1;

$\lambda = l_{OA}/l_{AB}$ - відношення довжини кривошипа 1 і довжини шатуну 2;

$\varphi = \omega t$ - кут повороту кривошипного вала у випадку $\omega = \text{const}$.

Нагадаємо, що формула (5.38) була отримана при урахуванні тільки перших двох членів розкладання в ряд бінома Ньютона (див. [8], п. 2.1). Інші швидко убутні члени розкладання були відкинуті.

Оскільки, наприклад, при зрівноважуванні мас поршнів двигунів внутрішнього згорання (ДВЗ) і компресорів звичайно враховуються тільки перші два самі значні члени розкладання, то тут також можна обмежитися першими двома гармоніками, що складають формулу (1.8). Зауважимо, що перша гармоніка в складі формули (1.8) буде

$$W_I = r\omega^2 \cdot \cos\omega t. \quad (5.39)$$

Друга гармоніка буде виглядати як

$$W_{II} = \lambda \cdot r\omega^2 \cdot \cos 2\omega t. \quad (5.40)$$

Очевидно, що друга гармоніка має подвійну частоту з порівнянні з першою і її амплітуда складає λ -ту частину від амплітуди першої гармоніки.

Звичайно для ДВЗ і компресорів характерно значення $\lambda = \frac{1}{4} \dots \frac{1}{5}$,

тобто амплітуда другої гармоніки складає усього (20...25)% від амплітуди першої гармоніки.

Зазначимо, що амплітуди відкинутих гармонік більш високих частот складають дуже малі швидко збутні значення в порівнянні з найбільшою амплітудою першої гармоніки.

Так, амплітуда третьої гармоніки складає вже частки відсотка від амплітуди першої гармоніки.

Бувають, звичайно, випадки, коли варто враховувати і гармоніки більш високих порядків.

Приміром, компресор на борту космічного корабля повинний бути зрівноважений практично ідеально, інакше при його роботі будуть неможливі спостереження і зйомки кінофотоапаратурою, телескопами й ін.

Зрівноважування маси повзуна виконують по окремо взятих гармоніках, тому що для кожної із них характерна своя частота.

Розглянемо зрівноважування сили інерції першого порядку маси повзуна m , тобто

$$F_{inl} = m \cdot W_l = m \cdot r \omega^2 \cdot \cos \alpha t. \quad (5.41)$$

Розрізняють часткове і повне зрівноважування сил інерції першого порядку. Часткове зрівноважування звичайно застосовується, наприклад, на одноциліндрових ДВЗ і компресорах.

Для *часткового зрівноважування* сили інерції першого порядку повзуна встановимо з протилежного боку від точки A на кривошипі на радіусі ρ противагу (додатково до вже наявної там противаги, призначеної для зрівноважування обертових мас кривошипного вала) із додатковою масою μ (рис. 5.10).

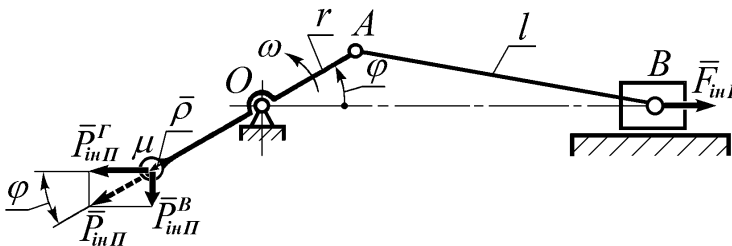


Рис. 5.1. Часткове зрівноваження сили інерції першого порядку повзуна

Покажемо вектор сили інерції окремо узятій додаткової противаги $\overline{P}_{in\Pi}$ і розкладемо його на дві складові: вертикальну і горизонтальну.

Тоді одержимо:

$$P_{in\Pi} = \mu\rho \cdot \omega^2, \quad (5.42)$$

$$P_{in\Pi}^2 = \mu\rho \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t, \quad (5.43)$$

$$P_{in\Pi}^6 = \mu\rho \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t. \quad (5.44)$$

Якщо прийняти добуток $\mu\rho$ рівним

$$\mu\rho = mr, \quad (5.45)$$

тоді горизонтальна складова сили інерції противаги зрівноважить силу інерції повзуна, тому що буде $\overline{P}_{in\Pi}^2 = -\overline{F}_{inI}$, проте залишиться незрівноваженою вертикальна складова сили інерції противаги $\overline{P}_{in\Pi}^6$ з тим же амплітудним значенням, що й у сили F_{inI} , тільки зсунута відносно неї по фазі на кут $\pi/2$.

В окремих випадках і таке рішення можливе, коли, наприклад, вертикальні коливання корпусу машини менш небезпечні, ніж горизонтальні. Скажімо, коли горизонтальні коливання корпусу мають у робочому діапазоні швидкостей кривошипного вала резонансну частоту, а вертикальні коливання - не мають.

Частіше ж усього часткове зрівноважування сили інерції першого порядку повзуна здійснюється способом, коли добуток $\mu\rho$ приймається рівним

$$\mu\rho = \frac{1}{2} mr. \quad (5.46)$$

У цьому випадку врівноважується тільки половина сили інерції повзуна першого порядку, а друга половина перекладається у вертикальний напрямок.

Через зсув по фазі на $\pi/2$ коливань у горизонтальному і вертикальному напрямках утворюється результуюча амплітуда коливань, пропорційна половині амплітудного значення F_{inI} .

Справді, незрівноважена частина сил інерції складає

$$\overline{F}_{незр} = \overline{F}_{незр}^2 + \overline{F}_{незр}^6,$$

тобто модуль $F_{незр}$ буде

$$F_{незр} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} mr \omega^2 \cdot \cos \omega t\right)^2 + \left(\frac{1}{2} mr \omega^2 \cdot \sin \omega t\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m r \omega^2 \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} m r \omega^2 . \quad (5.47)$$

Для повного зрівноважування сили інерції першого порядку повзуна необхідно встановити дві протипаги, що обертаються з кутовою швидкістю ω у протилежних напрямках і мають кожна добуток $\mu\rho$, рівний

$$\mu\rho = \frac{1}{2} m r .$$

На рис. 5.11 показана схема повного зрівноважування сили інерції першого порядку повзуна.

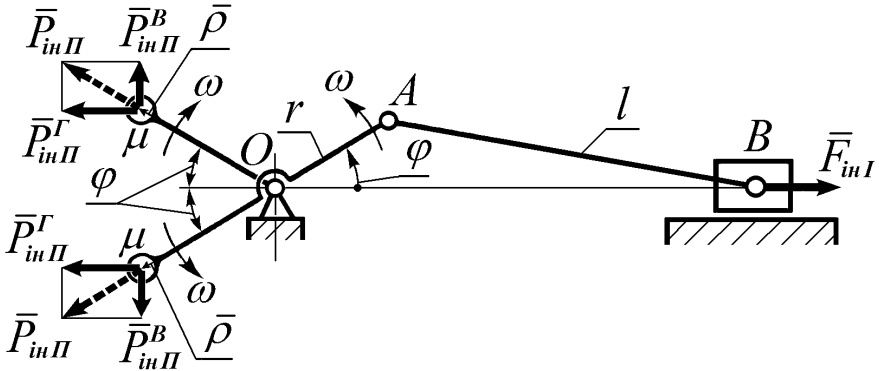


Рис. 5.11. Повне зрівноваження сили інерції першого порядку повзуна

Протипаги мають симетричний зустрічний рух, а оскільки вони однакові по масі μ і радіусу траєкторій ρ , то вертикальні складові їхніх сил інерції будуть взаємно зрівноважуватися, у той же час горизонтальні складові складуться й у сумі зрівноважать силу F_{inI} .

Очевидно, що для окремого повного зрівноважування сили інерції другого порядку повзуна також буде потрібно встановити дві протипаги, тільки оберталися вони повинні з подвоєною швидкістю 2ω у протилежних напрямках, а добуток $\mu_{II} \cdot \rho_{II}$ повинний бути в кожного рівний

$$\mu_{II} \cdot \rho_{II} = \frac{1}{2} \lambda m r . \quad (5.48)$$

2. Механізм Ланчестера

На рис. 5.12 приведена схема механізму Ланчестера, призначеного для повного зрівноважування сил інерції маси повзуна першого і другого порядків.

Як уже було показано вище, маси відповідних противаг повинні бути розраховані згідно до формул (5.46) і (5.48), а їхнє початкове розташування повинно бути на горизонтальних лініях уліво, коли кривошип розташований горизонтально вправо.

Обов'язкове співвідношення чисел зубців коліс механізму Ланчестера зазначено на полі рис. 5.12.

Якби треба було зрівноважувати сили інерції більш високих порядків, це можна було б здійснити за рахунок додавання до механізму Ланчестера ще менших симетрично розташованих коліс із відповідними противагами.

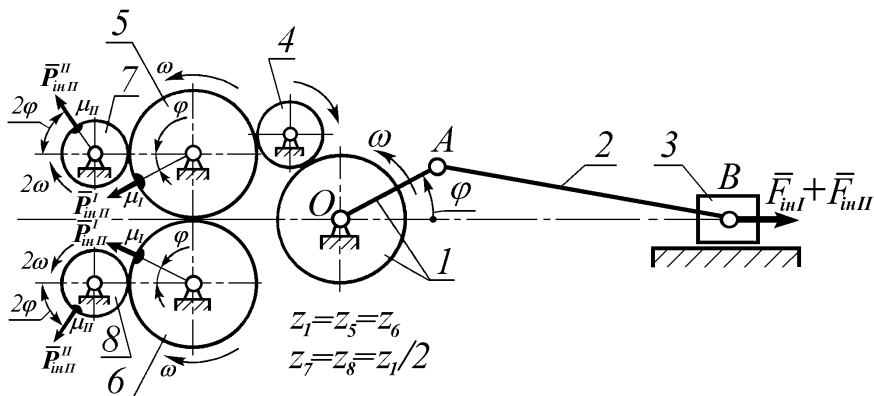


Рис. 5.12. Схема механізму Ланчестера

Відзначимо, що тут мова йшла про зрівноважування сили інерції маси одного окремо взятого повзуна.

Задача зрівноважування мас, що поступально рухаються, істотно може спроститися при використанні багатоповзунного механізму (багатоциліндрові двигуни або компресори).

Так, наприклад, в опозитному двоциліндровому двигуні внутрішнього згоряння повне зрівноважування мас повзунів досягається шляхом ретельного вирівнювання мас поршнів (за рахунок видалення частини маси більш важкого поршня).

На рис. 5.13 показана схема опозитного двоциліндрового кривошипно-повзунного механізму ДВЗ.

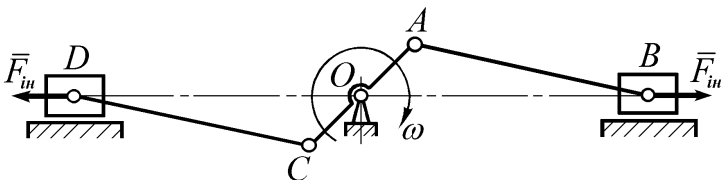


Рис. 5.13. Опозитний кривошипно-повзунний механізм

Результуючі сили інерції всіх порядків повзунів тут завжди рівні і протилежно спрямовані.

У авіації тривалий час використовувалися зіркоподібні поршневі ДВЗ, у котрих також було здійснено повне зрівноважування сил інерції за рахунок центросиметричного розташування і руху поршнів.

Рядні і V-образні ДВЗ також характеризуються непоганим зрівноважуванням при 4-х і більш циліндрах.

Тут зрівноважування досягається за рахунок заздалегідь розрахованого розведення колін колінчастого вала.

Як правило, у цьому випадку завжди вдається цілком зрівноважити сили інерції першого порядку, а іноді і більш високих порядків.

Як приклад поршневого ДВЗ, у якому використовувався механізм Ланчестера, можна привести автомобільний двигун ЯМЗ-204.

3. Статичне зрівноважування важільних механізмів

При рішенні задачі зрівноважування важільних механізмів часто буває зручно замінити ланку, що здійснює плоскопаралельний рух, уявлюваною ланкою з точковими масами (*метод замінних точкових мас*).

Нехай є деяка ланка AB , яка здійснює плоскопаралельний рух (рис. 5.14).

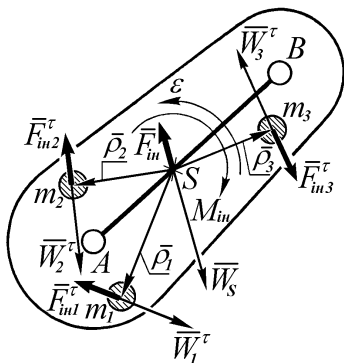


Рис. 5.14. До методу замінних точкових мас

Вважаємо відомими: масу ланки m , центральний момент інерції J_S , довжину ланки l_{AB} , розташування центру мас S на лінії AB (тобто, довжину l_{AS}), а також прискорення центру мас $\vec{W}_S$ і кутове прискорення ланки ϵ .

Насамперед зауважимо, що динамічна дія ланки AB на зв'язки визначається головним вектором сил інерції

$$\vec{F}_{in} = -m \cdot \vec{W}_S \quad (5.49)$$

і головним моментом сил інерції

$$\overline{M}_{in} = -J_S \cdot \overline{\varepsilon} . \quad (5.50)$$

Замінімо реальну ланку AB із розподіленою масою фіктивною ланкою з декількома уявними точковими замінними масами m_1, m_2 і т. д.

Замінна ланка повинна мати точно таку ж динамічну дію на зв'язки, як і реальна ланка.

Динамічна дія на зв'язки фіктивної замінної ланки визначається в поступальній частині руху разом із точкою S рівнодіючою R_{in} сил інерції точкових мас, які можна записати по модулю як

$$R_{in} = m_1 W_S + m_2 W_S + \dots = W_S \cdot \sum m_i . \quad (5.51)$$

В обертальній частині руху динамічна дія на зв'язки визначається сумарним моментом сил інерції M_{in}^1 точкових мас відносно точки S .

Причому, нормальні складові сил інерції точкових мас моменту давати не будуть, тому що всі вони перетинаються в одній точці S .

Момент M_{in}^1 дадуть тільки дотичні складові повних сил інерції точкових замінних мас.

У такий спосіб

$$M_{in}^1 = F_{in1}^\tau \cdot \rho_1 + F_{in2}^\tau \cdot \rho_2 + \dots, \quad (5.52)$$

а тому що

$$F_{in1}^\tau = m_1 \cdot W_1^\tau = m_1 \cdot \rho_1 \varepsilon,$$

$$F_{in2}^\tau = m_2 W_2^\tau = m_2 \cdot \rho_2 \varepsilon$$

і так далі, то

$$M_{in}^1 = m_1 \rho_1^2 \cdot \varepsilon + m_2 \rho_2^2 \cdot \varepsilon + \dots,$$

тобто

$$M_{in}^1 = \varepsilon \cdot \sum m_i \rho_i^2 . \quad (5.53)$$

Знайдемо умови динамічної еквівалентності реальної і фіктивної замінної ланок.

По-перше, повинно виконуватися рівність (5.49) і (5.51), тобто

$$\overline{F}_{in} = \overline{R}_{in}$$

або

$$m \cdot W_S = W_S \cdot \sum m_i ,$$

звідкіля слідує

$$m = \sum m_i . \quad (5.54)$$

А для того, щоб вектори $\overline{F}_{in}$ і $\overline{R}_{in}$ не тільки були б рівні, але ще і збігалися б по лінії дії, яка повинна проходити через точку S , необхідно, щоб точка S була центром точкових замінних мас, тобто, щоб виконувалася умова:

$$\sum_S m_i \rho_i = 0. \quad (5.55)$$

Рівняння (5.55) означає рівність нулю суми статичних моментів точкових мас відносно точки S , що і є доказом збігу центру точкових замінних мас із точкою S .

По-друге, також повинна виконуватися рівність (5.50) і (5.53):

$$\overline{M}_{in} = \overline{M}_{in}^1$$

або

$$J_S \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \sum m_i \rho_i^2,$$

звідкіля слідує

$$J_S = \sum m_i \rho_i^2, \quad (5.56)$$

тобто, що сума моментів інерції точкових мас відносно осі, що проходить через центр мас S , рівняється центральному моменту інерції реальної ланки.

Якщо при заміні реальної ланки фіктивною із точковими масами виконуються всі три умови (5.54), (5.55) і (5.56), то тоді точкові маси (за аналогією з п. 5.1.2) називаються *замінними динамічно*.

Якщо ж виконуються тільки перші дві умови (5.54) і (5.55), то тоді точкові маси називаються *замінними статично*.

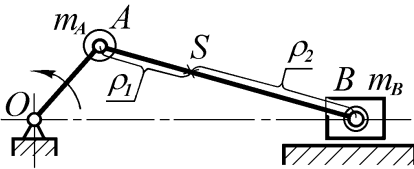


Рис. 5.15. Замінні точкові маси шатуна

Розглянемо зрівноважування маси шатуна кривошипно-повзунного механізму (рис. 5.15).

Масу шатуна m_{AB} можна замінити двома точковими масами m_A і m_B . Відповідно до умови (5.54) повинно бути:

$$m_A + m_B = m_{AB}. \quad (5.57)$$

Відповідно до умови (5.55) знайдемо

$$m_A \cdot \rho_1 = m_B \cdot \rho_2. \quad (5.58)$$

З умов (5.57) і (5.58) знаходимо маси m_A і m_B , тому що l_{AB} , $l_{AS} = \rho_1$, $l_{SB} = \rho_2$ і маса шатуна m_{AB} відомі.

Далі перевіряємо виконання умови (5.56).

Якщо вона виконується, то точкові замінні маси зроблять на зв'язки точно такий же динамічний вплив, як і реальна ланка.

Якщо ж - ні, то залишиться незрівноваженою деяка частина головного моменту сил інерції шатуна.

Очевидно, що у випадку $\rho_1 = \rho_2$ будемо мати

$$m_A = m_B = \frac{1}{2} m_{AB}$$

і тоді умова (5.56) запишеться у вигляді

$$J_S = \sum m_i \rho_i^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} m_{AB} \cdot \left(\frac{1}{2} l_{AB} \right)^2 \right) = \frac{m_{AB} l_{AB}^2}{4}.$$

Відомо, що центральний момент інерції стрижня з рівномірно розподіленою по довжині масою можна підрахувати по формулі

$$J_S = \frac{m \cdot l^2}{12}.$$

Бачимо, що умова (5.56) для шатуна з двома точковими замінними масами у точках A і B не виконується.

Тепер можна приступити до зрівноважування маси шатуна, фіктивно поданої двома замінними масами m_A і m_B .

Масу m_A можна зрівноважити разом із масою кривошипа m_{OA} (як маси, що здійснюють обертальний рух).

Масу ж m_B слід зрівноважити разом із масою повзуна m_{II} , (як такі, що рухаються поступально).

Зауважимо, що при цьому буде здійснено статичне зрівноважування мас кривошипно-повзунного механізму, тому що умова (5.56) для маси шатуна залишилася не повністю виконаною.

Розглянемо далі задачу про статичне зрівноважування мас ланок плоского важільного механізму, засновану на ідеї зупинення загального центру S мас ($M = \sum m_i$) усіх рухомих ланок.

Відповідно до теореми про рух центра мас системи, головний вектор сил інерції системи дорівнює $\overline{F}_{in} = -M \cdot \overline{W}_S$. Для статичного зрівноважування мас M необхідно, щоб дотримувалася умова $\overline{F}_{in} = 0$, тобто щоб завжди була $\overline{W}_S = 0$, а це можливо для рухомого механізму тільки в тому випадку, якщо загальний центр мас S усіх рухомих ланок механізму буде нерухомим.

Виконаємо статичне зрівноважування кривошипно-повзунного механізму (рис. 5.16), якщо відомі: маси його рухливих ланок m_{OA} , m_{AB} і m_{II} , довжини ланок l_{OA} , l_{AB} , а також координати центрів мас ланок l_{OS_1} і l_{AS_2} .

Зрівноваження виконаємо в наступній послідовності.

1. Встановимо в точці C (на продовженні шатуна AB за точку A) противагу з масою μ_C , при якій точка A стане загальним центром мас

повзуна m_{AB} , шатуна m_{AB} і протизаги μ_C . Це буде досягнуто при дотриманні умови:

$$l_{AC} \cdot \mu_C = l_{AS_2} \cdot m_{AB} + l_{AB} \cdot m_{AB}.$$

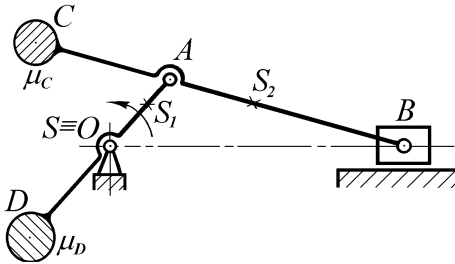


Рис. 5.16. Статичне зрівноваження мас кривошипно-повзунного механізму

рухливих мас механізму: m_{AB} , m_{AB} , μ_C , m_{OA} і μ_D . Це буде досягнуто при дотриманні умови:

$$l_{OA} \cdot (m_n + m_{AB} + \mu_C) + l_{OS_1} \cdot m_{OA} = l_{OD} \cdot \mu_D.$$

Тут також дві невідомі величини, однією з котрих можна довільно задатися, а другу можна знайти з записаного рівняння.

Відзначимо, що установка в точці C на продовженні шатуна AB протизаги призводить до збільшення габаритів механізму і тому не завжди прийнятна (наприклад, у ДВЗ).

Таке рішення задачі статичного зрівноважування кривошипно-повзунного механізму звичайно здійснюється при відсутності жорстких вимог до мінімізації габаритів картера машини або у випадку, коли механізм не має закритого корпусу.

Здійснимо статичне зрівноважування мас кривошипно-коромислового механізму (рис. 5.17), якщо задано: маси ланок m_{OA} , m_{AB} , m_{BC} , довжини ланок l_{OA} , l_{AB} , l_{BC} , l_{OC} , а також координати центрів мас ланок l_{OS_1} , l_{AS_2} і l_{CS_3} .

Зрівноваження виконаємо в наступній послідовності.

1. Замінімо масу шатуна m_{AB} двома точковими статично замінними масами m_A і m_B , виконавши дві умови:

$$m_A + m_B = m_{AB}, \quad (4.50)$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{l_{S_2B}}{l_{S_2A}}. \quad (5.60)$$

Очевидно, що в записаному рівнянні дві невідомі: l_{AC} і μ_C . Однією з цих величин можна задатися довільно, а другу тоді можна визначити з рівняння.

2. Встановимо в точці D (на продовженні кривошипа OA за точку O) протизагу з масою μ_D , при якій точка O співпадає з загальним центром S усіх

Тоді одержимо

$$m_A = m_{AB} \frac{l_{S_2B}}{l_{AB}}, \quad (5.61)$$

$$m_B = m_{AB} \frac{l_{S_2A}}{l_{AB}}. \quad (5.62)$$

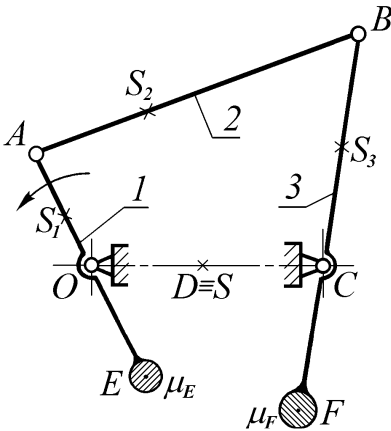


Рис. 5.17. Статичне зрівноваження мас кривошипно-коромислового механізму

2. Зрівноважимо спільно масу кривошипа OA і точкову масу m_A одною противагою, встановленою у деякій точці E на продовженні кривошипа за точку O .

Зрівноважування буде дотримане, якщо буде виконуватися умова:

$$m_{OA} \cdot l_{OS_1} + m_A \cdot l_{OA} - \mu_E \cdot l_{OE} = 0. \quad (5.63)$$

Рівняння (5.63) означає, що точка O є центром мас m_{OA} , m_A і μ_E .

Тепер можна задатися або величиною μ_E , або величиною l_{OE} , а з (5.63) тоді знайдемо або l_{OE} , або μ_E .

3. Зрівноважимо спільно масу коромисла BC і точкову масу m_B противагою μ_F , встановленою у точці F на продовженні коромисла за точку C .

Зрівноважування буде дотримане, якщо буде виконуватися умова:

$$m_{BC} \cdot l_{CS_3} + m_B \cdot l_{BC} - \mu_F \cdot l_{CF} = 0. \quad (5.64)$$

Рівняння (5.64) означає, що точка C є центром мас m_{BC} , m_B і μ_F .

Тут також можна задатися або величиною μ_F , або величиною l_{CF} , а з (5.64) тоді знайдемо або l_{CF} , або μ_F .

4. Зауважимо, що загальний центр S мас усіх ланок кривошипно-коромислового механізму з двома противагами знаходиться в деякій нерухомій точці $D \equiv S$, що лежить на лінії OC . Координату точки D можна знайти за умовою:

$$(m_{OA} + m_A + \mu_E) \cdot l_{OD} - (m_{BC} + m_B + \mu_F) \cdot l_{CD} = 0. \quad (5.65)$$

З рівняння (5.65) знайдемо відношення довжин

$$\frac{l_{OD}}{l_{CD}} = \frac{m_{BC} + m_B + \mu_F}{m_{OA} + m_A + \mu_E}, \quad (5.66)$$

тобто в результаті закоординуємо точку D з урахуванням

$$l_{OD} + l_{CD} = l_{OC}. \quad (5.67)$$

На закінчення відзначимо, що задачу 5.1 можна було б вирішити трьома способами.

Другий спосіб міг бути здійснений за допомогою трьох противаг, які слід було б установити: на продовженні ланки BC за точкою B , на продовженні ланки AB за точкою A та на продовженні ланки OA за точкою O так, щоб точка O співпала б з загальним центром S мас усіх ланок механізму з трьома противагами.

Третій спосіб зворотний відносно другого. Тут також потрібні були б три противаги на всіх трьох ланках, але їх необхідно було б установити з протилежних боків ланок так, щоб з загальним центром S мас усіх ланок з противагами співпала точка C .

Пропонуємо самостійно вирішити задачу 5.1 другим і третім способами.

4. Контрольні запитання

1. Що таке сили інерції повзуна кривошипно-повзунного механізму першого і другого порядку? Запишіть формули для їхнього підрахунку.

2. Як можна здійснити часткове зрівноважування сили інерції першого порядку маси повзуна?

3. Як можна здійснити повне зрівноважування сили інерції першого порядку повзуна?

4. Як можна здійснити повне зрівноважування сили інерції другого порядку повзуна?

5. Накресліть схему механізму Ланчестера для зрівноважування сил інерції повзуна першого і другого порядків?

6. Як можна зрівноважити маси поршнів багатоциліндрових ДВЗ і компресорів?

7. У чому полягає метод замінних точкових мас при зрівноважуванні мас, які рухаються плоскопаралельно?

8. Які умови повинні виконуватися при динамічному заміщенні реальної ланки замінними точковими масами?

9. Які умови повинні виконуватися при статичному заміщенні реальної ланки точковими замінними масами?

10. У чому полягає статичне зрівноважування важільних механізмів?

Література

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин, М.: Наука, 1988. - 640 с.
2. Теория механизмов и машин. /Под ред. Фролова К. В., М.: Высшая школа, 1987. - 496 с.
3. Кожевников С. Н. Теория механизмов и машин, М.: Машиностроение, 1973. -592 с.
4. Левитская О. Н., Левитский Н. И. Курс теории механизмов и машин, М.: Высшая школа, 1985. - 280 с.
5. Артоболевский И. И., Эдельштейн Б. В. Сборник задач по теории механизмов и машин, М.: Наука, 1972. - 256 с.
6. Абрамов Б. М. Типовые задачи по теории механизмов и машин, Харьков: "Высшая школа", 1976. - 208 с.
7. Попов С. А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин, М.: Высшая школа, 1986. 496 с.
8. Гречко Л. П. Важільні механізми, передачі та зачеплення, Харків: Видавн. ХДАДТУ, 2000. - 215 с.
9. Гречко Л. П. Синтез механізмів і динаміка машин, Харків: Видавн. ХДАДТУ, 1999. - 208 с.