

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. Г. Янютин, Д. И. Богдан, Н. И. Воропай,  
Г. А. Гнатенко, В. Т. Гришакин

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАГРУЗОК  
ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ТЕЛ

Монография

Часть I

Харьков  
ХНАДУ  
2010

УДК 539.3  
ББК 30.121  
И29

Рецензенты:

*А. Н. Шупиков*, д-р техн. наук, проф. (ИПМаш НАНУ);  
*А. С. Куценко*, д-р техн. наук, проф. (НТУ “ХПИ”).

И29 **Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография. В 2-х частях. Часть I** / Е. Г. Янютин, Д. И. Богдан, Н. И. Воропай, Г. А. Гнатенко, В. Т. Гришакин. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 180 с. – На русском языке.

ISBN 978-966-303-291-7 (Об.)  
ISBN 978-966-303-292-4 (Ч. I)

Изложены методы решения задач идентификация импульсных нагрузок и задач управления параметрами напряженно-деформированного состояния при импульсном нагружении мембран, стержней, оболочек, пластин и трехмерных тел, деформация которых происходит в упругой и вязкоупругой областях.

Предназначена для научных работников, инженеров, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в областях механики деформируемого твердого тела, динамики и прочности машин.

Ил. 114. Библиогр. 23 назв.

Представлені методи розв’язання задач ідентифікації імпульсних навантажень і задач управління параметрами напружено-деформівного стану при імпульсному навантаженні мембран, стержнів, оболонок, пластин і тримірних тіл, деформація яких відбувається в пружній та в’язкопружній областях.

Призначена для наукових працівників, інженерів, викладачів вузів, аспірантів та студентів, які спеціалізуються в галузях механіки деформівного твердого тіла, динаміки та міцності машин.

Іл. 114. Бібліогр. 23 найм.

ISBN 978-966-303-291-7 (Об.)  
ISBN 978-966-303-292-4 (Ч. I)

**УДК 539.3**  
**ББК 30.121**

© Е. Г. Янютин, Д. И. Богдан, Н. И. Воропай,  
Г. А. Гнатенко, В. Т. Гришакин, 2010  
© ХНАДУ, 2010

## ВВЕДЕНИЕ

Создание новых конструкций, работающих при динамических нагрузках (как стационарных, так и нестационарных), способствует повышению актуальности проблем механики деформируемых тел. К наиболее важным, с точки зрения практических приложений, относятся задачи, в которых исследуются вопросы импульсного нагружения механических систем. Большинство задач указанного направления можно разделить на три группы.

Первая группа задач посвящена изучению переходных процессов в элементах конструкций при заданных законах изменения во времени внешних механических нагрузок. К настоящему времени накоплен большой опыт решения указанной группы задач, которые принято называть прямыми. В многочисленных публикациях изложены подходы к их решению и трактовки полученных результатов.

Вторая группа задач предполагает неизвестными как функция времени действующие на элементы конструкций нагрузки. Предметом изучения задач этой группы является восстановление (идентификация) импульсных нагрузок по их проявлениям деформационного характера. Задачи в такой постановке являются обратными задачами математической физики.

К третьей группе относятся так называемые задачи управления, подразумевающих разработку эффективных методов управления параметрами напряженно-деформированного состояния импульсно нагружаемых элементов конструкций с использованием специально вводимых дополнительных систем нагружений.

В отличие от первой группы задач, обратных задач и задач управления нестационарной теории упругости, описанных в литературе, значительно меньше. Настоящая монография, предлагаемая вниманию читателей, посвящена изложению решений указанных задач для различных деформируемых объектов: мембран, стержней, оболочек, пластин и трехмерных тел.

В целом, в монографии продолжается развитие вопросов, которые были освещены в работах [22, 23]. Исходя из специфики изложения материала монографию можно назвать сборником исследований специалистов, работающих в одной конкретной области упругого деформирования элементов конструкций. Настоящая работа включает следующие вопросы:

1. решение прямых задач импульсного нагружения деформируемых объектов;
2. решение обратных задач по идентификации (восстановлению) внешних нестационарных воздействий на основе информации о косвенном их проявлении (деформаций, перемещений, пр.);
3. описание решений задач управления деформационными параметрами за счет введения дополнительных, управляющих нагрузок.

Исследования основаны на теории корректных и некорректных задач математической физики применительно к решению задач механики твердого тела. Под корректными задачами понимаются такие, которые имеют строгие математические постановки. Соответствующие им решения устойчивы к малым изменениям исходных данных. Некорректно поставленные задачи характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений.

Работа может представлять интерес для специалистов, работающих в области механики деформируемого твердого тела и смежных областях. Также монография полезна для студентов старших курсов механико-математического, инженерно-физического, физико-технического факультетов университетов, студентов технических специальностей, при изложении которым проблем прочности в процессе обучения используются современные методы математического и функционального анализов.

Авторы благодарны рецензентам д.т.н., проф. А. Н. Шупикову и д.т.н., проф. А. С. Куценко за полезные замечания. Искреннюю признательность авторы выражают проф. В. А. Перегону за организационную помощь при подготовке монографии к изданию.

# ГЛАВА 1. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ-ПОЛОСЫ И ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ

В данной главе рассматриваются воздействия импульсных нагрузок на бесконечную мембрану и бесконечную пластину. Представлена теория решений прямых задач, целью которых является исследование нестационарных колебаний мембраны-полосы и пластины-полосы под действием заданных нагрузок. Рассмотрены также обратные задачи, в результате решения которых осуществляется определение воздействующих на мембрану и пластину функций нагрузений в предположении заданности закона их колебаний в одной из точек. Численно-аналитическое решение обратных задач было осуществлено способом, предложенным А.С. Апарциным. Применение этого подхода позволило получить решения поставленных задач методом, обладающим регуляризирующим свойством при соответствующем подборе расчетных параметров.

## 1.1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА МЕМБРАНУ-ПОЛОСУ

**1.1.1. Первый способ решения задачи о воздействии на бесконечную мембрану импульсных нагрузок.** В механических системах, которые можно рассматривать как тонкие упругие двумерные тела, выделяют тела, носящие название мембран, которые при поперечных своих колебаниях имеют пренебрежимо малую жесткость на изгиб.

Рассматривается прямая задача математической физики о сосредоточенном нестационарном воздействии на бесконечную мембрану.

Пусть имеется прямоугольная мембрана, ограниченная прямыми  $x=0$ ,  $x=l$ . Вдоль оси  $y$  мембрана является бесконечной, т.е.  $y \rightarrow \pm\infty$  (рис. 1.1).

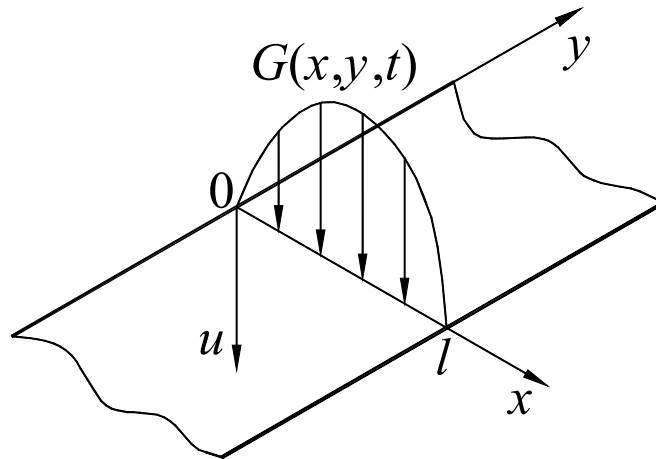


Рис. 1.1. Схема нагружения мембраны

Задача о колебаниях мембраны-полосы сводится к решению стандартного уравнения математической физики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + G(x, y, t) \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (1.2)$$

и краевыми условиями, заданными на границе бесконечного прямоугольника

$$u|_{x=0} = 0; \quad u|_{x=l} = 0; \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} u(x, y, t) = 0. \quad (1.3)$$

В соотношениях (1.1) – (1.3):  $u$  – нормальное перемещение точек мембраны-полосы;  $a$  – скорость распространения деформационной волны в мембране-полосе;  $G(x, y, t)$  – функция, пропорциональная внешней нагрузке.

Предположим, что внешняя нагрузка с интенсивностью  $P(t)$  сосредоточена в точке  $y=0$ , а по переменной  $x$  изменяется по закону синуса, т.е.

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \delta(y) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) P(t), \quad (1.4)$$

где  $\rho$  – удельная плотность мембраны;  $\delta(y)$  – дельта-функция.

Применим к уравнению (1.1) преобразование Лапласа [9] и с учетом начальных условий (1.2) получим

$$s^2 u^L = a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^L}{\partial y^2} \right) + G^L(x, y, s), \quad (1.5)$$

где  $u^L(x, y, s) = \int_0^{\infty} u(x, y, t) \cdot e^{-st} dt$ .

Для отыскания решения уравнения (1.5), удовлетворяющего краевым условиям (1.3), представим искомую функцию  $u^L(x, y, s)$  в следующем виде

$$u^L(x, y, s) = u_1^L(y, s) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (1.6)$$

К выражению (1.6) применим бесконечное преобразование Фурье по переменной  $y$  согласно следующему закону [15]:

$$u_1^{LF}(z, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^L(y, s) \cdot e^{-izy} dy. \quad (1.7)$$

В результате получим

$$u_1^{LF}(z, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{l\rho} \cdot \frac{P^L(s)}{a^2 z^2 + a^2 \pi^2 / l^2 + s^2}. \quad (1.8)$$

Применим к выражению (1.8) последовательно обратные преобразования Фурье и Лапласа. После выполнения обратного преобразования Фурье по закону [15]

$$u_1^L(y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^{LF}(z, s) \cdot e^{izy} dz \quad (1.9)$$

получим следующее выражение:

$$u_1^L(y, s) = \frac{1}{2a\rho} \cdot \frac{P^L(s) \cdot e^{-|y|/a \cdot \sqrt{a^2 \pi^2 / l^2 + s^2}}}{\sqrt{a^2 \pi^2 / l^2 + s^2}}. \quad (1.10)$$

Теперь применим к (1.10) обратное преобразование Лапласа [9, 10]. В результате будем иметь

$$u_1(y,t) = \frac{1}{2a\rho} \int_0^{t-|y|/a} P(\tau) \cdot J_0\left(\frac{\pi}{l} \cdot a \cdot \sqrt{(t-\tau)^2 - (|y|/a)^2}\right) d\tau. \quad (1.11)$$

Здесь  $H(t)$  – единичная функция Хевисайда;  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка.

Перемещение  $u(x,y,t)$  будет вычисляться по формуле

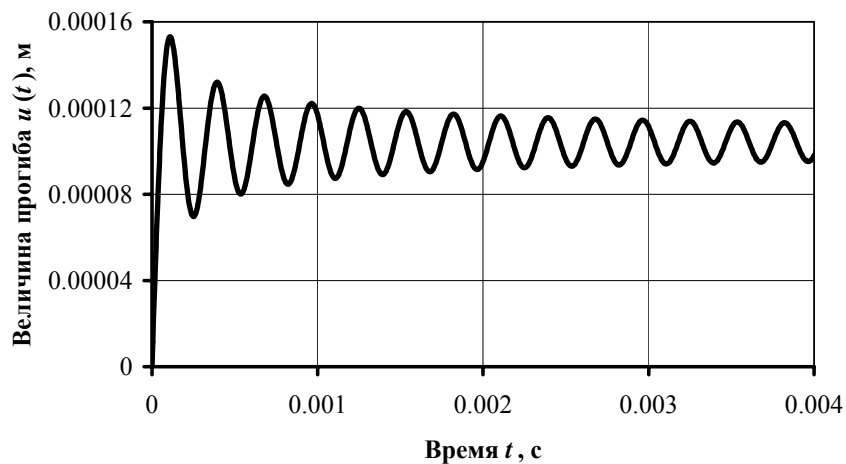
$$u(x,y,t) = \frac{1}{2a\rho} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \int_0^{t-|y|/a} P(\tau) \cdot J_0\left(\frac{\pi}{l} \cdot a \cdot \sqrt{(t-\tau)^2 - (|y|/a)^2}\right) d\tau. \quad (1.12)$$

Рассмотрим пример воздействия на мембрану нагрузки вида  $P(t) = P_0 \cdot H(t)$ , где  $P_0$  – ее интенсивность. Для такого нагружения формула (1.12) приобретает следующий вид:

$$u(x,y,t) = \frac{P_0}{2a\rho} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \int_0^{t-|y|/a} J_0\left(\frac{\pi}{l} \cdot a \cdot \sqrt{(t-\tau)^2 - (|y|/a)^2}\right) d\tau. \quad (1.13)$$

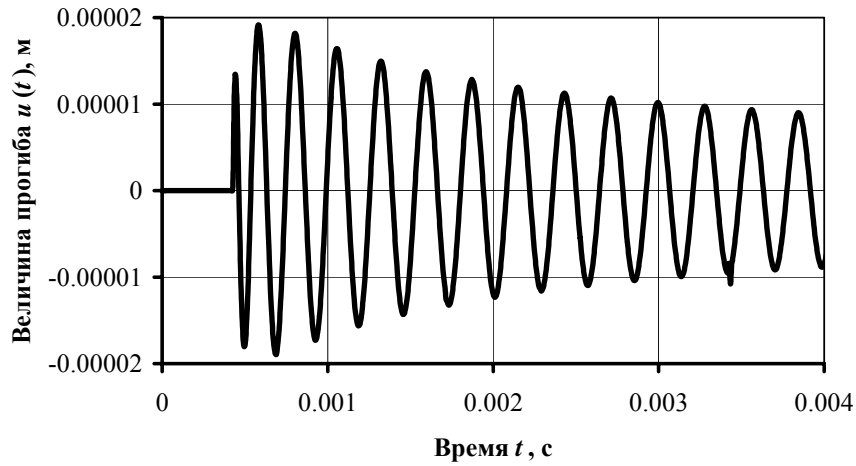
Для численного расчета прогиба мембраны-полосы согласно формуле (1.13) принимались следующие исходные данные:  $\rho = 7,8 \text{ кг/м}^2$ ;  $a = 2800 \text{ м/с}$ ;  $l = 0,4 \text{ м}$ ;  $P_0 = 10^5 \text{ Н/м}$ .

На рис. 1.2 представлены результаты выполненных расчетов, причем рис. 1.2,а отвечает прогибу в точке  $x = l/2$ ,  $y = 0$ , а рис. 1.2,б –  $x = l/2$ ,  $y = 1,2 \text{ м}$ .



а)





б)

Рис. 1.2. Изменение прогиба во времени

Графики на рис. 1.2 хорошо отражают волновой характер нестационарных колебаний мембраны-полосы.

**1.1.2. Второй способ решения задачи о воздействии на бесконечную мембрану импульсных нагрузок.** Здесь рассматривается та же задача, что и ранее. Однако отличие состоит в том, что изменен порядок выполнения обратных интегральных преобразований.

К выражению (1.8) применим обратное преобразование Лапласа [9] и получим следующее выражение:

$$u^F(x, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \frac{\sin\sqrt{a^2 z^2 + a^2 \pi^2 / l^2} (t - \tau)}{\sqrt{a^2 z^2 + a^2 \pi^2 / l^2}} d\tau. \quad (1.14)$$

Далее к соотношению (1.14) применим обратное преобразование Фурье [15]. В результате будем иметь

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi\rho} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t P(\tau) \cdot \frac{\sin\sqrt{a^2 z^2 + a^2 \pi^2 / l^2} (t - \tau)}{\sqrt{a^2 z^2 + a^2 \pi^2 / l^2}} d\tau \cdot e^{izy} dz. \quad (1.15)$$

В случае воздействия на бесконечную мембрану нагрузки, отвечающему варианту, когда в формуле (1.15) функция  $P(t)$  меняется как единичная функция Хевисайда, выражение (1.15) имеет вид

$$u(x,y,t) = \frac{P_0}{\pi\rho} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \int_0^\infty \frac{1 - \cos\sqrt{a^2 z^2 + a^2 \pi^2 / l^2} t}{a^2 z^2 + a^2 \pi^2 / l^2} \cos(|y|z) dz. \quad (1.16)$$

Структура формулы (1.16) принципиально отличается от формулы (1.13), поскольку для расчета по формуле (1.16) необходимо вычислять несобственный интеграл первого рода, который является сходящимся, однако практическая сходимость его плохая. Подынтегральная функция убывает к нулю при  $z \rightarrow \infty$  как  $1/z^2$ . Отмеченное обстоятельство существенно усложняет численный расчет по этой формуле по сравнению с расчетом по формуле (1.13).

Несобственный интеграл первого рода в соотношении (1.16) при расчетах рассматривался как интеграл с фиксированным конечным верхним пределом. В процессе численных экспериментов этот верхний предел монотонно увеличивался и устанавливалась численная сходимость результатов в зависимости от длины промежутка интегрирования. Процедура вычисления интеграла была численной и производилась на ЭВМ при помощи специальной программы.

Результаты выполненных расчетов по формуле (1.16) с использованием исходных данных, рассмотренных в подразделе 1.1.1, совпадают с результатами, представленными на рис. 1.2. Указанное, в определенной степени, свидетельствует о достоверности полученных решений.

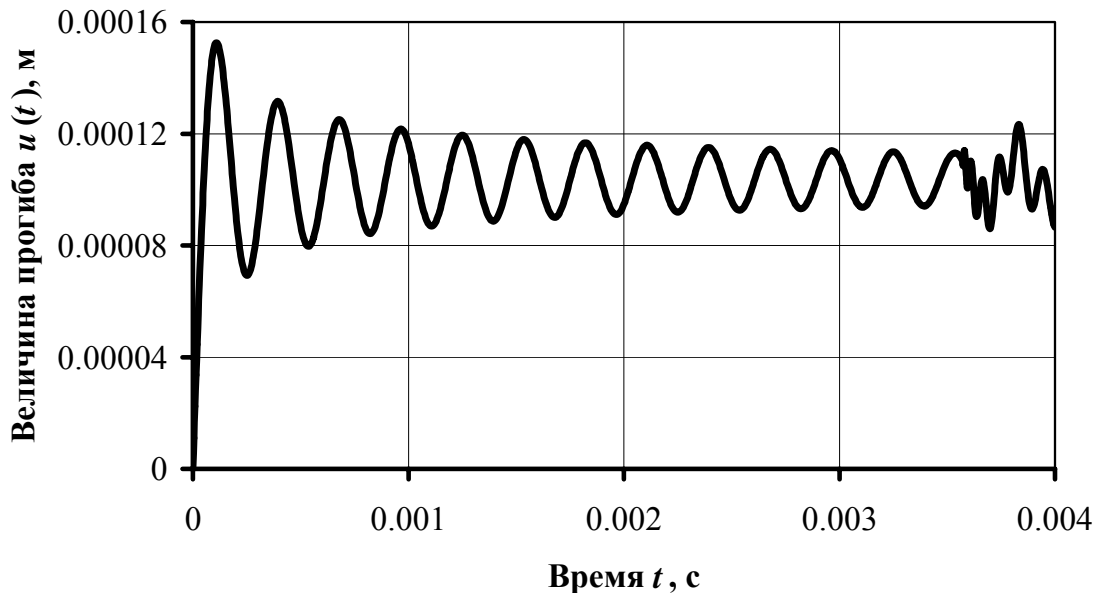
Достоверность результатов можно проверить и другим способом. Рассмотрим мембрану ограниченных размеров, поперечное перемещение которой описывается следующим выражением:

$$u(x,y_1,t) = \frac{P_0}{2\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \sin\left(\frac{n\pi\xi}{s_0}\right) (1 - \cos(\omega_n t)) \sin\left(\frac{n\pi y_1}{s_0}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (1.17)$$

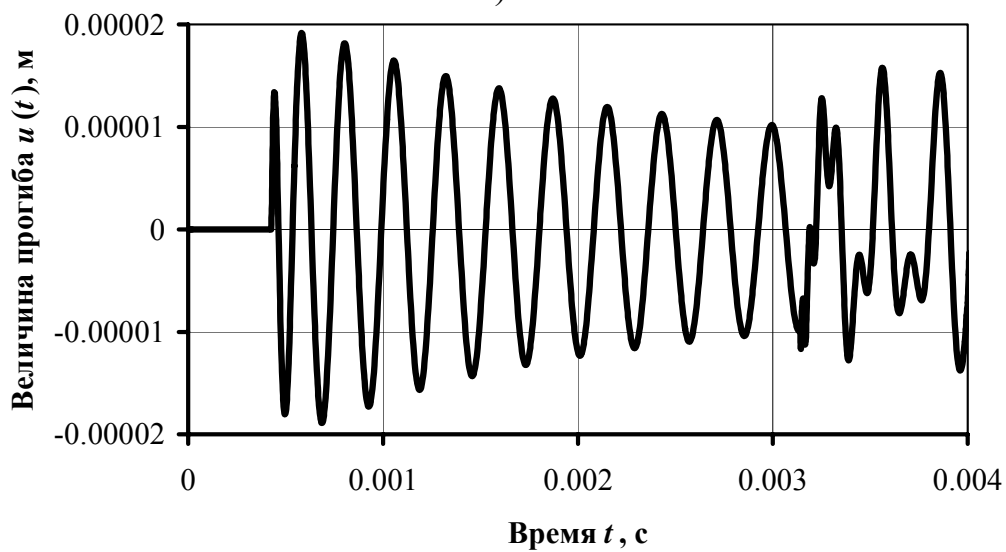
Выражение (1.17) записано в декартовой системе координат  $(x, y_1)$ . Связь между  $y$  и  $y_1$  такова, что ордината  $\xi = s_0/2$  приложенной нагрузки вида (1.4) отвечает середине длины мембраны. В формуле (1.17)  $s_0$  – длина мембраны;  $l$  – ее ширина;  $\omega_n^2 = a^2 \pi^2 / l^2 + a^2 n^2 \pi^2 / s_0^2$ . При расчетах принималось, что  $s_0 = 25 \cdot l$ . Нагружение мембраны соответствует изображенному воздействию на рис. 1.1. Выражение (1.17) получено с использованием теории рядов Фурье и стандарт-

ных способов операционного исчисления. Аналогичное решение можно найти, например, в [23].

Кривая на рис. 1.3,*а* соответствует прогибу в точке  $x=l/2, y=0$ , а на рис. 1.3,*б* –  $x=l/2, y=1,2$  м.



*а)*



*б)*

Рис. 1.3. Изменение прогиба во времени

Из физических соображений следует, что при неограниченном увеличении длины мембраны ( $s_0 \rightarrow \infty$ ) численные значения перемещений согласно формулам (1.13), (1.16) и (1.17), должны совпадать. Указанное подтверждается сопоставлением графиков, изображенных на рис. 1.2 и на рис. 1.3. Кривые на рис. 1.3 рассчитывались с учетом 4000 членов ряда в (1.17). Отметим, что более высокочас-

тотные колебания, наблюдаемые в конце исследуемого временного промежутка, появляются в результате прихода в расчетную точку отраженных волн деформаций в мембране конечной длины  $s_0$  от ее абсолютно жестких границ, которые параллельны оси абсцисс ( $y_1=0, y_1=s_0$ ).

**1.1.3. Первый способ решения задачи об определении неизвестной нагрузки.** При решении задачи воспользуемся соотношением (1.12) и численными значениями перемещения во времени  $u(x,y,t)$ , полученными при решении прямой задачи. Подчеркнем, что здесь  $x, y$  – координаты точки мембраны-полосы, в которой задается значения перемещений как функция времени, являющиеся исходными данными для обратной задачи. Соотношение (1.12) будем рассматривать в качестве интегрального уравнения Вольтерра первого рода [4], в котором неизвестной будет функция  $P(t)$ , а  $u(x,y,t)$  – правая часть.

Используя способ аппроксимации неизвестной функции кусочно-постоянными функциями во времени [23] получим на основе формулы (1.12) следующее выражение:

$$u(x,y,t_m) = \frac{1}{2a\rho} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \int_0^{t_m - |y|/a} P(\tau) \cdot K(t_m - \tau) d\tau, \quad (1.18)$$

где  $K(t) = J_0\left(a\pi/l \sqrt{t^2 - (|y|/a)^2}\right)$ .

Согласно указанному способу вводится дискретное с «шагом»  $\Delta t$  время  $t_m = m \cdot \Delta t$ , ( $m=1, 2, \dots, M$ ), причем  $T = M \cdot \Delta t$  – исследуемый промежуток времени, а функция  $P(t)$  будет постоянной и равной величине  $P_m = P(t_m)$  на каждом из промежутков времени от  $t_{m-1}$  до  $t_m$ .

Теперь выражение (1.18) можно переписать

$$u_m(x,y) = \frac{\sin(\pi x/l)}{2a\rho} \left[ P_m \int_{t_{m-1}}^{t_m - |y|/a} K(t_m - \tau) d\tau + \sum_{p=1}^{m-1} P_p \int_{t_{p-1}}^{t_p - |y|/a} K(t_m - \tau) d\tau \right]. \quad (1.19)$$

Укажем, что в выражении (1.19)  $u_m(x,y) = u(x,y,t_m)$  и что само это выражение есть дискретный аналог интегрального уравнения (1.12),

т.е. оно является алгебраическим уравнением для значений  $P_m$ . Из него находим эти величины последовательно для  $m=1,2,\dots,M$ .

$$P_m = \frac{u_m(x,y) - \frac{1}{2a\rho} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \sum_{p=1}^{m-1} P_p \cdot \int_{t_{p-1}}^{t_p - |y|/a} K(t_m - \tau) d\tau}{\frac{1}{2a\rho} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \int_0^{\Delta t} K(\tau) d\tau}. \quad (1.20)$$

При выводе (1.20) было использовано очевидное равенство

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} K(t_m - \tau) d\tau = \int_0^{\Delta t} K(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим случай, когда исходные данные для решения обратной задачи задаются в точке, находящейся непосредственно под нагрузкой. Для этого в выражение (1.20) подставляются значения перемещения мембраны, полученные при решении прямой задачи и отвечающие  $x=l/2$ ,  $y=0$ . Использование ЭВМ для расчетов и для графического построения функции  $P(t)$  дали возможность получить график изменения функции нагрузки во времени, представленный на рис. 1.4.

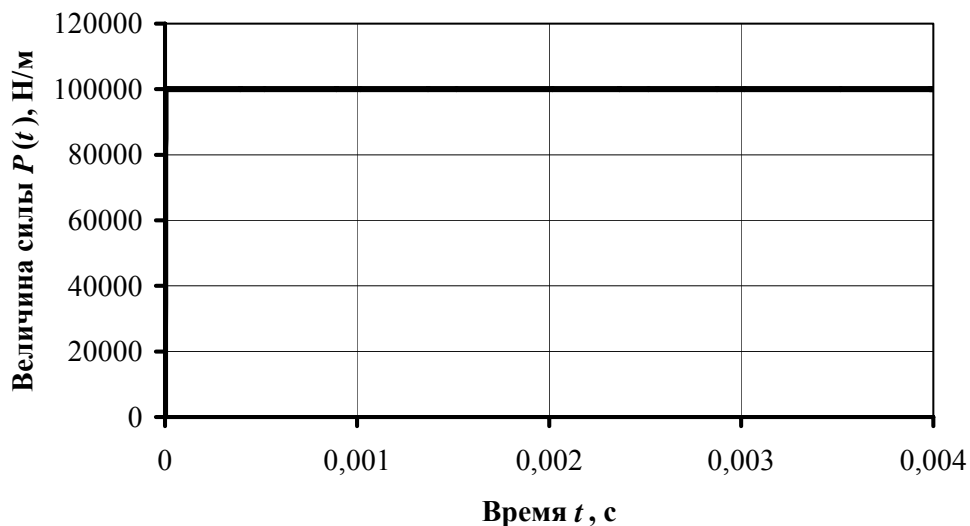


Рис. 1.4. Результаты решения обратной задачи

Легко видеть, что кривая, представленная на графике, соответствует функции  $P(t)=P_0 \cdot H(t)$ , что полностью согласуется с данными, принимаемыми для решения прямой задачи.

Далее рассматривается решение обратной задачи, когда точка регистрации перемещения удалена от точки приложения нагрузки, т.е.  $y \neq 0$ .

Восстановим функцию нагрузки в предположении, что в качестве исходных данных используются значения перемещения мембраны в точке  $y=0,4$  м, которые получаются при решении прямой задачи. Соответствующая кривая, отвечающая решению прямой задаче, представлена на рис. 1.5

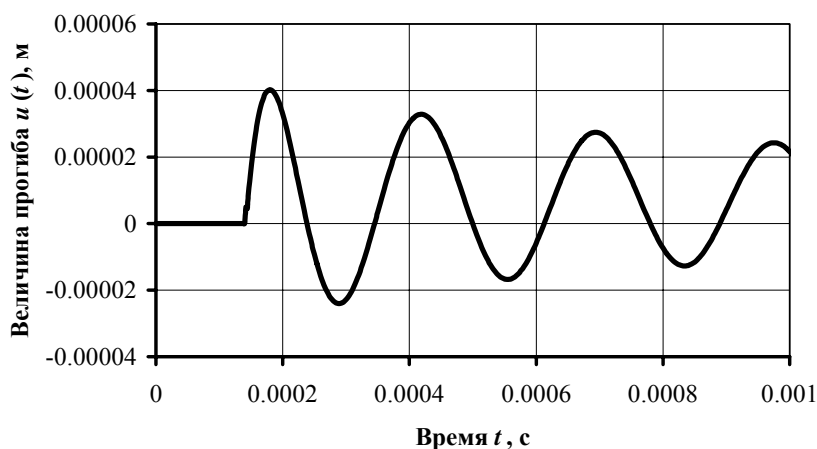


Рис. 1.5. Изменение прогиба во времени

На рис. 1.6 представлены три кривые, которые соответствуют функции нагрузки. Кривая 1 рассчитана при значении  $\Delta t=2 \cdot 10^{-5}$  с, кривая 2 –  $\Delta t=1 \cdot 10^{-5}$  с, а кривая 3 –  $\Delta t=2 \cdot 10^{-6}$  с. Наилучшее приближение к исходной нагрузке представляет кривая 3.

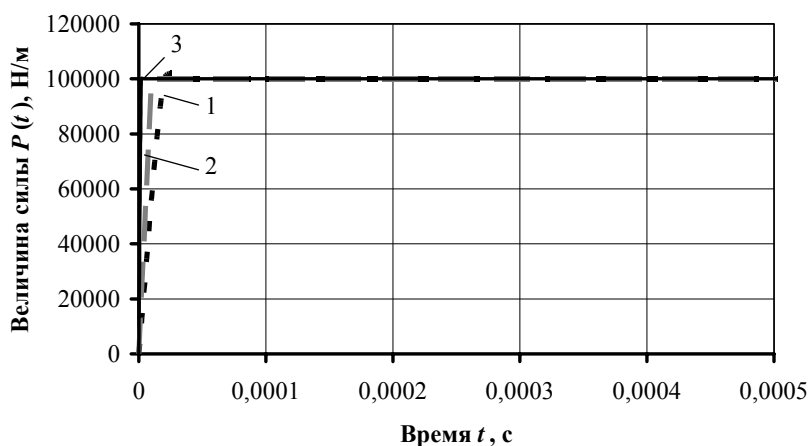


Рис. 1.6. Результаты решения обратной задачи

Рассмотренная задача относится к типу некорректных задач. Она сведена к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода с невырожденным ядром, численное решение которого было осуществлено способом, близким к методу квадратур, предложенным А.С. Апарциным [1]. Применение этого подхода позволило получить решение обратной поставленной задачи сравнительно простым способом, обладающим свойством регуляризации.

**1.1.4. Второй способ решения задачи об определении неизвестной нагрузки.** Второй способ решения обратной задачи об определении неизвестной нагрузки заключается по существу в сведении определяющего уравнения Вольтерра первого рода (1.12) к уравнению Вольтерра второго рода. Целесообразность такого подхода состоит в том, что, если удастся получить соответствующее уравнение Вольтера второго рода, то это позволяет избежать математических трудностей решения некорректной задачи [1].

Выполнив дифференцирование по времени левой и правой частей уравнения (1.12), получим следующее выражение

$$\dot{u}(x, y, t) = \frac{1}{2ap} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \left( P\left(t - \frac{|y|}{a}\right) - \frac{\pi}{l} \cdot a \cdot \int_0^{t - |y|/a} P(\tau) \cdot \dot{K}(t - \tau) d\tau \right), \quad (1.21)$$

где  $\dot{K}(t) = J_1\left(\frac{\pi}{l} \cdot a \cdot \sqrt{t^2 - (|y|/a)^2}\right) \cdot t / \sqrt{t^2 - (|y|/a)^2}$ .

Выражение (1.21) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Как и в первом способе, используя способ аппроксимации неизвестной функции кусочно-постоянными функциями во времени [23], получим выражение для определения значений  $P(t_m - |y|/a)$ :

$$P\left(t_m - \frac{|y|}{a}\right) = \frac{\dot{u}_m(x, y) \frac{2ap}{\sin(\pi x/l)} + \frac{\pi}{l} a \sum_{p=1}^{m-1} P\left(t_m - \frac{|y|}{a}\right) \int_{t_{p-1}}^{t_p - |y|/a} \dot{K}(t_m - \tau) d\tau}{1 - \frac{\pi}{l} a \int_{t_{m-1}}^{t_m - |y|/a} \dot{K}(t_m - \tau) d\tau}. \quad (1.22)$$

Вначале рассмотрим случай, когда точка регистрации перемещения находится непосредственно под нагрузкой. Для этого в выражение (1.22) подставляются значения перемещения мембраны, полученные при решении прямой задачи и отвечающие  $x=l/2$ ,  $y=0$ . Использование ЭВМ для расчетов и для графического построения функции  $P(t)$  дали возможность получить график изменения функции нагрузки во времени, который имеет почти такой же вид, как и график, представленный на рис. 1.4.

Отметим, что кривая изменения нагрузки во времени соответствует функции  $P(t)=P_0 \cdot H(t)$ ; она полностью согласуется с данными, принимаемыми для решения прямой задачи.

Далее рассмотрим случай, когда точка регистрации перемещения не находится непосредственно под нагрузкой, т.е.  $y=0.4$  м. На основании выражения (1.22) и численных данных, которые использовались ранее при решении прямой задачи, получим кривые изменения нагрузки во времени при условии, что нагрузка приложена в точке  $y=0$ , а регистрация перемещения осуществляется в точке  $y=0.4$  м. Соответствующие кривые, отвечающие решению прямой задачи, представлены на рис. 1.7. Отметим, что кривая 2 отвечающая скорости перемещения, получена численно с использованием метода конечных разностей. Причем эти кривые соответствуют шагу во времени  $\Delta t=2 \cdot 10^{-6}$  с.

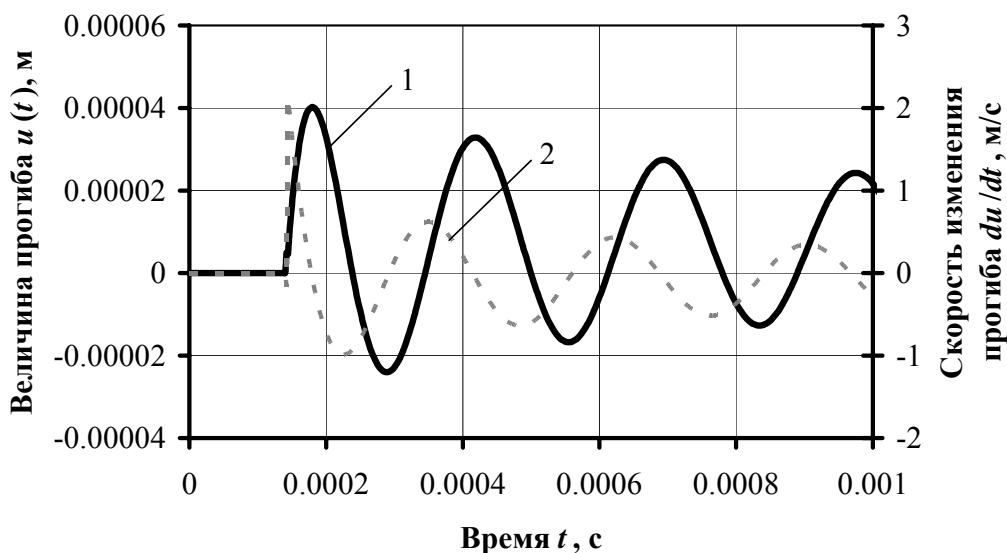


Рис. 1.7. Изменение прогиба и его первой производной во времени

Вид графика нагрузки, идентифицированной по приведенным исходным данным, практически совпадает с графиком на рис. 1.4.



В заключение материала, относящегося к нестационарным колебаниям мембраны-полосы, рассмотрим произвольное задание нагрузки. Пусть результат ее воздействия, т.е. прогиб мембраны в точке  $y=0.4$  м как функция времени имеет вид, представленный на рис. 1.8.

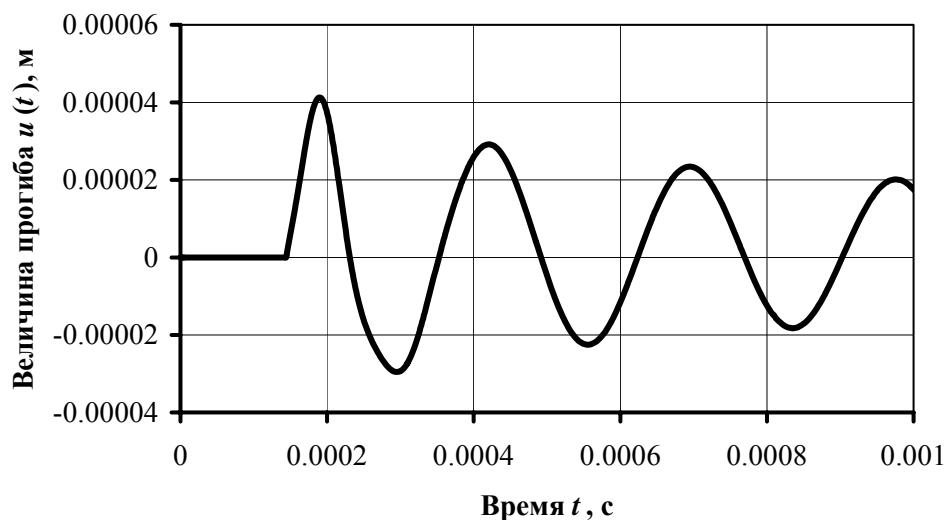


Рис. 1.8. Изменение прогиба во времени

Выполнив процедуру идентификации, получим изменение воздействующей нагрузки во времени, график которой приведен на рис. 1.9.

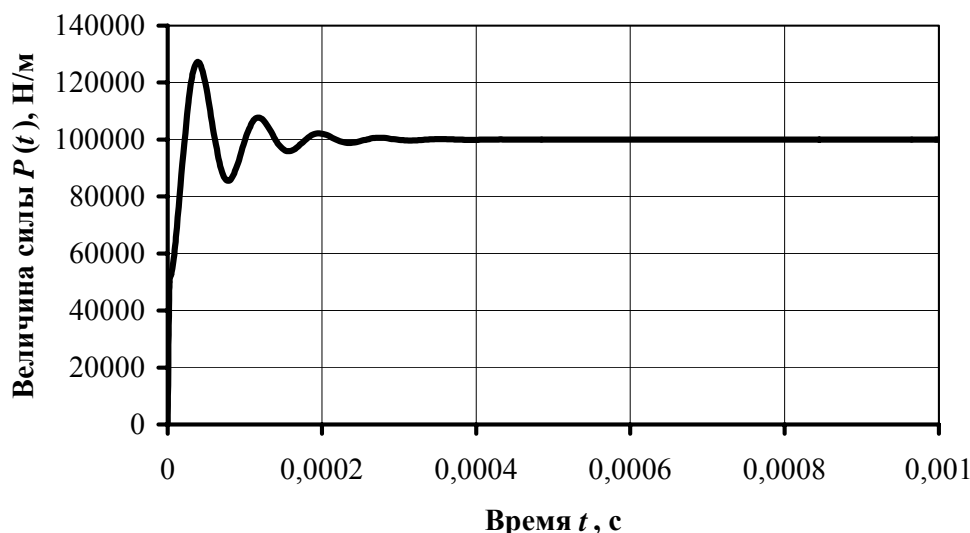


Рис. 1.9. Изменение нагрузки во времени

После того, как на основе полученной восстановленной нагрузки произвести расчет прогиба мембраны в соответствующей точке, будем иметь кривую прогиба, совпадающую с кривой на рис. 1.8.

Предложенные два способа решения обратной задачи по восстановлению временной составляющей нагрузки, действующей на мембрану-полосу, отличается друг от друга тем, что в одном случае решение основывается на анализе интегрального уравнения Вольтерра первого рода, а во втором – на уравнении второго рода. Простота и эффективность решения задачи обусловлена тем, что решение обратной задачи базируется на интегральных уравнениях с невырожденным ядром.

## 1.2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПЛАСТИНУ-ПОЛОСУ

**1.2.1. Решение задачи о воздействии на бесконечную пластину импульсных нагрузок.** Рассматривается прямая задача о воздействии импульсных нагрузок на пластину-полосу.

Пусть имеется прямоугольная пластина, ограниченная прямыми  $x=0$  и  $x=l$ . Вдоль оси  $y$  пластина является бесконечной, т.е.  $y \rightarrow \pm\infty$  (рис. 1.10).

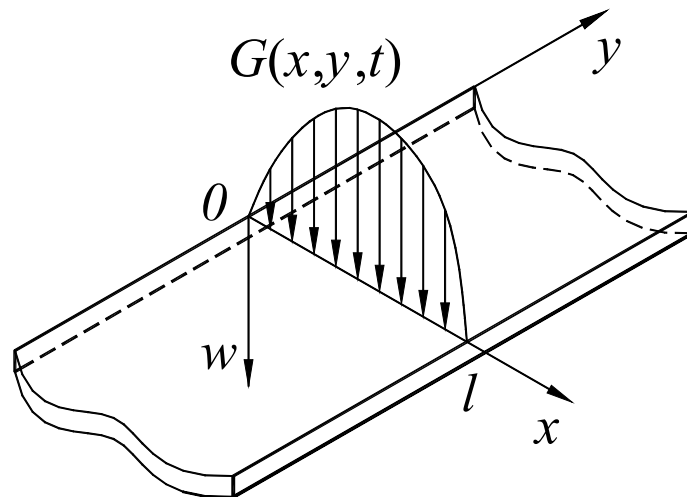


Рис. 1.10. Схема нагружения пластины

Прямая задача сводится к решению уравнения классической теории поперечных колебаний пластины [18]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = G(x, y, t), \quad (1.23)$$

где  $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$  – цилиндрическая жесткость;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $h$  – толщина пластины;  $w$  – прогиб;  $\rho$  – объемная плотность материала;  $t$  – время;  $G(x,y,t)$  – функция, описывающая нормальную поперечную нагрузку.

Задачу решаем с начальными условиями:

$$w|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (1.24)$$

и краевыми условиями, заданными на границе бесконечной пластины:

$$w|_{x=0,l} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0,l} = 0; \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} w(x,y,t) = 0. \quad (1.25)$$

Второе условие в выражениях (1.25) соответствует равенству нулю изгибающего момента на границе пластины.

Предположим, что внешняя нагрузка интенсивностью во времени  $P(t)$  сосредоточена в точке  $y=0$ , а по переменной  $x$  изменяется по закону синуса, т.е.

$$G(x,y,t) = P(t)\delta(y)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (1.26)$$

Применим к уравнению (1.23) преобразование Лапласа [9] и с учетом начальных условий (1.24) получим

$$D \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} w^L + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} w^L + \frac{\partial^4}{\partial y^4} w^L \right) + s^2 \rho h w^L = G^L(x,y,s). \quad (1.27)$$

Для отыскания решения уравнения (1.27), удовлетворяющего краевым условиям (1.25), представим искомую функцию  $w^L(x,y,s)$  в следующем виде:

$$w^L(x,y,s) = w_1^L(y,s) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (1.28)$$

К выражению (1.28) применим бесконечное преобразование Фурье [15] по переменной  $y$  и получим

$$w_1^{LF}(z,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{P^L(s)}{D(z^2 + \pi^2/l^2)^2 + \rho h s^2}. \quad (1.29)$$

К выражению (1.29) применим последовательно обратные преобразования Лапласа и Фурье. После выполнения обратного преобразования Лапласа [9] получим следующее выражение

$$w^F(x,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{c\rho h} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \int_0^t \frac{P(\tau)}{(z^2 + \pi^2/l^2)} \sin\left(c(z^2 + \pi^2/l^2)(t-\tau)\right) d\tau, \quad (1.30)$$

где  $c = \sqrt{D/\rho h}$ .

После выполнения обратного преобразования Фурье [15] будем иметь

$$w(x,y,t) = \frac{\sin(\pi x/l)}{2\pi c\rho h} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{P(\tau)}{(z^2 + \pi^2/l^2)} \sin\left(c\left(z^2 + \frac{\pi^2}{l^2}\right)(t-\tau)\right) d\tau \cos(|y|z) dz. \quad (1.31)$$

Рассмотрим вариант воздействия на пластину нагрузки для случая, когда в формуле (1.32) функция  $P(t)$  изменяется как единичная функция Хевисайда ( $P(t) = P_0 \cdot H(t)$ ). Укажем, что  $P_0$  – интенсивность приложенной нагрузки. Для такого нагружения формула (1.31) приобретает вид

$$w(x,y,t) = \frac{P_0}{\pi D} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos\left(c\left(z^2 + \pi^2/l^2\right)t\right)}{\left(z^2 + \pi^2/l^2\right)^2} \cos(|y|z) dz. \quad (1.32)$$

Для численного расчета прогиба бесконечной пластины согласно формуле (1.32) принимались следующие исходные данные:  $P_0 = 10^5$  Н/м;  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $l = 0,4$  м;  $h = l/11$  м;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Для удобства численных расчетов формула (1.32) преобразовывалась к следующей форме

$$w(x,y,t) = \frac{P_0}{\pi D} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)\Delta z}^{n\Delta z} \frac{1 - \cos\left(c\left(z^2 + \pi^2/l^2\right)t\right)}{\left(z^2 + \pi^2/l^2\right)^2} \cos(|y|z) dz, \quad (1.33)$$

где  $N$  – натуральное число,  $\Delta z$  – промежуток интегрирования. Эти

параметры определяются в процессе численного эксперимента.

На рис. 1.11 представлены результаты выполненных расчетов изменения во времени прогиба пластины в точке  $x=l/2, y=0$ .

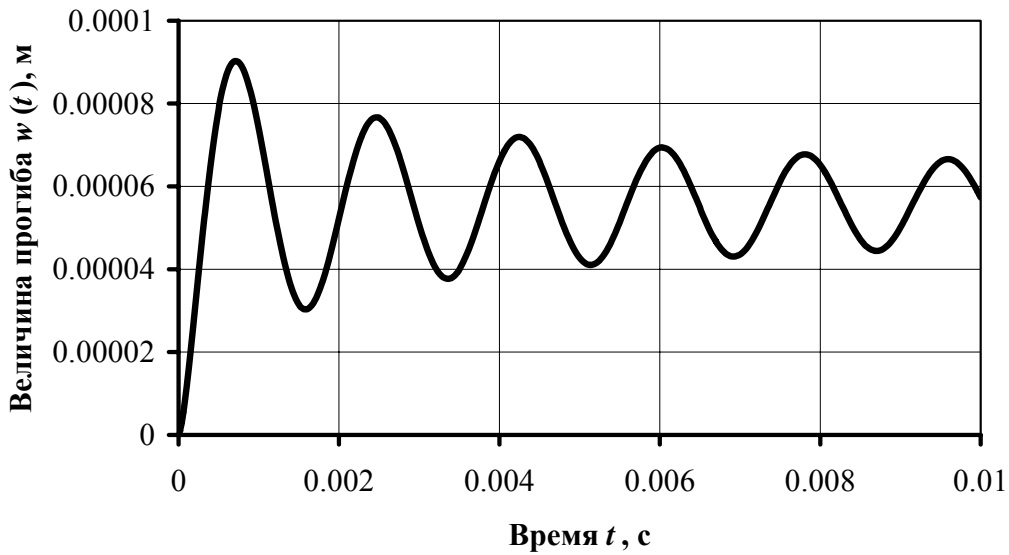


Рис. 1.11. Изменение прогиба во времени

Для проверки достоверности полученного решения сравним его с решением для пластины ограниченных размеров прямоугольной формы, которое получаем для варианта пластины теории Кирхгофа.

Упомянутое решение, отвечающее колебаниям прямоугольной пластины, описывается следующим выражением

$$w(x, y_1, t) = \frac{2P_0}{b\rho h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 - \cos(c_1 \lambda_n t)}{(c_1 \lambda_n)^2} \cdot \sin\left(\frac{n\pi \zeta}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_1}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]. \quad (1.34)$$

Выражение (1.34) записано в декартовой системе координат  $(x, y_1)$ . Связь между  $y$  и  $y_1$  такова, что ордината  $\xi=b/2$  отвечает середине длины пластины. В формуле (1.34)  $b$  – длина пластины;  $a$  – ее ширина;  $c_1 = \pi^2 \cdot \sqrt{D/\rho h}$ ;  $\lambda_n = \left(1/a^2 + n^2/b^2\right)$ . Кривые, получаемые при численном решении данного выражения показаны на рис. 1.12, причем кривая 3 соответствует кривой на рис. 1.11 если параметр  $b$  принять равным 20 м, что и подтверждает достоверность полученного решения (1.32). Кривая 1 –  $b=2$  м; кривая 2 –  $b=10$  м.

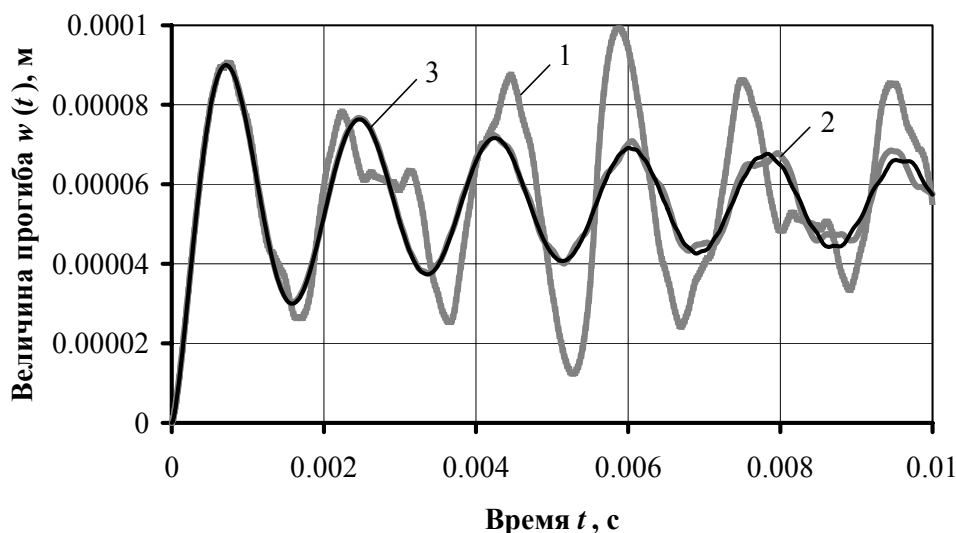


Рис. 1.12. Изменение прогиба во времени

Легко видеть, что при увеличении длины пластины, используемой для процесса численного эксперимента, соответствующие кривые сближаются с основной (рис. 1.12).

**1.2.2. Решение задачи об определении неизвестной нагрузки.** Для решения поставленной задачи использовалось выражение (1.31), которое будем рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра первого рода при фиксированных переменных  $x$  и  $y$ , и которое в общем случае имеет вид:

$$\int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t), \quad (1.35)$$

где  $K(t)$  – ядро интегрального уравнения;  $t$  – временная переменная;  $f(t)$  – заданная функция времени.

Для нахождения неизвестной нагрузки также использовались численные значения перемещения во времени  $w(x,y,t)$ , которые были получены при решении прямой задачи и которые входили в правую часть уравнения (1.35). Причем решение прямой задачи здесь осуществлялось в матричной форме для удобства расчета на ЭВМ.

Используемое соотношение для решения прямой задачи в матричной форме имело вид

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad (1.36)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица, соответствующая ядру  $K(t-\tau)$ , элементы которой находятся по формуле  $a_{ij}=K((i-j)\Delta t)$ ;  $\Delta t=T/M$  – шаг во времени ( $T$  –

рассматриваемый промежуток времени;  $M$  – количество разбиений промежутка времени, принятом при исследовании).

В нашем случае

$$K(t) = \frac{\Delta z}{\pi c \rho h} \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(c\left((n \cdot \Delta z)^2 + \pi^2/l^2\right)t\right) \cos(|y|(n \cdot \Delta z))}{(n \cdot \Delta z)^2 + \pi^2/l^2}.$$

Здесь  $\Delta z = Z/N$  – шаг интегрирования ( $Z$  – интервал интегрирования) (см. (1.31)). Кривая прогиба, получаемая в соответствии с выражением (1.36), совпадает с графиком на рис. 1.11.

С целью избежания математических трудностей при решении некорректной обратной задачи, можно перейти от уравнения Вольтерра первого рода к уравнению Вольтерра второго рода, выполнив дифференцирование по времени соответствующего уравнения. С учетом этого, выражение для определения неизвестной нагрузки будет иметь вид

$$\mathbf{P} = \dot{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{w}}, \quad (1.37)$$

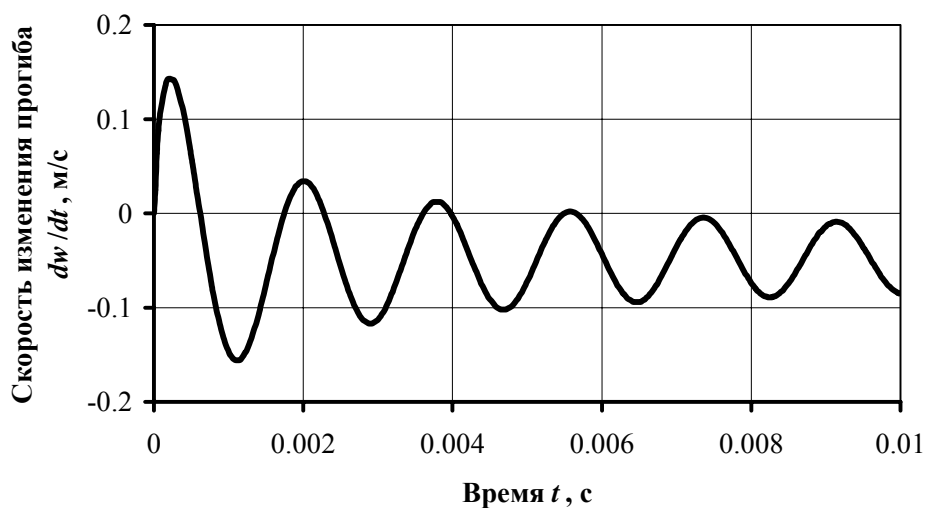
где  $\dot{\mathbf{A}}^{-1}$  – обратная матрица  $\dot{\mathbf{A}}$ ;  $\dot{\mathbf{w}}$  – скорость изменения перемещения, и она равна  $\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}$ . Здесь  $\dot{\mathbf{A}}$  – матрица, соответствующая продифференцированному ядру  $K(t-\tau)$  по времени, и это ядро равно

$$\dot{K}(t) = \frac{\Delta z}{\pi \rho h} \sum_{n=1}^N \cos\left(c\left((n \cdot \Delta z)^2 + \frac{\pi^2}{l^2}\right)t\right) \cdot \cos(|y|(n \cdot \Delta z)).$$

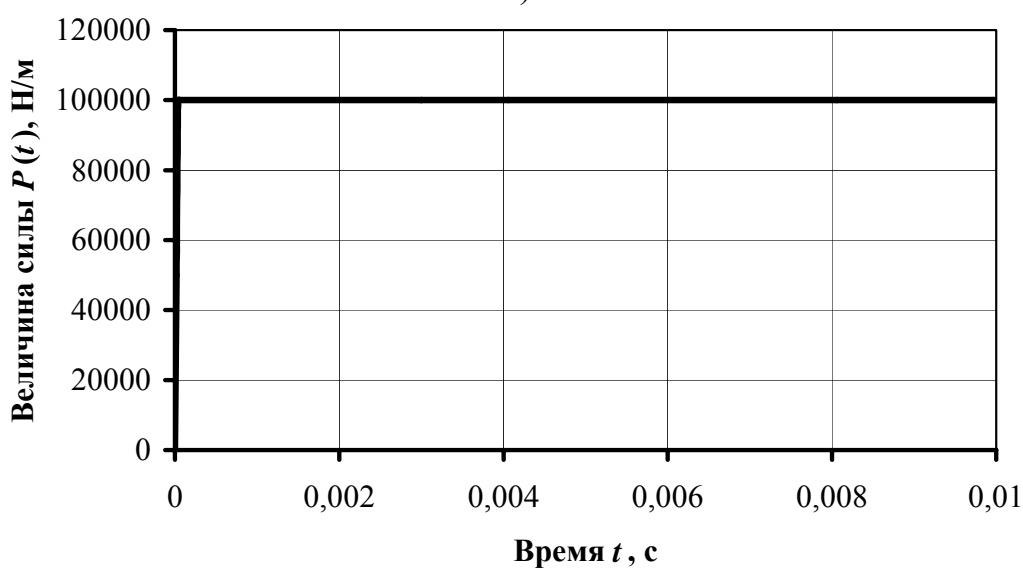
Вначале рассмотрим случай, когда точка регистрации перемещения находится непосредственно под нагрузкой. Для этого в выражение (1.37) подставляются значения скоростей изменения перемещения пластины, отвечающие  $x=l/2$ ,  $y=0$ . В соответствии с выражением (1.37) получим график изменения функции нагрузки во времени, представленный на рис. 1.13.

На рис. 1.13,а показана кривая, соответствующая скорости изменения прогиба в точке  $x=l/2$ ,  $y=0$ .

Из рис. 1.13,б видно, что кривая изменения нагрузки во времени соответствует функции  $P(t) = P_0 \cdot H(t)$ ; она полностью согласуется с данными, принимаемыми для решения прямой задачи.



a)



б)

Рис. 1.13. Изменение первой производной прогиба во времени (а) и идентифицированной нагрузки (б)

Далее рассмотрим случай, когда точка регистрации перемещения не находится непосредственно под нагрузкой ( $y=0,15$  м). На основании выражения (1.36) и численных данных, которые использовались ранее при решении прямой задачи, получим кривые изменения нагрузки во времени при условии, что нагрузка приложена в точке  $y=0$ , а регистрация перемещения осуществляется в точке  $y=0,15$  м. Соответствующие кривые, отвечающие решению прямой задачи, представлены на рис. 1.14.

Численные значения графиков, представленных на рис. 1.14, являются исходными данными для идентификации (восстановления) временной зависимости нагрузки, действующей на пласти-



ну. Вид графика нагрузки, идентифицированной по приведенным исходным данным, практически совпадает с графиком, представленным на рис. 1.13,б.

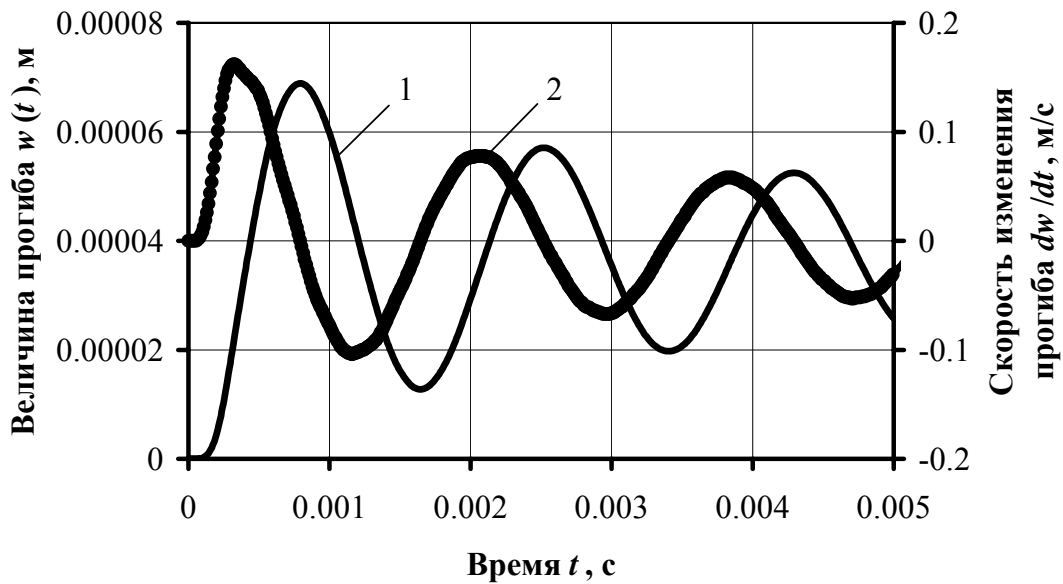


Рис. 1.14. Изменение прогиба и его первой производной во времени

В заключение рассмотрим произвольное задание нагрузки на двух примерах.

Пример I: пусть результат ее воздействия, т.е. прогиб пластины в точке  $y=0,15$  м как функция времени и его скорость изменения имеют вид, указанный на рис. 1.15.

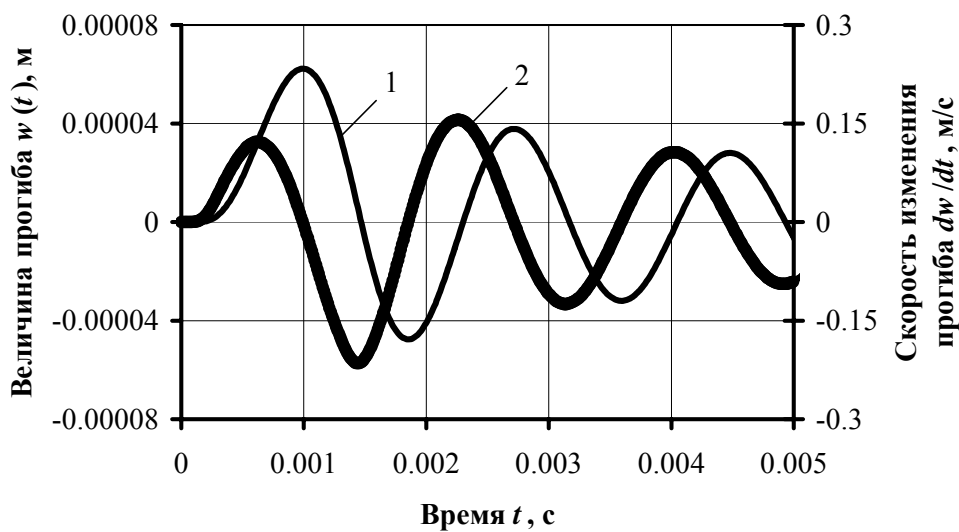


Рис. 1.15. Изменение прогиба и его первой производной во времени

Выполнив процедуру идентификации, получим изменение воздействующей нагрузки во времени, график которой приведен на рис. 1.16.

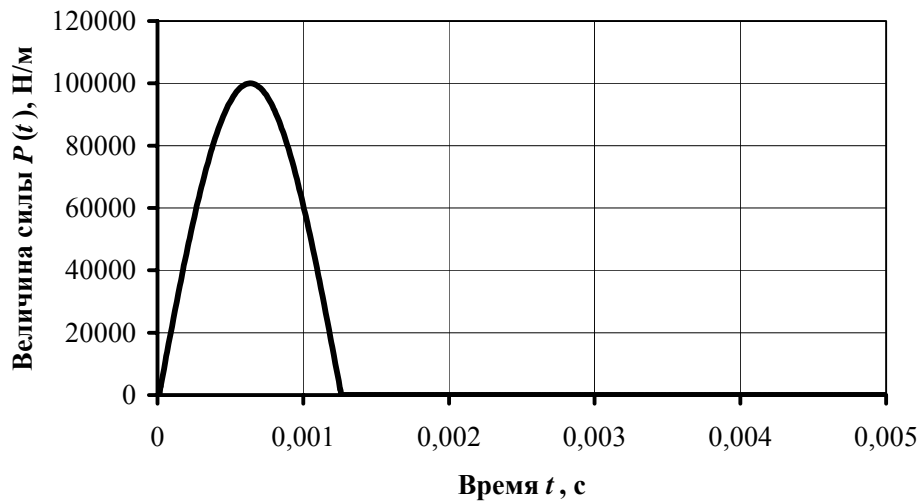


Рис. 1.16. Изменение нагрузки во времени

После того как на основе полученной восстановленной нагрузки произвести расчет прогиба пластины в соответствующей точке, то получим кривую прогиба, совпадающую с соответствующей кривой, изображенной на рис. 1.15

Пример II: прогиб пластины в точке  $y=0,15$  м как функция времени и его скорость изменения имеют следующий вид (рис. 1.17).

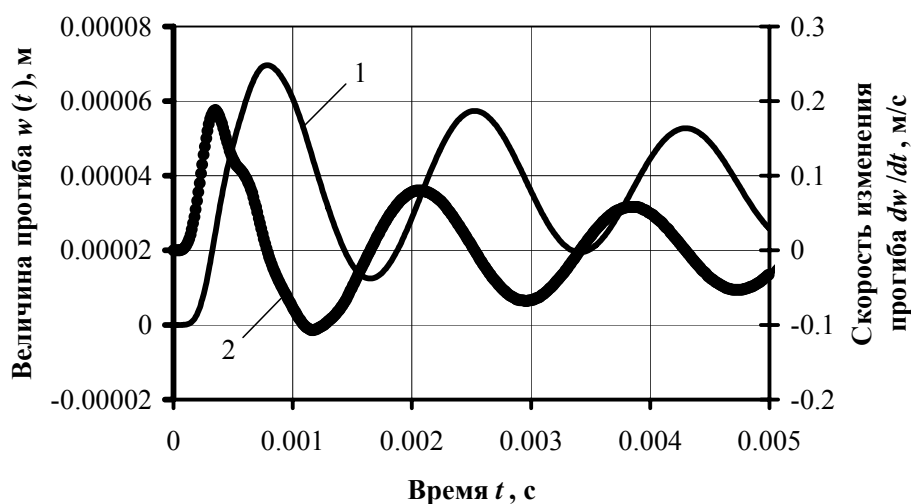


Рис. 1.17. Изменение прогиба и его первой производной во времени

Выполнив процедуру восстановления воздействующей нагрузки, получим ее изменение во времени, график которой приведен на рис. 1.18.

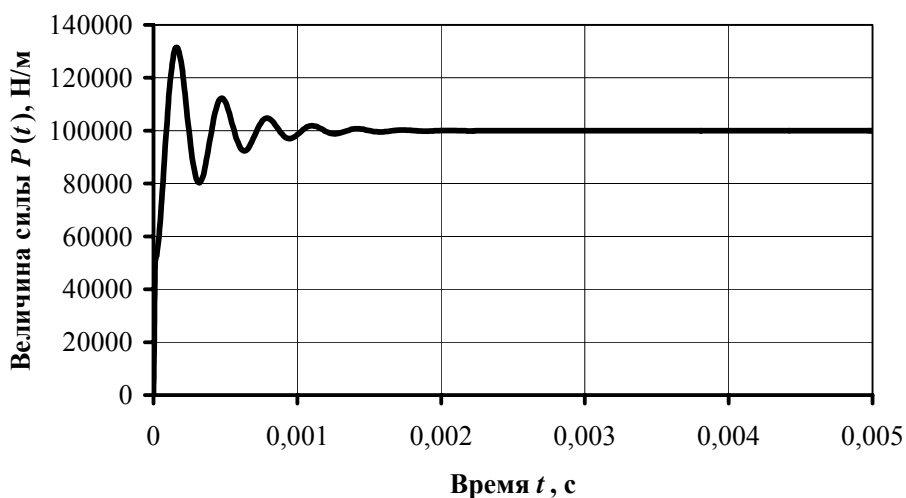


Рис. 1.18. Изменение нагрузки во времени

Если произвести расчет прогиба пластины в соответствующей точке по идентифицированной нагрузке, то будем иметь кривую прогиба, совпадающую с кривой на рис. 1.17.

Как уже указывалось, рассмотренные задачи относятся к классу некорректных задач. Они сводятся к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода с невырожденным ядром, численное решение которого было осуществлено способом, предложенным А.С. Апарциным [1].

## ГЛАВА 2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК И СИСТЕМ БАЛОК

В данной главе рассматриваются задачи об импульсном воздействии нагрузки на однопролетную упругую балку и задачи нестационарного импульсного деформирования механической системы состоящей из двух балок. Рассмотрены прямые и обратные задачи для таких систем при воздействии внешней нестационарной нагрузки. Достоверность исследуется путем сопоставления результатов с полученными ранее результатами для однопролетных балок, а также на основе конечно-элементного моделирования.

### 2.1. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ НА БАЛКУ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗОК

Рассматривается воздействие равномерно распределенной по некоторой площадке нагрузки  $P(t)$  на однопролетную балку длиной  $l$ .

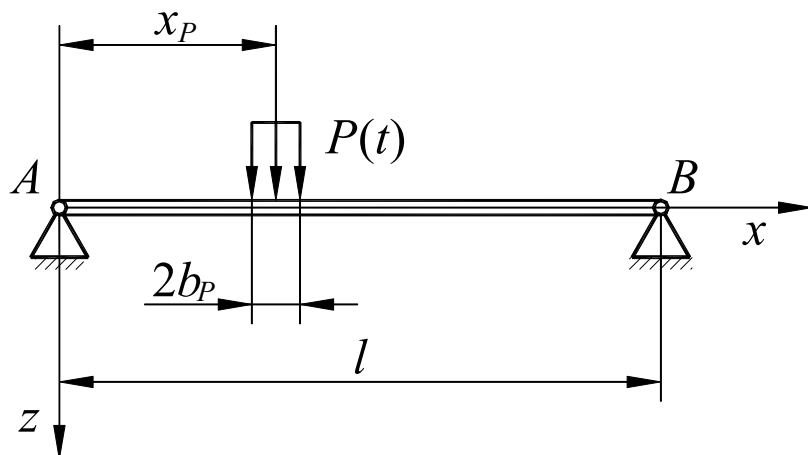


Рис. 2.1. Схема нагружения балки

Исследование поперечных колебаний балки производится на основе уточненной теории, соответствующей модели балки типа Тимошенко [16]. Согласно которой система уравнений, описывающая колебания балки, имеет вид

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k' \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) FG = q(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) FG - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $E$  – модуль Юнга;  $G$  – модуль сдвига;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $I$  – момент инерции сечения;  $k'$  – коэффициент сдвига;  $w$  – прогиб балки;  $\psi$  – угол поворота поперечного сечения;  $x$  – осевая координата;  $t$  – время;  $q(x, t)$  – функция нормальной нагрузки, в данном случае  $q(x, t) = P(t) \cdot (H(x - x_P + b_P) - H(x - x_P - b_P))$ .

Решение системы уравнений (2.1) будем искать в предположении граничных условий соответствующих шарнирному опиранию балки, а также нулевых начальных условий.

$$\begin{aligned} w(x, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0; \\ w(0, t) = w(l, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее решение производим по методике, изложенной в [6]. Разложим искомые функции прогиба и угла поворота поперечного сечения балки, входящие в систему уравнений (2.1), в виде соответствующих рядов

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad \psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (2.3)$$

Подставим приведенные выражения в исходную систему уравнений и умножим первое и второе уравнения на  $\sin(n\pi x/l)$  и  $\cos(n\pi x/l)$  соответственно ( $n, k = 0, 1, 2, \dots$ ). Проинтегрируем полученные выражения в интервале  $0 \leq x \leq l$ .

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \rho F \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_k(t)}{\partial t^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \\
& + \int_0^l k'FG \left[ \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right] dx = \\
& = \frac{P(t)l}{n\pi x} \left( \cos \left( \frac{n\pi}{l} (x_P - b_P) \right) - \cos \left( \frac{n\pi}{l} (x_P + b_P) \right) \right); \\
& \int_0^l EI \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \\
& + \int_0^l k'FG \left[ \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \right] dx - \\
& - \int_0^l I\rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Преобразуем полученную систему уравнений, используя свойства ортогональности тригонометрических функций

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_k(t)}{\partial t^2} + (b + c\lambda_k^2) \psi_k(t) - b\lambda_k w_k(t) = 0; \\ \frac{\partial^2 w_k(t)}{\partial t^2} + a \left[ w_k(t) \lambda_k^2 - \psi_k(t) \lambda_k \right] = \\ = \frac{2P(t)}{\rho Fl} \frac{1}{\lambda_k} \left( \cos \lambda_k (x_P - b_P) - \cos \lambda_k (x_P + b_P) \right), \end{cases} \tag{2.5}$$

где  $\lambda_k = k\pi/l$ ,  $a = k'G/\rho$ ,  $b = k'GF/\rho I$ ,  $c = E/\rho$ .

Полученную систему дифференциальных уравнений (2.5) будем решать с помощью интегрального преобразования Лапласа. Обозначим изображения функций  $\psi_k(t)$  и  $w_k(t)$  как  $\psi_k^L(s)$  и  $w_k^L(s)$ , функции  $P(t) \lambda_k^{-1} (\cos \lambda_k (x_P - b_P) - \cos \lambda_k (x_P + b_P))$  – как  $P_k^L(s)$ . Перепишем систему уравнений в пространстве изображений

$$\begin{cases} (s^2 + b + c\lambda_k^2)\psi_k^L(s) - b\lambda_k w_k^L(s) = 0; \\ -a\lambda_k \psi_k^L(s) + (s^2 + a\lambda_k^2)w_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} P_k^L(s). \end{cases} \quad (2.6)$$

Для решения системы уравнений (2.6) относительно величин  $w_k^L(s)$  и  $\psi_k^L(s)$  воспользуемся методом Крамера

$$\psi_k^L(s) = \Delta_\psi / \Delta; \quad w_k^L(s) = \Delta_w / \Delta, \quad (2.7)$$

где  $\Delta = (s^2 + b + c\lambda_k^2)(s^2 + a\lambda_k^2) - ab\lambda_k^2$ ;  $\Delta_w = (2/\rho Fl) \cdot P_k^L(s) \cdot (s^2 + b + c\lambda_k^2)$ ;  
 $\Delta_\psi = b\lambda_k \cdot (2/\rho Fl) \cdot P_k^L(s)$ .

Подставив необходимые выражения, получим

$$\begin{aligned} \psi_k^L(s) &= \frac{2}{\rho Fl} \frac{b\lambda_k P_k^L(s)}{s^4 + ((a+c)\lambda_k^2 + b)s^2 + ac\lambda_k^4}; \\ w_k^L(s) &= \frac{2}{\rho Fl} \frac{(s^2 + b + c\lambda_k^2)P_k^L(s)}{s^4 + ((a+c)\lambda_k^2 + b)s^2 + ac\lambda_k^4}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рассмотрим выражение для определения прогиба балки

$$w_k^L(s) = \frac{P_k^L(s) Q_k(s)}{\Delta(s)}, \quad (2.9)$$

где  $Q_k(s) = \frac{2}{\rho Fl} (s^2 + b + c\lambda_k^2)$ ;  $\omega_{1,2k}^2 = [(a+c)\lambda_k^2 + b \pm D_k] / 2$  (здесь

$\pm \omega_{1,2k}^2 = s_{1..4k}$  – корни уравнения  $\Delta(s) = 0$ );  $D_k = \sqrt{((a+c)\lambda_k^2 + b)^2 - 4ac\lambda_k^4}$ .

Оригинал искомой функции можно представить в виде [2]

$$w_k(t) = P_k(t) \cdot F_k(t), \quad (2.10)$$

где  $F_k(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{Q_k(s_{jk})}{\Delta'(s_{jk})} e^{s_{jk}t}$ .

С учетом ранее принятых обозначений, функция примет вид

$$F_k(t) = \frac{b + c\lambda_k^2 - \omega_{1k}^2}{-\omega_{1k}D_k} \sin \omega_{1k}t + \frac{b + c\lambda_k^2 - \omega_{2k}^2}{\omega_{2k}D_k} \sin \omega_{2k}t. \quad (2.11)$$

Используя теорему о свертке [2] получим

$$w_k(t) = \frac{2}{\rho Fl \lambda_k} (\cos(\lambda_k(x_P - b_P)) - \cos(x_P + b_P)) \times \\ \times \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \sin \omega_{ik}(t - \tau) d\tau, \quad (2.12)$$

где  $C_{ik} = (b + c\lambda_k^2 - \omega_{ik}^2) / \omega_{ik}D_k$ .

Произведем аналогичные преобразования для определения угла поворота поперечного сечения балки и подставим полученные выражения в (2.3).

$$w(x,t) = \frac{4}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k x_P \sin \lambda_k b_P \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \times \\ \times C_{ik} \sin \omega_{ik}(t - \tau) d\tau \sin \lambda_k x; \quad (2.13)$$

$$\psi(x,t) = \frac{4b}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x_P \sin \lambda_k b_P \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik}D_k} \times \\ \times \sin \omega_{ik}(t - \tau) d\tau \cos \lambda_k x.$$

Используя полученные выражения, а также известные соотношения теории упругости, можно определить необходимые параметры НДС системы. Так, часто в процессе экспериментальных исследований с применением тензометрических датчиков приходится иметь дело с деформациями, возникающими на поверхности исследуемого объекта. Деформации, возникающие вдоль оси  $Ox$  на нижней поверхности балки, определяются по следующей зависимости

$$\varepsilon_x = \frac{h}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.14)$$

где  $h$  – высота поперечного сечения



Запишем выражение для определения деформаций

$$\varepsilon_x(x,t) = \frac{2bh}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin \lambda_k x_P \sin \lambda_k b_P \times \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik} D_k} \sin \omega_{ik}(t-\tau) d\tau \sin \lambda_k x. \quad (2.15)$$

В общем виде, форма записи полученных выражений для прогиба и угла поворота и деформаций имеет вид

$$f(t) = \int_0^t K(t-\tau) P(\tau) d\tau, \quad (2.16)$$

где  $f(t)$  – искомая функция.

Заменим в правой части (2.16) интеграл соответствующей ему интегральной суммой [21], применив кусочно-постоянную аппроксимацию функций времени и сетку с равномерным шагом  $\Delta t = T/M$ , причем  $T$  – исследуемый промежуток времени,

$$f(t_m) = \sum_{p=1}^m P_p \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} K(m\Delta t - \tau) d\tau, \quad (2.17)$$

где  $m=0,1,\dots,M$ ;  $M$  – число временных интервалов.

Выражение (2.16) представим в операторной форме

$$f = A \cdot P, \quad (2.18)$$

здесь  $A$  – интегральный оператор, соответствующий ядру  $K(t)$ .

При вычислениях на ПЭВМ удобно пользоваться следующей формой для записи искомых величин, представляя указанные величины в матричной форме

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{P}, \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{f}$  – вектор столбец, соответствующий искомой функции;  $\mathbf{P}$  – известный вектор столбец нагрузки, значения элементов которого соответствуют значениям силы в момент времени  $m\Delta t$ ;  $\mathbf{A}_f$  – конечно-разностный аналог оператора  $A$ .

Элементы нижнетреугольных матриц  $\mathbf{A}_W$ ,  $\mathbf{A}_\Psi$  и  $\mathbf{A}_E$ , согласно принятой в (2.17) схеме аппроксимации, находятся как

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{W_{m,p}} &= \frac{8}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k x_P \sin \lambda_k b_P \sin \lambda_k x}{\lambda_k} \times \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i C_{ik}}{\omega_{ik}} \sin \omega_{ik} \Delta t \left( m - p + \frac{1}{2} \right) \sin \omega_{ik} \frac{\Delta t}{2}; \\
 \mathbf{A}_{\Psi_{m,p}} &= \frac{8b}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x_P \sin \lambda_k b_P \cos \lambda_k x \times \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik}^2 D_k} \sin \omega_{ik} \Delta t \left( m - p + \frac{1}{2} \right) \sin \omega_{ik} \frac{\Delta t}{2}; \\
 \mathbf{A}_{E_{m,p}} &= \frac{4b}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin \lambda_k x_P \sin \lambda_k b_P \sin \lambda_k x \times \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik}^2 D_k} \sin \omega_{ik} \Delta t \left( m - p + \frac{1}{2} \right) \sin \omega_{ik} \frac{\Delta t}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

В качестве примера для численного расчета исследовались колебания стальной балки квадратного поперечного сечения. Геометрические и физические параметры балки, взятые из монографии [12], приведены далее:  $l=0.8$  м;  $h=0.04$  м;  $x_P=l/2$ ;  $b_P=l/20$ ;  $\rho=7950$  кг/м<sup>3</sup>;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;  $G=8.08 \cdot 10^4$  МПа;  $k'=6/5$ .

Рассмотрим закон изменения воздействующей нагрузки во времени, соответствующий полуволне синуса. Функция нагружения в данном случае описывается зависимостью  $P(t)=P_0 \cdot \sin(\pi t/t_0) \cdot (H(t)-H(t-t_0))$ . Максимальное значение нагрузки  $P_0=80$  кН/м, длительность воздействия импульса  $t_0=0.006$  с. На рис. 2.2 сплошной линией изображен график прогиба точки  $x=l/8$ , а прерывистой – соответствующий ему график нагружения.

Тригонометрический ряд в выражениях (2.20), который содержит сумму членов от 1 до  $\infty$ , при численном решении был заменен  $K$ -частичной суммой ряда. Естественно при этом возникает необходимость оценки учитываемого числа членов ряда, которая будет

приведена далее. Выбор величины шага по времени  $\Delta t$  при численном расчете, как правило, при решении прямой задачи обусловлен характером изменения исследуемой кривой во времени. При расчете принималось  $\Delta t=6\cdot 10^{-5}$  с, что соответствует  $M=400$  разбиений исследуемого временного интервала, а число членов в соответствующих рядах было принято равным 32, что обеспечивает одинаковое визуальное восприятие кривых перемещения на графике.

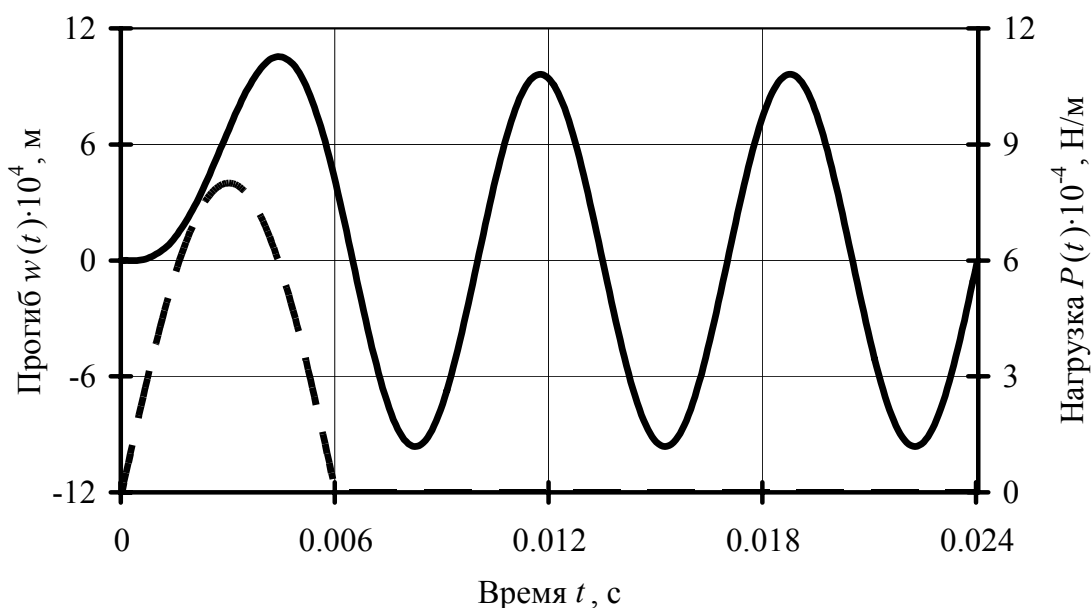


Рис. 2.2. Изменение прогиба балки и возмущающей силы

Анализ конструкций с использованием метода конечных элементов (МКЭ), с помощью которого производилась оценка достоверности полученных результатов, является в настоящее время фактическим мировым стандартом для прочностных и других расчетов конструкций. Основой этого служит универсальность МКЭ, позволяющая единым способом рассчитывать различные конструкции с разными свойствами материалов [20].

Для расчета с помощью МКЭ была построена модель балки и условно разбита на конечные элементы. Прикладываемые внешние нагрузки и условия закрепления торцов балки приняты согласно приведенной ранее схемы (см. рис. 2.1).

При расчетах принимались следующие параметры:  $x_p=l/4$ ,  $b_p=l/20$ , остальные данные аналогичны предыдущей задаче. Результаты моделирования приведены на рис. 2.3. Кривой 1 соответствует закон изменения прикладываемой нагрузки, кривые 2 и 3 —

графики изменения прогиба точки  $x_P=7l/8$ , полученные с помощью МКЭ и методики приведенной ранее соответственно.

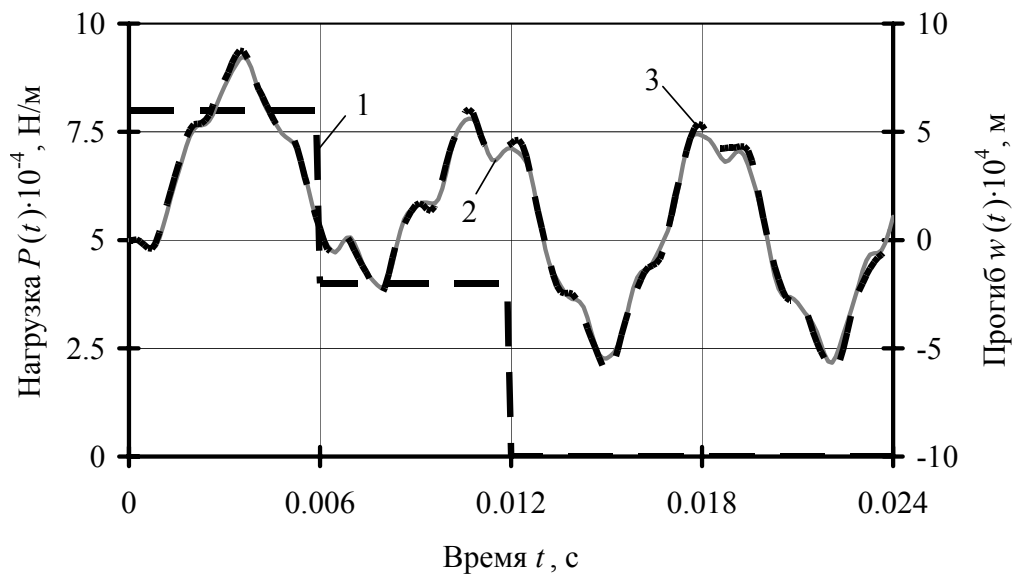
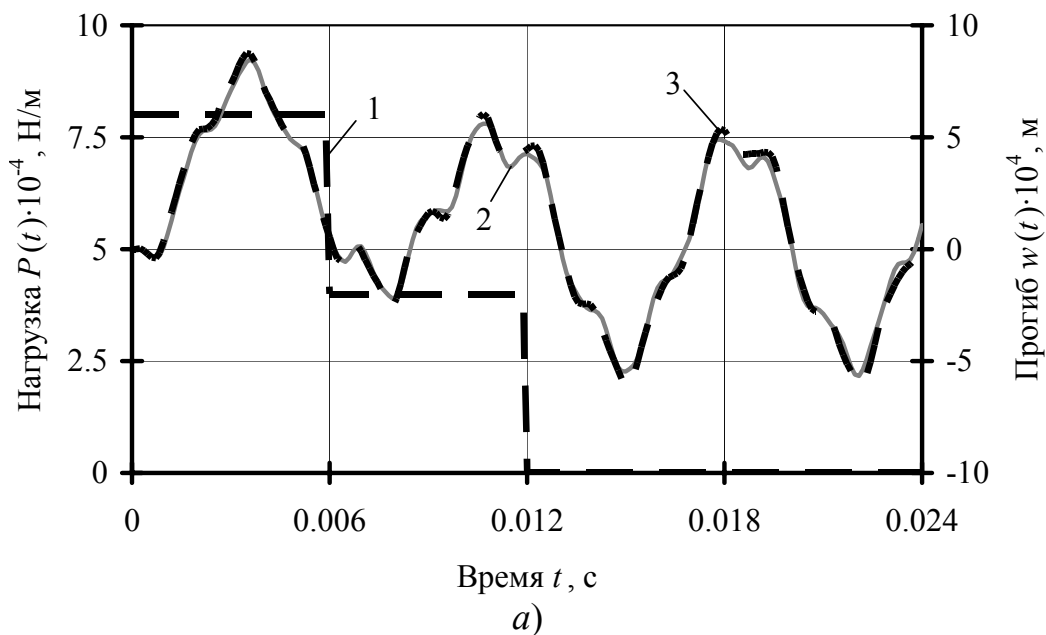


Рис. 2.3. Изменение прогиба балки и действующей нагрузки

Результаты подобных исследований для угла поворота поперечного сечения и осевых деформаций, возникающих на поверхности балки, приведены на рис. 2.4.

Отметим, что приведенные результаты свидетельствуют о высокой достоверности полученных результатов, поскольку значения решения, полученные разными способами, хорошо совпадают.



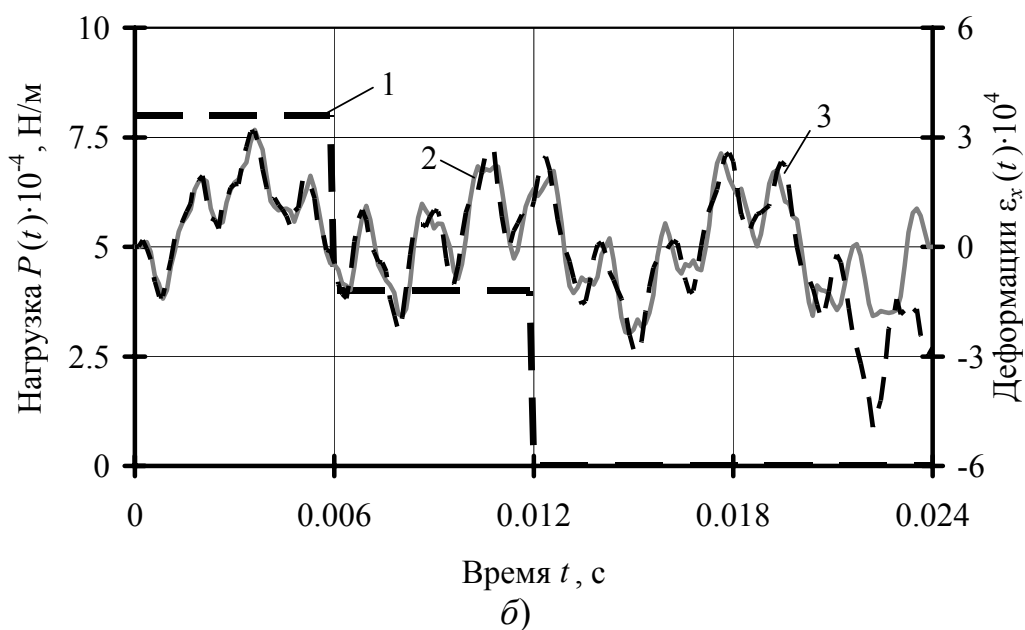


Рис. 2.4. Изменение прогиба балки и действующей нагрузки

## 2.2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВНЕШНЕЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

Пусть на систему, изображенную на рис. 2.5, действует некоторая равномерно распределенная на некотором участке балки нагрузка. Изменение нагрузки во времени происходит согласно некоторой функции  $P(t)$ , которая является неизвестной и которая есть целью процедуры идентификации.

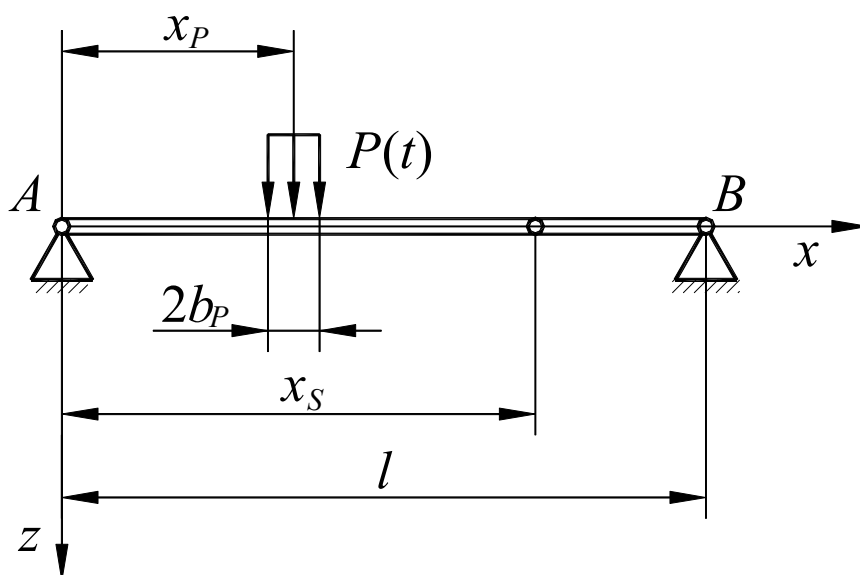


Рис. 2.5. Схема исследуемой балки

Предположим, что деформации  $\varepsilon_x(x_S, t)$  в точке  $x_S$ , которые, например, можно измерить с помощью датчика, являются заданным во времени. В этом случае решение обратной задачи по идентификации импульсного воздействия сводится к решению следующего интегрального уравнения

$$\frac{2bh}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin \lambda_k x_P \sin \lambda_k b_P \times \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik} D_k} \sin \omega_{ik} (t-\tau) d\tau \sin \lambda_k x_S = \varepsilon_x(x_S, t). \quad (2.21)$$

Укажем, что в этом уравнении неизвестная функция  $P(t)$ , а функция деформаций  $\varepsilon_x(x_S, t)$  является заданной и измеряется, например, в процессе соответствующего эксперимента. Пусть возникает задача обработки наблюдений, которая состоит в определении силового воздействия  $P(t)$  на механическую систему по данным наблюдений –  $\varepsilon_x(x_S, t)$ .

Сформулированная обратная задача, как и большинство обратных задач, относится к классу некорректно поставленных задач [7] – малым возмущениям исходных данных, в принципе, могут соответствовать большие возмущения решения. Отметим, что исходные данные для задач такого рода, как правило, искажены, поскольку они получаются из наблюдений. Поэтому необходимо использовать специальные методы решения, которые будут иметь приемлемую точность и для случая «зашумленности» исходных данных, выражающейся в накладывании на исходные данные случайной погрешности измерений и вычислительных преобразований.

Интегральное уравнение (2.21), которое является интегральным уравнением типа Вольтерра I-го рода, в общем виде можно записать как [17]

$$Az \equiv \int_0^t K(t, \tau) z(\tau) d\tau = u(t), \quad (2.22)$$

где  $z$  – искомая функция;  $u$  – функция, соответствующая правой части уравнения (2.21);  $A$  – некоторый математический оператор, для случая задания уравнения в операторной форме.

Проблема решения уравнений подобного типа сложна. Это обусловлено тем, что задача приближенного (численного) решения уравнений Вольтерра I рода лежит на стыке “классической” вычислительной математики и теории решения некорректно поставленных задач. Дело в том, что уравнения Вольтерра – частный случай уравнений Фредгольма I рода, являющихся некорректно поставленными в любых “разумных” функциональных пространствах [17, 1], поэтому для численного решения вольтерровых уравнений могут быть использованы методы регуляризации некорректных задач. Далее будут рассмотрены эффективные методы решения уравнения (2.21), одним из которых является метод  $h$ -регуляризации А. С. Апарцина.

Применение метода А.С. Апарцина, при идентификации внешнего нагружения, приведено ниже.

Рассмотрим интегральное уравнение (2.21). Продифференцируем левую и правую часть уравнения по времени

$$\int_0^t K'_i(t, \tau) z(\tau) d\tau = u'_i(t), \quad (2.23)$$

при этом уравнение (2.21) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_x(x_S, t)}{\partial t} = & \frac{2bh}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin \lambda_k x_P \sin \lambda_k b_P \times \\ & \times \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{D_k} \cos \omega_{ik}(t-\tau) d\tau \sin \lambda_k x_S, \end{aligned} \quad (2.24)$$

а ядро интегрального уравнения, как видно, станет невырожденным. Неизвестную силу  $P(t)$  будем определять на основе уравнения (2.24).

Аппроксимируем входящие в уравнение интегралы как это было показано ранее, при получении решения для матричного аналога искомой функции. Соответствующее этому уравнение имеет вид

$$\mathbf{A}_E \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\varepsilon}'_x. \quad (2.25)$$

Решение уравнения записывается следующим образом

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_E^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_x. \quad (2.26)$$

где  $\mathbf{A}_E^{-1}$  – обратная к  $\mathbf{A}_E$  матрица.

Численные результаты по идентификации нагружения приведены далее. На рис. 2.6 приведен график восстановленной временной зависимости равномерно распределенной нагрузки (кривая 2), по исходным данным скорости изменения деформаций регистрируемых в точке  $x_S=l/8$  (кривая 3). Параметры исследуемой балки приводились в предыдущем разделе.

Аналогичным образом нетрудно получить зависимости для определения внешней нагрузки по исходным данным скорости изменения прогиба. Результаты такой идентификации, по исходным данным, регистрируемым в точке  $x_S=l/8$ , приведены на рис. 2.7. Нумерация кривых производится по схеме, принятой для рис. 2.6.

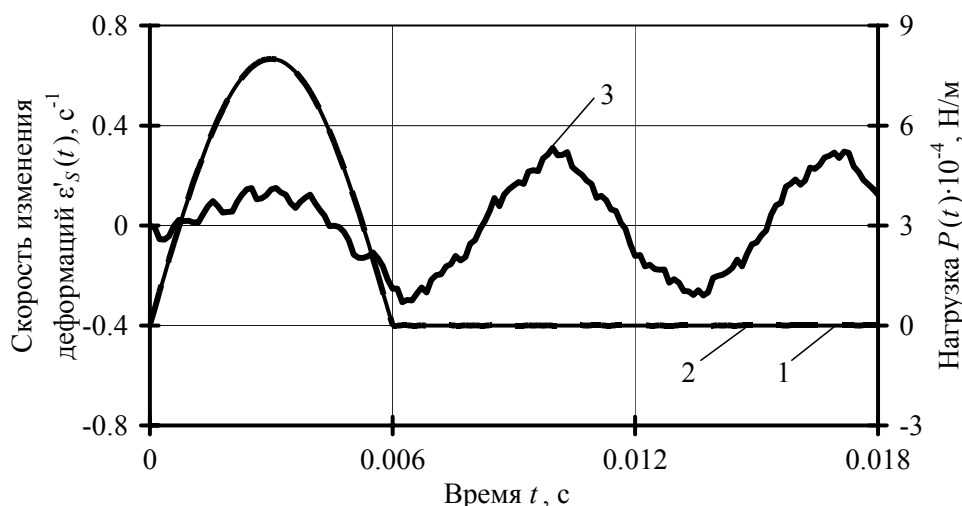


Рис. 2.6. Результаты идентификации с использованием метода  $h$ -регуляризации

Отметим, что исходные данные для восстановления нагрузки, на практике можно получить, используя специальные датчики для определения необходимых величин. При отсутствии таких датчиков можно воспользоваться более распространенными датчиками измерения деформаций (прогиба), а регистрируемые данные, с помощью математических преобразований, привести к необходимым исходным. Так, например, для получения закона нагружения, приведенного на рис. 2.7, скорость изменения прогиба численно рассчитыва-



лась с помощью метода конечных разностей как производная по времени для значений прогиба.

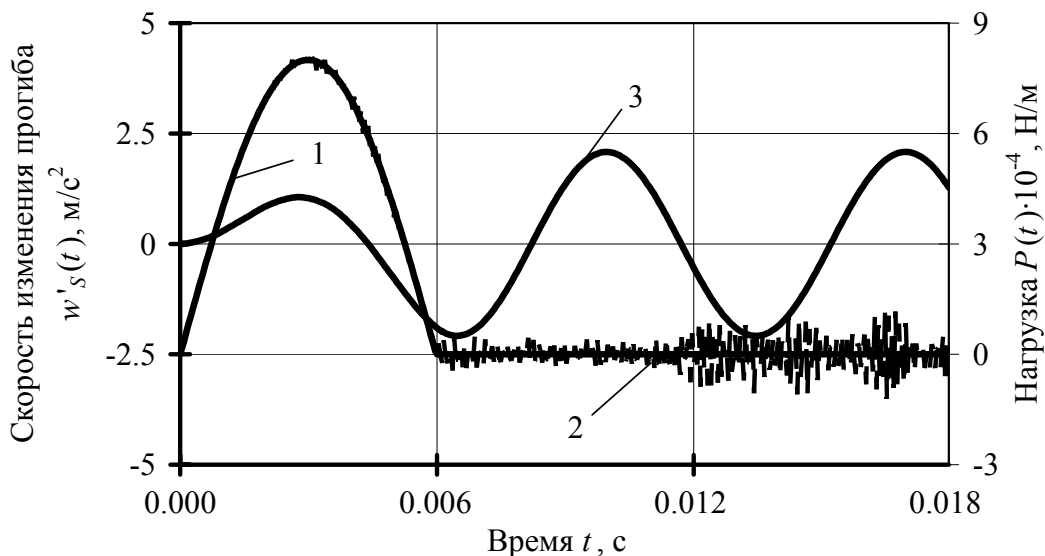


Рис. 2.7. Результаты идентификации по данным скорости изменения прогиба

Второй метод решения уравнения (2.22), который будет рассмотрен в определенной степени и для обоснования достоверности процедуры идентификации, – метод регуляризации А. Н. Тихонова. Метод подробно описан, например, в [17] и позволяет получить приближенное решение уравнений типа (2.22), устойчивое к малым изменениям исходных данных.

Пусть вместо точного решения  $\bar{\varepsilon}(t)$  уравнения (2.22) известно такое приближенное значение исходной функции  $\varepsilon_\delta$ , что  $\|\varepsilon_\delta - \bar{\varepsilon}\| \leq \delta$  ( $\delta \geq 0$  – погрешность задания исходных данных). В свою очередь примем, что  $\varepsilon \in E$ ,  $z \in Z$ , где  $E, Z$  – гильбертовы пространства. При этом, исходя из способа задания погрешности, естественно принять  $E = L_2$ .

Для отыскания приближенного решения согласно методу А. Н. Тихонова [17], задача по решению уравнения (2.22) заменяется задачей отыскания минимума сглаживающего функционала, который для данного уравнения примет вид

$$M^\alpha[z, \varepsilon_\delta] = \|Az - \varepsilon_\delta\|_U^2 + \alpha \|z\|_Z^2, \quad (2.27)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр регуляризации.

Достаточно подробное описание применения метода А. Н. Тихонова к некорректным задачам для различных деформируемых объектов представлено в монографиях [21, 22].

Эффективным способом решения таких задач является регуляризация матричного уравнения [17], получающегося в результате перехода к конечномерной задаче, путем аппроксимации интегралов, как это было показано ранее. При этом решается СЛАУ следующего вида

$$\left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}\right) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\delta \quad (2.28)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица, являющаяся конечно-разностным аналогом оператора в уравнении (2.22), взятым на сетке с равномерным шагом  $\Delta t = t/M$ ;  $\mathbf{A}^T$  – транспонированная к  $\mathbf{A}$  матрица;  $\mathbf{C}$  – симметричная трехдиагональная матрица размерности  $M \times M$ , явное выражение которой представлено в [17].

В соответствии с приведенными обозначениями задача идентификации нагрузки по данным осевых деформаций сводится к решению СЛАУ вида

$$\left(\mathbf{A}_E^T \cdot \mathbf{A}_E + \alpha \cdot \mathbf{C}\right) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A}_E^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\delta. \quad (2.29)$$

В качестве примера численное определение нагрузки было произведено на основе данных задачи рассмотренной в разделе 2.1. Причем исходные данные осевых деформаций зашумлялись путем накладывания искусственной погрешности. Для имитации зашумления использовалась следующая формула задания осевых деформаций

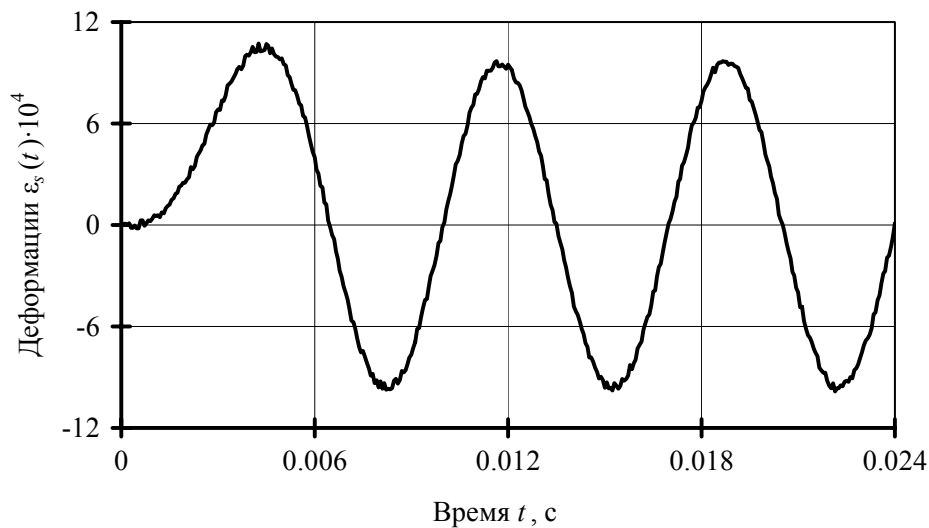
$$\varepsilon_\delta(x_S, t) = \varepsilon(x_S, t)(1 + \Delta \cdot r(t)), \quad (2.30)$$

где  $\Delta$  – модуль относительной погрешности;  $r(t)$  – функция случайных чисел из интервала  $[-1; 1]$ .

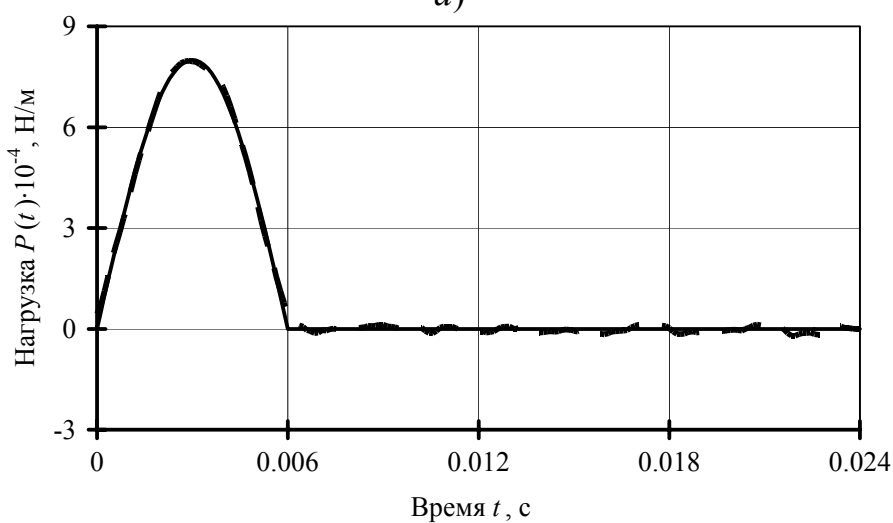
Исходные значения осевых деформаций и результаты идентификации временной зависимости распределенной нагрузки приведены на рис. 2.8. Идентификация производилась при уровне шума  $\Delta = 0.05$  для деформаций в точке  $x_S = l/8$ .

Помехоустойчивость метода позволяет производить идентификацию и для более сложных форм зашумления. Так, на рис. 2.9,*а* изображен график подобного зашумления, помимо равномерного шума  $\Delta=0.05$  в 25 процентах точек накладывался шум  $\Delta=10$ . На рис. 2.9,*б* приведен график восстановленного по данным деформаций нагрузки.

Моделирование также производилось для различных значений параметров зашумления. Так, на рис. 2.10 приведены результаты идентификации в случае, когда значения шума  $\Delta=10$  задавались для разного количества точек. Кривая 1 соответствует графику силы в виде полуволны синуса, кривые 2, 3, 4 и 5 соответствуют случаям зашумления в 5, 10, 25 и 50 % точек исходных деформаций.

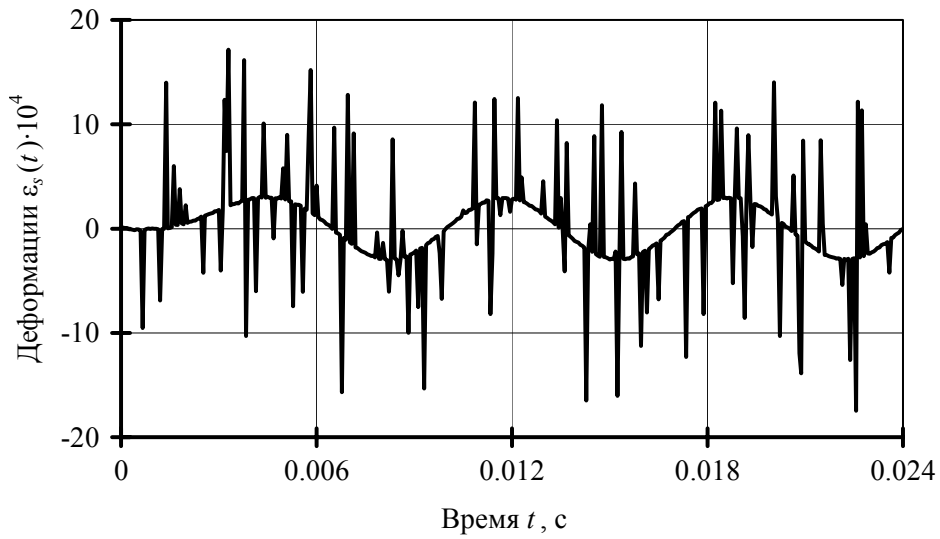


*а)*

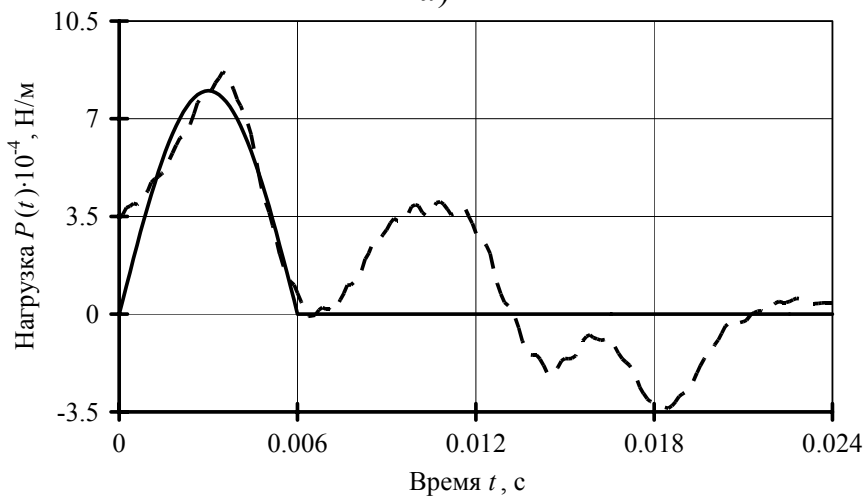


*б)*

Рис. 2.8. Исходные данные и результаты идентификации



a)



б)

Рис. 2.9. Исходные данные и результаты идентификации

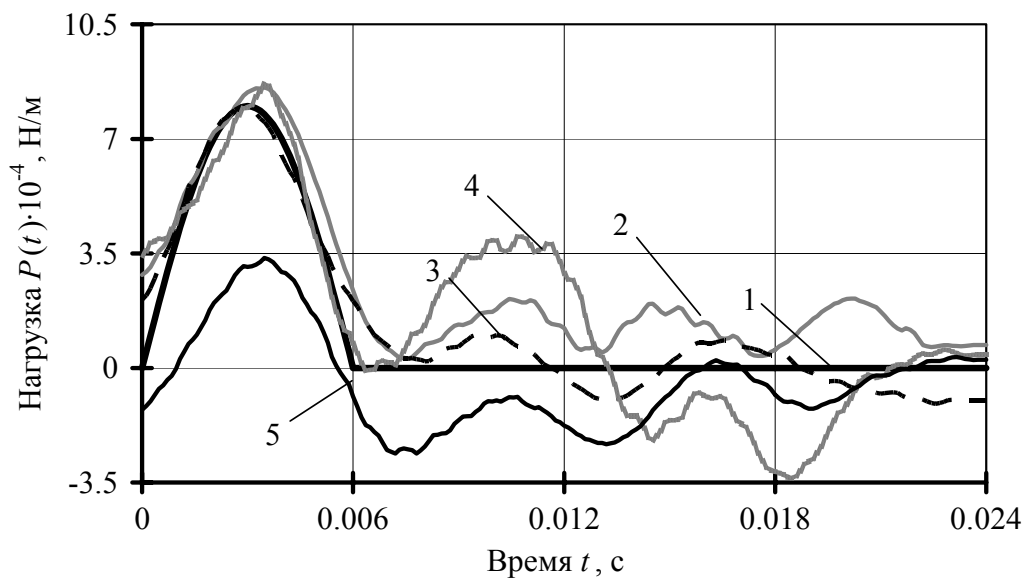


Рис. 2.10. Результаты идентификации внешней нагрузки

## 2.3. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ИССЛЕДОВАНИЙ ДРУГИХ АВТОРОВ

Оценка эффективности полученной методики производилась на основе результатов опубликованных в монографиях [6, 12]. В работах приведены результаты исследований по импульсному деформированию балок. В качестве исходных данных для идентификации нагрузки рассмотрены как прогибы, так и деформации.

В монографии [6], было изучено явление упругого удара на основе волнового уравнения Тимошенко. Авторами были получены численные значения прогиба при деформировании рельса Р-4а путем сбрасывания на него стального шара радиусом 11.48 см с высоты 25 см. Используя указанные данные прогиба в центре балки, совпадающей с точкой удара, были восстановлены значения силы, возникающей в месте соприкосновения балки с шаром. Идентификация проводилась на основе следующих исходных данных: длина рельса  $l=0.8$  м; площадь поперечного сечения рельса  $F=39.45 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>; коэффициент сдвига  $k'=0.35$ , который входит в уравнения (2.1) колебаний балки.

Механические параметры материала стального рельса приняты такими же, как и в предыдущем случае расчета.

На рис. 2.11 приведены результаты восстановления нагрузки с использованием методов регуляризации. Кривая 1 соответствует исходным данным прогиба для идентификации (взята непосредственно из рис. 72,а,б монографии); кривая 2 – значения силы, полученные авторами монографии в результате решения прямой нелинейной задачи ( $\tau=0.2022 \cdot 10^{-5}$  с для каждого графика). Кривые 3 и 4 – графики восстановленного ударного нагружения (контактной силы взаимодействия) с применением методов А.Н. Тихонова и А.С. Апарцина соответственно.

Отметим, что кривые, приведенные на рис. 2.11, свидетельствуют о высокой достоверности полученных результатов идентификации. Также необходимо отметить, что применение при идентификации метода А. Н. Тихонова обеспечивает её точность более высокой, чем применение метода А. С. Апарцина. В заключение описания результатов сопоставления укажем, что при применении процедур идентификации предполагалось точечное взаимодействие балки

и падающего шара. Последнее было принято в связи с тем, что авторы монографии [6] предполагали такое же взаимодействие ударника и рельса.

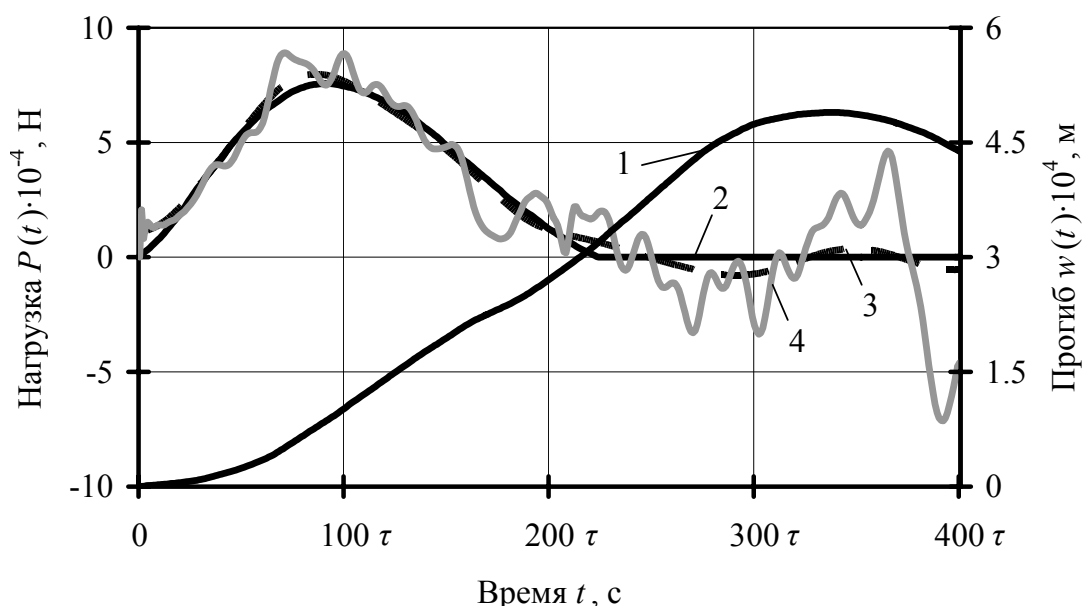


Рис. 2.11. Результаты сопоставления

Авторы монографии [12] приводят результаты экспериментальных исследований НДС балки при её ударном нагружении.

Экспериментальные исследования проводились в лаборатории исследования скоростных деформационных процессов Института проблем машиностроения НАНУ. В качестве объекта исследования была выбрана шарнирно опертая стальная балка, геометрические и механические параметры которой указаны в разделе 2.1 данной работы. Описание установки и параметров измерительного комплекса, с помощью которого производилась регистрация параметров НДС, изложены подробно в работе [12]. Там же приведены необходимые осциллограммы, характеризующие деформационный процесс, и графики изменения напряжений на поверхности балки, а также её прогибов. Схема ударного нагружения балки приведена на рис. 2.12.

На рисунке указано несколько тензодатчиков, наклеенных на нижней лицевой стороне балки, с помощью которых проводилась регистрация нестационарных относительных удлинений балки.

Нагружение балки производилось в среднем сечении путем сбрасывания сферического стального шара массой 1.725 кг с высоты 10 см. В процессе исследования регистрировались осциллограммы деформаций (напряжений), по результатам которых авторами

монографии были построены графики изменения напряжений в среднем сечении балки и на расстоянии 33 см от середины балки.

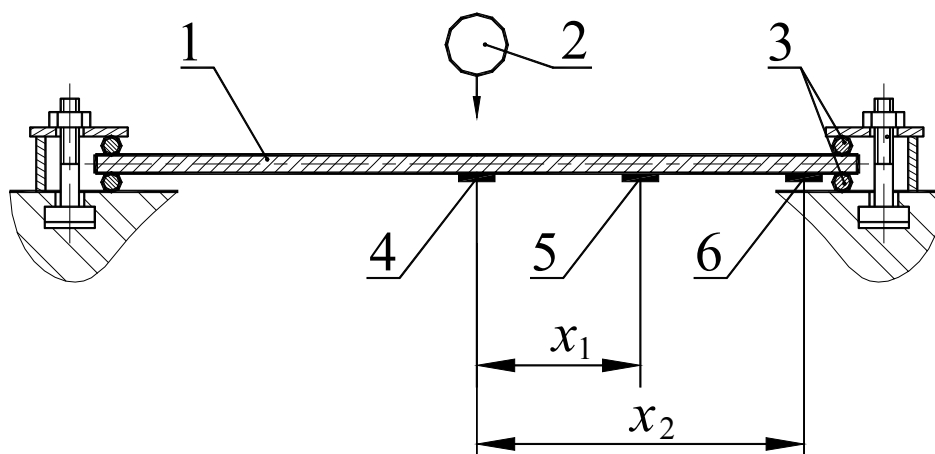


Рис. 2.12. Схема исследуемой балки:

1 – исследуемая балка с прикрепленными тензодатчиками; 2 – ударник (стальной шар); 3 – элементы опирания; 4 – датчик, расположенный на нижней лицевой стороне балки непосредственно под местом контакта; 5, 6 – датчики, расположенные со смещением  $x_1$  и  $x_2$  от середины балки

Идентификацию внешней нагрузки произведем по данным осевых деформаций на нижней поверхности балки. Переход от напряжений к осевым деформациям, учитывая вид напряженного состояния балки, осуществлялся с помощью следующей зависимости

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E. \quad (2.31)$$

В процессе процедуры идентификации принималось, что усилие взаимодействия между шаром и балкой моделировалось равномерно распределенным по некоторой площадке, размер которой определялся на основе механических соображений по известным зависимостям теории контактного взаимодействия тел.

Результаты сопоставления полученных функций нагрузки приведены на рис. 2.13.

Кривые 1 и 2 соответствуют функциям нагрузки, восстановленным по данным, регистрируемым для двух различных сечений балки; кривая 3 – усредненное значение силы, рассчитанное как среднее арифметическое для значений этих двух кривых.

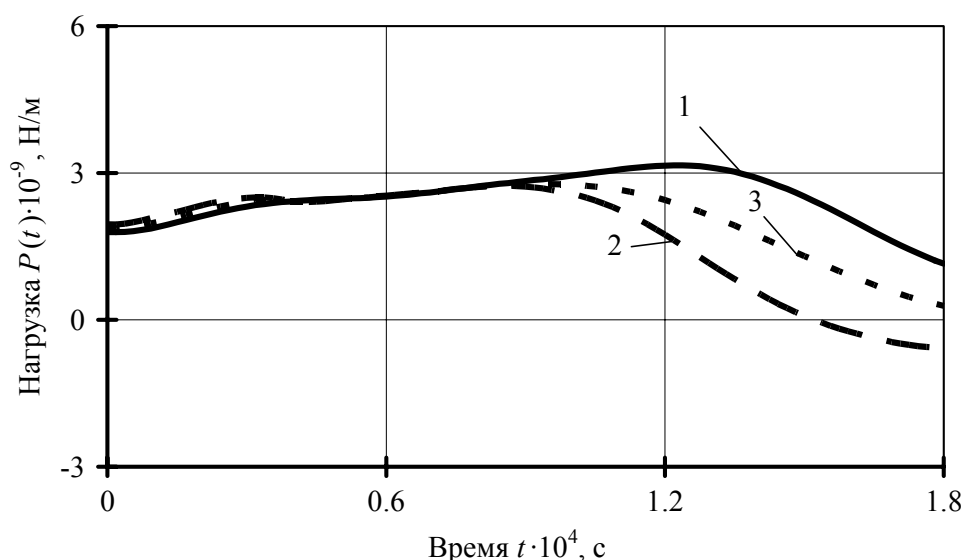


Рис. 2.13. Результаты сопоставления восстановленной нагрузки

Представленные на рис. 2.13 результаты указывают на удовлетворительное совпадение теоретических (идентифицированных) и экспериментальных результатов. Заметим, что на этих рисунках наблюдаются и некоторые несовпадения результатов. Опишем ряд причин, которые могут вызывать некоторое рассогласование. Во-первых, неизбежны неточности в полученных экспериментальных значениях, которые послужили исходными данными при проведении процедуры идентификации. В монографии авторы не указывают точность полученных значений напряжений и возможный уровень погрешности. Во-вторых, упрощенный вариант взаимодействия элементов системы (балка – падающий шар) был выбран при процедуре идентификации, соответствующим постоянной области нагружения. В принципе, в реальности эта область является переменной во времени в процессе ударного взаимодействия. В-третьих, используемые методы регуляризации, при проведении процедуры идентификации, позволяют получить решение, лишь приближенное к точному решению. Указанное является свойством решения некорректных обратных задач с помощью численных методов. Возможны и другие неточности, например точность описания нестационарного поведения балки уравнениями теории Тимошенко. Причины такого типа указывались в монографии [21] при обсуждении вопроса о сравнении теоретических результатов с экспериментальными данными по ударному нагружению полусферической оболочки. Эти причины могут порождать неточности в значениях величин сил



ударного взаимодействия, например, заключающихся в некоторых отрицательных значениях контактного давления.

В целом приведенный на рис. 2.11, 2.13 графический материал свидетельствует об эффективности разработанной методики идентификации внешних нагрузок, воздействующих на балки конечной длины, в случае их экспериментального ударного нагружения.

## 2.4. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДВУХ СКРЕПЛЕННЫХ БАЛОК

Задача о колебаниях системы, состоящей из двух балок, рассматривается для случая их скрепления между собой в некоторой точке (рис. 2.14). Под скреплением балок подразумевается совпадение их динамических прогибов в заданной точке (на рисунке – точка  $O$ ).

Согласно принятым условиям балки совершают поперечные колебания нормально плоскости их размещения – плоскости  $x_1Ox_2$ . На одну из балок воздействует нестационарная нагрузка с интенсивностью  $P(t)$ ; в данном случае равномерно распределенная по некоторой площадке  $2b_P$ . В дальнейшем посредством индексов  $j=1; 2$  будем обозначать величины, относящиеся к первой и второй балкам соответственно.

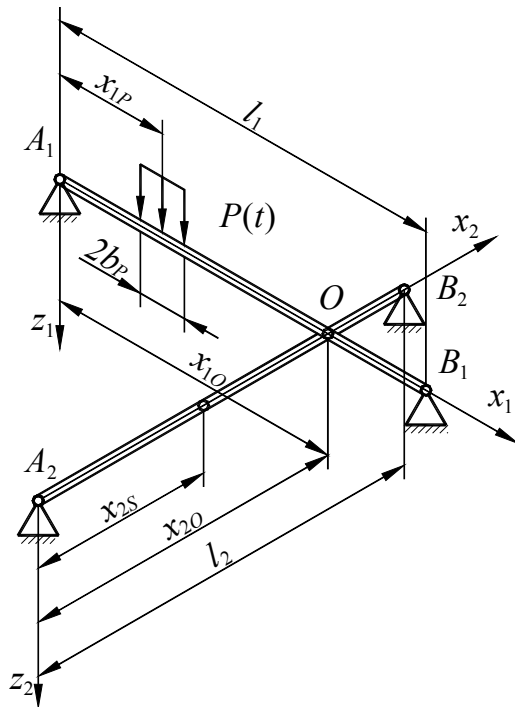


Рис. 2.14. Схема соединения системы балок и её нагружения

В основу решения задачи положен метод условного рассоединения деформируемой системы на две подсистемы, который заключается в замене реакции в точке скрепления некоторой силой, которую обозначим как  $R(t)$ . На рис. 2.15 изображена схема первой балки системы, на которую воздействует упомянутая нагрузка.

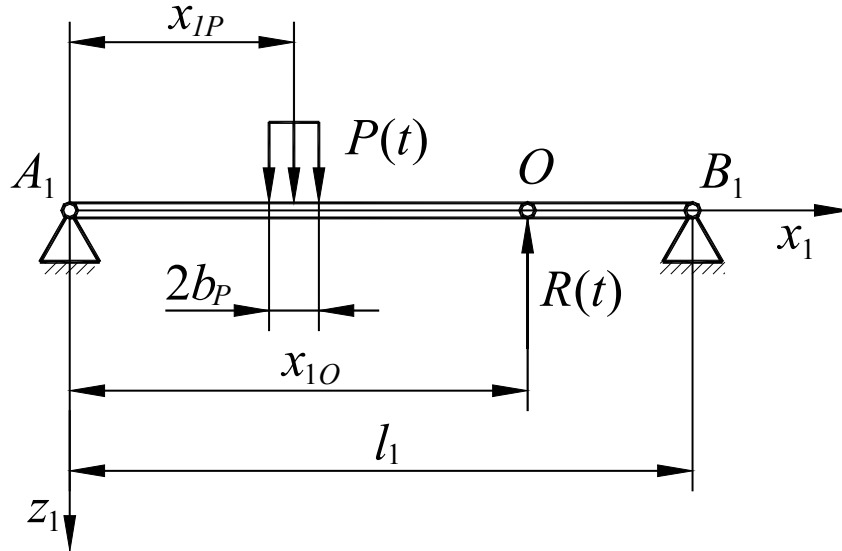


Рис. 2.15. Схема первой балки системы

Задача рассматривается в рамках уточненной модели балок С. П. Тимошенко. Система уравнений, описывающая колебания первой балки, имеет вид

$$\begin{cases} \rho_1 F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - k'_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) F_1 G_1 = q_1(x_1, t); \\ E_1 I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + k'_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \psi_1 \right) F_1 G_1 - \rho_1 I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Система граничных и начальных условий для каждой из балок следующая

$$\begin{aligned} w_j(x_j, 0) = 0; \quad \frac{\partial w_j}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0; \\ w_j(0, t) = w_j(l_j, t) = 0; \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} &= \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} \Big|_{x_j=l_j} = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Отметим, выбранные граничные условия соответствуют шарнирному опиранию балок, а начальные условия – нулевые.

Решение прямой задачи для первой балки производим согласно методике, приведенной в разделе 2.1. Запишем искомые функции в виде следующих тригонометрических рядов:

$$w_1(x_1, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{1k}(t) \sin \frac{k\pi x_1}{l_1}; \quad \psi_1(x_1, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{1k}(t) \cos \frac{k\pi x_1}{l_1}. \quad (2.34)$$

Закон распределения нагрузки зададим в виде следующей функции:

$$q_1(x_1, t) = P(t) \cdot (H(x_1 - x_{1P} + b_P) - H(x_1 - x_{1P} - b_P)) + R(t) \delta(x_1 - x_{1O}) \quad (2.35)$$

После подстановки приведенных выражений (2.34) в систему уравнений (2.32) и учета (2.35), а также использования свойства ортогональности функций (см. раздел 2.1), система уравнений для искомых коэффициентов  $w_{1k}$  и  $\psi_{1k}$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{1k}(t)}{\partial t^2} + (b_1 + c_1 \lambda_{1k}^2) \psi_{1k}(t) - b_1 \lambda_{1k} w_{1k}(t) &= 0; \\ \frac{\partial^2 w_{1k}(t)}{\partial t^2} + a_1 [w_{1k}(t) \lambda_{1k}^2 - \psi_{1k}(t) \lambda_{1k}] &= \\ = \frac{2}{\rho_1 F_1 l_1} \left[ \int_{x_{1P} - b_P}^{x_{1P} + b_P} P(t) \sin \lambda_{1k} x_1 dx_1 - \int_0^{l_1} R(t) \delta(x_1 - x_{1O}) \sin \lambda_{1k} x_1 dx_1 \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

где  $\lambda_{1k} = k\pi/l_1$ ,  $a_1 = k'_1 G_1 / \rho_1$ ,  $b_1 = k'_1 G_1 F_1 / \rho_1 I_1$ ,  $c_1 = E_1 / \rho_1$ ;  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака, которая моделирует сосредоточенный характер нагрузки, возникающей в скреплении.

После выполнения элементарных преобразований на основе уравнений (2.36) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{1k}(t)}{\partial t^2} + (b_1 + c_1 \lambda_{1k}^2) \psi_{1k}(t) - b_1 \lambda_{1k} w_{1k}(t) &= 0; \\ \frac{\partial^2 w_{1k}(t)}{\partial t^2} + a_1 [w_{1k}(t) \lambda_{1k}^2 - \psi_{1k}(t) \lambda_{1k}] &= P_{1k}(t), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\text{где } P_{1k}(t) = \frac{2}{\rho_1 F_1 l_1} \left[ \frac{2P(t)}{\lambda_{1k}} \sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_P - R(t) \sin \lambda_{1k} x_{1O} \right].$$

Решение системы (2.37) получим аналогично способом, который описан в разделе 2.1. Форма этого решения для функции  $w_{1k}(t)$  записывается в виде

$$w_{1k}(t) = P_{1k}(t) \cdot F_{1k}(t). \quad (2.38)$$

Здесь функция  $F_{1k}(t)$  с учетом ранее принятых обозначений примет вид

$$F_{1k}(t) = \frac{b_1 + c_1 \lambda_{1k}^2 - \omega_{11k}^2}{-\omega_{11k} D_k} \sin \omega_{11k} t + \frac{b_1 + c_1 \lambda_{1k}^2 - \omega_{12k}^2}{\omega_{12k} D_k} \sin \omega_{12k} t, \quad (2.39)$$

$$\text{где } \omega_{jik}^2 = \frac{(a_j + c_j) \lambda_{jk}^2 + b_j + (-1)^i D_{jk}}{2} \quad (i=1; 2);$$

$$D_{jk} = \sqrt{\left( (a_j + c_j) \lambda_{jk}^2 + b_j \right)^2 - 4 a_j c_j \lambda_{jk}^4}.$$

Более подробная запись выражения (2.38) приводится ниже

$$w_{1k}(t) = \int_0^t P_{1k}(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \sin \omega_{1ik}(t-\tau) d\tau, \quad (2.40)$$

$$\text{где } C_{jik} = \frac{b_j + c_j \lambda_{jk}^2 - \omega_{jik}^2}{\omega_{jik} D_{jk}}.$$

На основе соотношения (2.40) запишем выражение для прогиба первой балки

$$w_1(x_1, t) = \frac{2}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left( \frac{2P(\tau)}{\lambda_{1k}} \sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_P - R(\tau) \sin \lambda_{1k} x_{1O} \right) \times \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \sin \omega_{1ik}(t-\tau) d\tau \sin \lambda_{1k} x_1. \quad (2.41)$$

Схема второй балки и воздействующая на неё нагрузка изображены на рис. 2.16.

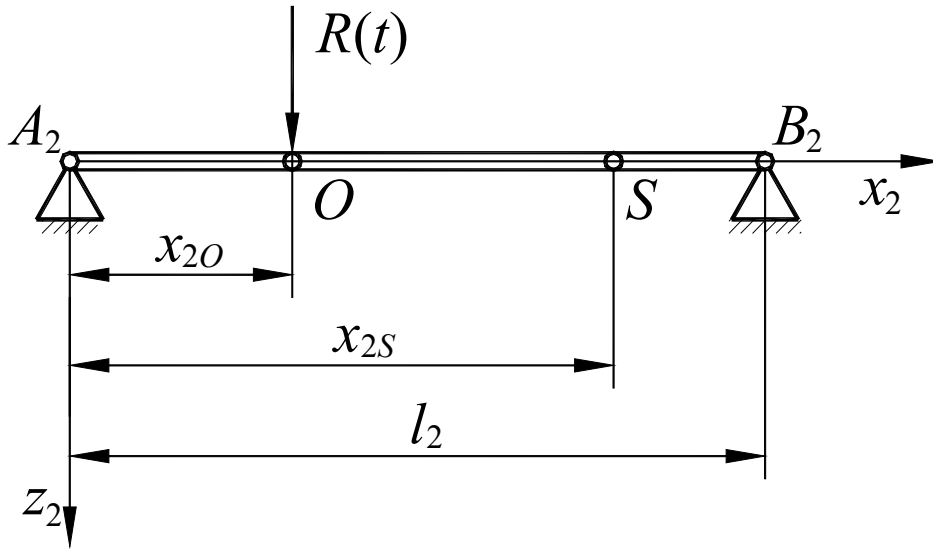


Рис. 2.16. Схема второй балки системы

Заметим, что схемы первой и второй балок подобны. Поэтому воспользуемся уже имеющимся выражением (2.41) для получения выражения поперечных колебаний второй балки. Для этого примем в соотношении (2.41)  $P(t) \equiv 0$ , что его несколько упростит. Также нужно изменить знак у функции  $R(t)$ , что отвечает характеру силового взаимодействия балок. С учетом изложенного, положив  $j = 2$ , получим

$$w_2(x_2, t) = \frac{2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t R(\tau) \sin \lambda_{2k} x_{2O} \times \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{2ik} \sin \omega_{2ik} (t - \tau) d\tau \sin \lambda_{2k} x_2. \quad (2.42)$$

Запишем прогибы каждой из балок в точке скрепления и приравняем их, что будет соответствовать условию скрепления балок. После выполнения этой операции будем иметь следующее интегральное уравнение для функции  $R(t)$

$$\int_0^t P(\tau) K_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t R(\tau) K_2(t - \tau) d\tau, \quad (2.43)$$

$$\text{где } K_1(t) = \frac{4}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_P \sin \lambda_{1k} x_{1O}}{\lambda_{1k}} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \sin \omega_{1ik} t;$$

$$K_2(t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\rho_j F_j l_j} \sin^2 \lambda_{jk} x_{jO} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{jik} \sin \omega_{jik} t.$$

Полученное интегральное уравнение (2.43) является интегральным уравнением Вольтерра I рода и решается относительно функции  $R(t)$  с помощью метода квадратур, как это было показано в предыдущих разделах. Используя матричную форму записи, уравнение (2.43) можно переписать в виде

$$\mathbf{A}_R \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{P}, \quad (2.44)$$

где  $\mathbf{A}_P$  и  $\mathbf{A}_R$  – матрицы, соответствующие ядрам  $K_1(t)$  и  $K_2(t)$ . Элементы матриц находятся согласно принятой схеме аппроксимации, как это было показано ранее. Уравнение (2.44) позволяет определить силу  $\mathbf{R}$ , возникающую в скреплении балок, как контактное взаимодействие.

После того, как функция  $R(t)$  вычислена, производится определение прогибов балок на основе следующих формул:

$$w_1(x_1, t) = \int_0^t P(\tau) K_3(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_4(t-\tau) d\tau; \quad (2.45)$$

$$w_2(x_2, t) = \int_0^t R(\tau) K_5(t-\tau) d\tau,$$

$$\text{где } K_3(t) = \frac{4}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_P \sin \lambda_{1k} x_1}{\lambda_{1k}} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \sin \omega_{1ik} t;$$

$$K_4(t) = \frac{2}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{1k} x_{1O} \sin \lambda_{1k} x_1 \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \sin \omega_{1ik} t;$$

$$K_5(t) = \frac{2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{2k} x_{2O} \sin \lambda_{2k} x_2 \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{2ik} \sin \omega_{2ik} t.$$

Их конечно-разностный аналог таков

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{A1}_P \cdot \mathbf{P} - \mathbf{A1}_R \cdot \mathbf{R};$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{A2}_R \cdot \mathbf{R}. \quad (2.46)$$

Заполнение матриц  $\mathbf{A1}_F$ ,  $\mathbf{A1}_R$  и  $\mathbf{A2}_R$  в данном исследовании производится с помощью следующих выражений, которые соответствуют принятой ранее схеме аппроксимации (см. раздел 2.1)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A1}_{Pm,p} &= \frac{8}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_P \sin \lambda_{1k} x_1}{\lambda_{1k}} \times \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i C_{1ik}}{\omega_{1ik}} \sin \omega_{1ik} \Delta t \left( m - p + \frac{1}{2} \right) \sin \omega_{1ik} \frac{\Delta t}{2}; \\
 \mathbf{A1}_{Rm,p} &= \frac{4}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{1k} x_{1O} \sin \lambda_{1k} x_1 \times \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i C_{1ik}}{\omega_{1ik}} \sin \omega_{1ik} \Delta t \left( m - p + \frac{1}{2} \right) \sin \omega_{1ik} \frac{\Delta t}{2}; \\
 \mathbf{A2}_{Rm,p} &= \frac{4}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{2k} x_{2O} \sin \lambda_{2k} x_2 \times \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i C_{2ik}}{\omega_{2ik}} \sin \omega_{2ik} \Delta t \left( m - p + \frac{1}{2} \right) \sin \omega_{2ik} \frac{\Delta t}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

В принципе, правомочно использовать и другие схемы аппроксимации. Тогда выражения (2.47) будут иметь несколько другую форму записи.

В качестве примера численного расчета колебаний рассмотрим систему, состоящую из стальной и медной балок. При расчетах принимались следующие геометрические параметры балок: высота сечения балки  $h_1=0.04$  м,  $h_2=0.05$  м (поперечное сечение балок – квадрат); длина балки  $l_1=0.8$  м;  $l_2=1.0$  м; коэффициент сдвига в обоих случаях  $k'=6/5$ .

Координаты точек и геометрические размеры, согласно схеме на рис. 2.14 таковы:  $x_{1P}=0.2$  м;  $x_{1O}=0.6$  м;  $x_{2P}=0.6$  м;  $b_P=0.04$  м;  $l_1=0.8$  м;  $l_2=1.0$  м.

Результаты численного моделирования на основании указанных выше зависимостей приведены на рис. 2.17, 2.18. Так, на рис. 2.17 показаны графики нестационарной нагрузки  $P(t)$ , воздействующей на систему (прерывистая линия) и силы  $R(t)$ , возникаю-

щей в скреплении (сплошная линия). Здесь при расчетах принималось  $K=32$  – число членов ряда в соответствующих разложениях; шаг во времени  $\Delta t=3 \cdot 10^{-5}$  с.

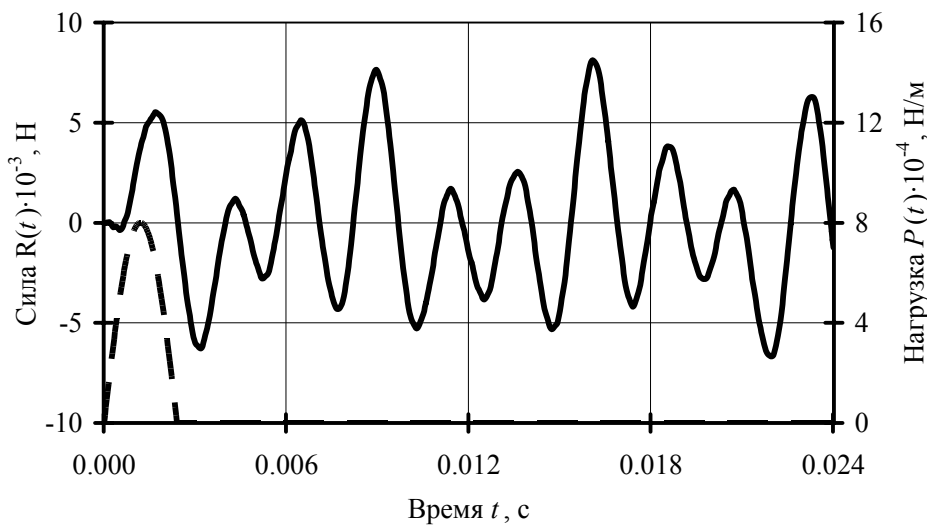


Рис. 2.17. Изменение силы, возникающей в скреплении и нагрузки

Как видно из приведенных графиков, значения силы, возникающей в скреплении балок, могут достигать больших значений относительно исходной нагрузки. Соответствующие графики прогиба точек балок приведены на рис. 2.18.

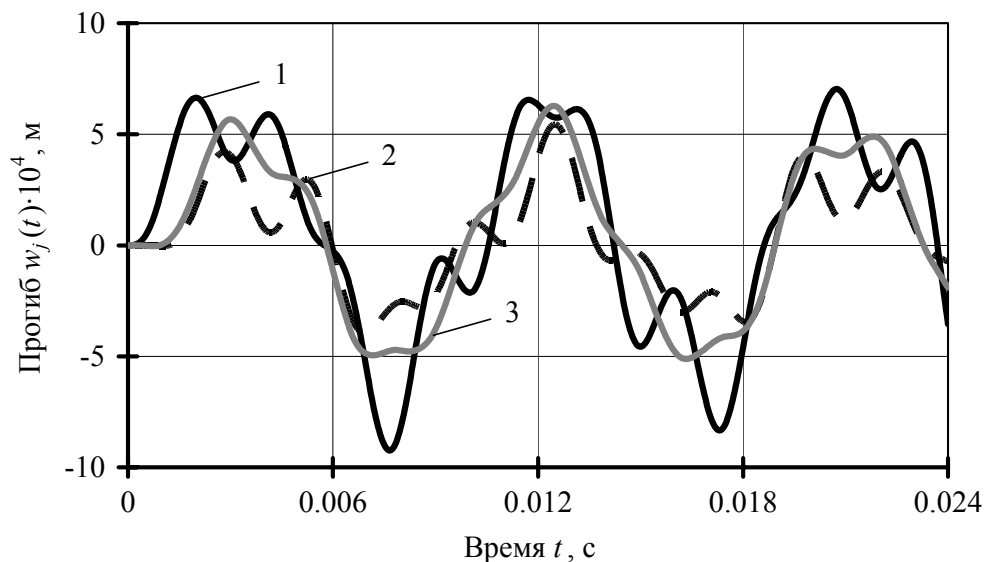


Рис. 2.18. Изменение прогибов балок системы

На рис. 2.18 кривая 1 соответствует прогибу точки  $x_1 = 0.3$  м первой балки; кривая 2 – прогибу точки  $x_2 = 0.8$  м второй балки; кривая 3 – прогибу точки  $O$  (точки скрепления балок) для первой балки. Перемещение точки  $O$  для второй балки не приводится, по-



сколько расчеты показали, что они совпадают с приведенными для первой балки. Такое соответствие указывает на то, что полученное решение удовлетворяет принятому условию контакта балок.

На следующем рисунке показаны распределения прогибов балок для некоторых моментов времени  $t = 0.003$  с и  $t = 0.009$  с, полученные путем фиксирования временной составляющей в выражениях для определения прогиба.

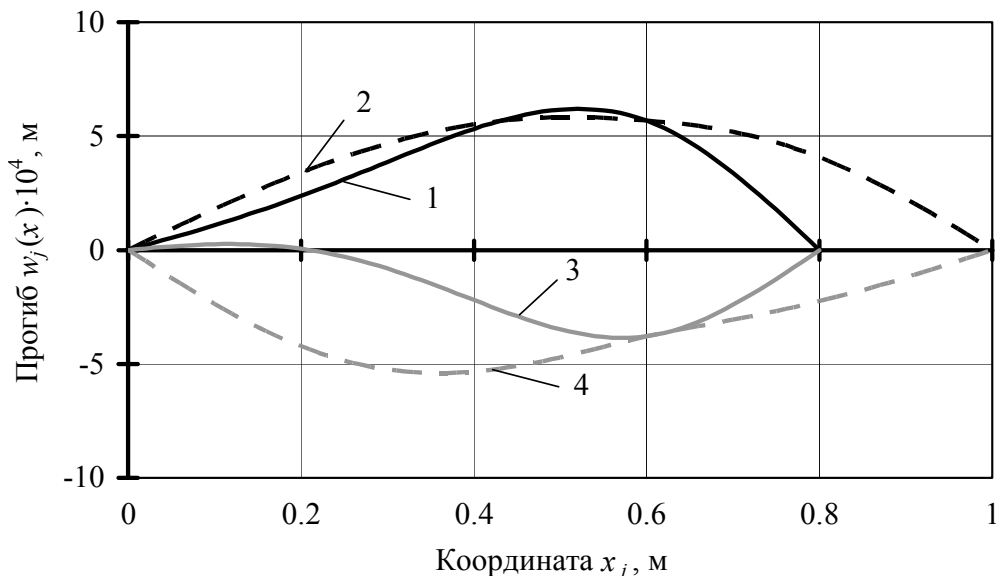


Рис. 2.19. Эпюры прогибов балок системы

Кривые 1 и 2 – прогибы первой и второй балок в момент времени  $t = 0.003$ ; кривые 3 и 4 – в момент времени  $t = 0.009$ .

Зачастую, при анализе НДС механических балочных систем необходимо знать не только напряжения, но и интегральные характеристики напряжений, то есть усилия и моменты, действующие в сечениях балок. В соответствии с теорией С. П. Тимошенко [16] можно записать следующие зависимости для изгибающего момента и перерезывающего усилия:

$$M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad Q = k' \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) FG. \quad (2.48)$$

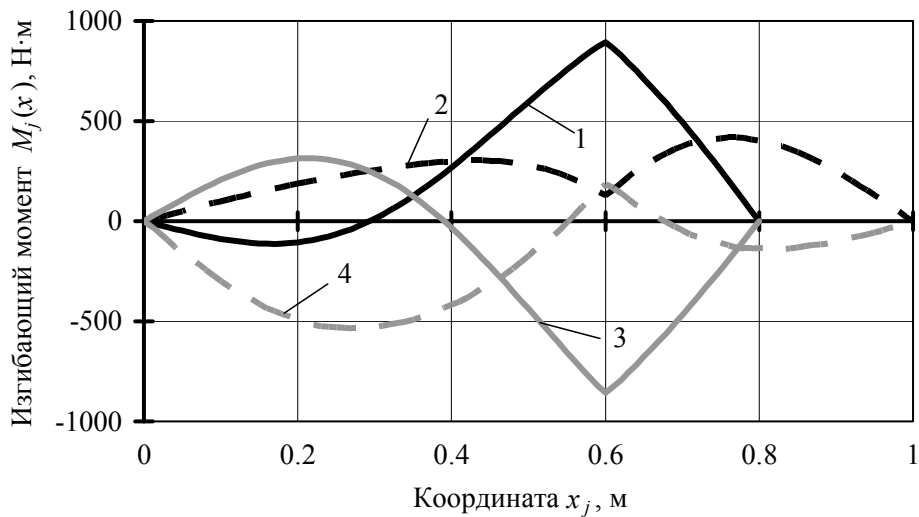
Определение входящей в выражения величины угла поворота поперечного сечения балки  $\psi$ , производится для каждой из балок по методике, приведенной для определения прогибов. Вывод выражений подобен, поэтому приведем лишь их окончательный вид

$$\begin{aligned}
\psi_1(x_1, t) &= \frac{2b_1}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P_1(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{1ik}(t-\tau)}{\omega_{1ik} D_{1k}} d\tau \cos \lambda_{1k} x_1; \\
\psi_2(x_2, t) &= \frac{2b_2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_{2k} \sin \lambda_{2k} x_{2O} \times \\
&\times \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{2ik}(t-\tau)}{\omega_{2ik} D_{2k}} R(\tau) d\tau \cos \lambda_{2k} x_2; \\
M_1(x_1, t) &= \frac{2a_1 c_1}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P_1(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{1ik}(t-\tau)}{\omega_{1ik} D_{1k}} d\tau \sin \lambda_{1k} x_1; \\
M_2(x_2, t) &= \frac{2a_2 c_2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_{2k}^2 \sin \lambda_{2k} x_{2O} \times \\
&\times \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{2ik}(t-\tau)}{\omega_{2ik} D_{2k}} R(\tau) d\tau \sin \lambda_{2k} x_2; \\
Q_1(x_1, t) &= \left[ \frac{2}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P_1(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \sin \omega_{1ik}(t-\tau) d\tau \times \right. \\
&\quad \left. \times \sin \lambda_{1k} x_1 - \psi_1(x_1, t) \right] k'_1 F_1 G_1; \\
Q_2(x_2, t) &= \left[ \frac{2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t R(\tau) \sin \lambda_{2k} x_{2O} \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{2ik} \sin \omega_{2ik}(t-\tau) d\tau \sin \lambda_{2k} x_2 - \psi_2(x_2, t) \right] k'_2 F_2 G_2.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

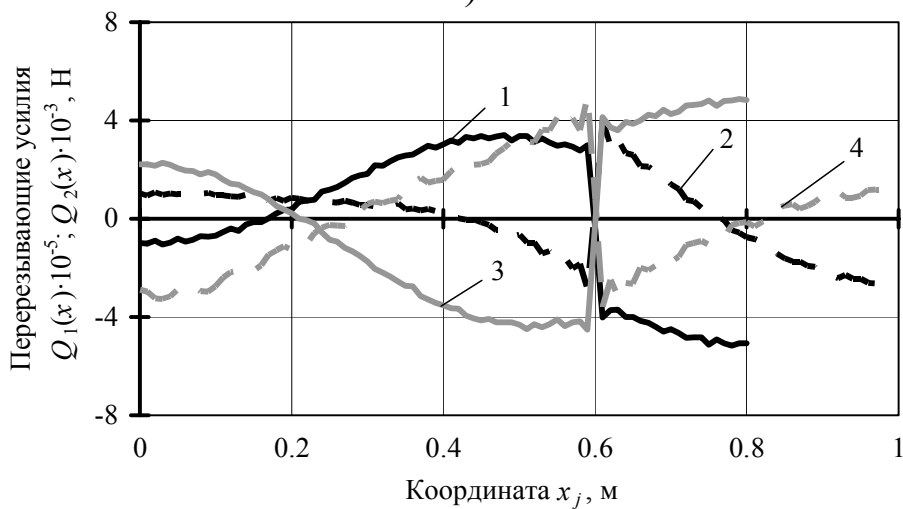
где  $P_1(\tau) = (2P(\tau) \sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_P - \lambda_{1k} R(\tau) \sin \lambda_{1k} x_{1O})$ .

Эпюры изгибающего момента и перерезывающего усилия приведены на рис. 2.20,а и 2.20,б соответственно. Нумерация кривых на рис. 2.20,а и 2.20,б идентична нумерации кривых на рис. 2.19.

Для оценки достоверности полученных результатов сравним колебания системы балок с колебаниями однопролетной балки. При этом параметры исследуемых балок (первой балки системы балок и однопролетной балки) полагаем одинаковыми.



a)



б)

Рис. 2.20. Эпюры изгибающего момента и перерезывающего усилия

Рассмотрим случай с очень гибкой второй балкой из системы балок. Такое предположение вводится для уменьшения влияния второй балки на колебания первой балки. С этой целью уменьшим модуль упругости  $E_2$ , модуль сдвига  $G_2$  и плотность материала  $\rho_2$  существенным образом. На рис. 2.20 приведены графики перемещений точек  $x_1=0.3$  м и  $x=0.3$  м, принадлежащих первой балке из системы балок и однопролетной балке соответственно. Кривые 2 и 3 отвечают указанным перемещениям. Кривая 4 соответствует прогибу этой же точки системы балок, вычисленному при уменьшении вышеуказанных параметров  $E_2$ ,  $G_2$  и  $\rho_2$  в 10 раз по сравнению с принятыми ранее значениями (см. описание рис. 2.18); кривая 5 – в 100 раз. На рис. 2.21 кривой 1 обозначено изменение во времени

импульсной нагрузки воздействующей на первую балку из системы балок и однопролетную балку.

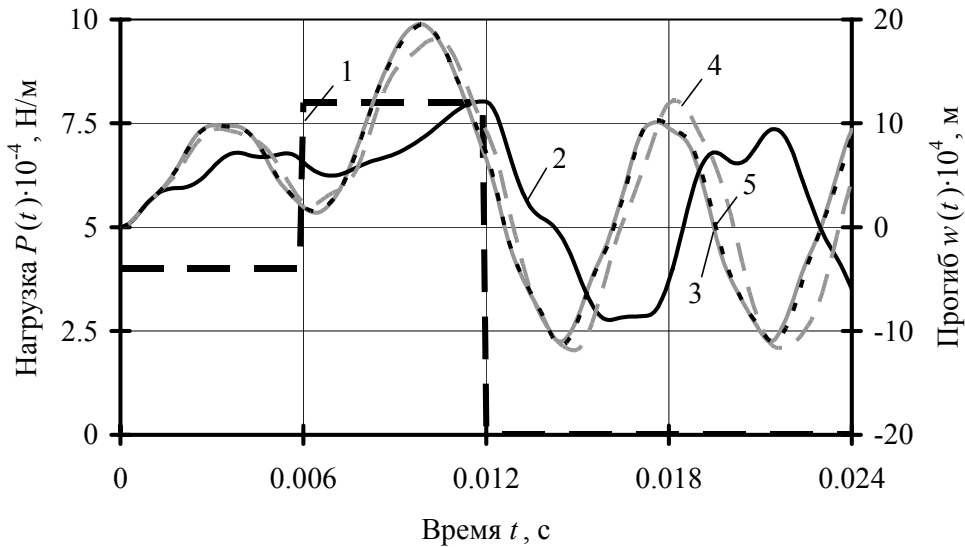


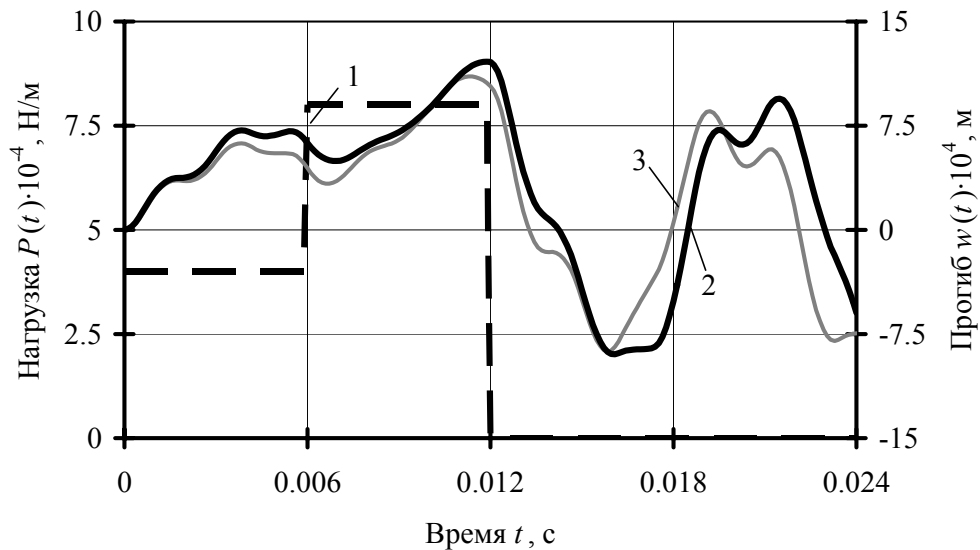
Рис. 2.21. Изменение перемещений точек балок

Анализируя кривые 3-5 можно сделать вывод, что решения для системы балок с очень гибкой второй балкой и однопролетной балки между собой хорошо согласовываются. Это обстоятельство указывает на соответствие полученных численных результатов физическому содержанию исследуемого процесса деформирования системы балок. Можно сделать заключение о достоверности (в определенной степени) решения прямой задачи об импульсном нагружении системы двух контактирующих балок.

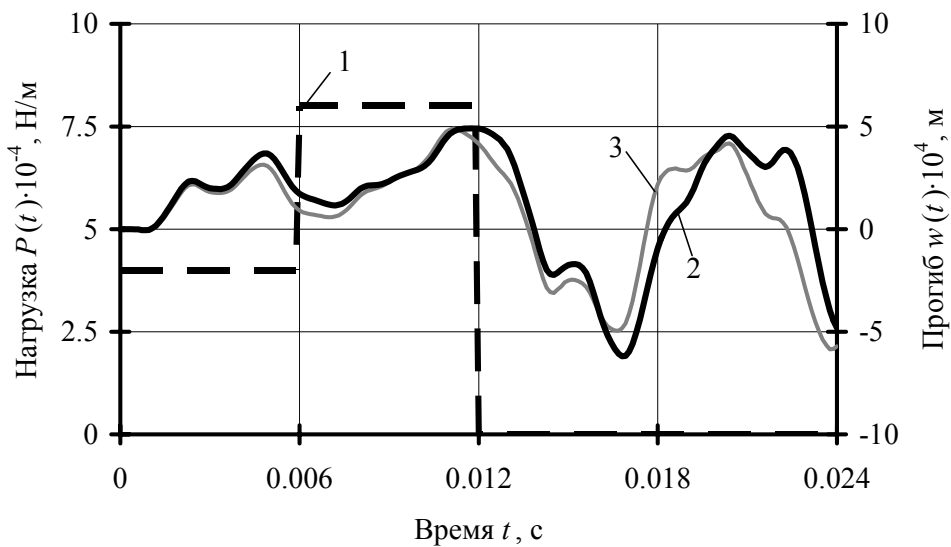
Здесь применен асимптотический подход к оценке достоверности решения конкретной механической задачи на основе численного анализа соответствующих уравнений движения, содержащих малые коэффициенты. Поэтому исчерпывающее искомое утверждение получить в полной мере трудно.

Также в данном разделе полученные ранее результаты для перемещения некоторых точек балок сопоставлены с результатами, рассчитанными с использованием МКЭ. Более подробное описание применения метода приведено в разделе 2.1, поэтому приведем лишь конечные результаты, а именно изменение во времени прогибов балок в точках  $x_1=0.3$  м и  $x_2=0.8$  м. Результаты исследования приведены на рис. 2.22,а и 2.22,б соответственно для каждой из точек. Также на рисунке приведена функция соответствующей этим прогибам импульсной нагрузки  $P(t)$ .

При конечно-элементном моделировании погонный метр длины балок условно делился на 100 элементов. Кривой 1 на рис. 2.22 показано изменение во времени нагрузки; кривой 2 – изменение прогиба точки  $x_1=0.3$  м согласно разработанному методу при  $K=32$ ; кривой 3 – согласно МКЭ.



а)



б)

Рис. 2.22. Изменение прогибов балок

Отметим, что исследуемые кривые в целом очень хорошо согласуются. Хотя наблюдаются и некоторые расхождения в значениях их ординат. Такое несоответствие может быть обусловлено как естественными упрощениями, принятыми при конечно-элементном

моделировании характера скрепления балок, так и рядом других причин, в том числе и возможностью адекватного моделирования деформирования систем балок с помощью МКЭ.

## 2.5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВНЕШНИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК, ВОЗДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИСТЕМУ БАЛОК (ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА)

Пусть на первую балку ( $j=1$ ) системы балок, изображенной на рис. 2.14, воздействует некоторая равномерно распределенная по участку балки нагрузка. Изменение нагрузки во времени происходит согласно закону её изменения во времени, как функции  $P(t)$ .

Будем рассматривать решение обратной задачи по определению (восстановлению) функции  $P(t)$ . В качестве исходных данных при решении обратной задачи будем предполагать, что задано перемещение  $w_2(x_{2S}, t)$  в точке  $x_{2S}$ , которая принадлежит балке  $j=2$ . Значения функции  $w_2(x_{2S}, t)$ , например, известны по результатам соответствующего эксперимента. Решение задачи по идентификации неизвестной внешней нагрузки  $P(t)$  в этом случае сводится к решению следующей системы интегральных уравнений Вольтерра I рода:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_P \sin \lambda_{1k} x_{1O}}{\lambda_{1k}} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \sin \omega_{1ik} (t-\tau) d\tau = \\ & = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\rho_j F_j l_j} \sin^2 \lambda_{jk} x_{jO} \int_0^t \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{jik} \sin \omega_{jik} (t-\tau) R(\tau) d\tau; \\ w_2(x_{2S}, t) & = \frac{2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{2k} x_{2O} \sin \lambda_{2k} x_{2S} \times \\ & \times \int_0^t R(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{2ik} \sin \omega_{2ik} (t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.50)$$

В приведенных уравнениях неизвестными функциями являются  $P(\tau)$  и  $R(\tau)$ , а функция  $w_2(x_{2S}, t)$  является заданной, как уже от-

мечалось. Целесообразно напомнить, что функция  $R(\tau)$  описывает контактное взаимодействие двух балок.

Для дальнейшего построения решения перейдем к следующей записи системы (2.50):

$$\begin{cases} \int_0^t P(\tau)K_1(t-\tau)d\tau = \int_0^t R(\tau)K_2(t-\tau)d\tau; \\ \int_0^t R(\tau)K_5(t-\tau)d\tau = w_2(x_{2S}, t). \end{cases} \quad (2.51)$$

Здесь ядра интегральных уравнений  $K_1(t)$  и  $K_2(t)$  совпадают с таковыми в уравнении (2.43). Отличие вида ядра  $K_5(t)$  в системе уравнений (2.51) от вида ядра  $K_5(t)$  в (2.45) заключается в том, что вместо параметра  $x_2$  следует положить  $x_{2S}$ .

Аппроксимируя интегралы, входящие в уравнения конечными суммами, как это было показано в предыдущих разделах, получим систему уравнений (2.51) в матричном виде:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{A2}_R \cdot \mathbf{R} = \mathbf{w}_{2S}, \end{cases} \quad (2.52)$$

где  $\mathbf{A}_P$ ,  $\mathbf{A}_R$  и  $\mathbf{A2}_R$  – матрицы, соответствующие ядрам  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$  и  $K_5(t)$ .

Полученную систему путем алгебраических преобразований несложно привести к виду

$$\Delta \cdot \mathbf{P} = \Delta_P, \quad (2.53)$$

где  $\Delta = \mathbf{A2}_R \cdot \mathbf{A}_P$ ;  $\Delta_P = \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{w}_{2S}$ .

Уравнение (2.53) определяет векторную величину  $\mathbf{P}$  при известной векторной величине  $\mathbf{w}_{2S}$ .

Как указывалось в предыдущих разделах, решение интегральных уравнений Вольтерра сопряжено с некоторыми трудностями [17], возникающими в силу некорректности задачи. Поэтому для получения решения задачи воспользуемся методом, основанном на

введении сглаживающего функционала А. Н Тихонова. Алгоритм применения метода подробно изложен в разделе 2.2, согласно которому переходим от уравнения (2.53) к решению регуляризованной СЛАУ следующего вида

$$\left(\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot C\right) \cdot P = \Delta^T \cdot \Delta_P, \quad (2.54)$$

где  $\Delta^T$  – транспонированная к  $\Delta$  матрица;  $C$  – симметричная трехдиагональная матрица размерности  $M \times M$ , схема заполнения которой указывалась ранее;  $\alpha$  – параметр регуляризации, который можно вычислить, например, на основании принципа невязки.

Численное определение закона изменения внешней нагрузки  $P(t)$  было проведено для исходных данных, совпадающих с рассмотренной ранее задачей (см. описание рис. 2.17; 2.18). Исходные значения прогиба, задаваемые в точке  $x_{2S} = 0.8$  м «зашумлялись»; уровень ошибки при задавании составлял  $\Delta = 5\%$ . Численные результаты по идентификации неизвестного нагружения приведены на рис. 2.23. Значения нагрузки получены при  $\alpha = 10^{-26}$ .

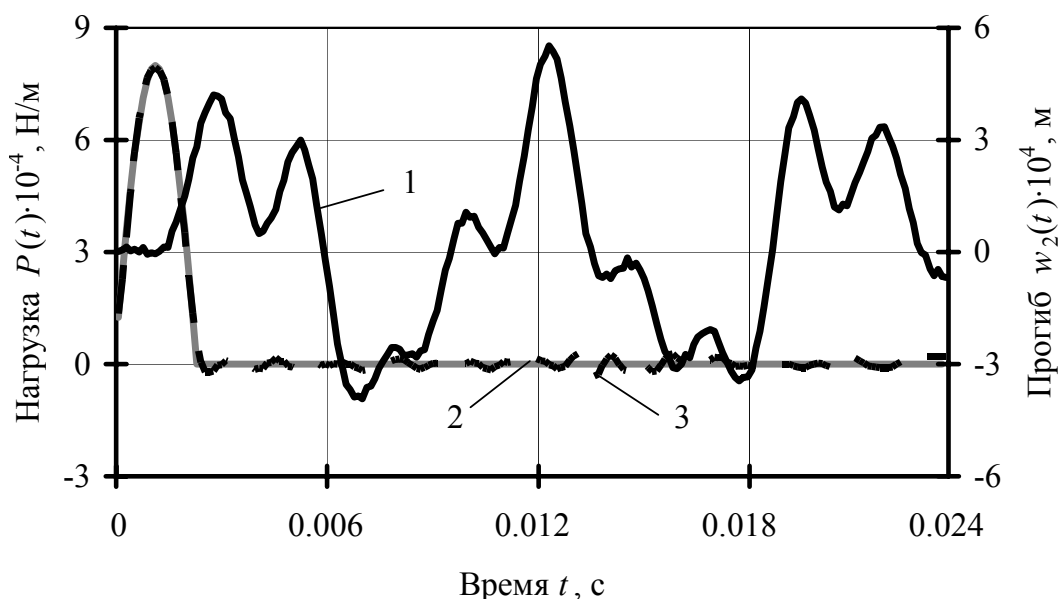


Рис. 2.23. Результаты идентификации импульсного нагружения

Кривая 1 на рисунке соответствует исходным значениям прогиба в точке  $x_{2S}$ ; кривая 2 – нагрузка, задаваемая при решении соответствующей прямой задачи; кривая 3 – нагрузка, идентифициро-



ванная в процессе решения обратной задачи. Кривые 2 и 3 хорошо согласованы.

В качестве исследования возможности работоспособности процедуры идентификации приведем результаты восстановления нагрузки по данным прогиба, полученного с помощью МКЭ (см. кривая 3 на рис. 2.22,б) когда рассматривалось решение прямой задачи. Результаты идентификации изображены на рис. 2.24. Величина параметра  $\alpha$  в данном случае составила  $\alpha=10^{-24}$ . Нумерация соответствующих кривых на рис. 2.23 и 2.24 совпадает.

В этом случае восстановление нагрузки, как это следует из рис. 2.24, несколько хуже, чем в варианте согласования кривых на рис. 2.23. По существу можно трактовать результаты рис. 2.24 как восстановление кривой нагрузки по произвольно задаваемой исходной кривой перемещения в произвольной точке механической системы.

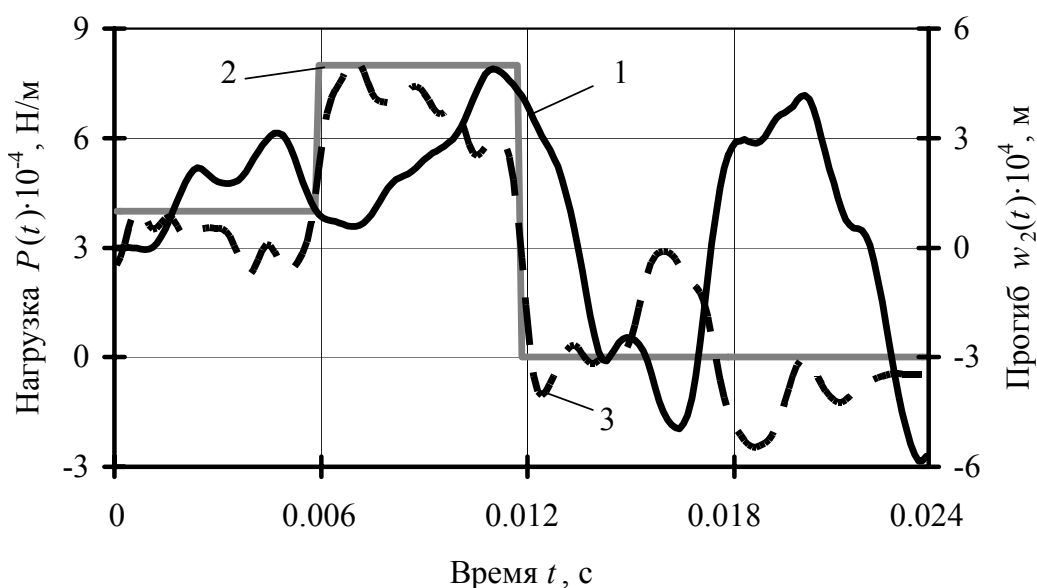


Рис. 2.24. Результаты идентификации импульсного нагружения

Приведенную методику идентификации несложно применить и для случая, когда регистрация перемещений производится в некоторой точке принадлежащей первой балке ( $j=1$ ), а также и для более сложных механических систем, варианты которых приведены на рис. 2.25.

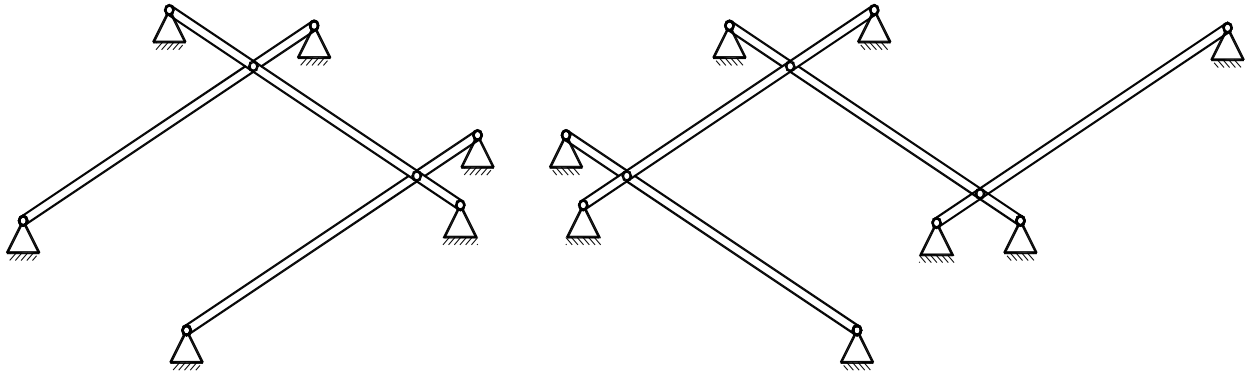


Рис. 2.25. Схемы систем балок

Следует отметить, что для эффективного решения системы интегральных уравнений (2.50) можно использовать и другие методы, например метод  $h$ -регуляризации А. С. Апарцина, подробное описание и применение которого приведено в разделе 2.2. Согласно метода продифференцируем левые и правые части уравнений системы (2.50) по времени, после чего перейдем к следующей системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} \int_0^t P(\tau)K_1(t-\tau)d\tau = \int_0^t R(\tau)K_2(t-\tau)d\tau; \\ \int_0^t R(\tau)K_3(t-\tau)d\tau = \frac{\partial w_2(x_{2S}, t)}{\partial t}, \end{cases} \quad (2.55)$$

где  $K_1(t) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_P \sin \lambda_{1k} x_1}{\rho_1 F_1 l_1 \lambda_{1k}} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \omega_{1ik} \cos \omega_{1ik} t;$

$$K_2(t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\rho_j F_j l_j} \sin^2 \lambda_{jk} x_{jO} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{jik} \omega_{jik} \cos \omega_{jik} t;$$

$$K_3(t) = \frac{2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{2k} x_{2O} \sin \lambda_{2k} x_{2S} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{2ik} \omega_{2ik} \sin \omega_{2ik} t.$$

Последующие преобразования производятся аналогично преобразованиям приведенным в (2.52)-(2.53). Результаты идентификации нагружения с применением метода  $h$ -регуляризации приведены на рис. 2.26.

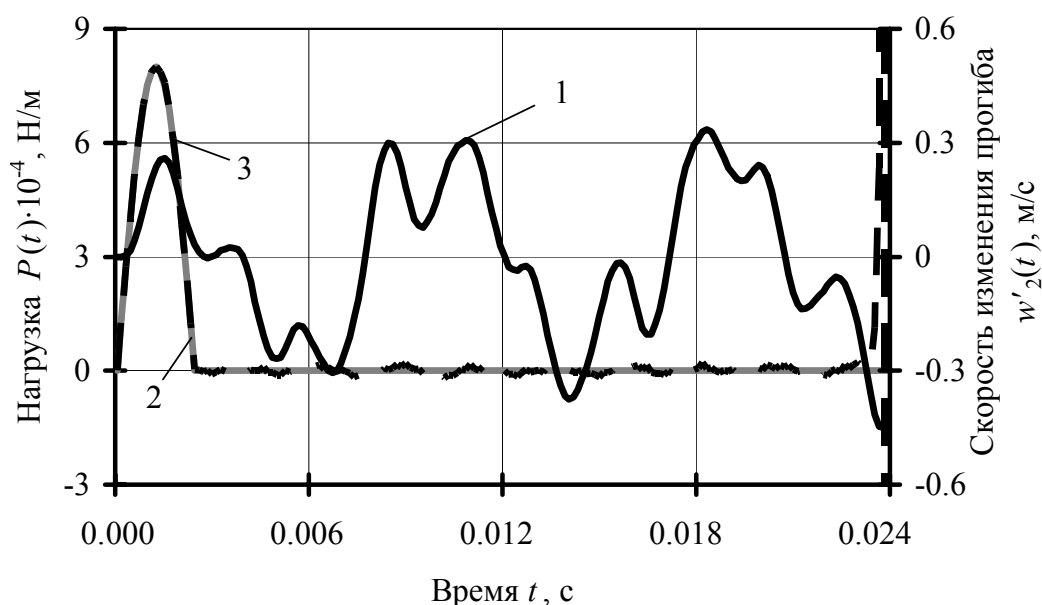


Рис. 2.26. Результаты идентификации с применением метода  $h$ -регуляризации

Геометрические и механические характеристики исследуемой системы балок приведены в пояснении к рисункам 2.17-2.19, координаты точек и геометрические размеры, принятые при расчете, следующие:  $x_{1P}=0.58$  м;  $x_{1O}=0.6$  м;  $x_{2O}=0.6$  м;  $b_P=0.04$  м;  $l_1=0.8$  м;  $l_2=1$  м.

При расчетах принималось  $K=32$  – число членов ряда в соответствующих разложениях; значение шага во времени, который является параметром регуляризации  $\Delta t=3.347 \cdot 10^{-5}$  с.

Отметим, что в данном случае при расчете принималось, что точка скрепления балок принадлежит участку балки  $2b_P$ , по которому прикладывается внешняя нагрузка (см рис. 2.14). Смещение нагрузки и её вывод из точки скрепления балок приводит к ухудшению процедуры идентификации, что, по-видимому, связано с недостатками применяемого метода построения регуляризованного решения. Результаты идентификации нагрузки, расположенной в координате  $x_{1P}=0.2$  м для исходных данных предыдущей задачи, приведены на рис. 2.27.

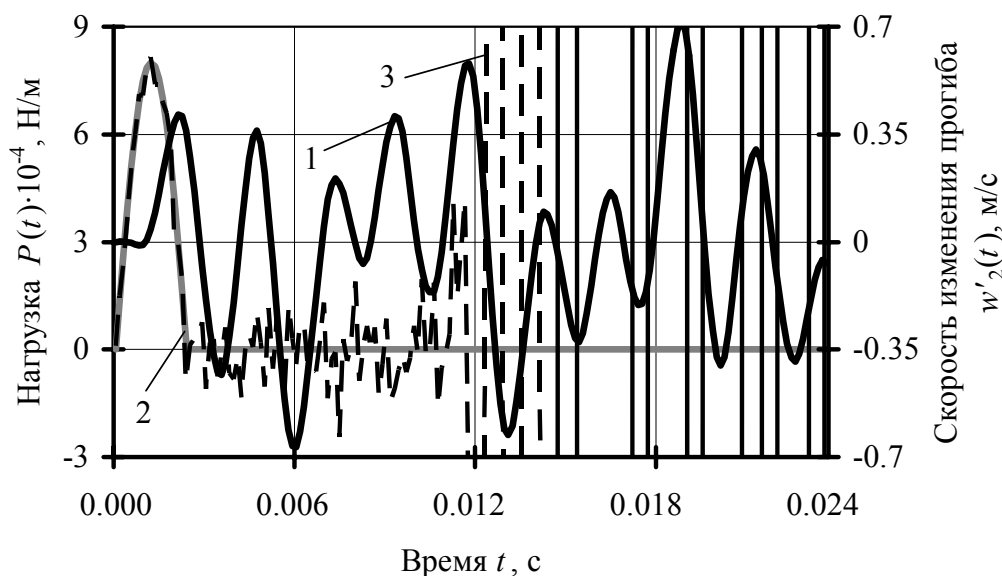


Рис. 2.27. Результаты идентификации с применением метода  $h$ -регуляризации

При расчете принимался шаг во времени  $\Delta t = 3.301 \cdot 10^{-5}$  с и  $K = 32$  – число членов ряда в соответствующих разложениях.

Приведенные результаты свидетельствуют о недостатках метода  $h$ -регуляризации А. С. Апарцина и гораздо большей точности решении полученных с помощью метода А. Н. Тихонова. Подобные недостатки могут быть обусловлены рядом причин, среди которых следует выделить специфику теории балок С.П. Тимошенко. Следует отметить, что применение более простых теорий, в частности классической теории Бернулли-Эйлера [8], позволит во всей мере использовать метод  $h$ -регуляризации при решении обратных задач.

## 2.6. УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СИСТЕМЫ БАЛОК

Зачастую при проектировании конструкций возникает задача минимизации колебаний системы в некоторой её области или конкретной точке. Такого рода задачу можно решить следующим образом: в систему вводится дополнительная нагрузка с определяемым законом её изменения во времени, которая позволяет минимизировать значения выбранного параметра деформированного состояния.

Рассмотрим задачу управления прогибом некоторой точки, принадлежащей второй балке системы, рассмотренной ранее.

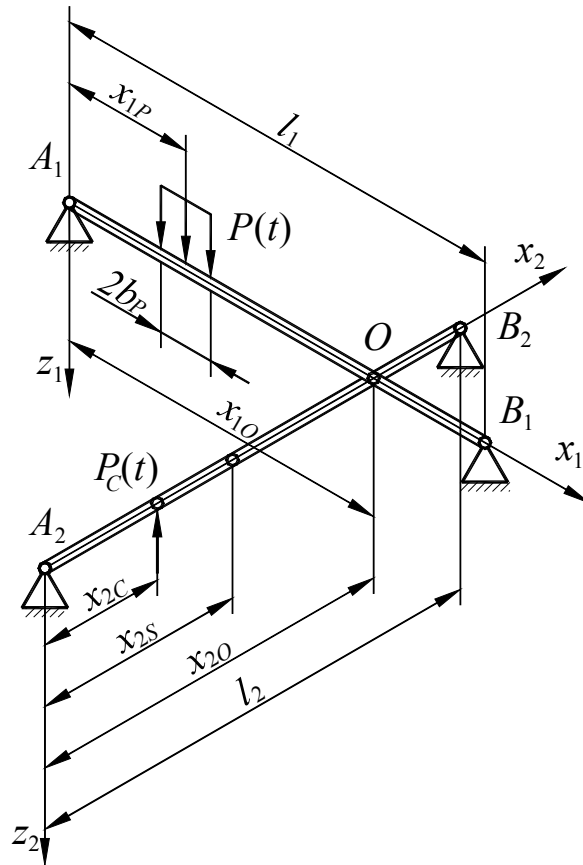


Рис. 2.28. Схема системы балок и её нагружения

Согласно принимаемым условиям задачи на первую балку системы воздействует некоторая распределенная нестационарная нагрузка с известным законом изменения во времени  $P(t)$ , вызывающая колебания системы балок в целом. На колебания системы налагается некоторое условие, в данном случае условие отсутствия прогиба в конкретной точке второй балки с координатой  $x_{2S}$  (см. рис. 2.28). Для выполнения указанного условия в систему вводится дополнительная, управляющая, сила  $P_C(t)$ , которая воздействует на вторую балку в точке  $x_{2C}$ . Таким образом, возникает задача отыскания неизвестного закона изменения во времени управляющего воздействия  $P_C(t)$ .

Решение задачи подобно решению задачи идентификации неизвестной нагрузки, рассмотренной в предыдущем разделе. Она сводится к анализу следующей системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} \int_0^t R(\tau)K_1(t-\tau,\tau)d\tau - \int_0^t P_C(\tau)K_2(t-\tau,\tau)d\tau = \int_0^t P(\tau)K_3(t-\tau,\tau)d\tau; \\ \int_0^t R(\tau)K_4(t-\tau,\tau)d\tau - \int_0^t P_C(\tau)K_5(t-\tau,\tau)d\tau = 0, \end{cases} \quad (2.56)$$

где  $K_1(t) = \sum_{j=1}^2 \frac{2}{\rho_j F_j l_j} \sum_{j=1}^{\infty} \sin^2 \lambda_{jk} x_{jO} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{jik} \sin \omega_{jikt};$

$$K_2(t) = \frac{2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{2k} x_{2C} \sin \lambda_{2k} x_{2O} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{2ik} \sin \omega_{2ikt};$$

$$K_3(t) = \frac{4}{\rho_1 F_1 l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_{1k} x_{1P} \sin \lambda_{1k} b_{1P} \sin \lambda_{1k} x_{1O}}{\lambda_{1k}} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{1ik} \sin \omega_{1ikt};$$

$$K_4(t) = \frac{2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{2k} x_{2S} \sin \lambda_{2k} x_{2O} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{2ik} \sin \omega_{2ikt};$$

$$K_5(t) = \frac{2}{\rho_2 F_2 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_{2k} x_{2S} \sin \lambda_{2k} x_{2C} \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{2ik} \sin \omega_{2ikt}.$$

В данной системе уравнений (2.56) первое уравнение соответствует условию совпадению динамических прогибов в точке скрепления балок, а второе – отсутствию прогиба в точке управления  $x_{2S}$ .

Решение системы интегральных уравнений (2.56) производится численно, путем аппроксимации входящих в уравнения интегралов конечными суммами и переходу к следующей системе алгебраических уравнений матричного типа

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{P}_C = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{P}_C = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.57)$$

где  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{21}$ ,  $\mathbf{A}_{22}$  и  $\mathbf{B}_1$  – матрицы, соответствующие ядрам  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$ ,  $K_4(t)$ ,  $K_5(t)$  и  $K_3(t)$ ;  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{P}_C$  – неизвестные векторы отвечающие искомым функциям  $R(t)$  и  $P_C(t)$ ;  $\mathbf{P}$  – известный вектор, который определяет во времени задаваемую функцию возмущающего нагружения  $P(t)$ .

Дальнейшее решение системы уравнений (2.57) подобно изложенному ранее подходу и производится с применением регуляризующего алгоритма А. Н. Тихонова. Численные результаты по управлению прогибом точки приведены на рис. 2.29. Геометрические и механические характеристики исследуемой системы балок приведены в пояснении к рис. 2.17-2.19, координаты точек и геометрические размеры, принятые при расчете, следующие:  $x_{1P}=0.2$  м;  $x_{1O}=0.6$  м;  $x_{2O}=0.6$  м;  $x_{2S}=0.8$  м;  $x_{2C}=0.9$  м;  $b_P=0.04$  м;  $l_1=0.8$  м;  $l_2=1$  м.

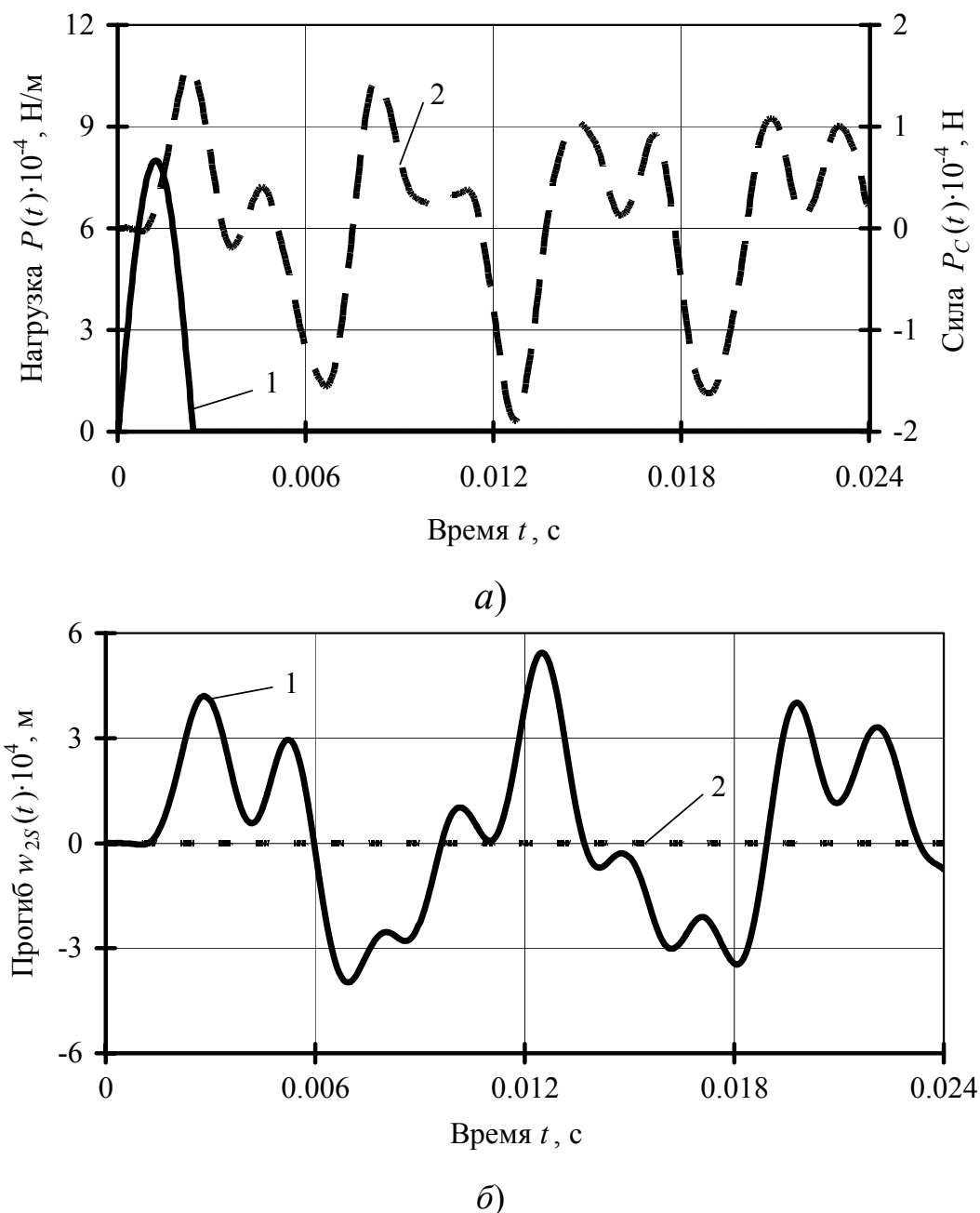


Рис. 2.29. Исходные данные и результаты управления колебаниями

На рис. 2.29,*а* приведены графики возмущающей и управляющей нагрузок (кривые 1 и 2 соответственно), а на рис. 2.29,*б* – графики прогиба точки  $x_{2S}$  в случае, когда управляющая нагрузка отсутствует (кривая 1), и в случае, когда осуществляется управление колебаниями системы балок (кривая 2).

На рис. 2.29,*б* хорошо видно, высокую эффективность разработанной методики управления: значения прогибов в точке управления практически равны нулю.

С помощью приведенной методики несложно получить варианты решений задач управления деформациями в точке балки, а также для случаев, когда управление производится в некоторой точке первой балки системы, а управляющая нагрузка прикладывается ко второй. Возможны решения и других вариантов задач управления нестационарными колебаниями системы скрепленных балок, каждая из которых имеет конечную длину.



# ГЛАВА 3. ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ НА ОДНОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ С МАССАМИ И МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ

## 3.1. ДЕФОРМИРОВАНИЕ БАЛОК С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Задачу о колебаниях однопролетной шарнирно-опертой балки конечной длины при действии неподвижной, сосредоточенной в точке  $x_0$  нестационарной силы  $P(t)$ , будем рассматривать с использованием системы дифференциальных уравнений теории С.П. Тимошенко (2.1).

Функции динамического прогиба балки  $w(x,t)$  и угла наклона касательной к упругой линии  $\psi(x,t)$  будем искать с применением рядов (2.3). Поперечная нагрузка, отражающая только действие силы  $P(t)$ , имеет вид (см. рис. 3.1)

$$q_z(x,t) = P(t)\delta(x - x_0). \quad (3.1)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (2.1) находим при нулевых начальных условиях, заданных в момент входа силы  $P$  на балку, и граничных условиях, отвечающих виду закрепления ее краев (2.2).

В дальнейшем будем использовать обозначения:  $G' = k'G$  – приведенный модуль сдвига;  $\lambda_k = k\pi/l$ ;

$$a = \sqrt{G'/\rho}, \quad b = \sqrt{G'F/\rho I}, \quad c = \sqrt{E/\rho}. \quad (3.2)$$

Предполагаем, что на балке в точке  $x_M$  расположена сосредоточенная масса  $M_\Gamma$ . Схема рассматриваемой механической системы представлена на рис. 3.1.

Реакцию сосредоточенной в точке  $x_M$  массы  $M_\Gamma$  заменяем приложенной в этой точке силой  $R(t)$ , величина которой согласно принципу Даламбера будет

$$R(t) = -M_\Gamma \frac{d^2 w(x_M, t)}{dt^2}, \quad (3.3)$$

где  $w(x_M, t)$  – перемещение точки, в которой расположена масса  $M_\Gamma$ .

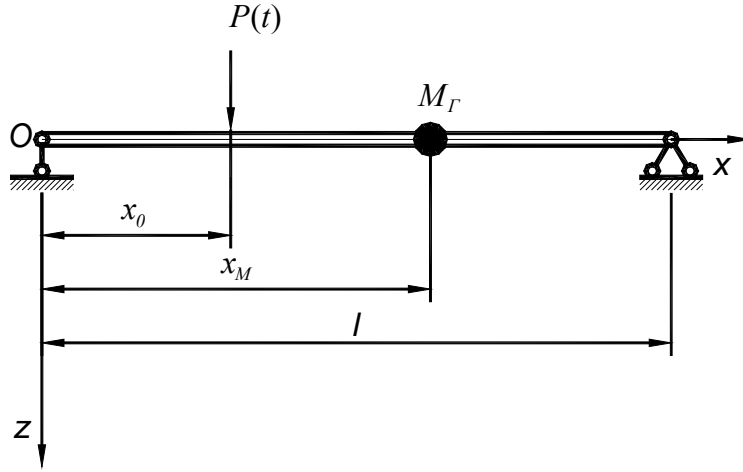


Рис. 3.1. Схема нагружения балки

Следовательно, перемещение  $w(x_M, t)$  может быть вычислено с помощью операционного исчисления следующим образом

$$w(x_M, t) = -\frac{1}{M_G} \int_0^t R(\tau)(t - \tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Отметим, что поперечная нагрузка, действующая на балку и отражающая также действие реакции  $R(t)$  со стороны сосредоточенной массы, может быть записана в виде:

$$q(x, t) = P(t)\delta(x - x_0) - R(t)\delta(x - x_M). \quad (3.5)$$

Тогда, при принятых предположениях уравнения колебаний балки записываются в форме

$$\begin{cases} c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \\ a^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} P(t)\delta(x - x_0) - R(t)\delta(x - x_M). \end{cases} \quad (3.6)$$

Решение системы (3.6) приводит к следующим зависимостям

$$w(x, t) = \frac{2}{\rho F l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left( P(\tau) \sin(\lambda_k x_0) - R(\tau) \sin(\lambda_k x_M) \right) \times \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik}(t - \tau) d\tau \sin \lambda_k x; \quad (3.7)$$

$$\psi(x, t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^2 \lambda_k}{D_k} \int_0^t (P(\tau) \sin(\lambda_k x_0) - R(\tau) \sin(\lambda_k x_M)) \times \\ \times \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{ik} (t - \tau)}{\omega_{ik}} d\tau \cos \lambda_k x.$$

Поскольку сосредоточенная масса предполагается жестко скрепленной с балкой, то её вертикальное перемещение и перемещение точки балки с координатой  $x_M$  совпадает. На основе этого, если воспользоваться первым соотношением в (3.7), получим следующее выражение для отыскания неизвестной силы  $R(t)$

$$\int_0^t R(\tau) K_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t P(\tau) K_2(t - \tau) d\tau, \quad (3.8)$$

где 
$$K_1(t) = \frac{2M_{\Gamma}}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2(\lambda_k x_M) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin(\omega_{ik} t) - t;$$

$$K_2(t) = \frac{2M_{\Gamma}}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\lambda_k x_0) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin(\omega_{ik} t) \sin(\lambda_k x_M).$$

Интегральное уравнение (3.8) можно использовать как для решения прямых задач о колебаниях балки, так и задач идентификации. Если решается прямая задача, то в этом уравнении неизвестной является функция  $R(t)$ , а заданной – функция  $P(t)$ . В этом случае на основе уравнения (3.8) находится неизвестная функция при решении задачи о колебании балки с массой.

Если рассматривать обратную задачу идентификации неизвестной нагрузки  $P(t)$ , то уравнение (3.8) следует включить в систему двух интегральных уравнений, вторым в которой будет уравнение, вытекающее из условия задания либо перемещения, т.е. первое в (3.7), либо деформации как функции времени в некоторой точке балки.

Если рассматривать задачу управления колебаниями в заданной точке балки, то уравнение типа (3.8) будет входить в систему интегральных уравнений, определяющих соответствующую задачу.

Перейдем к непосредственному изложению задачи о колебаниях однопролетной балки конечной длины с расположенной на

ней сосредоточенной массой  $M_\Gamma$  при действии сосредоточенной силы  $P(t)$ , решение которой заключается, прежде всего, в определении на основе выражения (3.8) неизвестной силы  $R(t)$ , приложенной в точке  $x_M$  балки.

Решение интегрального уравнения (3.8), так же, как и в предыдущих расчетных случаях, описанных в разделах 1 и 2, возможно с помощью различных способов. По причине наличия в ядрах уравнения (3.8) сильноосциллирующих функций, наиболее эффективным можно считать метод, приводящий данное уравнение к следующей зависимости, и который основывается на теории, примененной в ряде исследований [21]. Из уравнения (3.8) для дискретного времени  $t_m = m\Delta t$  получается следующее выражение

$$\sum_{p=1}^m R_p \int_{t_{p-1}}^{t_p} K_1(t_m - \tau) d\tau = \sum_{p=1}^m P_p \int_{t_{p-1}}^{t_p} K_2(t_m - \tau) d\tau. \quad (3.9)$$

После интегрирования будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m R_p \sum_{k=1}^{\infty} \left( \Omega_{k,m-p} \sin^2(\lambda_k x_M) - t_{m-p+0.5}^2 \right) = \\ = \sum_{p=1}^m P_p \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{k,m-p} \sin(\lambda_k x_0) \sin(\lambda_k x_M), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\Omega_{k,m} = \frac{2M_\Gamma}{\rho Fl} \sum_{i=1}^2 \frac{C_{ik}}{\omega_{ik}} (\cos(\omega_{ik} t_m) - \cos(\omega_{ik} t_{m+1}))$ ;  $m=0, 1, \dots, M-1$ .

Выражение (3.10) служит для определения величин  $R_m$  по рекуррентной процедуре по индексу  $m$  и дает возможность найти все эти величины на промежутке времени  $t \leq t_m$ .

После нахождения величин  $R_m$  рассчитываются значения перемещений, усилий и моментов в любой точке балки на основе формул (3.7), которые предварительно нужно записать для дискретных моментов времени  $t = t_m$ .

В качестве примера приведем результаты расчета для стальной балки с прямоугольным поперечным сечением и следующими геометрическими и физическими характеристиками: длина балки  $l=2$

м; ширина балки  $b=0,15$  м; высота поперечного сечения  $h=0,1$  м; площадь поперечного сечения  $F=bh=0,015$  м<sup>2</sup>; осевой момент инерции  $I=bh^3/12=1,25\cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>; плотность материала  $\rho=0,795\cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости  $E=0,206\cdot 10^6$  МПа; величина сосредоточенной в точке  $x_M=l/2$  массы  $M_T=100$  кг; величина сосредоточенной в точке  $x_0=l/2$  силы  $P=1$  кН; продолжительность действия силы  $T_P=0,04$  с. Отметим, что численный эксперимент проводился на основе решений, полученных различными способами: с помощью использования разложений искомым функций в ряды Фурье, метода конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов (МКЭ).

На рис. 3.2 показаны графики прогиба в точке  $x=l/2$  балки в зависимости от времени, вычисленные тремя указанными способами. Результат, полученный с применением разложений по собственным формам колебаний рядов Фурье, т.е. формулы (3.10), показан сплошной линией. Кроме того, на рисунке 3.2 пунктирной линией показаны значения перемещений, вычисленные по МКР, а штрихпунктирной – по МКЭ.

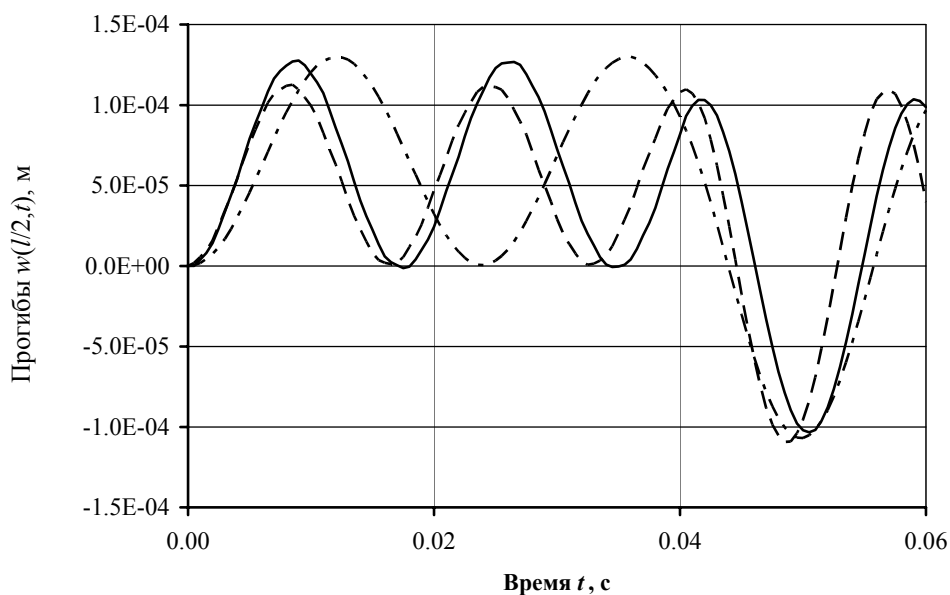


Рис. 3.2. Прогибы середины балки

Из рис. 3.2 видно, что перемещения, вычисленные с помощью рядов Фурье и МКР, хорошо согласованы. Отмечаемое обстоятельство является вполне закономерным, поскольку расчет колебаний балочного элемента двумя способами проводится на основе одних и тех же уравнений движения (2.1) согласно теории С.П. Тимошенко. Согласованность результатов, полученных по МКЭ, несколько хуже.

Далее, на рис. 3.3, сопоставлены перемещения точки середины балки при различных значениях массы  $M_{\Gamma}$ . Сплошной линией показаны перемещения точки  $l/2$  балки при  $M_{\Gamma}=10^3$  кг, пунктирной – при  $M_{\Gamma}=10^4$  кг, а штрихпунктирной – при  $M_{\Gamma}=10^5$  кг. Значение и продолжительность действия нестационарной силы принимались такими же, как и в предыдущем случае: 1 кН и 0,04 с соответственно.

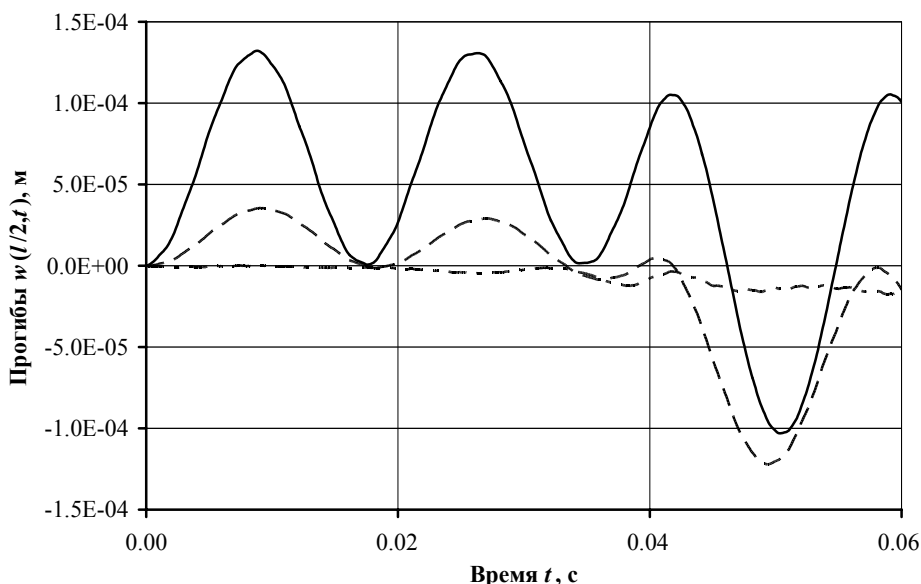


Рис. 3.3. Прогибы середины балки

Эти расчеты выполнены для иллюстрации зависимости амплитуд колебаний балки от величины сосредоточенной массы. Отметим, что масса балки, которая рассматривается в расчетах, составляет 238,5 кг.

### 3.2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК, ВОЗДЕЙСТВУЮЩИХ НА БАЛКИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Задача идентификации заключается в отыскании зависимости внешнего динамического нагружения во времени при условии, что известна зависимость прогиба (или деформации) в некоторой точке балки от времени, а также координата приложения силы.

В математическом плане обратная задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I-го рода (2.32), в котором ядро интегрального уравнения является вырожденным, поскольку  $K(t, t)=0$ .

При решении задачи возникла необходимость анализа интегрального уравнения Вольтерра I-го рода. Данная обратная задача относится к классу некорректных задач математической физики [17]. Известно, что решение таких задач возможно лишь с применением специальных регуляризирующих алгоритмов [17]. Поэтому используем более общую операторную форму записи выражения типа (2.32) в виде  $w=A \cdot q$  и, применяя регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова, запишем сглаживающий параметрический функционал в виде

$$M^\alpha[q] = \|w^\delta - A \cdot q\|_{L_2}^2 + \alpha \|q\|^2, \quad (3.11)$$

где  $w^\delta$  – исходные данные, в данном случае регистрируемые в точке  $x_0$  перемещения балки с некоторой погрешностью измерения  $\delta$ ;  $q$  – искомая функция, в данном случае подвижная сила;  $A$  – математический оператор, такой что  $A \cdot q = w$ ;  $\alpha$  – параметр регуляризации.

Если в выражении (3.11)  $\|q\|^2 \in W_2^1$ , то есть вычислять норму искомой функции в пространстве Соболева [17], то сглаживающий параметрический функционал примет вид

$$M^\alpha[q] = \int_0^T \left( w^\delta(t) - \int_0^t q(\tau) K(t-\tau, \tau) \right)^2 dt + \alpha \int_0^T \left( q^2(t) + (q'(t))^2 \right) dt, \quad (3.12)$$

где  $T$  – время завершения исследуемого процесса.

Наиболее эффективным способом решения таких задач следует считать регуляризацию матричного уравнения [17], эквивалентного функционалу (3.11). При этом решается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) типа

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{w}, \quad (3.13)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \cdot \sin(\beta_k \cdot t)$  – нижнетреугольная матрица, равная произведению  $M$  - диагональной матрицы  $\mathbf{A}^*$  ( $M$  – число шагов  $\Delta t$  во времени) на функцию  $\sin(\beta_k \cdot t)$ ;  $\mathbf{q}$  – идентифицируемый вектор, определяющий изменение силы во времени;  $\mathbf{C}$  – симметричная трехдиагональная матрица размера  $M \times M$ , которая представлена в монографии [17].

Параметр регуляризации  $\alpha$ , входящий в уравнения (3.11) и (3.13), выбирается на основании принципа невязки – оценки разности исходных данных и произведения матрицы  $\mathbf{A}$  на регуляризованное решение  $\mathbf{q}^\alpha$ . При этом квадраты погрешности полученного решения и погрешности задания исходных данных должны быть одинаковыми, т.е.

$$\|\mathbf{w}^\delta - \mathbf{A}\mathbf{q}^\alpha\|^2 = \delta^2 \quad (3.14)$$

Расчет значения параметра  $\alpha$ , удовлетворяющего условию (3.14), проводился итерационным методом, согласно которому первоначальное значение  $\alpha_0$  выбирается так, что  $\|\mathbf{w}^\delta - \mathbf{A}\mathbf{q}^\alpha\|^2 > \delta^2$ , а каждое последующее значение параметра  $\alpha$  меньше предыдущего в 10 раз. Итерационный процесс прекращается при выполнении условия  $\|\mathbf{w}^\delta - \mathbf{A}\mathbf{q}^\alpha\|^2 \leq \delta^2$ . При необходимости значение  $\alpha$  можно уточнить, уменьшив шаг итераций.

Далее приведем соотношения, из которых исходим при формулировании обратной задачи, а именно

$$w(x_M, t) = \frac{1}{M \Gamma} \int_0^t R(\tau)(t-\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

$$w(x, t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (P(\tau) \sin(\lambda_k x_0) - R(\tau) \sin(\lambda_k x_M)) \times \\ \times \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (t-\tau) d\tau \sin \lambda_k x. \quad (3.16)$$

Соотношение (3.15) определяет перемещения сосредоточенной массы под действием неизвестной силы  $R(t)$ , а соотношение (3.18) – перемещения в произвольной точке балки в предположении, что функция  $P(t)$  неизвестна.

На основе этих соотношений строятся выражения, закладываемые в основу решения обратной задачи и состоящие в совпадении перемещений в точке балки и массы в точке их контакта, а также в задании в некоторой точке балки как известной функции времени либо ее прогиба, либо осевой деформации.



Указанные соотношения представляют систему двух интегральных уравнений Вольтерра I рода, к которым следует применить сглаживающий функционал А.Н. Тихонова. Однако, применение его обосновано лишь к одному уравнению [17]. Поэтому систему двух уравнений целесообразно свести к одному уравнению, исключив, например, функцию  $R(t)$ . В дальнейшем применение регуляризирующего метода состоит во введении сглаживающего параметрического функционала (3.11) в дискретной форме, после чего задача сводится к решению регуляризированной СЛАУ типа (3.13). При этом матрица  $\mathbf{A}$  примет следующий вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{A3} - \mathbf{A4} \cdot (\mathbf{A2}^T \cdot \mathbf{A2} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{A2}^T \cdot \mathbf{A1}, \quad (3.17)$$

где

$$\mathbf{A1}_{m,p} = \frac{2M_\Gamma}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{C_{ik}}{\omega_{ik}} \left( \cos(\omega_{ik} t_{m-p}) - \cos(\omega_{ik} t_{m-p+1}) \right) \sin(\lambda_k x_0) \sin(\lambda_k x_M);$$

$$\mathbf{A2}_{m,p} = \frac{2M_\Gamma}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{C_{ik}}{\omega_{ik}} \left( \cos(\omega_{ik} t_{m-p}) - \cos(\omega_{ik} t_{m-p+1}) \right) \sin^2(\lambda_k x_M) - t_{m-p+0.5}^2;$$

$$\mathbf{A3}_{m,p} = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{C_{ik}}{\omega_{ik}} \left( \cos(\omega_{ik} t_{m-p}) - \cos(\omega_{ik} t_{m-p+1}) \right) \sin(\lambda_k x_0) \sin(\lambda_k x);$$

$$\mathbf{A4}_{m,p} = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{C_{ik}}{\omega_{ik}} \left( \cos(\omega_{ik} t_{m-p}) - \cos(\omega_{ik} t_{m-p+1}) \right) \sin(\lambda_k x_M) \sin(\lambda_k x);$$

$m = 0, 1, \dots, M-1$ .

В качестве дополнения, поясняющего выражение (3.17), используя матричную форму записи выражений, представим формулу для нахождения величин  $R_m$  в следующем виде

$$\mathbf{R} = (\mathbf{A2}^T \cdot \mathbf{A2} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{A2}^T \cdot \mathbf{A1} \cdot \mathbf{q}. \quad (3.18)$$

На рис. 3.4 приведены результаты идентификации неизвестного нагружения, приложенного в точке  $x_0=l/2$  балки, которая несет сосредоточенную в точке  $x_M=l/2$  массу  $M_\Gamma=100$  кг. Идентификация производится на основе перемещений балки в точке расположения регистрирующего датчика  $x=l/4$ , «зашумленных» по закону

$$w_{\text{noise}} = w + \max(w) (\text{rnd}(\delta) - 0.5\delta), \quad (3.19)$$

где  $\text{rnd}$  – функция, генерирующая случайные числа.

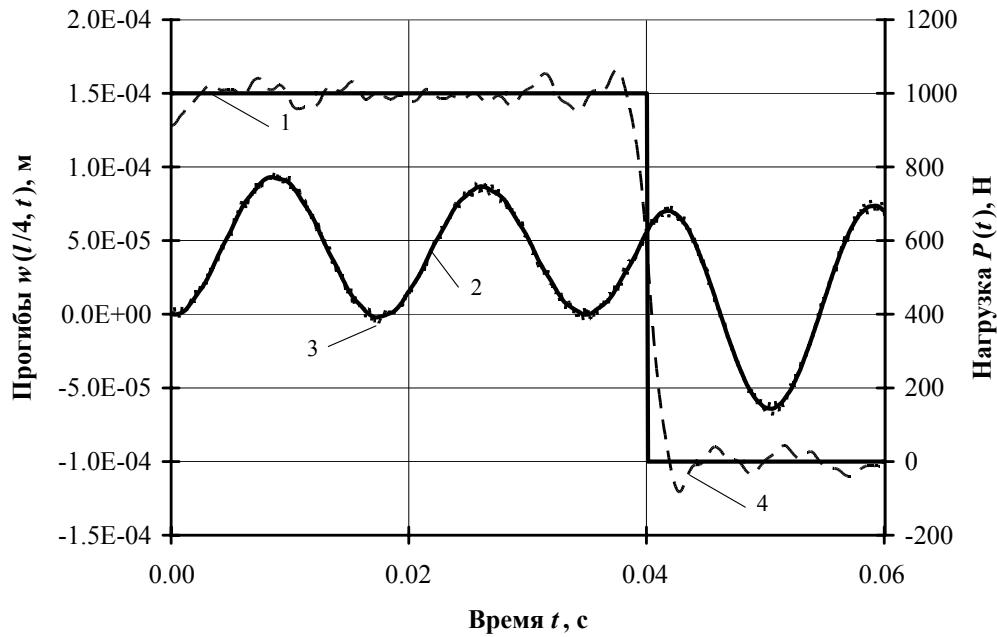


Рис. 3.4. Исходные данные и результаты идентификации

Результат идентификации действовавшей на балку неподвижной силы, представлен на рис 3.4 пунктирной линией (4). Сплошной линией (1) показан график функции нагрузки, принятой для решения прямой задачи. Кривая 2 соответствует точным значениям перемещений балки в точке расположения регистрирующего датчика  $x=l/4$ , а кривая 3 – та же кривая, «зашумленная» величиной  $\delta = 0,05$ .

На рис. 3.5 приведены результаты решения обратной задачи, аналогичной задаче, графическая часть которой представлена на рис. 3.4. Отличие двух последних расчетов заключается в особенности учета наложенного «шума»; в последнем случае предполагалось, что на исходные данные для идентификации (перемещения точки  $x=l/4$ ) накладывался не только низкоамплитудный «шум» величиной  $\delta=0,05$ , а и принципиально новый «шум», типа «точечных выбросов», имеющих во много раз большую величину (в рассмотренном на рис. 3.5 случае в 60 раз). Номера точек, имеющих отношение к этой части исходных данных, задавались случайным образом, а именно

$$r_n = rnd(M), \quad (3.20)$$

где  $n=1, \dots, \Delta M$ .

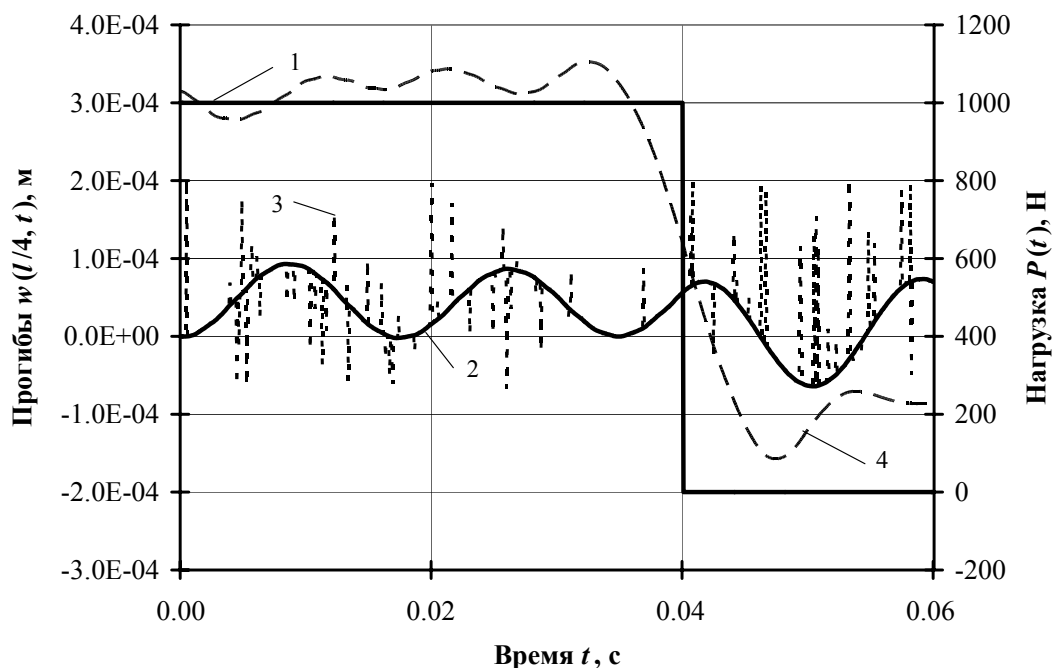


Рис. 3.5. Исходные данные и результаты идентификации

Отметим, что процентное отношение точек с задаваемым по такому принципу высокоамплитудным «шумом» в рассмотренной на рис. 3.5 задаче составила 10%. Также необходимо отметить, что описанное здесь зашумление исходных данных значительно отразилось на результатах идентификации, что видно из рис. 3.5. Однако это все же не исключает возможность применения указанного в данном подразделе способа решения подобных задач с использованием регуляризирующего алгоритма А.Н. Тихонова.

Разработанная методика может быть применена и для идентификации неизвестных нагрузок, воздействующих на балки с сосредоточенными массами, если в качестве исходных данных использовать набор чисел, описывающих изменение во времени деформации в некоторых точках балки.

### 3.3. КОЛЕБАНИЯ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ СИЛЫ

Задачу о колебаниях многопролетной балки при действии подвижной силы будем рассматривать с использованием теории изгиба стержней Тимошенко (2.1). Укажем, что конструкции такого рода широко используются как элементы мостовых сооружений, которые

являются неотъемлемой частью автомобильных и железных дорог. Внешний вид такой конструкции приведен на рис. 3.6.

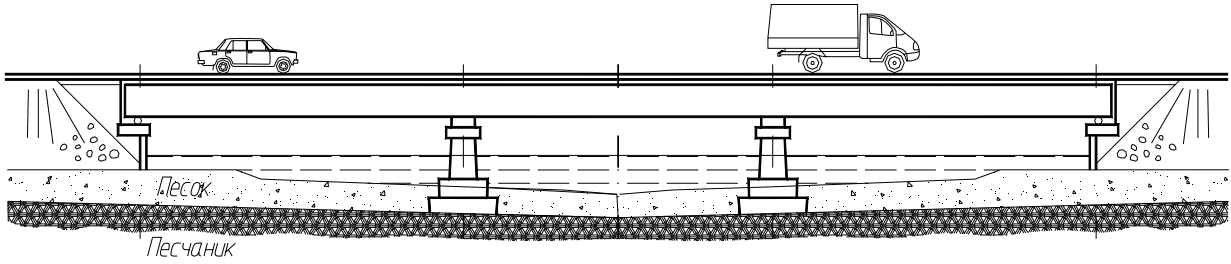


Рис. 3.6. Многопролетная мостовая конструкция

Будем считать, что величины реакций в опорах линейно зависят от прогибов точек  $s_j$ , в которых расположены опоры балки:

$$P_{sj}(t) = C_{sj} \cdot w(s_j, t), \quad (3.21)$$

где  $w(s_j, t)$  – функция прогибов точки  $s_j$  балки;  $C_{sj}$  – жесткость  $j$ -й упругой опоры;  $j = 1, 2 \dots J$  – порядковый номер упругой опоры;  $J$  – количество упругих опор рассматриваемой балки.

Укажем, что поперечная нагрузка, отражающая действие группы реакции  $P_{sj}(t)$  упругих опор, может быть записана в виде:

$$q_{zJ}(x, t) = P(t) \delta(x - V_0 t) - \sum_{j=1}^J P_{sj}(t) \delta(x - s_j), \quad (3.22)$$

где  $s_j$  – осевая координата  $j$ -й упругой опоры.

На рис. 3.7 показана схема рассматриваемой механической системы. На балку воздействует подвижная сила, закон изменения во времени которой записывается в форме  $P(t) \delta(x - V_0 t)$ .

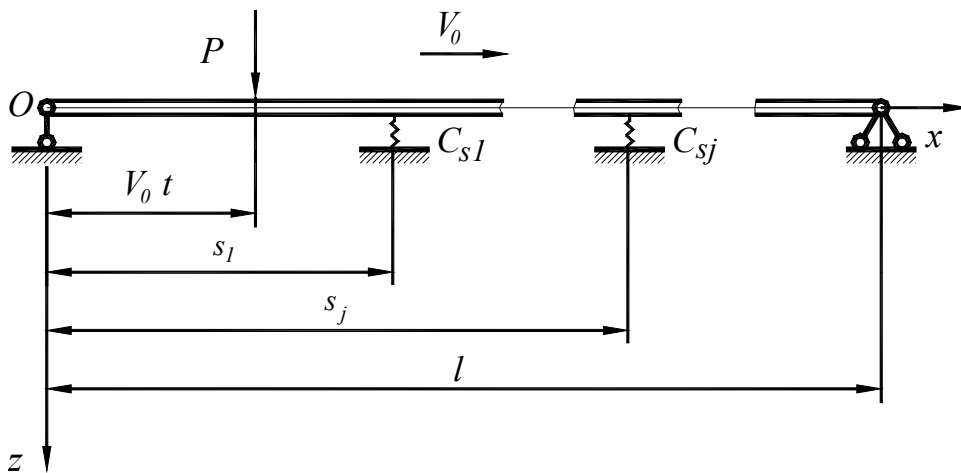


Рис. 3.7. Схема нагружения балки

Решение системы дифференциальных уравнений (2.1) находим при нулевых начальных условиях, заданных в момент входа силы  $P$  на балку, и граничных условиях, отвечающих шарнирному опиранию краев балки (2.2) (рис. 3.7).

Полученные функции можно записать так:

$$\begin{aligned}
 w(x, t) = & \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau - \right. \\
 & \left. - \sum_{j=1}^J \int_0^t P_{sj}(\tau) \sin(\lambda_k s_j) \sum_{i=1}^2 C_{ik} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \right) \sin \lambda_k x; \\
 \psi(x, t) = & \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^2 \lambda_k^2}{D_k} \left( \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{ik} (t - \tau)}{\omega_{ik}} d\tau - \right. \\
 & \left. - \sum_{j=1}^J \int_0^t P_{sj}(\tau) \sin(\lambda_k s_j) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{ik} (t - \tau)}{\omega_{ik}} d\tau \right) \cos \lambda_k x.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

На основе связи между углом поворота поперечного сечения и деформации для уточненной теории изгиба стержней, а именно:  $\varepsilon_x = -z \frac{\partial \psi}{\partial x}$  из функции  $\psi(x, t)$  получим выражение для деформации балки  $\varepsilon_x$ :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x(x, t) = & \frac{2z}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^2 \lambda_k^2}{D_k} \left( \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{ik} (t - \tau)}{\omega_{ik}} d\tau - \right. \\
 & \left. - \sum_{j=1}^J \int_0^t P_{sj}(\tau) \sin(\lambda_k s_j) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\sin \omega_{ik} (t - \tau)}{\omega_{ik}} d\tau \right) \sin \lambda_k x,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

где  $z$  – расстояние от нейтральной линии балки.

Каждая из входящих в выражение (3.23) величин  $P_{sj}(t)$ , являющаяся реакцией  $j$ -й промежуточной опоры, так же, как и в предыдущем случае, неизвестна и подлежит определению.

Следовательно, для определения параметров НДС произвольной точки балки необходимо первоначально определить неизвестные величины  $P_{sj}(t)$ , которые можно найти из первого уравнения в



$$\begin{aligned}
& \left( \mathbf{B}_{11} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s1}} \right) \cdot \mathbf{P}_{s1} + \mathbf{B}_{12} \cdot \mathbf{P}_{s2} + \mathbf{B}_{13} \cdot \mathbf{P}_{s3} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{q}; \\
& \mathbf{B}_{21} \cdot \mathbf{P}_{s1} + \left( \mathbf{B}_{22} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s2}} \right) \cdot \mathbf{P}_{s2} + \mathbf{B}_{23} \cdot \mathbf{P}_{s3} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{q}; \\
& \mathbf{B}_{31} \cdot \mathbf{P}_{s1} + \mathbf{B}_{32} \cdot \mathbf{P}_{s2} + \left( \mathbf{B}_{33} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s3}} \right) \cdot \mathbf{P}_{s3} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{q}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Решая данную систему по методу Крамера, получаем следующие выражения для главного определителя  $\Delta$

$$\begin{aligned}
\Delta = & \left( \mathbf{B}_{11} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s1}} \right) \left( \mathbf{B}_{22} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s2}} \right) \left( \mathbf{B}_{33} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s3}} \right) + \mathbf{B}_{31} \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{23} + \mathbf{B}_{13} \mathbf{B}_{21} \mathbf{B}_{32} \\
& - \mathbf{B}_{13} \left( \mathbf{B}_{22} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s2}} \right) \mathbf{B}_{31} - \left( \mathbf{B}_{11} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s1}} \right) \mathbf{B}_{32} \mathbf{B}_{23} - \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{21} \left( \mathbf{B}_{33} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s3}} \right);
\end{aligned}$$

дополнительных определителей  $\Delta_j$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 = & \left( \mathbf{B}_{22} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s2}} \right) \left( \mathbf{B}_{33} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s3}} \right) \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_{13} \mathbf{B}_{32} \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{23} \mathbf{A}_3 - \\
& - \mathbf{B}_{13} \left( \mathbf{B}_{22} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s2}} \right) \mathbf{A}_3 - \mathbf{B}_{32} \mathbf{B}_{23} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_{12} \left( \mathbf{B}_{33} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s3}} \right) \mathbf{A}_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 = & \left( \mathbf{B}_{11} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s1}} \right) \left( \mathbf{B}_{33} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s3}} \right) \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_{21} \mathbf{B}_{13} \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_{31} \mathbf{B}_{23} \mathbf{A}_1 - \\
& - \mathbf{B}_{13} \mathbf{B}_{31} \mathbf{A}_2 - \left( \mathbf{B}_{11} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s1}} \right) \mathbf{B}_{23} \mathbf{A}_3 - \left( \mathbf{B}_{33} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s3}} \right) \mathbf{B}_{21} \mathbf{A}_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3 = & \left( \mathbf{B}_{11} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s1}} \right) \left( \mathbf{B}_{22} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s2}} \right) \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_{21} \mathbf{B}_{32} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_{31} \mathbf{B}_{12} \mathbf{A}_2 - \\
& - \left( \mathbf{B}_{22} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s2}} \right) \mathbf{B}_{31} \mathbf{A}_1 - \left( \mathbf{B}_{11} + \frac{\mathbf{I}}{C_{s1}} \right) \mathbf{B}_{32} \mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{21} \mathbf{A}_3;
\end{aligned}$$

и искоемых величин  $\mathbf{P}_{sj} = \Delta^{-1} \cdot \Delta_j \cdot \mathbf{p}$ .

Используя связь (3.21), можно легко найти перемещения  $w_{sj}(t)$  в точках  $s_j$  расположения упругих опор балки. Перемещения же и

углы поворота поперечного сечения в произвольной точке балки можно определить по формулам (3.23), подставив в них вычисленные на предыдущем этапе решения прямой задачи значения  $P_{sj}(t)$ .

Численные расчеты были проведены для стальных балок с прямоугольным поперечным сечением и характеристиками, приведенными в подразделе 3.1. Величина действующей на балку подвижной силы  $P=1$  кН; скорость движения силы  $V_0=50$  м/с.

Физические свойства материала балки – плотность и модуль упругости первого рода – были приняты такими же, как и в предыдущих вычислительных экспериментах:  $0,795 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup> и  $0,206 \cdot 10^6$  МПа соответственно.

При рассмотрении задачи о колебании трехпролетной балки принимались следующие координаты расположения двух упругих опор:  $s_1=l/4$  и  $s_2=3l/4$ . Рассматривая же задачу о колебании балки с тремя упругими опорами, координаты расположения упругих опор были:  $s_1=l/4$ ,  $s_2=l/2$ ,  $s_3=3l/4$ .

Для оценки достоверности полученных решений численный эксперимент проводился на основе решений, найденных путем разложения искомых величин в ряды Фурье. Также они могут быть получены с помощью применения метода конечных разностей (МКР) [21]. Сопоставление результатов оказалось очень хорошим.

Приведем в графической форме результаты, иллюстрирующие изменение перемещений во времени в трехпролетной балке.

На рис. 3.8 сплошной линией показаны графики  $w(l/2, t)$ , а также  $w(s_1, t)$  (пунктирная линия) и  $w(s_2, t)$  (штрихпунктирная линия) для трех различных значений жесткости упругих опор:  $C_{sj}=10^7$  Н/м (рис. 3.8,а);  $C_{sj}=10^8$  Н/м (рис. 3.8,б);  $C_{sj}=10^9$  Н/м (рис. 3.8,в). В соответствии с указанными ранее координатами расположения опор, кривые на рис. 3.8 иллюстрируют временные зависимости перемещений точек  $s_1=l/4$  и  $s_2=3l/4$ , т.е. точек расположения опор.

Необходимо отметить, что, несмотря на линейную зависимость между перемещениями балки в точках расположения упругих опор и возникающими в этих точках силами  $P_{sj}(t)$ , уменьшение жесткости упругих опор с  $C_{sj}=10^9$  Н/м до  $C_{sj}=10^8$  Н/м приводит к увеличению амплитуд прогибов в опорах  $w_{sj}(t)$  в среднем в 8 раз, а последующее уменьшение с  $C_{sj}=10^8$  Н/м до  $C_{sj}=10^7$  Н/м приводит к увеличению максимальных значений прогибов в опорах в среднем



только в 4 раза. Этот факт может служить иллюстрацией того, что при уменьшении жесткости опор расположенная на них балка деформируется по-иному, чем при очень жестких опорах.

Далее, на рис. 3.9, приведены численные результаты, иллюстрирующие изменение перемещений во времени в точках  $s_1=l/4$  (пунктирная линия),  $s_2=3l/4$  (штрихпунктирная линия) и середины первого пролета  $3l/8$  (сплошная линия) четырехпролетной балки. По аналогии с рис. 3.8, графики построены для трех различных значений жесткости упругих опор:  $C_{sj}=10^7$  Н/м (рис. 3.9,а),  $C_{sj}=10^8$  Н/м (рис. 3.9,б),  $C_{sj}=10^9$  Н/м (рис. 3.9,в).

### 3.4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК, ВОЗДЕЙСТВУЮЩИХ НА МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ

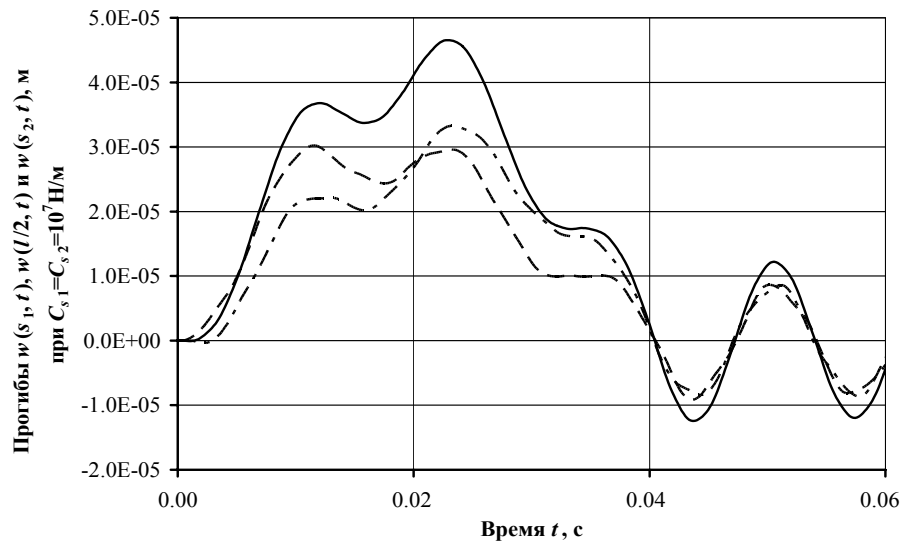
Задача идентификации заключается в отыскании зависимости внешнего динамического нагружения во времени при условии, что известна зависимость прогиба в некоторой точке балки от времени и скорость движения силы. В качестве регуляризирующей процедуры использовался регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова.

Применение регуляризирующего алгоритма заключается во введении сглаживающего параметрического функционала (3.11), после чего задача сводится к решению регуляризированной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) типа (3.13), а именно

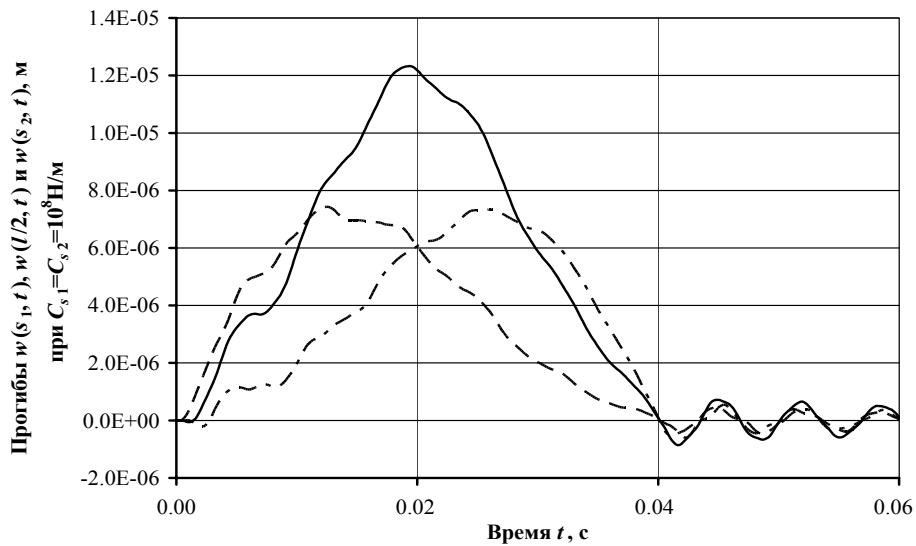
$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{w},$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{Id} - \sum_{j=1}^J \mathbf{B}_{Idj} \cdot \Delta^{-1} \cdot \Delta_j$  – нижнетреугольная матрица, вычисленная на основании значений перемещений в точке расположения датчика, идентифицирующего перемещения;  $\mathbf{p}$  – неизвестный вектор, соответствующий  $p$ .

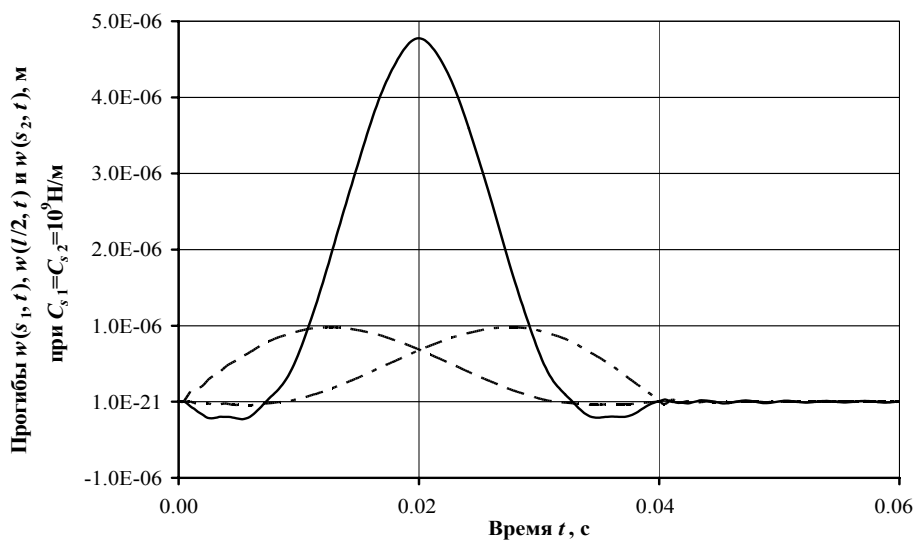
На рис. 3.10 изображены результаты идентификации неизвестного подвижного нагружения трехпролетной балки. При этом на рис. 3.10,а показаны результаты, полученные при жесткости упругих опор  $C_{s1}=C_{s2}=10^8$  Н/м, а на рис. 3.15,б -  $C_{s1}=C_{s2}=10^{10}$  Н/м. Пред-



а)

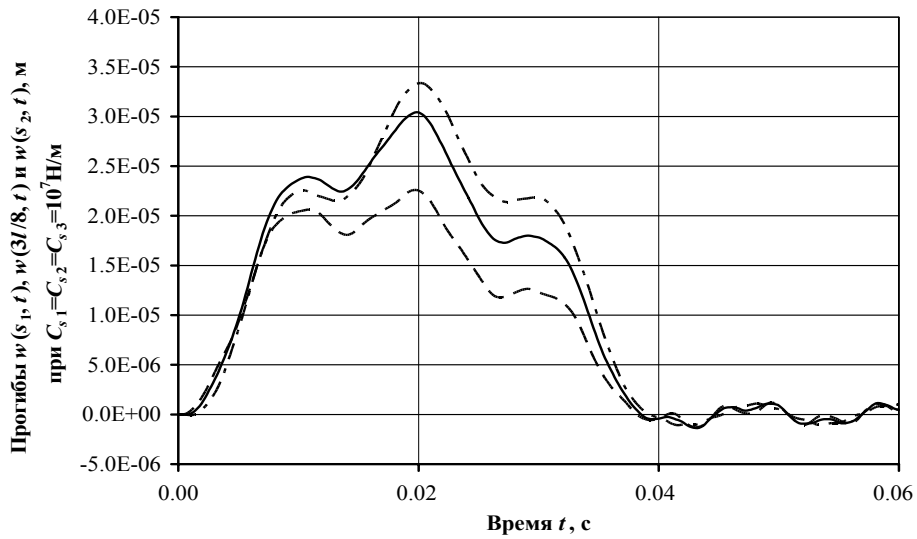


б)

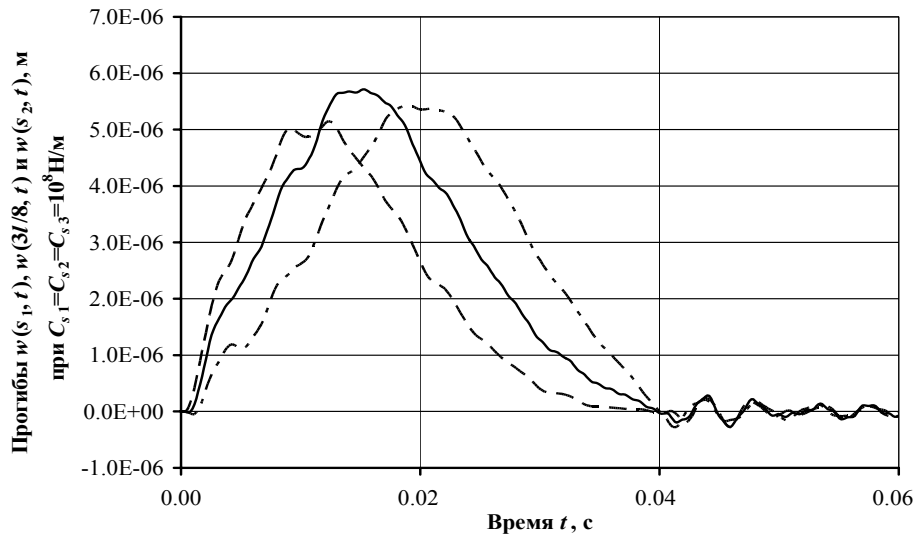


в)

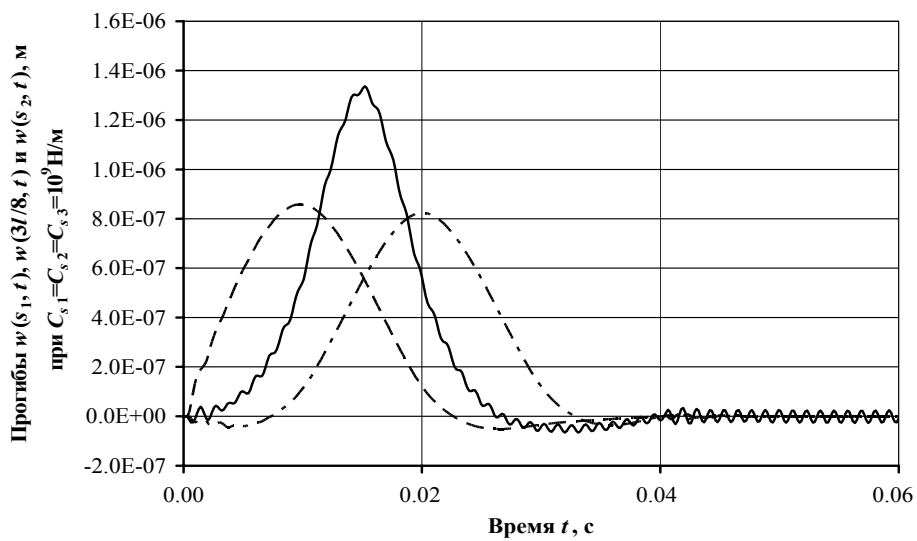
Рис. 3.8. Прогибы трехпролетной балки



а)



б)



в)

Рис. 3.9. Прогитбы четырехпролетной балки

полагалось, что в качестве исходных данных принято изменение прогиба в точке с координатой  $x=7l/8$  – результат решения прямой задачи (кривая 2) и соответствующее ему «зашумленное» со случайной погрешностью в 5% значение (кривая 3).

Укажем, что на рис. 3.10 сплошной линией (кривая 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки.

На рис. 3.11 изображены результаты идентификации неизвестного подвижного нагружения четырехпролетной балки. При этом на рис. 3.11,а показаны результаты, полученные при жесткости упругих опор  $C_{sj}=10^8$  Н/м, а на рис. 3.11,б -  $C_{sj}=10^{10}$  Н/м. Так же, как и в предыдущем случае, в качестве исходных данных принято изменение прогиба в точке с координатой  $x=7l/8$  – результат решения прямой задачи (кривая 2) и «зашумленное» со случайной погрешностью в 5% (кривая 3).

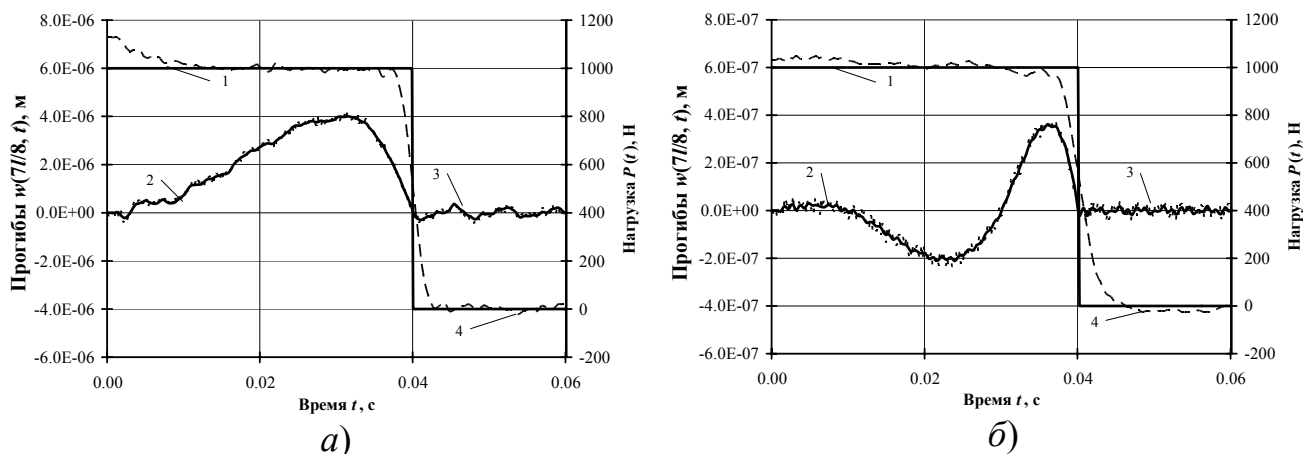


Рис. 3.10. Исходные данные и результаты идентификации

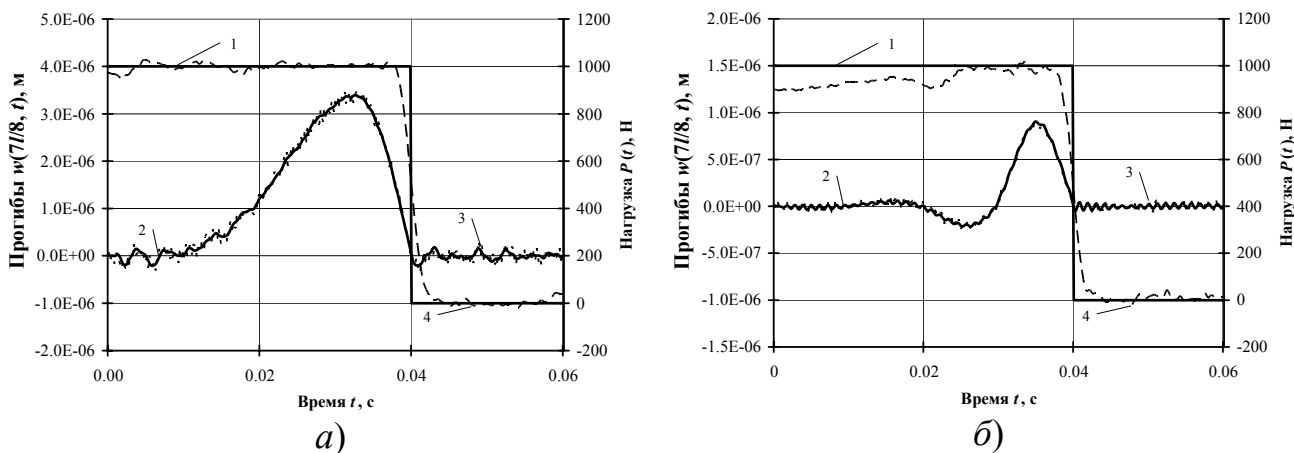


Рис. 3.11. Исходные данные и результаты идентификации

Далее, на рис. 3.12, изображены результаты, полученные аналогично показанным на рис. 3.11 при условии более сложного «зашумления» результатов решения прямой задачи: случайной погрешностью в 2 % «зашумлялось» каждое значение  $P_{sj}(t)$ .

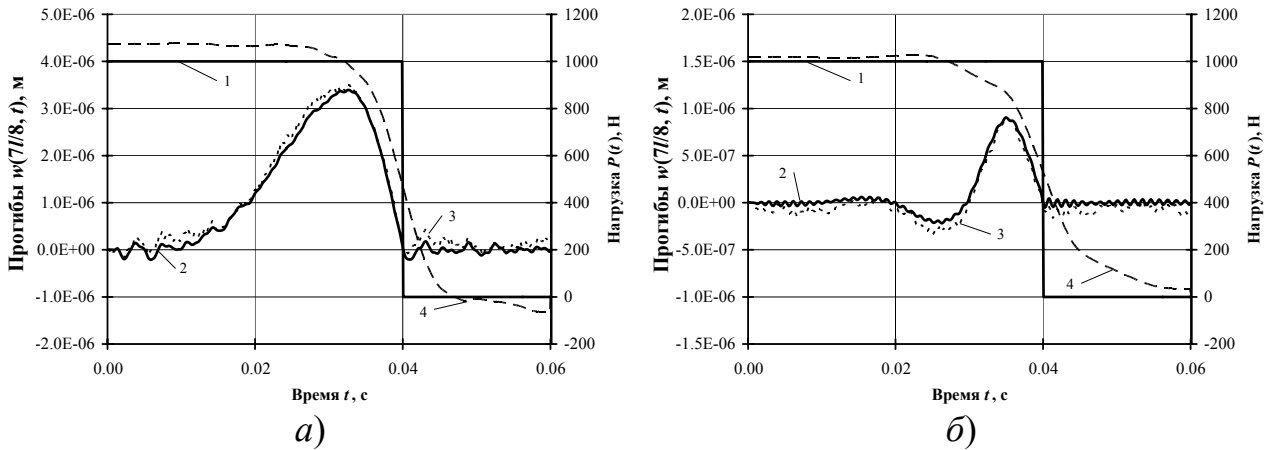


Рис. 3.12. Исходные данные и результаты идентификации

Для полноты информации о характере процедуры идентификации и её эффективности была рассмотрена обратная задача при условии неподвижного расположения возмущающей силы на середине первого пролета многопролетной балки. В этом случае деформационные волны, передающиеся от возмущающего воздействия к идентифицирующему датчику, должны распространиться через все расположенные вдоль балки упругие опоры. Результаты такой идентификации при условии «зашумления» сил в опорах случайной погрешностью в 0,05% приведены на рис. 3.13.

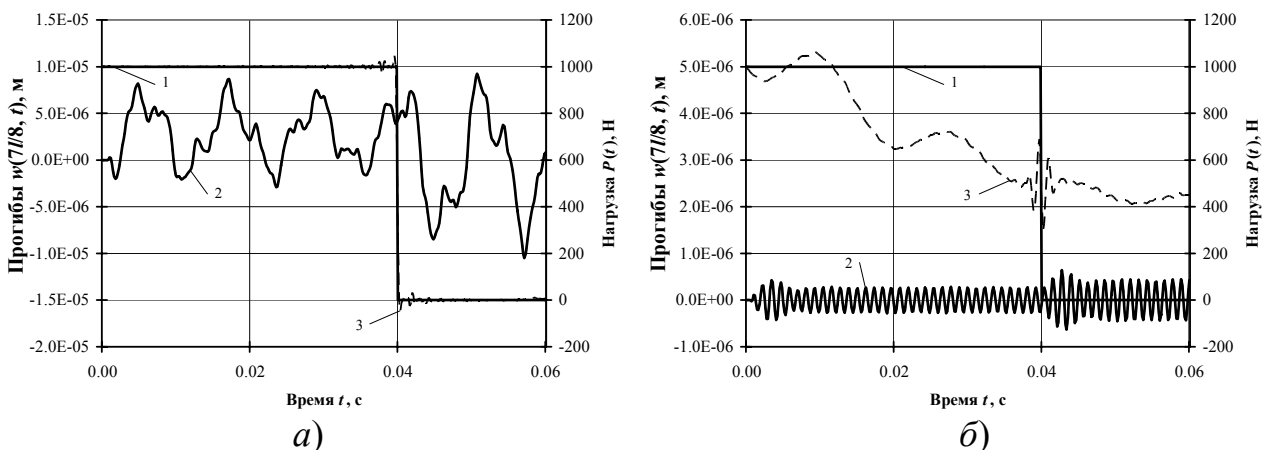


Рис. 3.13. Исходные данные и результаты идентификации

Так же, как и в предыдущих случаях, в качестве исходных данных принято изменение прогиба в точке с координатой  $x=7l/8$  – результат решения прямой задачи (кривые 2). Кроме того, сплошной линией (кривые 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривые 3) – изменение во времени идентифицированной нагрузки.

Из рис. 3.13 видно, что с ростом жесткости  $C_{sj}$  упругих опор возможности идентификации неподвижной нагрузки, воздействующей на пролете, удаленном от идентифицирующего перемещения датчика, ухудшаются. Идентификация является возможной только при незначительном «зашумлении» исходных данных, т.е. наличие значительного числа опор между точками воздействия силы и точкой регистрации ухудшает эффективность восстановления нагрузки.

В завершении данного подраздела рассмотрим идентификацию на основе регистрации деформаций середины последнего пролета балки, вычисленных по соотношению (3.24) в предположении, что замеры производились на нижней стороне балки ( $z=-h/2$ ). Сначала приведем для сравнения значения деформаций, вычисленных при решении прямой задачи, при одинаковой жесткости всех упругих опор  $C_{sj}=10^8$  Н/м двумя различными способами – по методу Фурье (рис. 3.14,а) и МКР (рис. 3.14,б). Данное сопоставление выполнено для того, чтобы убедиться в правильности рассчитываемых деформаций на основе формулы (3.24). Необходимо отметить, что деформации, вычисленные принципиально различными способами, очень хорошо согласуются. Указанное относится как к характеру изменения деформации во времени, так и к их минимальным и максимальным значениям.

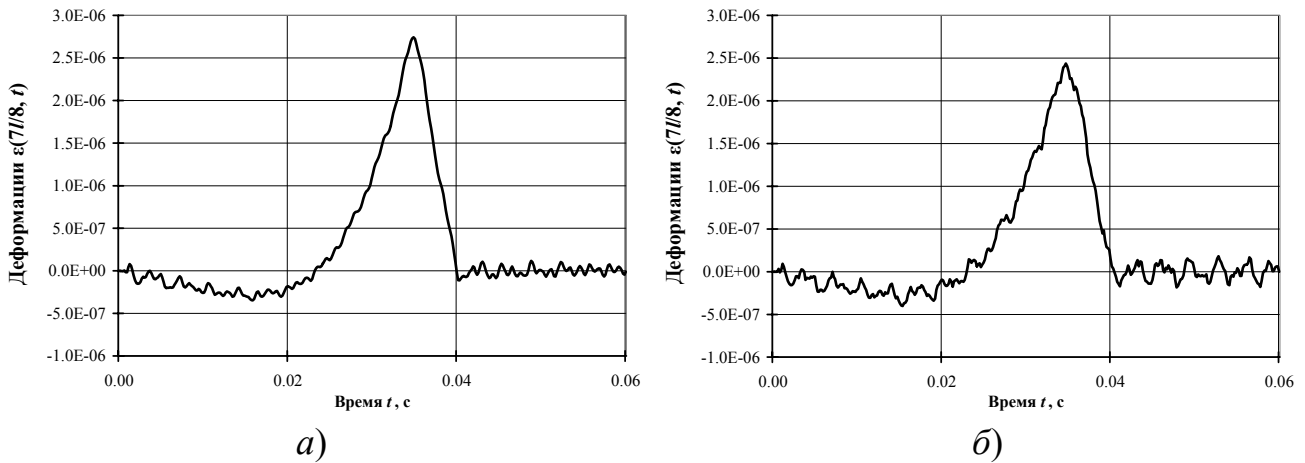


Рис. 3.14. Деформации середины последнего пролета четырехпролетной балки

Далее приведем рис. 3.15, отображающий результаты идентификации подвижной нагрузки на основе деформаций балки, вычисленных по формуле (3.24).

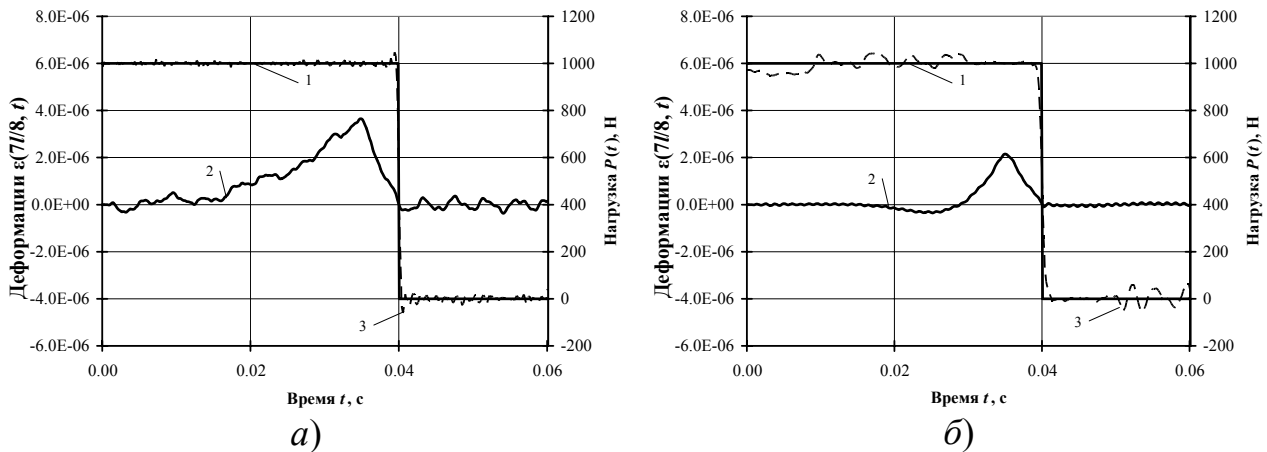


Рис. 3.15. Исходные данные и результаты идентификации

Из рис. 3.15 видно, что с увеличением жесткости  $C_{sj}$  упругих опор возможности идентификации по деформациям от действия подвижной нагрузки незначительно снижаются. Результаты, отраженные на рис. 3.15, получены без наложения «зашумленности». В качестве исходных данных принято изменение деформаций  $\epsilon_x$  в точке с координатой  $x=7l/8$  – результат решения прямой задачи (кривые 2). Сплошной линией (кривые 1) показано изменение во времени нагрузки, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривые 3) – изменение во времени идентифицированной нагрузки.

## ГЛАВА 4. ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ НА ВЯЗКО-УПРУГИЕ БАЛКИ И ПЛАСТИНЫ

### 4.1. КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ БАЛОК ТЕОРИИ КИРХГОФА-ЛЯВА ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ СИЛЫ

Задачу о колебаниях шарнирно-опертой балки конечной длины при действии подвижной силы с учетом диссипации энергии колебаний будем рассматривать с использованием дифференциального уравнения теории Кирхгофа-Лява [14], а именно:

$$\frac{EI}{\rho F} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\eta I}{\rho F} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q_z(x,t), \quad (4.1)$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости.

Эту задачу целесообразно рассмотреть по следующим соображениям. Во многих исследованиях отмечается, что «чисто упругая» постановка является далеко не универсальной. Во многих динамических задачах нельзя игнорировать различные неупругие сопротивления, как внешние (трение в опорах и сопротивление среды), так и внутренние (в материале) [14]. Здесь будем учитывать только внутренние неупругие сопротивления, а именно внутреннее трение в материале элемента конструкции.

Учет внутреннего трения в балке проводим аналогично тому, как это выполнено в монографии [14], а именно с использованием модели Фойгта, в которой связь между напряжениями и деформацией имеет вид:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (4.2)$$

Функцию динамического прогиба балки  $w(x,t)$  будем искать с применением рядов Фурье типа (2.3).

Решение дифференциального уравнения (4.1) находим при нулевых начальных условиях, и граничных условиях, отвечающих шарнирному опиранию краев балки.



Подставив первое разложение в (2.3) в (4.1) и выполнив соответствующие операции, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4 w_k(t) \sin \lambda_k x + \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4 \frac{dw_k(t)}{dt} \sin \lambda_k x + \frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} \sin \lambda_k x \right) = \frac{1}{\rho F} P(t) \delta(x - V_0 t). \quad (4.3)$$

Умножая обе части уравнения (4.3) на  $\sin \lambda_{k_1} x$  и используя свойство ортогональности для тригонометрических функций, а также учитывая свойство  $\delta$ -функции, приведем выражение (4.3) к виду

$$\frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} + \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4 \frac{dw_k(t)}{dt} + \frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4 w_k(t) = \frac{2}{\rho Fl} P(t) \sin(\lambda_k V_0 t). \quad (4.4)$$

Решение дифференциального уравнения (4.4) будем искать с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени. В пространстве изображений полученное уравнение примет вид

$$s^2 w_k^L(s) + 2n_k s w_k^L(s) + p_k^2 w_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} F_k^L(s), \quad (4.5)$$

где  $F_k^L(s) \xrightarrow{\cdot} P(t) \sin \lambda_k V_0 t$ ;  $w_k^L(s) \xrightarrow{\cdot} w_k(t)$ ;  $s$  – параметр преобразования;  $2n_k = \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4$ ;  $p_k^2 = \frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4$ .

Решение уравнения (4.5) в пространстве изображений запишем в виде

$$w_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} \frac{F_k^L(s)}{s^2 + 2n_k s + p_k^2}. \quad (4.6)$$

Используя правила обратного преобразования Лапласа, а также материалы справочника [10], получим

$$w_k(t) = \frac{2}{\rho Fl} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) e^{-n_k(t-\tau)} \frac{\sin p_{\partial_k}(t-\tau)}{p_{\partial_k}} d\tau, \quad \text{если } p_{\partial_k} > 0, \quad (4.7)$$

$$w_k(t) = \frac{2}{\rho Fl} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) e^{-n_k(t-\tau)} \frac{\text{sh } p_{\partial_k}(t-\tau)}{p_{\partial_k}} d\tau, \text{ если } p_{\partial_k} < 0;$$

где  $p_{\partial_k} = \sqrt{p_k^2 - n_k^2}$ .

Заметим, что эти формулы отражают различные значения величин вязкого трения и дают возможность рассчитывать коэффициенты разложения нормальных прогибов балки без всяких ограничений, накладываемых на эту величину.

Запишем на основе формул (4.7) общий вид решения дифференциального уравнения (4.1) при нулевых начальных условиях и граничных условиях (2.2), придав ему следующую форму:

$$w(x,t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) e^{-n_k(t-\tau)} \frac{\sin p_{\partial_k}(t-\tau)}{p_{\partial_k}} d\tau \sin \lambda_k x, \quad \text{если } p_{\partial_k} > 0;$$

$$w(x,t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) e^{-n_k(t-\tau)} \frac{\text{sh } p_{\partial_k}(t-\tau)}{p_{\partial_k}} d\tau \sin \lambda_k x, \quad \text{если } p_{\partial_k} < 0.$$
(4.8)

Расчеты были проведены для балок с прямоугольным поперечным сечением и следующими геометрическими и физическими характеристиками: длина балки  $l=2$  м; ширина балки  $b=0,15$  м; высота поперечного сечения  $h=0,1$  м; осевой момент инерции  $I=bh^3/12=1,25 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>; плотность материала  $\rho=0,795 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости  $E=0,206 \cdot 10^6$  МПа; величина подвижной силы  $P=1$  кН; скорость движения силы  $V_0=50$  м/с.

При проведении численных экспериментов задавалось три разных коэффициента вязкости материала  $\eta$ . Варьирование этим коэффициентом было выполнено для того, чтобы оценить влияние внутреннего трения на характер колебаний балки.

На рисунке 4.1 приведены результаты расчета прогибов  $w(x,t)$  для трех балок с разным внутренним трением, а именно  $\eta=0$  (сплошная кривая),  $\eta=2,5 \cdot 10^8$  кг/м·с (пунктирная кривая) и  $\eta=2 \cdot 10^9$  кг/м·с (штрихпунктирная кривая).

Из рис. 4.1 видно, что с ростом внутреннего трения в материале снижается как амплитуда колебаний балки (в частности, ее середины), так и частота колебаний. При весьма значительной вязкости материала (штрихпунктирная кривая) после прохождения силы по балке перемещения рассматриваемой точки  $x=l/2$  практически отсутствуют.

## 4.2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ВЯЗКО-УПРУГУЮ БАЛКУ ТИПА КИРХГОФА-ЛЯВА ПОДВИЖНОЙ СИЛЫ

Как и в предыдущей главе монографии, применение регуляризирующего алгоритма заключается во введении сглаживающего параметрического функционала (3.11), после чего задача сводится к решению регуляризированной СЛАУ типа (3.13).

На рис. 4.2 изображены результаты идентификации неизвестного подвижного нагружения. В качестве исходных данных было принято изменение прогиба в точке с координатой  $x=l/4$ , вычисленное по формулам (4.8) – результат решения прямой задачи (см. кривую 2), а кривая 3 – та же кривая, после наложения на неё пятипроцентного «шума», а также нескольких «амплитудных выбросов» случайного характера. Укажем, что на рис. 4.2 сплошной линией (кривая 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки.

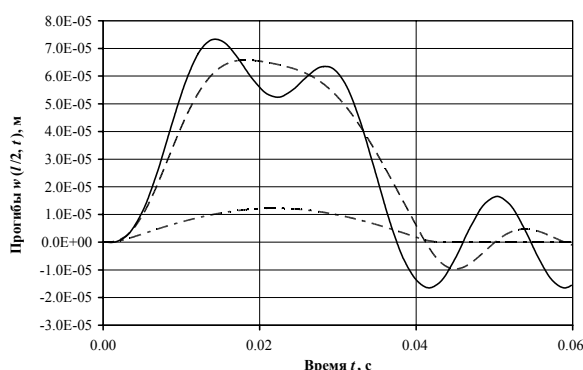


Рис. 4.1. Прогибы середины балок

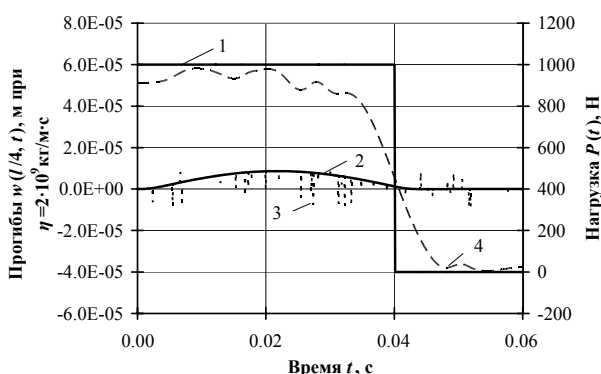


Рис. 4.2. Исходные данные и результаты идентификации

### 4.3. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИИ ВЯЗКО-УПРУГОЙ БАЛКИ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ СИЛЫ

Задачу о колебаниях шарнирно-опертой балки модели С.П. Тимошенко при действии подвижной силы с учетом эффектов поперечного, вращательного и вязкоупругого затуханий колебаний по Фойгту будем рассматривать с использованием системы дифференциальных уравнений, которая приведена в работах [8], а именно:

$$\begin{cases} \frac{E}{\rho} \left(1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{k'GF}{\rho I} \left(1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial t}; \\ \frac{k'G}{\rho} \left(1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q_z(x, t) + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases} \quad (4.9)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – коэффициенты поперечного и вращательного затуханий,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – коэффициенты затухания от действия окружающей среды.

Решение системы дифференциальных уравнений (4.9) находим при нулевых начальных и граничных условиях (2.2). В соответствии с используемой ранее методикой разделения переменных, а также с учетом принятых обозначений (3.2), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_k(t)}{dt^2} + (b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2) \frac{d\psi_k(t)}{dt} + (b^2 + c^2 \lambda_k^2) \psi_k(t) - \\ - b^2 \lambda_k \left( \varepsilon_2 \frac{dw_k(t)}{dt} + w_k(t) \right) = 0; \\ \frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} + (a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) \frac{dw_k(t)}{dt} + a^2 \lambda_k^2 w_k(t) - \\ - a^2 \lambda_k \left( \varepsilon_2 \frac{d\psi_k(t)}{dt} + \psi_k(t) \right) = \frac{2}{\rho Fl} P(t) \sin \beta_k t. \end{cases} \quad (4.10)$$

Решение системы (4.10) будем искать с помощью интегрального преобразования Лапласа [9]. В пространстве изображений указанная система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \left( (s^2 + s(b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2) + b^2 + c^2 \lambda_k^2) \psi_k^L(s) - b^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) w_k^L(s) \right) = 0; \\ \left( (s^2 + s(a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) + a^2 \lambda_k^2) w_k^L(s) - a^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) \psi_k^L(s) \right) = \frac{2}{\rho Fl} F_k^L(s), \end{cases} \quad (4.11)$$

где  $s$  – параметр преобразования,  $F_k^L(s) \rightarrow P(t) \sin \lambda_k V_0 t$ .

Решение системы алгебраических уравнений (4.11) относительно величин  $w_k^L(s)$  и  $\psi_k^L(s)$  ищем с использованием метода Крамера. При этом главный определитель системы имеет вид

$$\Delta = s^4 + a_{3k}s^3 + a_{2k}s^2 + a_{1k}s + a_{0k}, \quad (4.12)$$

где  $a_{3k} = b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2 + a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1$ ;

$$a_{2k} = b^2 + c^2 \lambda_k^2 + (b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2)(a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) + a^2 \lambda_k^2 (1 - b^2 \varepsilon_2^2);$$

$$a_{1k} = (a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1)(b^2 + c^2 \lambda_k^2) + a^2 \lambda_k^2 (b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2) - 2a^2 b^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2;$$

$$a_{0k} = a^2 c^2 \lambda_k^4.$$

Отметим, что полином четвертой степени, составляющий выражение (4.12), содержит коэффициенты при всех степенях  $s$ , что обусловлено наличием диссипативных членов в уравнениях движения (4.9). В принципе, это обстоятельство существенным образом изменяет характер полюсов в выражениях для изображений искомым функций и существенно усложняет процедуру выполнения обратного преобразования Лапласа.

Решение системы уравнений (4.11) в пространстве изображений можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \psi_k^L(s) = \frac{2 b^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) F_k^L(s)}{\rho Fl s^4 + a_{3k} s^3 + a_{2k} s^2 + a_{1k} s + a_{0k}}; \\ w_k^L(s) = \frac{2 (s^2 + s(b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2) + b^2 + c^2 \lambda_k^2) F_k^L(s)}{\rho Fl s^4 + a_{3k} s^3 + a_{2k} s^2 + a_{1k} s + a_{0k}}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Необходимо подчеркнуть, что в зависимости от значений коэффициентов диссипации  $\varepsilon$  и  $\beta$ , корни знаменателя в (4.13) могут быть как комплексные, в частности, комплексно-сопряженные, так и вещественные. Поэтому значения корней знаменателя, необходимые для выполнения обратного преобразования Лапласа, вычислялись численно, с применением ЭВМ. Кроме того, при конкретных расчетах был использован вариант формул, содержащих комплексные величины в выражениях для коэффициентов Фурье искомым функций. Отметим, что численные расчеты на ЭВМ производились в среде MathCAD, в которой операции с комплексными величинами производятся по умолчанию [11], что существенным образом облегчает выполнение соответствующих процедур.

Согласно правилам операционного исчисления в пространстве оригиналов выражения для искомым функций примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_k V_0 \tau \sum_{j=1}^4 \frac{b^2 \lambda_k (\omega_{jk} \varepsilon_2 + 1) e^{\omega_{jk}(t-\tau)}}{4\omega_{jk}^3 + 3a_{3k}\omega_{jk}^2 + 2a_{2k}\omega_{jk} + a_{1k}} d\tau; \\ w_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_k V_0 \tau \sum_{i=1}^4 \frac{(\omega_{jk}^2 + b_{1k}\omega_{jk} + b_{0k}) e^{\omega_{jk}(t-\tau)}}{4\omega_{jk}^3 + 3a_{3k}\omega_{jk}^2 + 2a_{2k}\omega_{jk} + a_{1k}} d\tau, \end{array} \right. \quad (4.14)$$

где  $b_{1k} = b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2$ ;  $b_{0k} = b^2 + c^2 \lambda_k^2$ .

На основе формул (4.14) запишем вид решения системы дифференциальных уравнений (4.9) при нулевых начальных условиях и граничных условиях, отвечающих шарнирному опиранию, придав ему следующую форму:

$$w(x,t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_k V_0 \tau \times \\ \times \sum_{j=1}^4 \frac{(\omega_{jk}^2 + b_{1k}\omega_{jk} + b_{0k}) e^{\omega_{jk}(t-\tau)}}{4\omega_{jk}^3 + 3a_{3k}\omega_{jk}^2 + 2a_{2k}\omega_{jk} + a_{1k}} d\tau \sin \lambda_k x; \quad (4.15)$$

$$\psi(x,t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_k V_0 \tau \times \\ \times \sum_{j=1}^4 \frac{b^2 \lambda_k (\omega_{jk} \varepsilon_2 + 1) e^{\omega_{jk}(t-\tau)}}{4\omega_{jk}^3 + 3a_{3k}\omega_{jk}^2 + 2a_{2k}\omega_{jk} + a_{1k}} d\tau \cos \lambda_k x.$$

В формулах (4.15) значения величин  $\omega_{jk}$  ( $j=1-4$ ) являются комплексными и находятся как корни полинома, входящего в знаменатель уравнения (4.13), в среде MathCAD.

В качестве примера приведем расчеты, проведенные для балок с прямоугольным поперечным сечением и характеристиками, аналогичными принятым в предыдущем параграфе. Характер нагружения этих элементов конструкций остался таким же, как и при предыдущих расчетах, а время исследования колебаний увеличено в два раза с целью более детального изучения поведения балки после прохождения по ней подвижной нагрузки.

В рассматриваемом здесь расчетном случае задавались два разных значения коэффициента  $\varepsilon$  ( $2 \cdot 10^{-4}$  с и  $10^{-3}$  с) и два разных значения коэффициента  $\beta$  ( $50$  с $^{-1}$  и  $200$  с $^{-1}$ ). Варьирование этими коэффициентами дало возможность оценить влияние на характер колебаний балки как внутреннего трения, так и вязкости окружающей среды.

На рис. 4.3 приведены результаты расчета прогибов  $w(x,t)$  середины пролета для трех балок с разным внутренним трением, а именно  $\varepsilon=0$  (сплошная кривая),  $\varepsilon=2 \cdot 10^{-4}$  с (пунктирная кривая) и  $\varepsilon=10^{-3}$  с (штрихпунктирная кривая).

Рис. 4.3 позволяет сделать вывод, что с ростом внутреннего трения в материале снижается как амплитуда колебаний балки (в частности, в ее середине), так и частота колебаний. При большем значении вязкости материала (штрихпунктирная кривая) сразу после прохождения силы по балке амплитуда колебаний рассматриваемой точки  $x=l/2$  снижается примерно в два раза по сравнению с балкой, учет внутреннего трения в которой отсутствует. К моменту завершения времени расчета  $t=0.12$  с можно считать, что колебаний в вязкоупругой балке с  $\varepsilon=10^{-3}$  с практически нет.

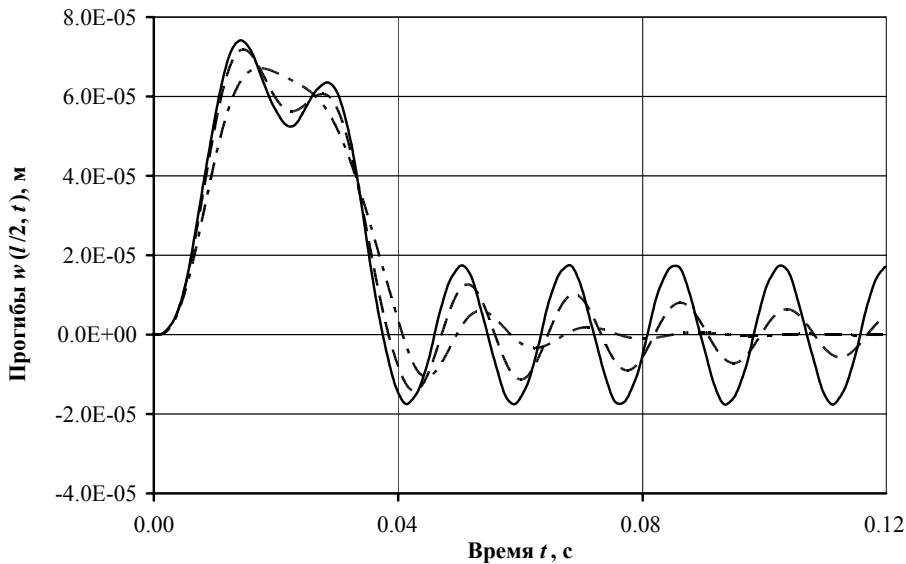


Рис. 4.3. Прогобы середины балок с разным внутренним трением

Аналогичное исследование влияния коэффициента затухания  $\beta$  проведено на рис. 4.4. Этот численный эксперимент моделирует поведение балки, находящейся, например, в вязкой жидкости. В данном случае сплошная кривая соответствует коэффициенту  $\beta=0$ , пунктирная кривая -  $\beta=50 \text{ с}^{-1}$ , а штрихпунктирная кривая  $\beta=200 \text{ с}^{-1}$ .

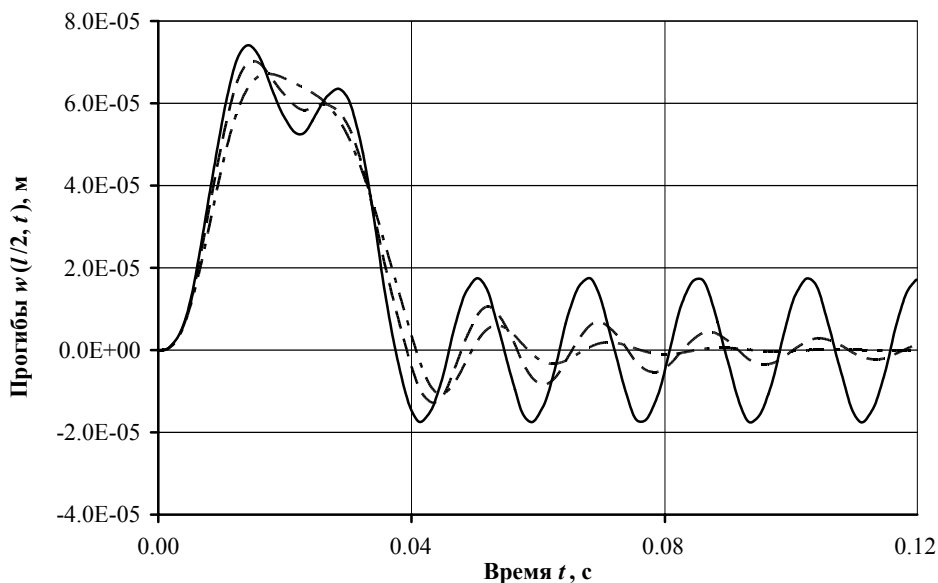


Рис. 4.4. Прогобы середины балок, находящихся в средах с разной вязкостью

Необходимо отметить, что все кривые, полученные в данном разделе при нулевых значениях коэффициентов диссипации, хорошо согласованы.



#### 4.4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ВЯЗКОУПРУГУЮ БАЛКУ ТИПА ТИМОШЕНКО НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОДВИЖНОЙ СИЛЫ

Как и в предыдущих случаях решения обратных задач данной работы, применение регуляризирующего алгоритма заключается во введении сглаживающего параметрического функционала (3.11), после чего задача сводится к решению регуляризированной СЛАУ типа (3.13).

На рис. 4.5 изображены результаты идентификации неизвестной подвижной силы. В качестве исходных данных было принято изменение прогиба в точке с координатой  $x=l/4$ , вычисленное по первой формуле в (4.15) – кривая 2, а кривая 3 – та же кривая, после наложения на неё пятипроцентного «шума», а также «амплитудных выбросов» случайного характера, по свойствам аналогичных приводимым ранее.

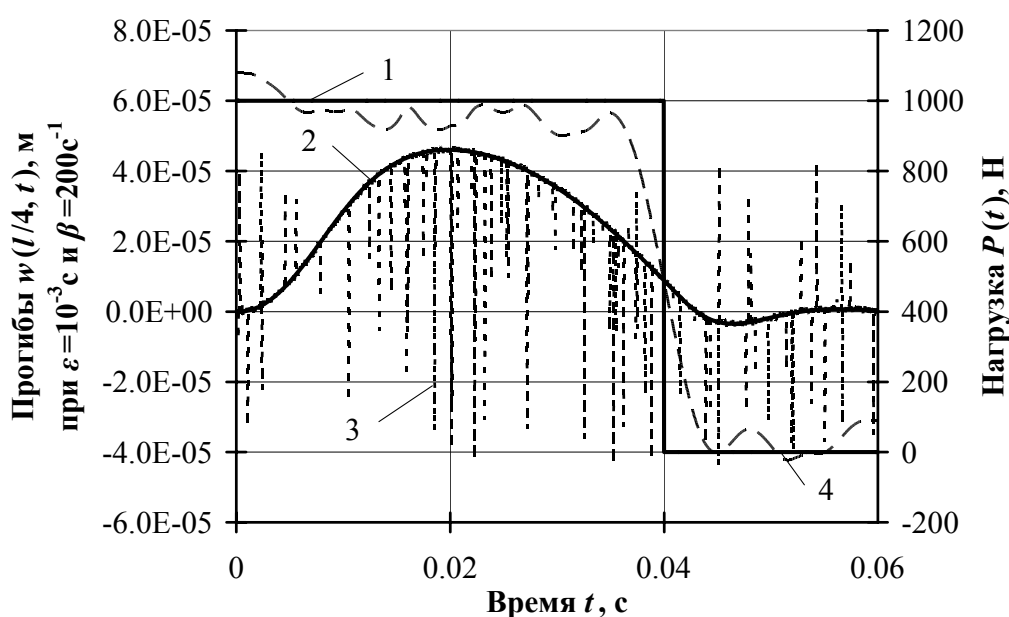


Рис. 4.5. Исходные данные и результаты идентификации

#### 4.5. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИИ ПЛАСТИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ СИЛЫ С УЧЕТОМ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Задачу о колебаниях прямоугольной пластины при действии подвижной силы с учетом диссипации энергии колебаний будем рассматривать с использованием дифференциального уравнения теории Кирхгофа-Лява, которое приведено в работе [3], а именно:

$$\left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) D \Delta \Delta w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = q_z(x, y, t), \quad (4.16)$$

где  $\alpha$  – коэффициент диссипации;  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  – цилиндрическая жесткость пластины.

Отметим, что данная модель колебаний прямоугольной пластины основана на гипотезе Кельвина-Фойгта [3], которая позволяет корректно произвести учет несовершенной упругости материала в рамках линейного деформирования.

На рис. 4.6 изображена схема рассматриваемой механической системы – прямоугольной плиты, вдоль которой движется сосредоточенная сила  $P(t)$ .

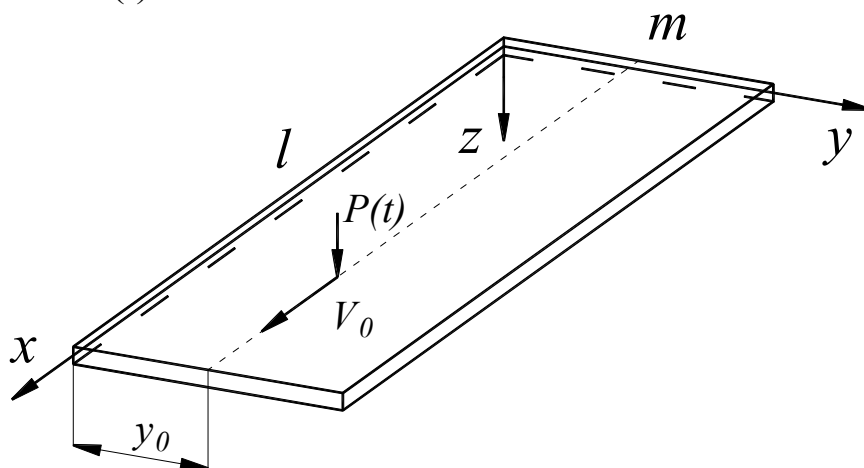


Рис. 4.6. Схема нагружения пластины

Поперечная нагрузка имеет вид

$$q_z(x, y, t) = P(t)\delta(x - V_0 t)\delta(y - y_0), \quad (4.17)$$

где  $V_0$  – постоянная скорость движения силы,  $P(t)$  – произвольная функция времени.

Решение уравнения (4.16) искалось в виде двойного ряда Фурье

$$w(x, y, t) = \sum_k \sum_j w_{kj}(t) \sin \lambda_k x \sin \mu_j y, \quad (4.18)$$

где  $\lambda_k = k\pi/l$ ;  $\mu_j = j\pi/m$ .

Уравнение (4.16) после подстановки в него выражения (4.18) примет вид

$$\begin{aligned} D \sum_k \sum_j w_{kj}(t) \sin \lambda_k x \sin \mu_j y (\lambda_k^4 + 2\lambda_k^2 \mu_j^2 + \mu_j^4) + \\ \alpha D \sum_k \sum_j \frac{dw_{kj}(t)}{dt} \sin \lambda_k x \sin \mu_j y (\lambda_k^4 + 2\lambda_k^2 \mu_j^2 + \mu_j^4) + \\ + \rho h \sum_k \sum_j \frac{d^2 w_{kj}(t)}{dt^2} \sin \lambda_k x \sin \mu_j y = q_z(x, y, t). \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, а также помножив левую и правую части уравнения на  $\frac{4}{\rho h l m}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{D}{\rho h} w_{k_1 j_1}(t) (\lambda_{k_1}^2 + \mu_{j_1}^2)^2 + \frac{\alpha D}{\rho h} \frac{dw_{k_1 j_1}(t)}{dt} (\lambda_{k_1}^2 + \mu_{j_1}^2)^2 + \frac{d^2 w_{k_1 j_1}(t)}{dt^2} = \\ = \frac{4}{\rho h l m} P(t) \cdot \int_0^l \delta(x - V_0 t) \sin(\lambda_{k_1} x) dx \cdot \int_0^m \delta(y - y_0) \sin(\mu_{j_1} y) dy. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Учитывая свойство  $\delta$ -функции, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{kj}(t)}{dt^2} + \frac{\alpha D}{\rho h} \frac{dw_{kj}(t)}{dt} (\lambda_k^2 + \mu_j^2)^2 + \frac{D}{\rho h} w_{kj}(t) (\lambda_k^2 + \mu_j^2)^2 = \\ = \frac{4}{\rho h l m} P(t) \cdot \sin(\lambda_k V_0 t) \cdot \sin(\mu_j y_0). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Решение дифференциального уравнения (4.20) будем искать с помощью интегрального преобразования Лапласа во времени. В пространстве изображений полученное уравнение примет вид

$$s^2 w_{kj}^L(s) + 2\tilde{n}_{kj} s w_{kj}^L(s) + \tilde{p}_{kj}^2 w_{kj}^L(s) = \frac{4}{\rho h l m} F_{kj}^L(s), \quad (4.21)$$

где  $w_{kj}^L(s) \xrightarrow{\cdot} w_{kj}(t)$ ;  $2\tilde{n}_{kj} = \frac{\alpha D}{\rho h} (\lambda_k^2 + \mu_j^2)^2$ ;  $\tilde{p}_{kj}^2 = \frac{D}{\rho h} (\lambda_k^2 + \mu_j^2)^2$ ;

$F_{kj}^L(s) \xrightarrow{\cdot} P(t) \sin \lambda_k V_0 t \sin \mu_j y_0$ .

Решение уравнения (4.21) в пространстве изображений запишем в форме

$$w_{kj}^L(s) = \frac{4}{\rho h l m} \frac{F_{kj}^L(s)}{s^2 + 2\tilde{n}_{kj} s + \tilde{p}_{kj}^2}. \quad (4.22)$$

Используя правила обратного преобразования Лапласа, а также табличные соотношения справочника [9], получим

$$w_{kj}(t) = \frac{4}{\rho h l m} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sin(\mu_j y_0) e^{-\tilde{n}_{kj}(t-\tau)} \frac{\sin \tilde{p}_{\partial_k}(t-\tau)}{\tilde{p}_{\partial_k}} d\tau, \quad \text{если } \tilde{p}_{\partial_k} > 0;$$

$$w_{kj}(t) = \frac{4}{\rho h l m} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sin(\mu_j y_0) e^{-\tilde{n}_{kj}(t-\tau)} \frac{\text{sh} \tilde{p}_{\partial_k}(t-\tau)}{\tilde{p}_{\partial_k}} d\tau, \quad \text{если } \tilde{p}_{\partial_k} < 0,$$
(4.23)

где  $\tilde{p}_{\partial_k} = \sqrt{\tilde{p}_{kj}^2 - \tilde{n}_{kj}^2}$ .

Общий вид решения дифференциального уравнения (4.16) при нулевых начальных условиях и граничных условиях получается путем подстановки формул (4.23) в выражение (4.18).

## 4.6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ТЕОРИИ КИРХГОФА-ЛЯВА

Расчеты были проведены для прямоугольных пластин со следующими геометрическими и физическими характеристиками:

- длина пластины  $l=7$  м;
- ширина пластины  $m=3$  м;
- высота поперечного сечения  $h=0,2$  м;
- цилиндрическая жесткость  $D = 2,34 \cdot 10^6$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;
- плотность материала  $\rho=2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;
- модуль упругости  $E=3,2 \cdot 10^3$  МПа;
- величина подвижной нестационарной силы  $P=1$  кН;
- скорость движения силы  $V_0=50$  м/с.

При проведении численных экспериментов задавались разные значения коэффициента  $\alpha$ . На рис. 4.7 приведены результаты расчета перемещений точки с координатой  $(l/2, m/2)$  для трех пластин с разным внутренним трением, а именно  $\alpha=0$  (сплошная кривая),  $\alpha=5 \cdot 10^{-3}$  с (пунктирная кривая) и  $\alpha=2 \cdot 10^{-2}$  с (штрихпунктирная кривая).

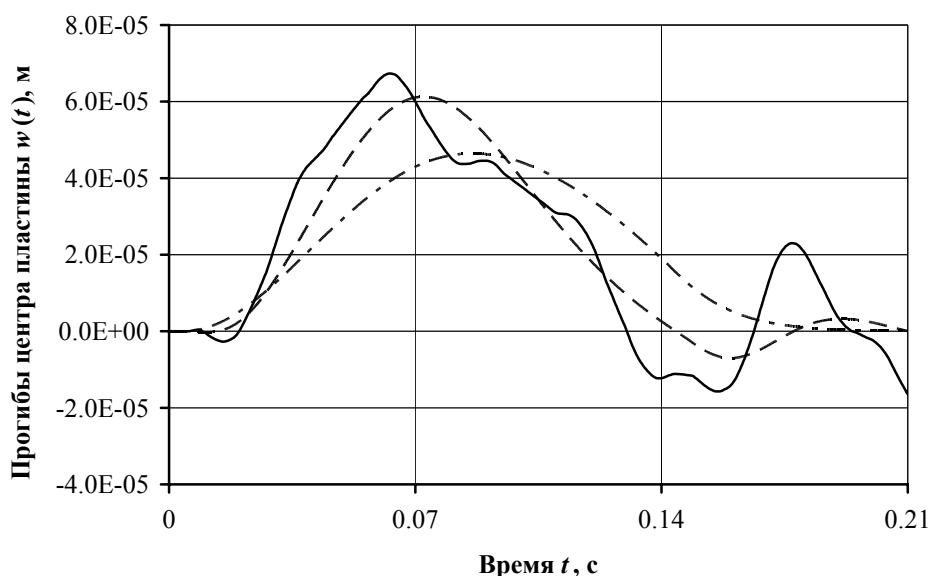


Рис. 4.7. Прогибы центров пластин с разным внутренним трением

Из рис. 4.7 можно сделать вывод, что с ростом внутреннего трения в материале снижается как амплитуда колебаний центра

пластины, так и частота колебаний. При значительной вязкости материала (штрихпунктирная кривая) после прохождения силы по пластине колебания рассматриваемой точки практически отсутствуют.

Далее, на рис. 4.8, сопоставлены результаты расчетов прогибов центра пластины без учета внутреннего трения в материале, полученные двумя различными способами, а именно с применением разложений в ряд Фурье по собственным формам колебаний, т.е. формулы (4.18) (сплошная линия), и с помощью метода конечных элементов (МКЭ) (пунктирная линия).

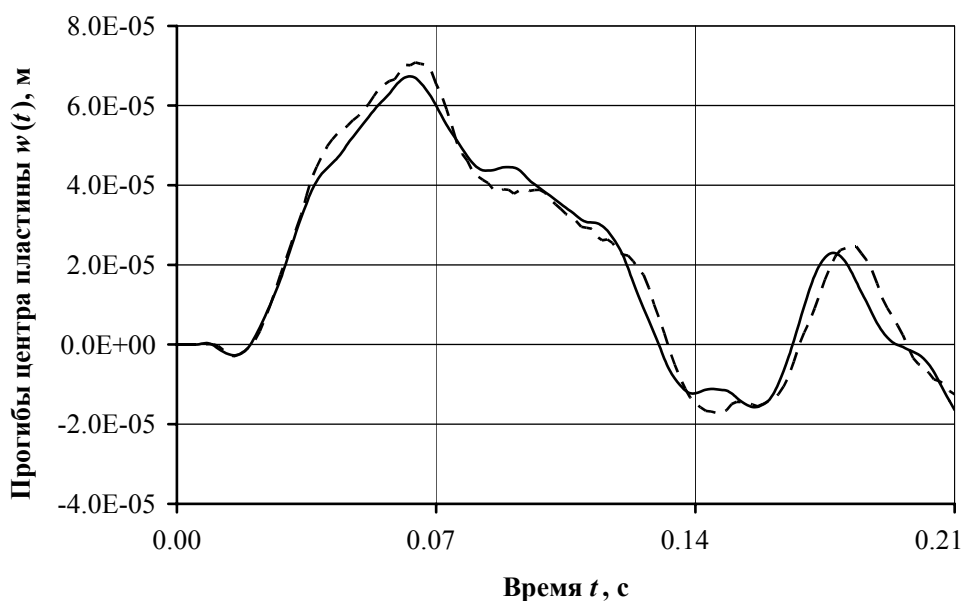


Рис. 4.8. Прогибы центра пластины

Приведенные на рис. 4.8 кривые иллюстрируют изменение во времени прогибов пластины в одной и той же точке с координатой  $(l/2, m/2)$ , причем каждая из кривых отвечает принципиально другому способу решения задачи. Поскольку перемещения, вычисленные с помощью рядов Фурье и МКЭ, хорошо согласованы, можно сделать вывод о достоверности полученных решений, отвечающих как временному промежутку нахождения подвижной нагрузки в пределах длины пластины, так и значениям времен после прохождения нагрузки.

## 4.7. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ВЯЗКО-УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ ТИПА КИРХГОФА-ЛЯВА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОДВИЖНОЙ СИЛЫ

Как и в предыдущих случаях решения обратных задач, применение регуляризирующего алгоритма заключается во введении сглаживающего параметрического функционала (3.11), после чего задача сводится к решению регуляризированной СЛАУ типа (3.13). На рис. 4.9 изображены результаты идентификации неизвестного подвижного нагружения прямоугольной пластины.

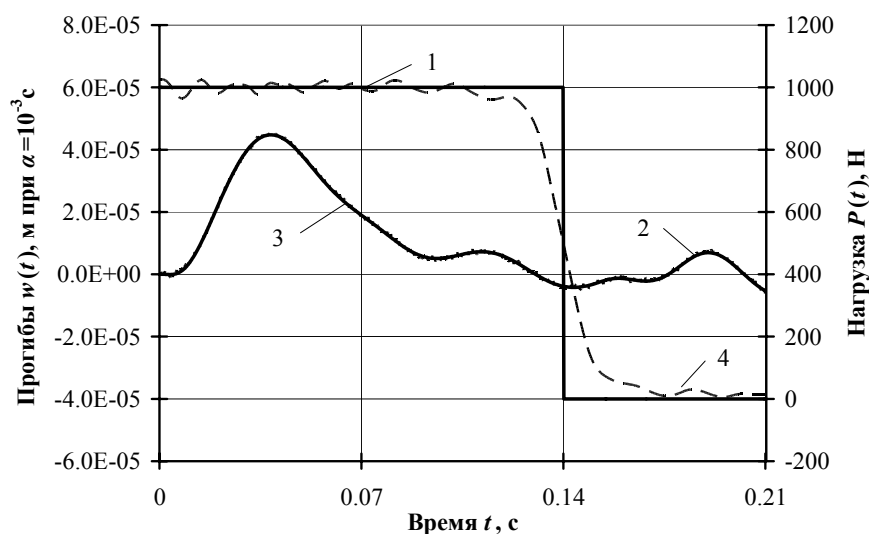


Рис. 4.9. Исходные данные и результаты идентификации

В качестве исходных данных было принято изменение прогиба в точке с координатой  $(l/4, m/4)$ , вычисленное по формулам (4.18) и (4.23) — кривая 2, а кривая 3 — та же кривая, после наложения на неё пятипроцентного «шума» по формуле (3.19). На рисунке 4.10 сплошной линией (кривая 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) — изменение во времени идентифицированной нагрузки.

Отметим, что на основе разработанной методики возможно восстановление нагрузки и в случаях экспериментально измеряемых значений прогибов и деформаций пластин, изготовленных из вязкоупругих материалов. Иными словами, полученные результаты можно использовать в процессе мониторинга подвижных импульсных нагрузок, воздействующих на элементы конструкции в виде прямоугольных пластин (не обязательно упругих).

# ГЛАВА 5. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

## 5.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОДНОСЛОЙНОМ ОСНОВАНИИ

В настоящей главе изложено решение нестационарных задач, которые относятся к так называемым прямым и обратным задачам математической физики. Рассмотрим механическую систему, состоящую из прямоугольной плиты, которая лежит на упругом однослойном инерционном основании. Контакт между плитой и основанием является двухсторонним. Движение плиты моделируется классической теорией Кирхгофа-Лява, а основание – теорией Власова-Леонтьева [5]. Плита вдоль своего контура предполагается шарнирно-опертой.

На (рис. 5.1) изображена рассматриваемая механическая система – прямоугольная плита на однослойном основании, на которую воздействует в точке  $(x_0, y_0)$  сосредоточенная нагрузка  $P_0(t)$ .

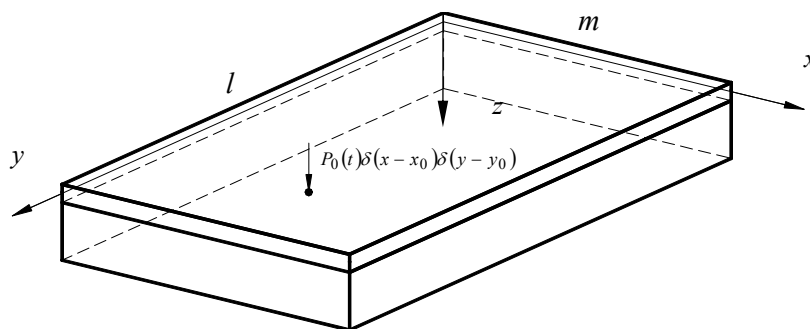


Рис. 5.1. Схема рассматриваемой механической системы

Дифференциальным уравнением в частных производных можно описать вынужденные колебания плиты на упругом однослойном основании, форма записи которого следующая [5]:

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - 2 \cdot r^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \quad (5.1)$$



$$+s^{*4} \cdot w(x,y,t) + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{P(x,y,t)}{D},$$

где

$$\left. \begin{aligned} s^{*4} &= \frac{k}{D} = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2) \cdot D} \cdot \int_0^H \psi'^2(z) dz; \\ r^2 &= \frac{t_1}{D} = \frac{E_0}{4 \cdot (1+\nu_0) \cdot D} \cdot \int_0^H \psi^2(z) dz; \\ m^* &= \frac{m_1 + m_0}{D} = \frac{1}{D} \cdot \left( \frac{\gamma \cdot h}{g} + \frac{\gamma_0}{g} \cdot \int_0^H \psi^2(z) dz \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

причём  $D$  – цилиндрическая жесткость плиты;  $\gamma$  и  $\gamma_0$  – объемные веса соответственно материала плиты и упругого основания;  $h$  – толщина плиты;  $E_0$  и  $\nu_0$  – характеристики упругого основания.

В формулах (5.24), (5.25) ввели величины  $E_0$  и  $\nu_0$  таковы:

$$E_0 = \frac{E_{\text{гр}}}{1-\nu_{\text{гр}}^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_{\text{гр}}}{1-\nu_{\text{гр}}}. \quad (5.3)$$

Более подробная расшифровка используемых здесь величин приведена в [5].

Отметим, что величина  $\psi(z)$  может задаваться различными функциями, отражающими разные законы изменения поведения основания с глубиной. Например, в монографии [5] одна из используемых функций имеет вид:

$$\psi(z) = \frac{\text{sh}(\gamma(H-z))}{\text{sh}(\gamma H)}, \quad (5.4)$$

где  $\gamma$  – некоторый коэффициент, характеризующий изменения перемещений точек основания.

Решение уравнения (5.1) будем искать в виде двойного ряда Фурье

$$w(x, y, t) = \sum_k \sum_n w_{kn}(t) \cdot \sin(\lambda_k x) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (5.5)$$

где  $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ ,  $\mu_n = \frac{n\pi}{m}$ .

Запишем уравнение 5.1 после подстановки в него функции  $w(x, y, t)$  в форме (5.5). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_k \sum_n w_{kn}(t) \cdot \sin(\lambda_k x) \cdot \sin(\mu_n y) \cdot \left( (\lambda_k)^4 + 2 \cdot (\lambda_k)^2 \cdot (\mu_n)^2 + (\mu_n)^4 \right) - \\ & - 2 \cdot r^2 \cdot \sum_k \sum_n w_{kn}(t) \cdot \sin(\lambda_k x) \cdot \sin(\mu_n y) \cdot \left( (\lambda_k)^2 + (\mu_n)^2 \right) \\ & + s^{*4} \cdot \sum_k \sum_n w_{kn}(t) \cdot \sin(\lambda_k x) \cdot \sin(\mu_n y) + \\ & + m^* \cdot \sum_k \sum_n w_{kn}''(t) \cdot \sin(\lambda_k x) \cdot \sin(\mu_n y) = \\ & = \frac{1}{D} \cdot P(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Воспользуемся свойством ортогональности координатных функций и в результате запишем

$$\begin{aligned} & w_{kn}(t) \cdot \left( (\lambda_k^2 + \mu_n^2)^2 - 2 \cdot r^2 \cdot (\lambda_k^2 + \mu_n^2) + s^{*4} \right) + \\ & + m^* \cdot w_{kn}''(t) = \frac{4}{D \cdot l \cdot m} \cdot P(t) \cdot \sin(\lambda_k x_0) \cdot \sin(\mu_n y_0). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Если обозначить  $C_{kn}^2 = \frac{1}{m^*} \left[ (\lambda_k^2 + \mu_n^2)^2 - 2 \cdot r^2 \cdot (\lambda_k^2 + \mu_n^2) + s^{*4} \right]$ , а

$M_{kn} = \frac{4}{m^* D l m} \cdot \sin(\lambda_k x_0) \cdot \sin(\mu_n y_0)$ , то уравнение (5.7) можно записать в виде

$$w_{kn}''(t) + C_{kn}^2 \cdot w_{kn}(t) = M_{kn} \cdot P_0(t). \quad (5.8)$$

Для решения полученного неоднородного дифференциального

уравнения второго порядка с начальными условиями общего вида

$$w_{kn}(0) = f_{kn}, w'_{kn}(0) = F_{kn} \quad (5.9)$$

воспользуемся преобразованием Лапласа [10].

Пусть изображение функции  $w_{kn}(t)$  будет  $w_{kn}^L(s)$ . Тогда изображение функции  $w''_{kn}(t)$  примет вид  $s^2 \cdot w_{kn}^L(s) - s \cdot w_{kn}(0) - w'_{kn}(0)$ , а  $P_0(t) \leftarrow P_0^L(s)$ .

Запишем уравнение (5.8) в пространстве изображений

$$s^2 \cdot w_{kn}^L(s) - s \cdot w_{kn}(0) - w'_{kn}(0) + C_{kn}^2 \cdot w_{kn}^L(s) = M_{kn} \cdot P_0^L(s) \quad (5.10)$$

Из соотношения (5.10) можно найти изображение искомой функции

$$w_{kn}^L(s) = \frac{M_{kn} \cdot P_0^L(s) + s \cdot w_{kn}(0) + w'_{kn}(0)}{s^2 + C_{kn}^2} \quad (5.11)$$

Далее, находим оригинал искомой функции (5.11) в виде

$$w_{kn}(t) = \frac{F_{kn}}{C_{kn}} \cdot \sin(C_{kn} \cdot t) + f_{kn} \cdot \cos(C_{kn} \cdot t) + \frac{M_{kn}}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau. \quad (5.12)$$

Решение задачи о вынужденных колебаниях прямоугольной плиты на упругом основании в случае воздействия на нее сосредоточенной силы будет представляться формулой

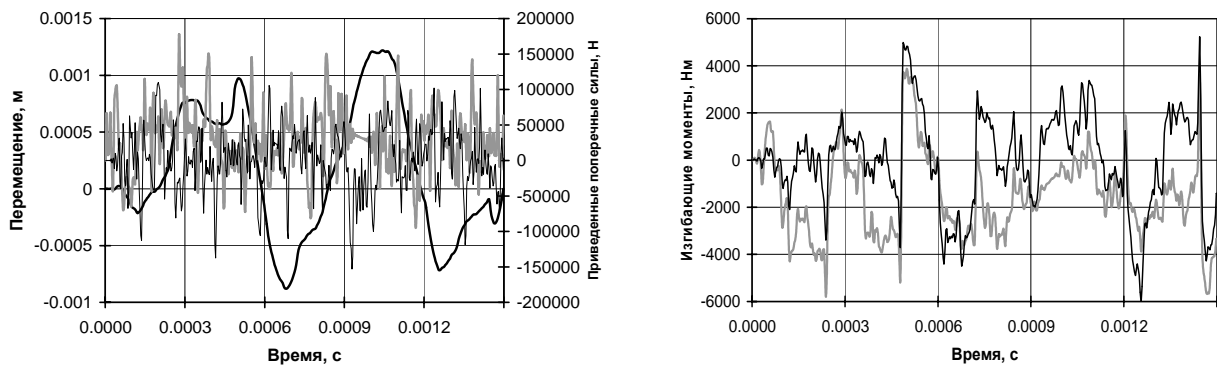
$$w(x, y, t) = \sum_k \sum_n \left( \frac{F_{kn}}{C_{kn}} \sin(C_{kn} \cdot t) + f_{kn} \cdot \cos(C_{kn} \cdot t) + \frac{M_{kn}}{C_{kn}} \int_0^t P(\tau) \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \right) \times \sin \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{m}. \quad (5.13)$$

Используя выражение (5.13), можно рассчитать прогиб прямоугольной пластины в предположении, что на неё в произвольной

точке  $x_0, y_0$  воздействует сосредоточенная нагрузка, временная составляющая которой описывается функцией  $P_0(t)$ .

Выполним численный расчёт плиты на упругом основании со следующими параметрами: размеры плиты в плане  $0.6 \times 0.6$  м, толщина плиты 0.01 м, толщина основания 0.08 м, модуль упругости материала плиты  $2 \cdot 10^{11}$  Па, модуль упругости материала основания  $1.53 \cdot 10^7$  Па, коэффициент Пуассона материала плиты 0.28. Нагрузка приложена в центре плиты и изменяется во времени согласно функции Хевисайда; интенсивность нагрузки  $10^5$  Н.

Результаты численного расчёта приведены на рис. 5.2,а показано изменение прогиба плиты в точке с координатами (0.2; 0.2) (толстая черная линия), и графики приведенных поперечных сил  $Q_x$  и  $Q_y$  соответственно (толстая серая и тонкая черная линии). На рис. 5.2,б показано изменение изгибающих моментов, имеющих место в этой же точке.



а) изменение прогиба и поперечных сил во времени;

б) изменение изгибающих моментов во времени;

Рис. 5.2. Зависимость прогиба плиты, поперечных сил и моментов от времени

Укажем, что представленные кривые получены в предположении, что начальные условия при изучении колебаний плиты принимались нулевыми, а расчеты прогибов выполнялись с учетом 30 членов в соответствующих рядах как в одном направлении, так и в другом.

Предметом задачи идентификации является определение зависимости внешнего динамического нагружения от времени. Исходные данные для решения обратной задачи – значения зависимости прогиба плиты от времени, которые регистрируются, например, измерительными приборами в некоторой точке с координатами

$(x_p, y_p)$ . Регистрируемые значения прогибов – это проявление внешнего воздействия на плиту сосредоточенной силы в точке с координатами  $(x_0, y_0)$ . В настоящем исследовании делается акцент на учет наличия инерционных оснований при решении обратных задач.

Для решения обратной задачи запишем выражение (5.13) с нулевыми начальными условиями

$$w(x, y, t) = \int_0^t \sum_k \sum_n \frac{M_{kn}}{C_{kn}} \sin \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l} \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{m} P(\tau) \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau. \quad (5.14)$$

Перепишем выражение (5.14) в сжатой форме в виде операторного уравнения первого рода

$$Az \equiv \int_0^t a(t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t); z \in Z, u \in U, \quad (5.15)$$

где  $Z$  и  $U$  – метрические пространства;  $A$  – непрерывный оператор, переводящий элементы  $z \in Z$  в элементы  $u \in U$ .

Выражение (5.15) является частным случаем уравнения Фредгольма первого рода с разностным ядром.

Достаточно подробное описание применения регуляризирующего функционала приведено в монографии [22], здесь ограничимся лишь приведением результатов.

В качестве численного примера решения конкретной задачи идентификации примем следующие исходные данные:

- размеры плиты в плане  $0.4 \times 0.6$  м;
- толщина плиты  $0.01$  м;
- толщина основания  $0.1$  м;
- модуль упругости материала плиты  $2 \cdot 10^{11}$  МПа;
- модуль упругости материала основания  $1.57 \cdot 10^7$  МПа.

Пусть на приведенном рис. 5.3 изображена регистрируемая, например, зависимость прогиба плиты в точке с координатами  $(0.3; 0.3)$  от времени, которая является исходными данными для задачи идентификации. Сплошной линией показано точное значение прогиба, рассчитанное на основе решения прямой задачи, а прерывистой – “зашумлённое”. Величина “зашумления” равна 3 %.

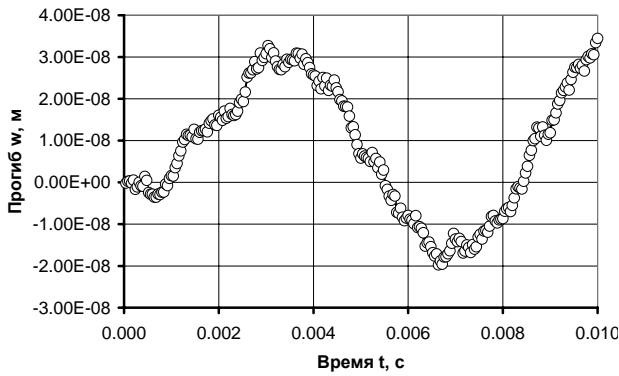


Рис. 5.3. Зашумлённые данные о прогибе плиты в точке

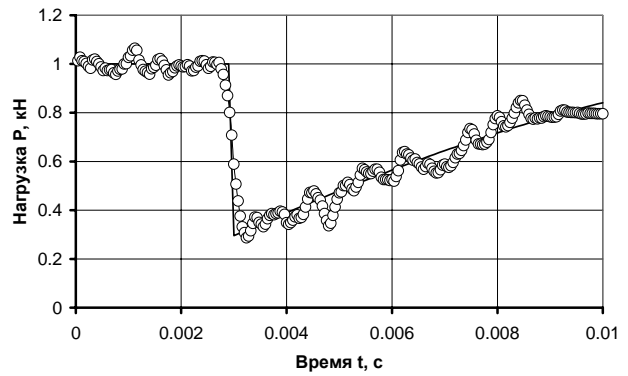


Рис. 5.4. Идентифицированные значения силы

Сосредоточенная сила, вызывающая деформацию плиты, прикладывается в точке с координатами (0.3; 0.3).

На рис. 5.4 показано идентифицированное значение нагрузки: сплошной линией – точное изменение во времени силы, принимаемое при решении соответствующей прямой задачи, а прерывистой – значения идентифицированной нагрузки.

Из графиков на рис. 5.4 нетрудно видеть, что идентифицированные значения нагрузки хорошо повторяют общее поведение точной нагрузки при выбранной величине зашумления.

Подчеркнем, что достоверность полученных результатов вытекает из удовлетворительного согласования результатов решения соответствующих прямой и обратной задач.

## 5.2. ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Пусть сосредоточенная сила, нормальная к поверхности плиты, которая лежит на упругом основании, движется вдоль оси  $Ox$  от одного края плиты до другого с постоянной скоростью  $V$ . Выражение для нагрузки, действующей на плиту, имеет вид

$$P(x, y, t) = q \cdot P(t) \cdot \delta(x - V \cdot t) \cdot \delta(y - y_0). \quad (5.16)$$

Подставив выражение для движущейся нагрузки в формулу (5.8), получим соответствующее неоднородное дифференциальное

уравнение, описывающее вынужденные колебания плиты под действием сосредоточенной в точке движущейся силы.

Прогиб плиты на упругом основании под действием сосредоточенной в точке движущейся силы будет описываться следующим выражением,

$$w(x, y, t) = \int_0^t \sum_k \sum_n \frac{M_{kn}}{C_{kn}} \sin(\lambda_k x) \cdot \sin(\mu_n y) P_1(\tau) \cdot \sin(\beta_{kn} \cdot \tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau. \quad (5.17)$$

Выполним решение обратной задачи по идентификации внешнего нагружения. Следует отметить, что запись уравнения в операторном виде и процедура минимизации соответствующего функционала будет также аналогична уже описанной. Поэтому приведем только результаты идентификации подвижной нагрузки.

Исходные данные для задачи идентификации следующие:

- модуль упругости материала плиты  $E=2 \cdot 10^{11}$  Па;
- коэффициент Пуассона материала плиты  $\nu=0.28$ ;
- размеры плиты в плане  $0.6 \times 0.6$  м;
- толщина плиты  $h=0.01$  м;
- модуль упругости материала основания  $E=1.53 \cdot 10^7$  Па;
- коэффициент Пуассона материала основания  $\nu=0.5$ ;
- толщина основания  $h=0.08$  м;
- интенсивность нагрузки  $q=10000$  Н.

В результате проведения численного эксперимента, при зашумлении величин перемещений в 5 %, принимаемых для решения обратной задачи в качестве исходных данных, были получены графики, изображенные на рис. 5.5, рис. 5.6.

Примером из возможных приложений решения такого рода задач может служить задача из практики эксплуатации дорожных покрытий, состоящая в идентификации четырех подвижных сосредоточенных сил, имеющих одинаковую временную составляющую. Пример моделирует влияние колес подвижного автомобиля на дорожное полотно (рис. 5.7).

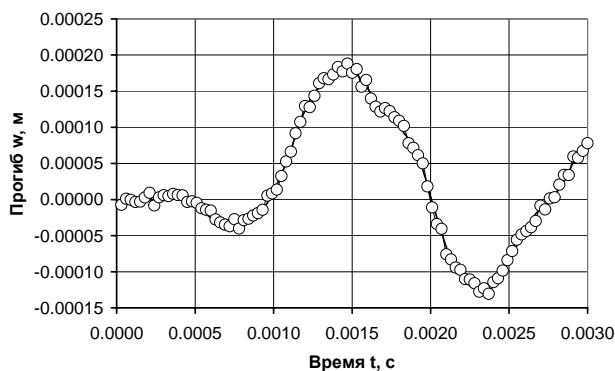


Рис. 5.5. Исходные данные

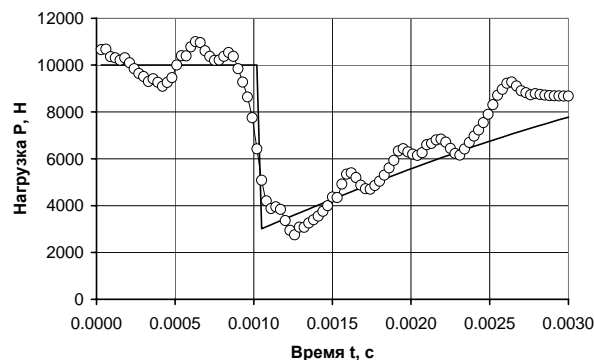


Рис. 5.6. Результат идентификации

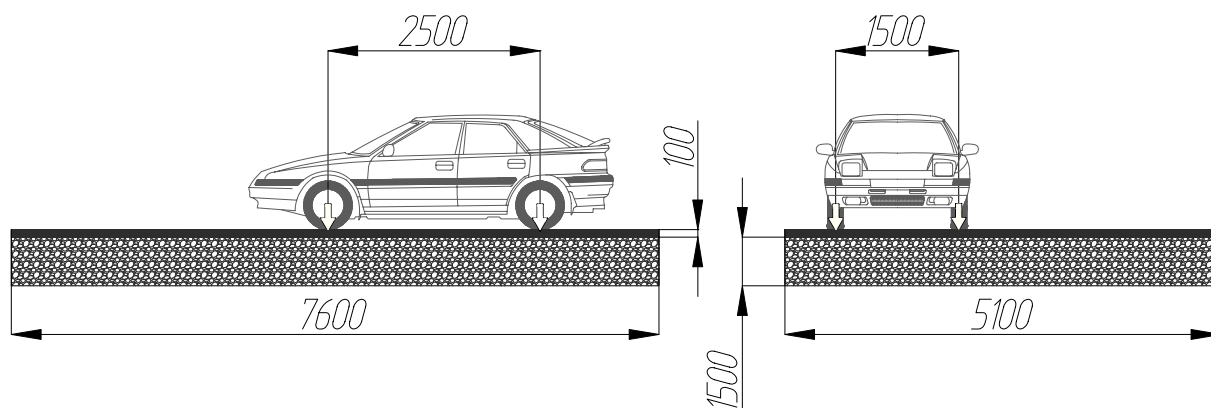


Рис. 5.7. Изображение автомобиля на дорожном полотне

Целесообразно более подробно описать механическую постановку задачи. По участку дорожного полотна (моделируется пластиной на упругом основании с размерами  $7.6 \times 5.1$  м) со скоростью 30 м/с движется автомобиль, колесная база которого составляет 2.75 м, а колея 1.5 м. Масса автомобиля принимается равной 1.223 т, что обуславливает воздействие на дорожное полотно системы из четырех сосредоточенных сил, интенсивностью 3000 Н каждая. Параметры дорожного полотна следующие: толщина асфальтобетона 0.1 м (пластина), модуль упругости асфальтобетона  $3.2 \times 10^9$  Па, коэффициент Пуассона асфальтобетона – 0.3, толщина дорожного основания 1.5 м, модуль упругости основания  $1.53 \times 10^8$  Па. На рис. 5.8 приведен прогиб плиты в точке с координатами (2; 2), по которой проезжают соответственно левые переднее и заднее колёса. Соответствующие численные результаты являются исходными данными для проведения процедуры восстановления внешней нагрузки, действующей на плиту на упругом основании (нагрузки со стороны автомобиля на верхнюю поверхность дорожной одежды).



После решения обратной задачи методом, описанным выше, получаем закон изменения нагрузки, показанный на рис. 5.9 прерывистой линией. Как видно, полученная кривая хорошо моделирует нагрузку, равную весу автомобиля, приходящуюся на одно колесо и составляющую 3000 Н.

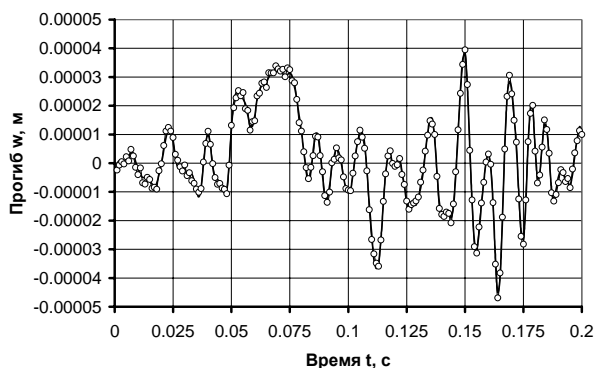


Рис. 5.8. Регистрируемая зависимость прогиба от времени

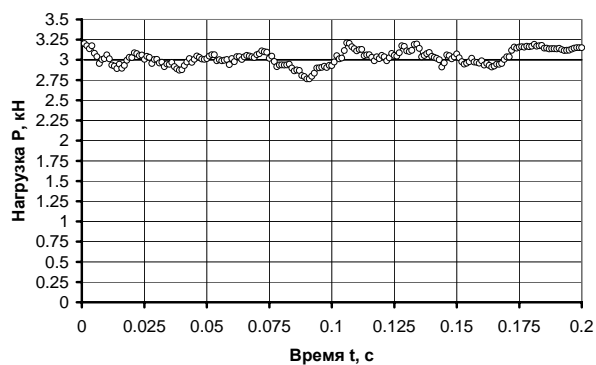


Рис. 5.9. Идентифицированные значения нагрузки

Для иллюстрации эффективности метода идентификации и проверки получаемых результатов также рассчитаем временную составляющую нагрузки, взяв в качестве исходных данные, получаемые с преобразователя в точке, находящейся не на траектории движения автомобиля, а несколько в стороне (3; 4) (см. рис. 5.10).

Механические и геометрические параметры дорожного полотна, основания и скорость движения автомобиля совпадают с теми же параметрами, принимаемыми в предыдущем расчете.

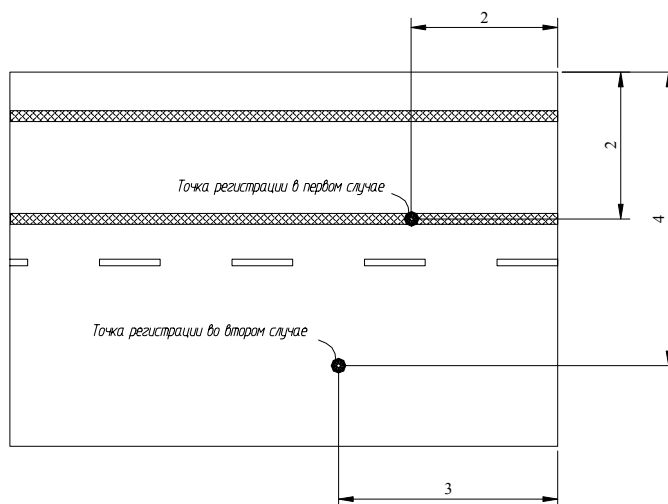


Рис. 5.10. Схема расположения точек регистрации прогибов

На рис. 5.11 и рис. 5.12 приведены результаты идентификации временной зависимости на основании «регистрации» зависимости прогибов, имеющих место во второй точке.

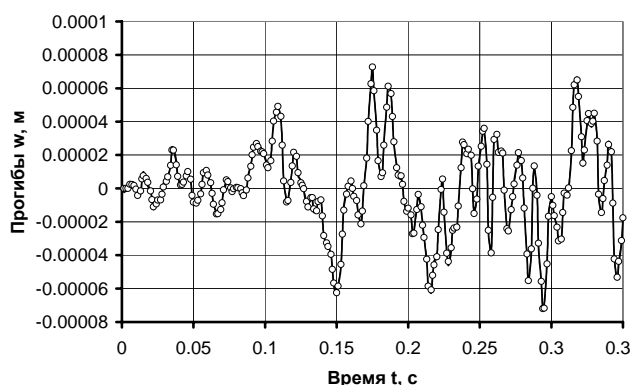


Рис. 5.11. Регистрируемая зависимость прогиба от времени

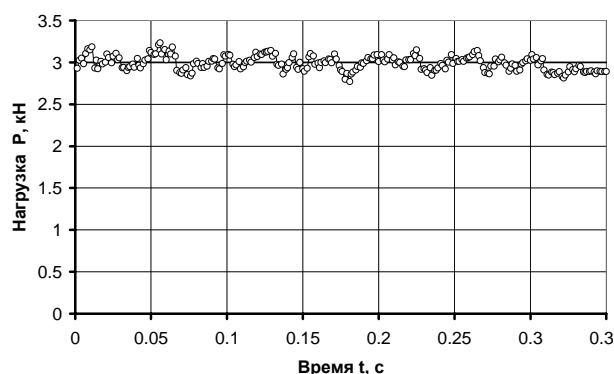


Рис. 5.12. Идентифицированные значения нагрузки

Анализируя результаты расчета и сопоставляя их с полученными ранее, необходимо подчеркнуть, что эффективность идентификации временной составляющей нагрузки по существу не зависит от выбора точки регистрации прогиба. Отмеченное обстоятельство в некоторой степени свидетельствует также о достоверности предложенного способа идентификации подвижных нагрузок.

### 5.3. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ НА ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим задачу, когда на прямоугольную плиту в точке с координатами  $(x_p, y_p)$  действует нестационарная сосредоточенная нагрузка  $P(t)$ . При этом необходимо управлять колебаниями плиты в  $n$  произвольных точках с координатами  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Для этого к плите прикладываем  $n$  сосредоточенных управляющих нагрузок  $P_{y1}, P_{y2}, \dots, P_{yn}$ , которые являются неизвестными функциями времени и будут обеспечивать выполнение критерия управления в 1-й, 2-й, ... и  $n$ -й точках соответственно. На рис. 5.13 приведена схема нагружения, принимаемая в рассматриваемой задаче.

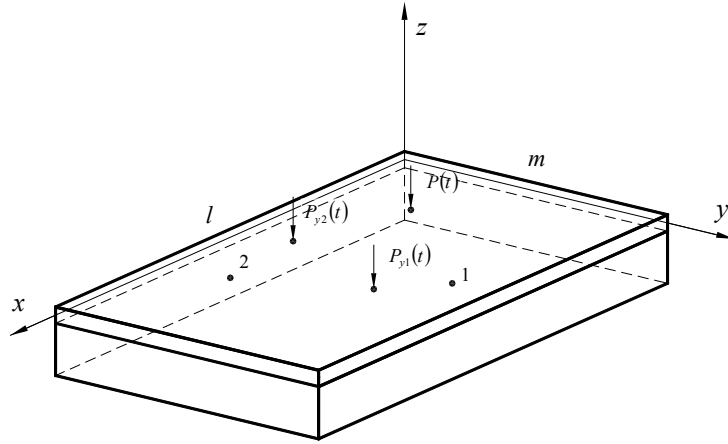


Рис. 5.13. Схема нагружения

Рассмотрим случай, когда критерием управления будет изменение прогибов плиты в  $n$  точках по заранее известному закону. В результате решения задачи управления необходимо отыскать законы изменения во времени  $n$  управляющих нагрузок.

Запишем выражение для определения прогиба в  $n$ -й точке ПЛИТЫ

$$\begin{aligned}
 w_n(x_n, y_n, t) = & \\
 = \sum_k \sum_n \frac{M_P}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_n) \cdot \sin(\mu_n y_n) + & \\
 + \sum_k \sum_n \frac{M_{y1}}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P_{y1}(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_n) \cdot \sin(\mu_n y_n) + & \quad (5.18) \\
 \sum_k \sum_n \frac{M_{y2}}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P_{y2}(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_n) \cdot \sin(\mu_n y_n) + \dots + & \\
 \sum_k \sum_n \frac{M_{yj}}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P_{yj}(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_n) \cdot \sin(\mu_n y_n) &
 \end{aligned}$$

где  $P(t)$  – сосредоточенная сила, вызывающая колебания плиты;  $P_{y1}, P_{y2}, \dots, P_{yj}$  – соответственно первая, вторая, ... и  $j$ -я управляющие нагрузки;

$$M_{yj} = \frac{4}{m^* \cdot D \cdot l \cdot m} \cdot \sin(\lambda_k x_j) \cdot \sin(\mu_n y_j);$$

$$C_{kn}^2 = \frac{\left( (\lambda_k^2 + \mu_n^2)^2 - 2 \cdot r^2 \cdot (\lambda_k^2 + \mu_n^2) + s^{*4} \right)}{m^*}$$

Отметим, что функция времени  $w_j(x_j, y_j, t)$  являются критерием управления в  $j$ -й точке плиты.

Записав целевые функции управления для всех точек, получим систему из  $j$  интегральных уравнений относительно неизвестных  $P_{y1}, P_{y2}, \dots, P_{yj}$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x_{y1}, y_{y1}, t) = \\ = \sum_k \sum_n \frac{M_P}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_{y1}) \cdot \sin(\mu_n y_{y1}) + \\ + \sum_k \sum_n \frac{M_{y1}}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P_{y1}(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_{y1}) \cdot \sin(\mu_n y_{y1}) + \dots + \\ + \sum_k \sum_n \frac{M_{yj}}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P_{yj}(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_{y1}) \cdot \sin(\mu_n y_{y1}), \\ \vdots \\ w_j(x_j, y_j, t) = \\ = \sum_k \sum_n \frac{M_P}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_j) \cdot \sin(\mu_n y_j) + \\ + \sum_k \sum_n \frac{M_{y1}}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P_{y1}(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_j) \cdot \sin(\mu_n y_j) + \dots + \\ + \sum_k \sum_n \frac{M_{yj}}{C_{kn}} \cdot \int_0^t P_{yj}(\tau) \cdot \sin(C_{kn} \cdot (t - \tau)) d\tau \sin(\lambda_k x_j) \cdot \sin(\mu_n y_j) \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Каждое из уравнений системы (5.19) можно также записать в операторном виде. Тогда система (5.19) примет более компактный вид

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(t) = \int_0^t P(\tau) \cdot F_1(t-\tau) d\tau + \\ + \int_0^t P_{y1}(\tau) \cdot F_{11}(t-\tau) d\tau + \dots + \int_0^t P_{yj}(\tau) \cdot F_{1j}(t-\tau) d\tau; \\ \vdots \\ w_j(t) = \int_0^t P(\tau) \cdot F_j(t-\tau) d\tau + \\ + \int_0^t P_{y1}(\tau) \cdot F_{j1}(t-\tau) d\tau + \dots + \int_0^t P_{yj}(\tau) \cdot F_{jj}(t-\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Введя «дискретное» время и заменив интегралы конечными суммами, придем к следующей матричной записи уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_1 = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{P} + \mathbf{F}_{11} \times \mathbf{P}_{y1} + \dots + \mathbf{F}_{1j} \times \mathbf{P}_{yj}; \\ \mathbf{W}_2 = \mathbf{F}_2 \times \mathbf{P} + \mathbf{F}_{21} \times \mathbf{P}_{y1} + \dots + \mathbf{F}_{2j} \times \mathbf{P}_{yj}; \\ \vdots \\ \mathbf{W}_j = \mathbf{F}_j \times \mathbf{P} + \mathbf{F}_{j1} \times \mathbf{P}_{y1} + \dots + \mathbf{F}_{jj} \times \mathbf{P}_{yj}. \end{array} \right. = \quad (5.21)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{11} \times \mathbf{P}_{y1} + \dots + \mathbf{F}_{1j} \times \mathbf{P}_{yj} = \mathbf{W}_1 - \mathbf{F}_1 \times \mathbf{P}; \\ \mathbf{F}_{21} \times \mathbf{P}_{y1} + \dots + \mathbf{F}_{2j} \times \mathbf{P}_{yj} = \mathbf{W}_2 - \mathbf{F}_2 \times \mathbf{P}; \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{j1} \times \mathbf{P}_{y1} + \dots + \mathbf{F}_{jj} \times \mathbf{P}_{yj} = \mathbf{W}_j - \mathbf{F}_j \times \mathbf{P}. \end{array} \right.$$

Будем решать систему (5.21) методом Крамера. Запишем определители системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \dots & \mathbf{F}_{1j} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \dots & \mathbf{F}_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{j1} & \mathbf{F}_{j2} & \dots & \mathbf{F}_{jj} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{W}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{P} & \mathbf{F}_{12} & \dots & \mathbf{F}_{1j} \\ \mathbf{W}_2 - \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{P} & \mathbf{F}_{22} & \dots & \mathbf{F}_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W}_j - \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{P} & \mathbf{F}_{j2} & \dots & \mathbf{F}_{jj} \end{vmatrix}, \dots \quad (5.22)$$

$$\dots, \Delta_j = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \dots & \mathbf{W}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \dots & \mathbf{W}_2 - \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_{j1} & \mathbf{F}_{j2} & \dots & \mathbf{W}_j - \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{P} \end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись при решении системы интегральных уравнений способом регуляризации А. Н. Тихонова, запишем значения неизвестных управляющих нагрузок в таком компактном виде:

$$\mathbf{P}_{yj} = \left( \Delta^T \cdot \Delta + \alpha_j \cdot \mathbf{C} \right) \cdot \Delta^T \cdot \Delta_j \quad (j=1 \dots n), \quad (5.23)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  – параметры регуляризации.

Представим численные примеры управления прогибами плиты в точках и проиллюстрируем управление прогибом в двух произвольных точках плиты.

Исходные данные в задаче для двух вариантов управления следующие: размеры плиты в плане  $0.6 \times 0.6$  м, толщина плиты 0.01 м, толщина основания 0.08 м, модуль упругости материала плиты  $2 \cdot 10^{11}$  Па, материала основания  $1.53 \cdot 10^7$  Па, коэффициент Пуассона материала плиты 0.28, материала основания 0.4. На рис. 5.14 представлена схема расположения на плите вынуждающих и управляющих нагрузок и точек управления: крестиком обозначено место нахождения силы, вынуждающей первоначальные колебания плиты, квадратиками – местонахождение управляющих нагрузок, а кружочками – точек управления.

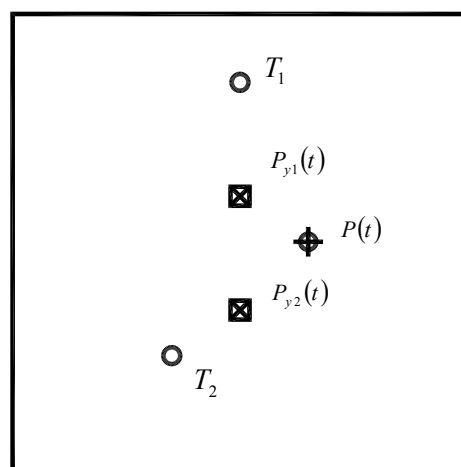


Рис. 5.14. Схема расположения нагрузок и точек управления

На рис. 5.15 приведены зависимости, описывающие изменение во времени вынуждающей силы (сплошная линия) и управляющих нагрузок (прерывистая линия). На рис. 5.16 показаны результаты управления: черной сплошной линией показано изменение прогиба в первой точке управления без учета воздействия управляющих нагрузок, а пунктирной – с учетом управляющих нагрузок; соответственно прогибы во второй точке показаны серой линией. В качестве критерия управления выбран следующий: отсутствие перемещений в заданных точках.

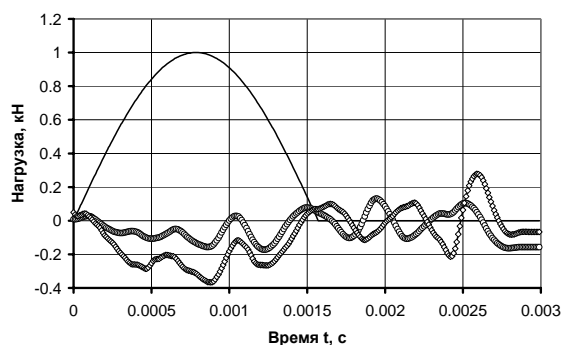


Рис. 5.15. Управляющие нагрузки

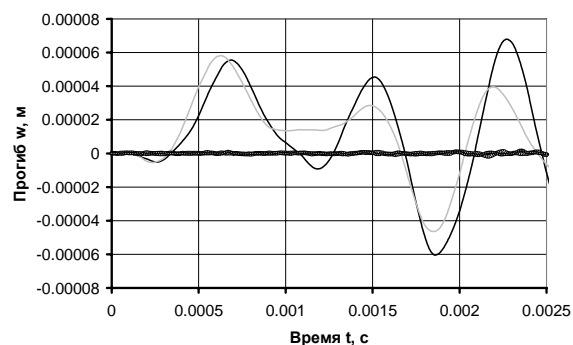


Рис. 5.16. Результаты управления

Как видно из рис. 5.16, в результате управления прогибы плиты в точках управления существенно уменьшаются, что соответствует критерию управления, принимаемого в конкретном примере расчета, а именно отсутствие перемещений в точках управления.

#### 5.4. РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОБ ИМПУЛЬСНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ

В настоящем разделе рассмотрим круглую плиту постоянной толщины  $h$ , расположенную на упругом основании, которое описывается теорией с двумя упругими характеристиками [5].

Схема воздействия на круглую плиту нестационарной нагрузки, которая предполагается осесимметричной, изображена на рис. 5.17. Предполагается, что плита контактирует с упругим основанием и что контакт между ними является двусторонним и в процессе деформирования плиты и основания не нарушается.

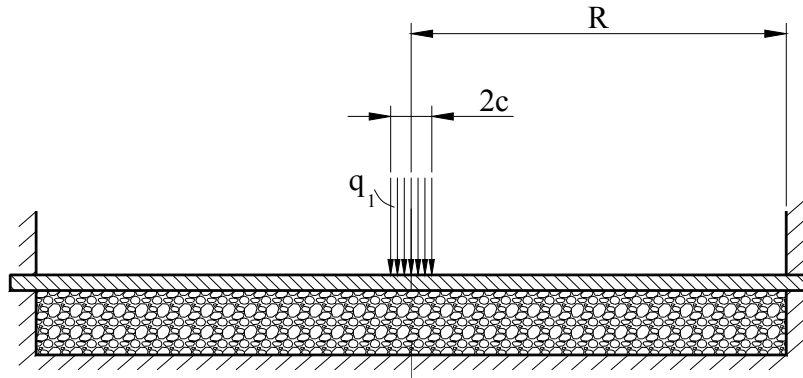


Рис. 5.17. Расчетная схема

Отнесем плиту к полярной системе координат  $(\theta, \rho)$ . Начало координат совместим с центром плиты, а расстояние от центра до рассматриваемой точки будем обозначать через  $\rho$ . В полярной системе координат дифференциальное уравнение изгиба плиты на упругом однослойном инерционном основании в пространстве изображений запишется в виде [5]

$$\nabla_{\rho}^2 \nabla_{\rho}^2 w - 2r^2 \nabla_{\rho}^2 w + s^* w + m^* s^2 w = \frac{1}{D} Q(r, s), \quad (5.24)$$

где  $w = w(\rho, t)$  – функция, определяющая прогиб пластины;  $Q(\rho, t)$  – функция, которая описывает нормальную нагрузку, действующую на пластину и приложенную к ее срединной плоскости.

Будем предполагать, что внешняя нагрузка действует осесимметрично относительно центра плиты, в результате чего плита находится в условиях осесимметричной деформации. Вдоль контура плита жестко закреплена, т.е. должны выполняться граничные условия (см. рис. 5.17)

$$w(\rho, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0; \quad \text{при } \rho = R. \quad (5.25)$$

Для обращения в нуль прогиба плиты на ее контуре можно искать значения перемещений в виде разложения в ряд по функциям Фурье-Бесселя [18]  $J_0(\lambda_n \rho / R)$ , где  $\lambda_n$  – корни уравнения  $J_0(x) = 0$ . Для удовлетворения условия равенства нулю угла поворота нормали к срединной плоскости плиты на контуре можно поступить следующим образом [18]: К срединной плоскости пластины необходимо приложить вдоль контура дополнительный изгибающий момент



$M(t)$  (см. рис. 5.18), значение которого будем находить из условия  $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$  при  $\rho = R$ . Укажем, что методика определения этого момента аналогична методике, которая была использована в работе [18].

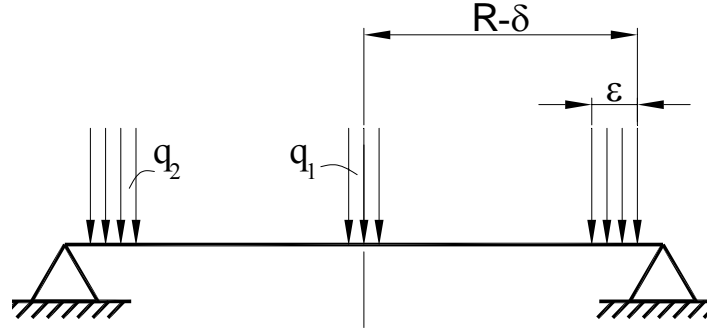


Рис. 5.18. Эквивалентная расчетная схема.

Внешняя нагрузка  $Q(x, t)$  (где  $x = \rho/R$ ) состоит из контактного давления интенсивностью  $q_1$  и нагрузки интенсивностью  $q_2$ , приложенной по площади кольца, шириной  $\epsilon$ . Для перехода к изгибающему контурному моменту предположим  $q_2 \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} p_2$ ,  $p_2 \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} M$ .

Как указывалось, будем искать решение уравнения (5.24) в следующем виде:

$$w(x, s) = \sum_n A_n(s) J_0(\lambda_n x). \quad (5.26)$$

Подставив выражение (5.26) в дифференциальное уравнение колебаний плиты, а также учитывая зависимости между функциями Бесселя и их производными, получаем

$$\sum_n A_n(s) J_0(\lambda_n x) \left( \frac{\lambda_n^4}{R^4} + 2r^2 \frac{\lambda_n^2}{R^2} + s^{*4} + m^* p^2 \right) = \frac{1}{D} Q(s, x). \quad (5.27)$$

Умножим правую и левую часть уравнения на  $x J_0(\lambda_n x)$  и, учитывая условие ортогональности

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_n x) J_0(\lambda_m x) dx = \delta(n-m) \frac{1}{2} J_1^2(\lambda_n), \quad (5.28)$$

запишем

$$A_m(s) \frac{J_1^2(\lambda_m)}{2} (C_m^2 + m^* s^2) = \frac{1}{D} \left( \int_0^{c/R} q_1 x J_0(\lambda_m x) dx + \int_{x_1}^{x_2} q_2 x J_0(\lambda_m x) dx \right), \quad (5.29)$$

где  $C_m^2 = \frac{\lambda_m^4}{R^4} + 2r^2 \frac{\lambda_m^2}{R^2} + s^{*4}$ .

Рассмотрим далее каждую из составляющих правой части соотношения (5.29) в отдельности. Для первой составляющей будет иметь место

$$\int_0^{c/R} q_1(s) x J_0(\lambda_m x) dx = -q_1(s) \frac{1}{\lambda_m} x J_1(\lambda_m x) \Big|_0^{c/R} = -q_1(s) \frac{c}{\lambda_m R} J_1\left(\frac{\lambda_m c}{R}\right). \quad (5.30)$$

Если рассматривать случай сосредоточенной в центре нагрузки, соответствующей варианту  $c \rightarrow 0$ , то  $\pi q_1 c^2 \rightarrow P_1$ ,

$$-\frac{P_1}{\lambda_m R c \pi} J_1\left(\lambda_m \frac{c}{R}\right) \approx \frac{P_1}{2\pi R^2}. \quad (5.31)$$

Аналогичным образом, учитывая, что  $q_2 \varepsilon \rightarrow P_2$ , будем иметь

$$-\frac{q_2(s)}{\lambda_m} x J_1(\lambda_m x) \Big|_{x_1}^{x_2} = -P_2 [x J_1(\lambda_m x)]' \Big|_{x=x_2} = -P_2 \frac{R-\delta}{R} J_0\left[\lambda_m \left(1 - \frac{\delta}{R}\right)\right] \quad (5.32)$$

при  $(x_1 \rightarrow x_2)$ .

Применяя формулу сложения для функций Бесселя  $J_0(x+y)$ , с учетом того, что  $J_0(\lambda_m) = 0$ , найдем

$$J_0\left[\lambda_m \left(1 - \frac{\delta}{R}\right)\right] \approx \lambda_m \frac{\delta}{R} J_1(\lambda_m). \quad (5.33)$$

Далее, как и в монографии [18], переходя к пределу и предполагая, что  $P_2 \delta \rightarrow M$  при  $\delta \rightarrow 0$ , запишем

$$-P_2 \frac{R-\delta}{R} J_0 \left[ \lambda_m \left( 1 - \frac{\delta}{R} \right) \right] = \frac{M(s) \lambda_m}{R^2}. \quad (5.34)$$

Подставим полученные выражения в соотношения (5.29)

$$A_m(s) \frac{1}{2} J_1^2(\lambda_m) (C_m^2 + m^* s^2) = \frac{1}{D} \left( \frac{P_1}{2\pi R^2} - \frac{M(s) \lambda_m}{R^2} \right). \quad (5.35)$$

Следующим действием выразим из уравнения (5.35) величину  $A_m(s)$  и будем иметь

$$A_m(s) = \frac{P_1(s) \frac{1}{\pi R^2 D J_1^2(\lambda_m) m^*}}{C_m^2/m^* + s^2} - \frac{M(s) \frac{2\lambda_m}{R^2 D J_1(\lambda_m) m^*}}{C_m^2/m^* + s^2}. \quad (5.36)$$

Выражение (5.36) является коэффициентом разложения в ряд Фурье-Бесселя функции прогиба пластины в пространстве изображений по Лапласу. Это выражение представлено в форме, удобной для выполнения операции инверсии. Переходя по обычным правилам к оригиналу [10], находим

$$A_m(t) = \frac{1}{\pi R^2 D J_1^2(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_{n0}} \int_0^t P(\tau) \sin \left( \frac{C_m}{\sqrt{m^*}} (t-\tau) \right) d\tau - \frac{2\lambda_m}{R^2 D J_1(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_{n0}} \int_0^t M(\tau) \sin \left( \frac{C_m}{\sqrt{m^*}} (t-\tau) \right) d\tau. \quad (5.37)$$

Следовательно, прогиб срединной поверхности круглой плиты на упругом основании при воздействии на нее сосредоточенной в центре нормальной силы  $P(t)$  можно рассчитать по формуле

$$w(t, x) = \sum_m \frac{J_0(\lambda_n x)}{\pi R^2 D J_1^2(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_{n0}} \int_0^t P(\tau) \sin \left( \frac{C_m}{\sqrt{m^*}} (t-\tau) \right) d\tau - \sum_m \frac{2\lambda_m J_0(\lambda_m x)}{R^2 D J_1(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_{m0}} \int_0^t M(\tau) \sin \left( \frac{C_m}{\sqrt{m^*}} (t-\tau) \right) d\tau \quad (5.38)$$

Укажем, что в этой формуле величина  $M(t)$  является неизвестной.

Далее опишем нахождение этой величины из выполнения граничного условия  $\frac{\partial w}{\partial \rho}=0$  при  $\rho=R$ . Продифференцируем выражение (5.38) по переменной  $x$ , что в принципе эквивалентно дифференцированию по переменной  $\rho$ , поскольку  $x=\frac{\rho}{R}$ . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} &= \sum_m \frac{-J_1(\lambda_m x) \lambda_m}{\pi R^3 D J_1^2(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_n 0} \int_0^t P(\tau) \sin\left(\frac{C_m}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau - \\ &- \sum_m \frac{2\lambda_m^2 J_1(\lambda_m x)}{R^3 D J_1(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_n 0} \int_0^t M(\tau) \sin\left(\frac{C_m}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Величина дополнительного момента находится на основе соотношения (5.39), которое является уравнением Вольтерра I рода для функции  $M(t)$  в предположении, что уравнение содержит заданную нагрузку  $P(t)$  в качестве своей правой части. Методика решения этого уравнения состоит во введении дискретного времени и сведении решения интегрального уравнения к алгебраическому.

Запишем уравнение (5.39) в операторном виде

$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial \rho} = \mathbf{K}_p \mathbf{P} - \mathbf{K}_R \mathbf{M} = 0, \quad (5.40)$$

где  $K_p$  и  $K_R$  – операторы, переводящие элементы  $P, M \in Z$  в элементы  $\varepsilon \in E$ .

Тогда

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}_R^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{P}. \quad (5.41)$$

Найденные значения  $M$  подставляем в выражение (5.38) для нахождения прогиба круглой плиты на упругом инерционном основании.

## 5.5. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ ВНЕШНЕГО ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В ВИДЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

Для решения обратной задачи запишем систему уравнений, определяющую колебания круглой плиты на упругом основании. Формулы (5.42) демонстрируют трансформацию соответствующих зависимостей к матричной записи

$$\left\{ \begin{aligned}
 w(t, x) &= \int_0^t P(\tau) \sum_n \frac{J_0(\lambda_n x)}{\pi R^2 D J_1^2(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_n} \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau - \\
 &- \int_0^t M(\tau) \sum_n \frac{2\lambda_n J_0(\lambda_n x)}{R^2 D J_1(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_n} \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau; \\
 &= \int_0^t P(\tau) \sum_n \frac{-J_1(\lambda_n x) \lambda_n}{\pi R^3 D J_1^2(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_n} \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau - \\
 &- \int_0^t M(\tau) \sum_n \frac{2\lambda_n^2 J_1(\lambda_n x)}{R^3 D J_1(\lambda_m) \sqrt{m^*} C_n} \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau = 0.
 \end{aligned} \right. \quad (5.42)$$

$$= \left\{ \begin{aligned}
 w(t, x) &= \int_0^t P(\tau) K_p(t-\tau) d\tau - \int_0^t M(\tau) K_R(t-\tau) d\tau; \\
 &= \int_0^t P(\tau) K_p^\rho(t-\tau) d\tau - \int_0^t M(\tau) K_R^\rho(t-\tau) d\tau = 0.
 \end{aligned} \right. =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{W} = \mathbf{K}_p \mathbf{P} + \mathbf{K}_R \mathbf{M} \\ \frac{\partial w}{\partial \rho} = \mathbf{K}_p^\rho \mathbf{P} - \mathbf{K}_R^\rho \mathbf{M} = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения реактивный момент (дополнительный силовой момент на контуре пластины)  $\mathbf{M} = \mathbf{K}_p^\rho \mathbf{P} (\mathbf{K}_R^\rho)^{-1}$  и подставим его в первое уравнение

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}_P \mathbf{P} + \mathbf{K}_R \mathbf{K}_p^\rho (\mathbf{K}_R^\rho)^{-1} \mathbf{P} = \left( \mathbf{K}_P + \mathbf{K}_R \mathbf{K}_p^\rho (\mathbf{K}_R^\rho)^{-1} \right) \mathbf{P} = \mathbf{S} \mathbf{P}; \quad (5.43)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}_P + \mathbf{K}_R (\mathbf{K}_R^\rho)^{-1} \mathbf{K}_p^\rho.$$

Для нахождения силы по известному прогибу плиты в точке и обращения матрицы  $\mathbf{S}$  воспользуемся регуляризирующим алгоритмом А.Н. Тихонова, согласно которому можно записать следующее:

$$\mathbf{P} = \left( \mathbf{S}^T \mathbf{S} + \alpha \mathbf{C} \right) \mathbf{S}^T \mathbf{W}. \quad (5.44)$$

Для демонстрации эффективности этой методики моделирования проведем расчет временной составляющей сосредоточенной силы по известному «зашумленному» прогибу в точке с координатой  $\rho_0=0.3$  м.

Исходные данные для расчета:

- материал плиты – сталь с модулем упругости  $E=2.1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$  и плотностью  $\rho=7850$  кг/м<sup>3</sup> ;

- характеристики материала основания – модуль упругости  $E=1.53 \cdot 10^8$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu=0.2$ , плотность  $\rho=6000$  кг/м<sup>3</sup> ;

- радиус плиты  $R=0.4$  м, толщина  $h=0.05$  м, толщина основания  $H=0.08$  м.

На рис. 5.19 приведены исходные данные для процедуры идентификации в виде зашумленных значений перемещений точки плиты в ее геометрическом центре. На рис. 5.20 показаны результаты идентификации закона изменения нагрузки.

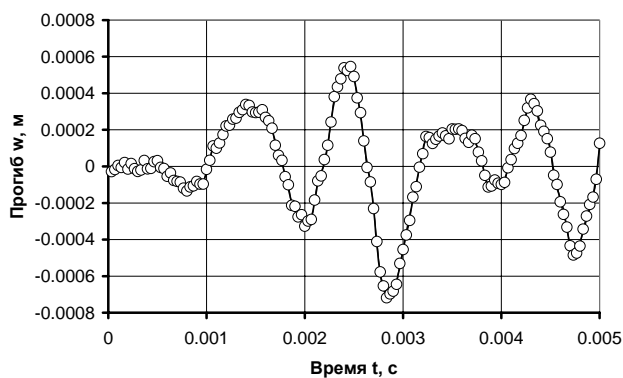


Рис. 5.19. Регистрируемая зависимость прогиба от времени

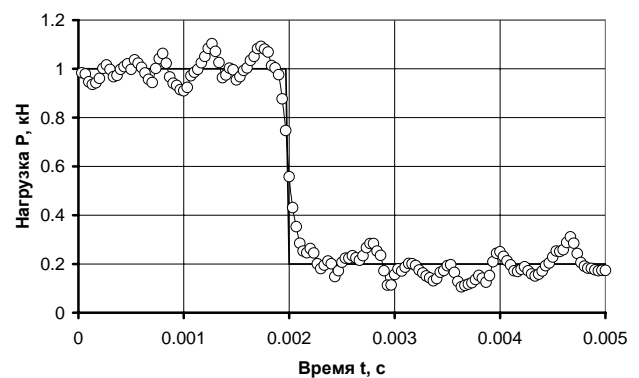


Рис. 5.20. Результат идентификации временной составляющей нагрузки

Сплошной линией показана заданная нагрузка при решении соответствующей прямой задачи, а линия в виде кружочков – идентифицированные значения нагрузки. Уровень «зашумления» составлял 3%.

## 5.6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗКИ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА КРУГЛУЮ ПЛИТУ

Рассмотрим круглую плиту на упругом основании типа Власова-Леонтьева, на которую воздействует произвольная относительно пространственной и временной координат осесимметричная нагрузка (рис. 5.21).

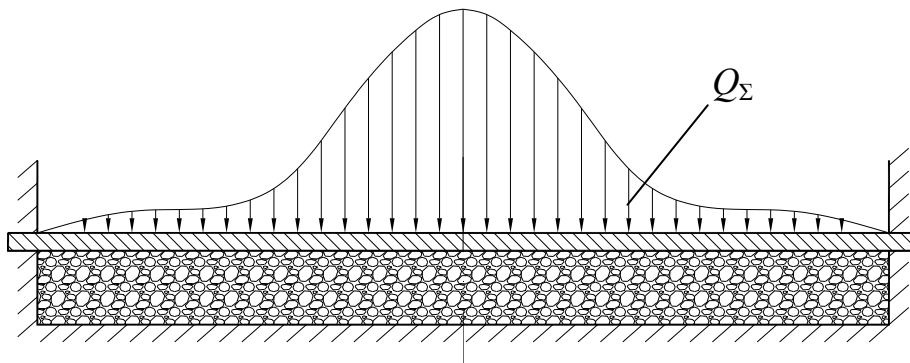


Рис. 5.21. Круглая плита под действием нагрузки

Будем идентифицировать пространственно-временной закон изменения нагрузки согласно косвенным проявлениям её воздействия, а именно прогибов, в  $k$  числе точек на плите, которые имеют координаты –  $r_1, r_2, \dots, r_k$ . Выбор этих  $k$  числа координат будет оговорен при выполнении конкретных расчетов.

Запишем дифференциальное уравнение колебаний круглой плиты, лежащей на упругом основании, под действием произвольной осесимметричной нагрузки

$$\nabla_{\rho}^2 \nabla_{\rho}^2 w - 2r^2 \nabla_{\rho}^2 w + s^*{}^4 w + m^* s^2 w = \frac{1}{D} Q_{\Sigma}(r, s), \quad (5.45)$$

где  $Q_{\Sigma}(r, s)$  – функция, описывающая пространственно-временное распределение нагрузки.

Остальные обозначения, входящие в уравнение (5.45), были описаны в подразделе 5.4. Укажем еще раз, что уравнение (5.45) уже записано в пространстве изображений по Лапласу.

Так как построение решения дифференциального уравнения (5.45) было подробно описано в подразделе 5.4, остановимся лишь на отличительных особенностях этого решения, имеющих место при построении решения задачи настоящего раздела. Прежде всего, отметим, что внешняя нагрузка  $Q_\Sigma(x,t)$  (где  $x=\rho/R$ ) будет состоять из возмущающего давления, произвольно распределенного вдоль радиуса плиты, и компенсирующей нагрузки интенсивностью  $q_2$ , приложенной по площади кольца шириной  $\varepsilon$ . Схема воздействия указанных нагрузок показана на рис. 5.22. Этот рисунок будем рассматривать как схему закрепления контура плиты, при которой на нем отсутствует прогиб и угол поворота.

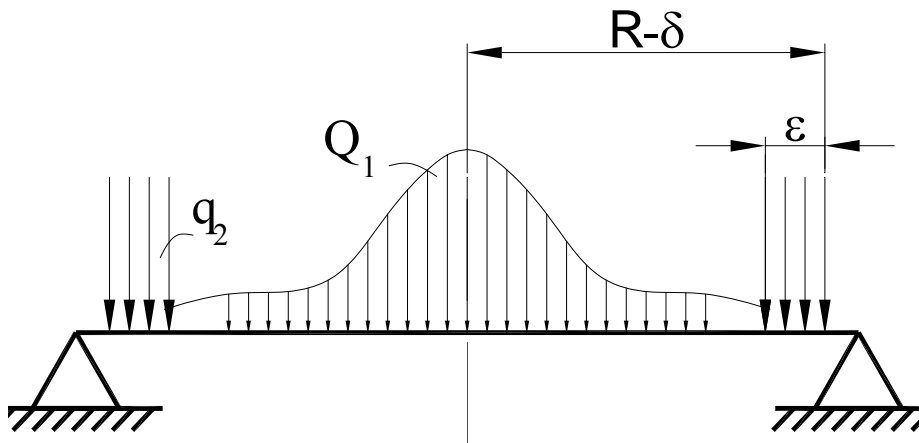


Рис. 5.22. Схема воздействующих нагрузок

Внешнюю нагрузку, распределенную вдоль радиуса согласно некоторой функции  $Q_r(x)$ , запишем в виде разложения в ряд Фурье-Бесселя

$$Q_1(x,t) = \sum_n B_n(t) J_0(\lambda_n x), \quad (5.46)$$

где коэффициенты разложения  $B_n(t)$  находятся согласно следующей зависимости:

$$B_n(t) = \frac{2Q_t(t)}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 x Q_r(x) J_0(\lambda_n x) dx. \quad (5.47)$$



Детали, отражающие переход от распределенного по кольцу шириной  $\varepsilon$  давления к изгибающему контурному моменту, были описаны в подразделе 5.4, поэтому воспользуемся приведенными в нём соответствующими результатами.

Учитывая ранее изложенное, решение дифференциального уравнения (5.45) получаем в форме

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n x)}{D\sqrt{m^*} C_n} \int_0^t B_n(\tau) \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n J_0(\lambda_n x)}{R^2 D J_1(\lambda_n) \sqrt{m^*} C_n} \int_0^t M(\tau) \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau, \quad (5.48)$$

Укажем, что в формуле (5.48) величина  $M(t)$  является неизвестной и должна определяться, как и ранее, из выполнения условия на контуре плиты –  $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$  при  $\rho = R$ . Продифференцируем выражение (5.48) по переменной  $x$ , что в принципе эквивалентно дифференцированию по переменной  $\rho$ , поскольку  $x = \frac{\rho}{R}$ . Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-J_1(\lambda_n x) \lambda_n}{R D \sqrt{m^*} C_n} \int_0^t B_n(\tau) \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n^2 J_1(\lambda_n x)}{R^3 D J_1(\lambda_n) \sqrt{m^*} C_n} \int_0^t M(\tau) \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau = 0. \quad (5.49)$$

Величина неизвестного компенсирующего момента на контуре плиты находится из уравнения (5.49), которое является уравнением Вольтерра I рода для функции  $M(t)$ , в предположении, что составляющая уравнения, содержащая заданную нагрузку  $Q_t(t)$ , является правой частью этого уравнения.

Запишем систему операторных соотношений (5.48) и (5.49), содержащих функции  $Q_t$  и  $M$ , в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_p \mathbf{Q}_t + \mathbf{K}_R \mathbf{M} = \mathbf{W}; \\ \varepsilon = \frac{\partial w}{\partial \rho} = \mathbf{K}_p^\varepsilon \mathbf{Q}_t - \mathbf{K}_R^\varepsilon \mathbf{M} = 0, \end{cases} \quad (5.50)$$

где  $K_p$  и  $K_R$  – непрерывные операторы, переводящие элементы  $Q_t, M \in Z$  в элементы  $w \in E$ .

Второе соотношение в (5.50) является операторным уравнением для функции  $M(t)$  в предположении, что нагрузка  $Q_t$  задана. Первое соотношение в этой системе позволяет найти вектор перемещения.

Из системы (5.50) можно записать

$$w(x, t) = \mathbf{K}_p \mathbf{Q} + \mathbf{K}_R (\mathbf{K}_p \mathbf{Q} \mathbf{K}_R^{-1}). \quad (5.51)$$

Выражение в операторной форме (5.51) описывает нестационарный прогиб круглой плиты на упругом основании под действием произвольно заданной нагрузки. Приведенное выражение определяет решение прямой задачи.

Опишем результаты численного эксперимента при решении прямой задачи. Ограничимся заданием воздействующей на плиту нагрузки в виде произведения двух составляющих функций – временной и пространственной. В рассматриваемом численном эксперименте временная составляющая нагрузки будет меняться во времени как «полуволна синуса».

Закон изменения давления вдоль координаты  $x$  пусть задается в виде

$$Q_r(x) = 0.5J_0(x\lambda_0) + 0.4J_0(x\lambda_1) + 0.3J_0(x\lambda_2), \quad (5.52)$$

где  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  соответственно первый, второй и третий корни уравнения  $J_0(x) = 0$ .

Нагрузка  $Q_1(x, t) = Q_t(t)Q_r(x)$  может быть представлена следующим трехмерным изображением (рис. 5.23).

На рис. 5.24 приведены результаты решения прямой задачи: сплошной линией показано изменение прогиба во времени в центре плиты, а пунктирной – закон изменения компенсирующего момента, приложенного по контуру плиты, для удовлетворения граничного условия.

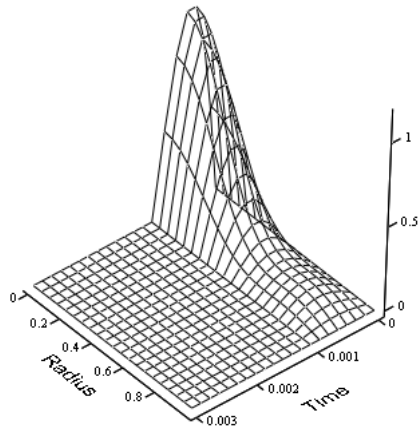


Рис. 5.23. Пространственная форма задания нагрузки

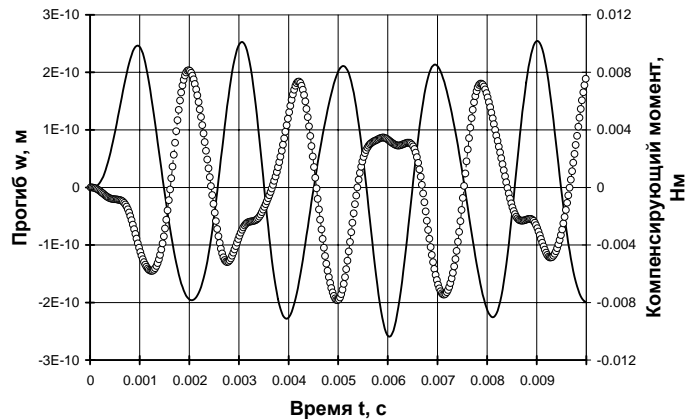


Рис. 5.24. Численные результаты решения прямой задачи

По существу, в настоящем подразделе в определенной степени повторено решение задачи, рассмотренной в подразделе 5.4. Однако здесь соответствующие соотношения уже адаптированы для построения обратной задачи, цель которой – установление пространственно-временного распределения закона нагружения круглой плиты.

Для идентификации законов геометрического и временного распределений нагрузки будем считать, что являются заданными функции прогиба в некоторых  $k$  точках вдоль радиальной координаты на плите. Будем аппроксимировать функцию прогиба плиты на основании формулы (5.48), учитывая лишь первые  $k$  членов в соответствующих рядах Фурье-Бесселя. Полученное таким образом решение, естественно, будет являться приближенным. Неизвестными будут  $k$  функций, зависящих от времени, входящих в формулу (5.48) и обозначаемых через  $B_k(t)$ .

На основании формулы (5.48) и упомянутых соображений запишем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 & \frac{J_0(\lambda_1 x)}{D\sqrt{m^*} C_1} \int_0^t B_1(\tau) \sin\left(\frac{C_1}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau - \\
 & - \frac{J_0(\lambda_2 x)}{D\sqrt{m^*} C_2} \int_0^t B_2(\tau) \sin\left(\frac{C_2}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau - \dots
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\dots - \frac{J_0(\lambda_k x)}{D\sqrt{m^*} C_k} \int_0^t B_k(\tau) \sin\left(\frac{C_k}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau -$$

$$- \sum_n \frac{2\lambda_n J_0(\lambda_n x)}{R^2 D J_1(\lambda_n) \sqrt{m^*} C_n} \int_0^t M(\tau) \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau = w(t, x),$$

где  $B_1(\tau), B_2(\tau) \dots B_k(\tau)$  – соответственно первая, вторая, ...  $k$ -я искомые функции времени.

В правую часть уравнения (5.53) входит функция  $w(t, x)$ , которая определяет изменение прогиба плиты в момент времени  $t$  в произвольной точке с координатой  $x$ . Укажем, что соотношение (5.53) должно выполняться в выбранных заранее  $k$  точках, в которых регистрируется прогиб. По существу, соотношение (5.53) определяет  $k$  уравнений, служащих для нахождения искомых функций времени. Замыкает эту систему уравнений еще одно уравнение, служащее для определения компенсирующего момента. Оно строится на основе условия, вытекающего из соотношения –  $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$  при

$\rho = R$ . Выражению для этого уравнения можно придать следующую форму:

$$- \frac{J_1(\lambda_1 x) \lambda_1}{R D \sqrt{m^*} C_1} \int_0^t B_0(\tau) \sin\left(\frac{C_0}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau -$$

$$- \frac{J_1(\lambda_1 x) \lambda_1}{R D \sqrt{m^*} C_1} \int_0^t B_1(\tau) \sin\left(\frac{C_1}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau -$$

$$- \frac{J_1(\lambda_n x) \lambda_n}{R D \sqrt{m^*} C_n} \int_0^t B_n(\tau) \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau +$$

$$+ \sum_n \frac{2\lambda_n^2 J_1(\lambda_n x)}{R^3 D J_1(\lambda_n) \sqrt{m^*} C_n} \int_0^t M(\tau) \sin\left(\frac{C_n}{\sqrt{m^*}}(t-\tau)\right) d\tau = 0. \quad (5.54)$$

В операторной форме систему уравнений (5.53), (5.54) можно записать так:



ках  $x_3=0.375$  и  $x_4=0.5$  (в этих точках на уровне визуального восприятия кривые сливаются) – минимальные.

После выполнения процедуры идентификации полученные результаты показаны в форме поверхности, изображенной на рис. 5.26. Для удобства визуального сравнения форма воздействующей на плиту нагрузки (при рассмотрении соответствующей прямой задачи) показана на рис. 5.27. Поверхности на рис. 5.26 и рис. 5.27 изображают пространственно-временное распределение нагрузок. Сравнивая результаты, показанные на этих рисунках, необходимо отметить их хорошее согласование.

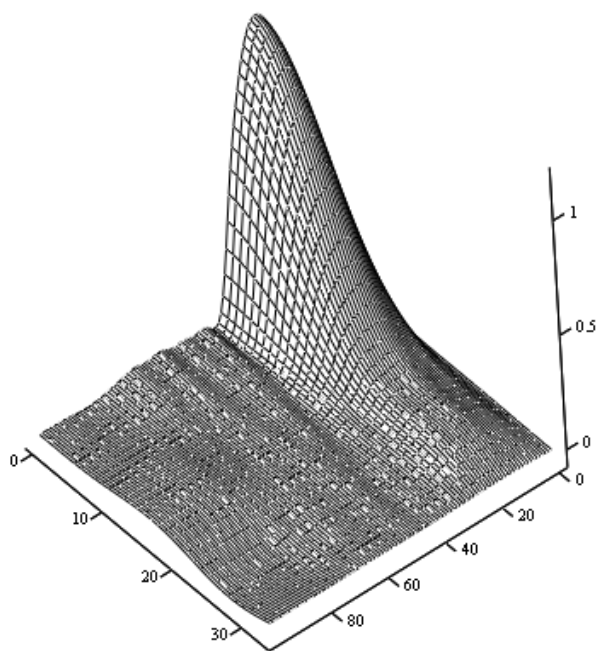


Рис. 5.26. Идентифицированная в первом случае нагрузка

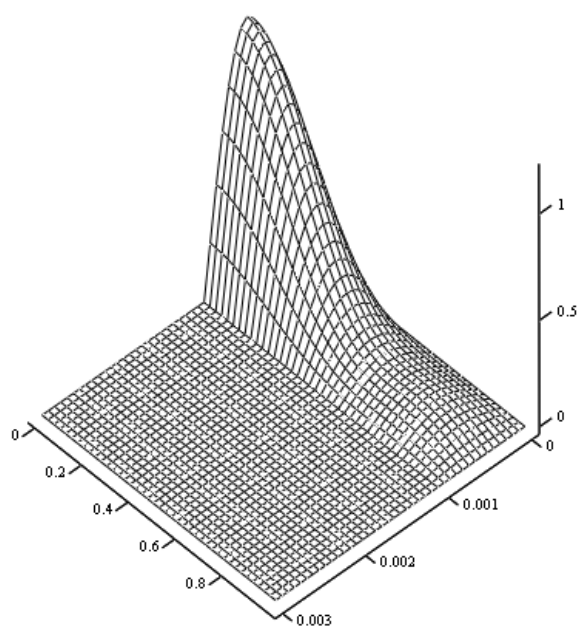


Рис. 5.27. Задаваемая нагрузка

На рис. 5.28 показаны кривые, которые получены на основе пространственных изображений в предположении фиксирования координаты  $x$  ( $x=0.35$ ). На рис. 5.29 изображены кривые, являющиеся эпюрами воздействующей нагрузки в момент времени  $t=3.5 \cdot 10^{-4}$  с. На каждом из рисунков приведены две кривые: сплошной линии соответствует точное значение нагрузки, принимаемое при решении прямой задачи для получения исходных данных для задачи идентификации, а прерывистой – восстановленные значения.

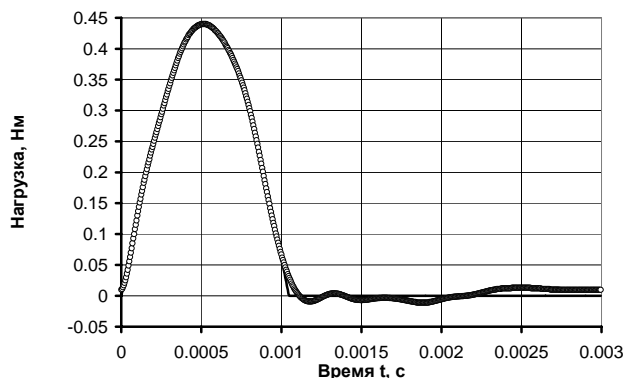


Рис. 5.28. Изменение прогиба во времени при  $x=0.35$

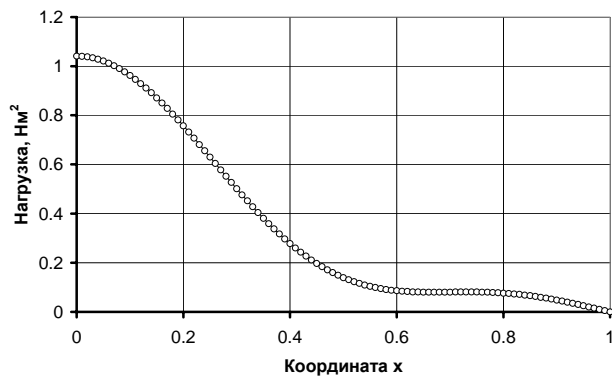


Рис. 5.29. Эпюра воздействующей нагрузки при  $t=3.5 \cdot 10^{-4} c$

Изучим эффективность метода идентификации при условии различного задания исходных данных, отвечающего различному расположению точек регистрации прогибов. Рассмотрим случай, когда точки регистрации (в расчетном варианте их четыре) практически равномерно расположены вдоль радиуса плиты и имеют координаты 0.2, 0.4, 0.6, 0.7. При этом в результате идентификации получим следующую поверхность (рис. 5.30), отражающую пространственно-временное распределение воздействующей нагрузки. Сравнивая результаты с исходной нагрузкой (см. рис. 5.31), можно отметить хорошее согласование значений нагрузок.

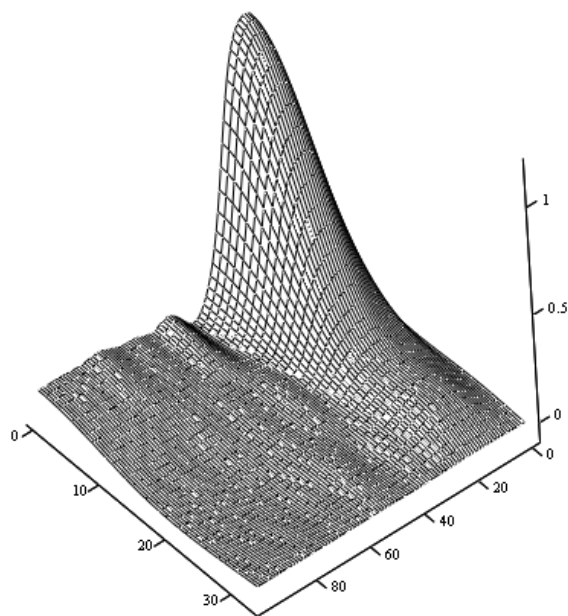


Рис. 5.30. Идентифицированное распределение нагрузки

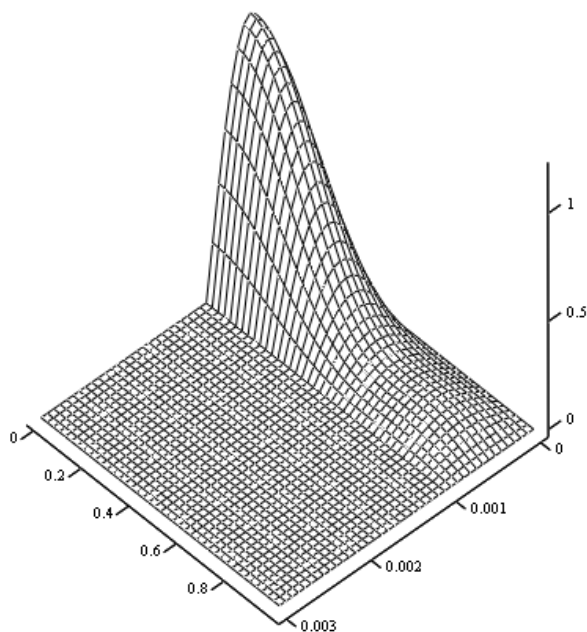


Рис. 5.31. Исходная нагрузка

Рассмотрим также случай, когда точки регистрации прогибов неравномерно распределены вдоль радиуса пластины. Пусть они имеют, например, координаты 0.1, 0.11, 0.12, 0.13. Укажем, что в этом случае просматривается заметное ухудшение качества идентификации. На рис. 5.32 изображен результат восстановления нагрузки при указанном расположении точек регистрации. Для сопоставления приведен рис. 5.33, отражающий картину точных значений нагрузок. Как видно из сопоставления рисунков, наибольшие искажения наблюдаются в зоне, в которой отсутствуют точки регистрации.

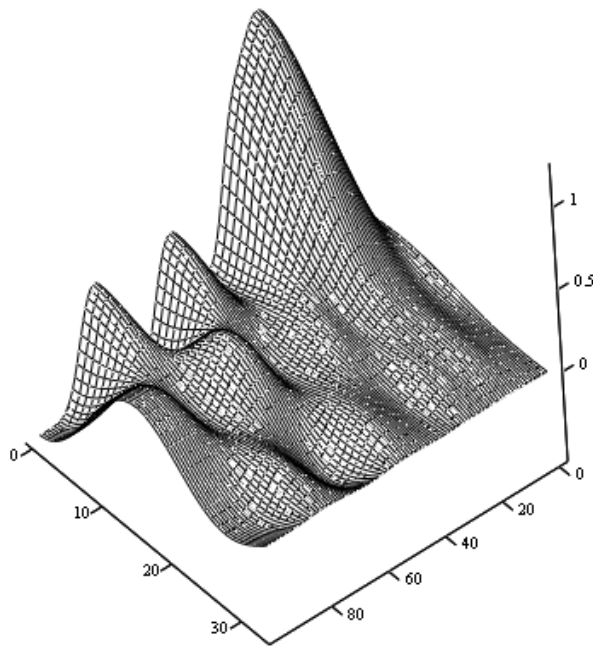


Рис. 5.32. Идентифицированная нагрузка

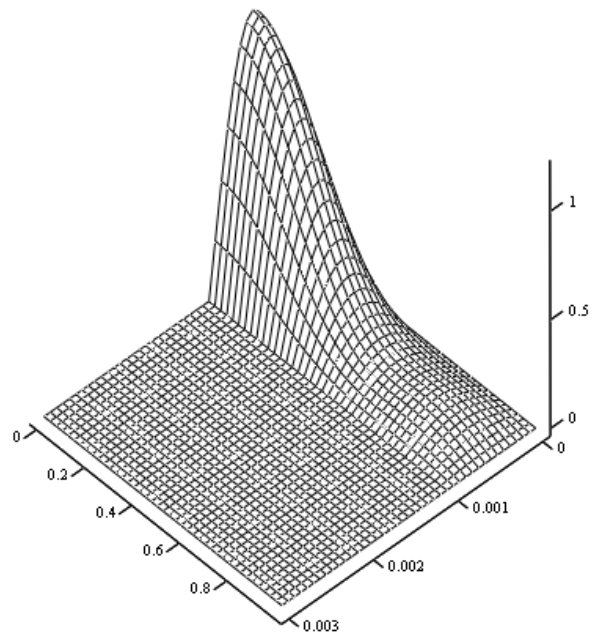


Рис. 5.33. Исходная нагрузка

В зоне, в которой точки регистрации расположены на пластине достаточно равномерно, с помощью процедуры идентификации восстановление значений нагрузок вполне удовлетворительно.

## 5.7. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрим бесконечную плиту, лежащую на упругом инерционном основании. В центре плиты по кругу радиуса  $R$  на нее



действует равномерно распределенное давление, закон изменения которого во времени  $q(t)$  (рис. 5.34).

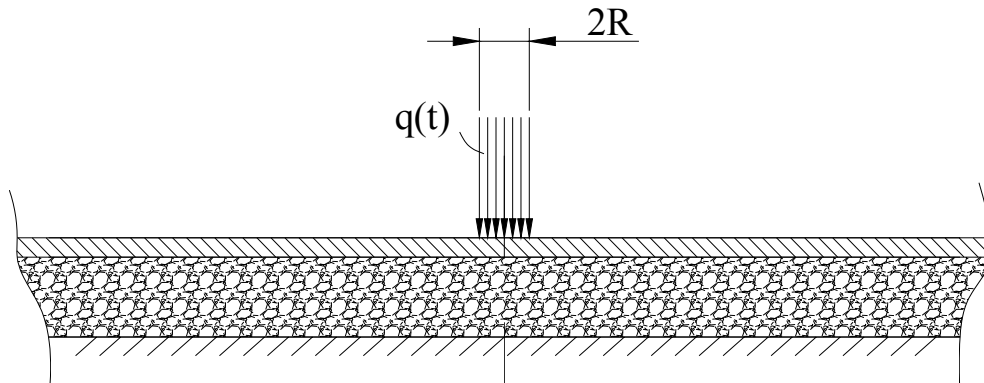


Рис. 5.34. Расчетная схема

В этом случае колебания плиты будут описываться следующим дифференциальным уравнением в частных производных [5]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(\rho, t) - 2r^2 \nabla^2 w(\rho, t) + s^* w(\rho, t) + m^* \frac{\partial^2 w(\rho, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{D} Q(\rho, t). \quad (5.56)$$

Будем решать данное уравнение методами интегральных преобразований. Запишем уравнение (5.56) в пространстве изображений, выполнив при этом прямое преобразование Лапласа

$$\nabla^2 \nabla^2 w(\rho, s) - 2r^2 \nabla^2 w(\rho, s) + s^* w(\rho, s) + m^* s^2 w(\rho, s) = \frac{1}{D} Q(\rho, s). \quad (5.57)$$

Следует отметить, что при решении уравнения (5.57) удобно будет использовать преобразование Ханкеля, которое часто применяется при решении осесимметричных задач для неограниченных областей. Запишем выражения для прямого и обратного преобразования Ханкеля [13]

$$\hat{f}_n(\xi) = \int_0^{\infty} f(\rho) J_n(\rho \xi) \rho d\rho; \quad (5.58)$$

$$f(\rho) = \int_0^{\infty} \hat{f}_n(\xi) J_n(\rho \xi) \xi d\xi. \quad (5.59)$$

Запишем преобразование Ханкеля для гармонического и би-

гармонического операторов. Для этого выполним преобразование Ханкеля для следующего дифференциального выражения:

$$\frac{d^2 f}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho}. \quad (5.60)$$

Запишем уравнение Бесселя, решением которого являются цилиндрические или бесселевы функции:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (5.61)$$

Если заменить в уравнении (5.61)  $x$  на  $\rho\xi$ ,  $\nu$  на  $n$ , а  $y$  на  $J_n(\rho\xi)$ , то его можно записать следующим образом:

$$\xi \frac{d}{d\rho} (\rho J'_n(\rho\xi)) = - \left( \xi^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \rho J_n(\rho\xi). \quad (5.62)$$

Выполняя преобразование Ханкеля для первого слагаемого (5.62), а также учитывая, что

$$(\rho f'(\rho) J_n(\rho\xi)) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\infty} = 0, \quad (5.63)$$

получим

$$\int_0^{\infty} \frac{d^2 f}{d\rho^2} J_n(\rho\xi) \rho d\rho = - \int_0^{\infty} \frac{df}{d\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho J_n(\rho\xi)) d\rho. \quad (5.64)$$

Прибавляя к правой и левой частям этого соотношения выражение, отвечающее преобразованию Ханкеля от второго слагаемого в (5.60), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} \right) J_n(\rho\xi) \rho d\rho &= - \int_0^{\infty} \frac{df}{d\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho J_n(\rho\xi)) d\rho + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} J_n(\rho\xi) \rho d\rho = - \xi \int_0^{\infty} \frac{df}{d\rho} J'_n(\rho\xi) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Интегрируя по частям последнее выражение при условии, что

$$(\rho f(\rho) J'_n(\rho \xi)) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\infty} = 0, \quad (5.66)$$

получим

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} \right) J_n(\rho \xi) \rho d\rho = \xi \int_0^{\infty} f(\rho) \frac{d}{d\rho} (\rho J'_n(\rho \xi)) d\rho. \quad (5.67)$$

Учитывая (5.62), перепишем эту зависимость следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \frac{n^2}{r^2} f \right) J_n(\rho \xi) \rho d\rho = -\xi^2 \int_0^{\infty} f(\rho) \frac{d}{d\rho} (\rho J_n(\rho \xi)) d\rho. \quad (5.68)$$

На основе (5.58) запишем

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \frac{n^2}{r^2} f \right) J_n(\rho \xi) \rho d\rho = -\xi^2 \hat{f}_n(\xi). \quad (5.69)$$

Если в (5.68) вместо  $f(\rho)$  подставить выражение

$$\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho} + \frac{n^2}{r^2} f(\rho), \quad (5.70)$$

то, согласно (5.69), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_n(\rho \xi) \rho \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} f(\rho) \right) d\rho = \\ = \xi^4 f^L(\xi) \end{aligned} \quad (5.71)$$

Используя приведенные зависимости (5.69) и (5.71), выполним прямое преобразование Ханкеля для выражения (5.57)

$$\xi^4 w(\xi, s) + 2r^2 \xi^2 w(\xi, s) + s^{*4} w(\xi, s) + m^* s^2 w(\xi, s) = \quad (5.72)$$

$$= \frac{1}{D} \int_0^{\infty} Q(\rho, s) \rho J_0(\rho \xi) d\rho,$$

откуда будем иметь

$$w(\xi, s) = \frac{1}{m^* D} \frac{1}{s^2 + f(\xi)^2} \int_0^{\infty} Q(\rho, s) \rho J_0(\rho \xi) d\rho, \quad (5.73)$$

где  $f(\xi) = \sqrt{(\xi^4 + 2r^2 \xi^2 + s^{*4}) / m^*}$ .

Следующим шагом будет выполнение обратного преобразования Лапласа с использованием правила свертки. После чего получим

$$w(\xi, t) = \frac{1}{m^* D \cdot f(\xi)} \int_0^t \int_0^{\infty} Q(\rho, \tau) \sin(f(\xi)(t-\tau)) d\tau \rho J_0(\rho \xi) d\rho. \quad (5.74)$$

Предположим, что функция  $Q(\rho, t)$  является произведением двух функций, зависящих только от одной из переменных  $Q_1(\rho)$  и  $Q_2(t)$ . Тогда выражение (5.74) можно будет записать так:

$$w(\xi, t) = \frac{1}{m^* D \cdot f(\xi)} \int_0^{\infty} Q_1(\rho) \rho J_0(\rho \xi) d\rho \int_0^t Q_2(\tau) \sin(f(\xi)(t-\tau)) d\tau. \quad (5.75)$$

После этого выполним обратное преобразование Ханкеля для уравнения (5.75)

$$w(\rho_1, t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{m^* D \cdot f(\xi)} \int_0^{\infty} Q_1(\rho) \rho J_0(\rho \xi) d\rho \times \int_0^t Q_2(\tau) \sin(f(\xi)(t-\tau)) d\tau \xi J_0(\rho_1 \xi) d\xi. \quad (5.76)$$

Формула (5.76) будет описывать изменение прогиба во времени бесконечной плиты на упругом основании в точке с координатой  $\rho_1$  при произвольном задании как геометрического, так и временно-го характера нагрузки.

Так как в рассматриваемом случае нагрузка распределена по кругу радиуса  $R$  в центре плиты, то интеграл  $\int_0^{\infty} Q_1(\rho_1)\rho_1 J_0(\rho_1\xi)d\rho_1$  соответственно равен

$$\int_0^R \rho_1 J_0(\rho_1\xi)d\rho_1 = \frac{RJ_1(R\xi)}{\xi}. \quad (5.77)$$

Выражение (5.76) примет вид

$$w(\rho,t) = \int_0^{\infty} \frac{RJ_1(R\xi)}{m^* D \cdot f(\xi)} \int_0^t Q_2(\tau) \sin(f(\xi)(t-\tau)) d\tau J_0(\rho\xi) d\xi. \quad (5.78)$$

Рассчитаем прогиб плиты при условии, что нагрузка изменяется во времени как полуволна синуса. При этом выражение для описания временной составляющей будет иметь следующую форму:

$$Q_2(t) = q \cdot \sin(\omega t) \left[ H(t) - H\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right], \quad (5.79)$$

где  $\omega$  – длительность воздействия нагрузки.

Подставим выражение для нагрузки в соотношение (5.78)

$$w(\rho,t) = \int_0^{\infty} \frac{RJ_1(R\xi)}{m^* D \cdot f(\xi)} \int_0^t q \cdot \sin(\omega\tau) \left( H(\tau) - H\left(\tau - \frac{\pi}{\omega}\right) \right) \sin(f(\xi)(t-\tau)) d\tau J_0(\rho\xi) d\xi. \quad (5.80)$$

После несложных преобразований получим

$$w(\rho,t) = \int_0^{\infty} \frac{RJ_1(R\xi)}{m^* D \cdot f(\xi)} F(t,\xi) J_0(\rho\xi) d\xi, \quad (5.81)$$

где

$$F(t,\xi) = \left( \left( \frac{\sin(\omega t)}{2(\omega + f(\xi))} - \frac{\sin(\omega t)}{2(\omega - f(\xi))} \right) - \left( \frac{\sin(-f(\xi)t)}{2(\omega + f(\xi))} - \frac{\sin(f(\xi)t)}{2(\omega - f(\xi))} \right) \right)$$

$$-H\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\left[\left(\frac{\sin(\omega t)}{2(\omega+f(\xi))}-\frac{\sin(\omega t)}{2(\omega-f(\xi))}\right)-\left(\frac{\sin\left(\left(\omega+f(\xi)\right)\frac{\pi}{\omega}-f(\xi)t\right)}{2(\omega+f(\xi))}-\frac{\sin\left(\left(\omega-f(\xi)\right)\frac{\pi}{\omega}+f(\xi)t\right)}{2(\omega-f(\xi))}\right)\right].$$

Исследуем сходимость несобственного интеграла (5.81), заменив верхний предел конечным числом  $\text{inf}$ . Для этого рассчитаем прогиб плиты со следующими исходными данными:

- модуль упругости плиты  $2.11 \cdot 10^{11}$  Па;
- коэффициент Пуассона плиты 0.28;
- модуль упругости основания  $1.53 \cdot 10^8$  Па;
- коэффициент Пуассона основания 0.2;
- толщина плиты 0.2 м;
- толщина основания 0.8 м;
- нагрузка интенсивностью  $10^5$  Па, равномерно распределенная в центре по кругу радиусом 0.01 м.

На рис. 5.35 представлено изменение прогиба плиты в точке с координатой  $\rho=0.03$  м при различных значениях верхнего предела интеграла.

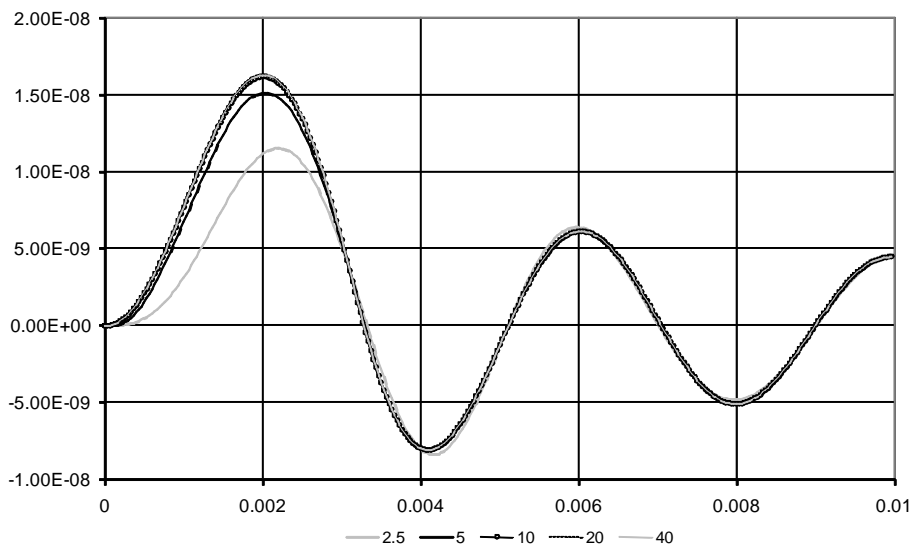


Рис. 5.35. Анализ сходимости

Как видно из графиков, представленных на рис. 5.35, значения интеграла хорошо приближаются к своему пределу уже при  $\inf$ , равному  $10 \text{ м}^{-1}$  (кривые, соответствующие десяти, двадцати и сорока практически сливаются в одну). Естественно, этот вывод справедлив применительно к конкретным исходным расчетным параметрам.

Для решения обратной задачи запишем интегральное уравнение Вольтерра первого рода для нахождения временной составляющей неизвестной нагрузки

$$w(\rho, t) = \int_0^{\infty} \frac{RJ_1(R\xi)}{m^* D \cdot f(\xi)} \int_0^t Q_2(\tau) \sin(f(\xi)(t-\tau)) d\tau J_0(\rho\xi) d\xi. \quad (5.82)$$

Здесь предполагается  $\rho = \rho_w$  фиксированным, т.е. функция  $w(\rho, t)$  является заданной функцией времени.

Перейдем в записи интегрального уравнения от непрерывного времени и координаты к дискретным. В этом случае интегральное уравнение (5.78) будет выглядеть следующим образом:

$$w_m = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{(j-1)\Delta\xi}^{j\Delta\xi} \frac{qJ_1(R\xi_j)R}{Df(\xi_j)m^*} J_0(\rho_w\xi_j) \times \times \sum_{i=1}^m Q_2(t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin(f(\xi_j)(t_m - \tau)) d\tau d\xi, \quad (5.83)$$

где  $\rho_w$  – координата точки, в которой регистрируется прогиб;  $\Delta t$  – шаг по времени;  $t_m = m\Delta t$ ;  $N$  – целочисленный параметр, определяемый в процессе численного эксперимента.

Укажем, что при получении формулы (5.83) на основе соотношения (5.82) приняты весьма огрубленные аппроксимационные соотношения относительно изменений подынтегральных функций как по временной, так и по пространственной переменной. Физичность численных результатов, полученных далее, подтвердила правомочность введенного аппроксимирующего выражения (5.83).

В операторном виде на основе (5.83) будем иметь

$$\mathbf{W} = \mathbf{K} \times \mathbf{Q}. \quad (5.84)$$

Используя метод регуляризации при решении уравнения (5.84), запишем выражение для нахождения неизвестной нагрузки  $Q$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{K}^T \mathbf{K} + \alpha \mathbf{C})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{W}. \quad (5.85)$$

Решим обратную задачу при условии, что прогиб плиты в точке с координатой  $\rho=0.1$  м изменяется согласно кривой, представленной на рис. 5.36.

Запишем следующие исходные данные для обратной задачи:

- модуль упругости плиты  $2.5 \cdot 10^{11}$  Па;
- коэффициент Пуассона плиты 0.24;
- модуль упругости основания  $1.8 \cdot 10^8$  Па;
- коэффициент Пуассона основания 0.2;
- толщина плиты 0.3 м;
- толщина основания 0.95 м;

На рис. 5.37 приведены результаты решения обратной задачи.

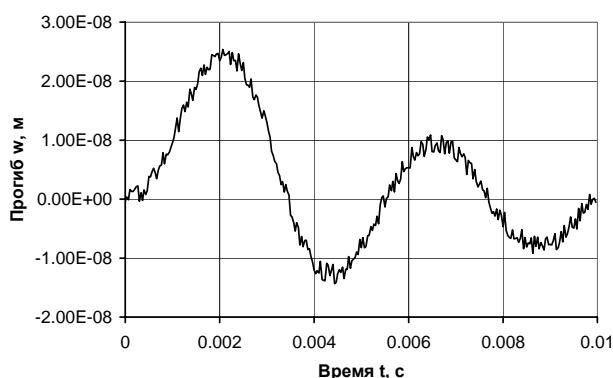


Рис. 5.36. Исходные данные для задачи идентификации

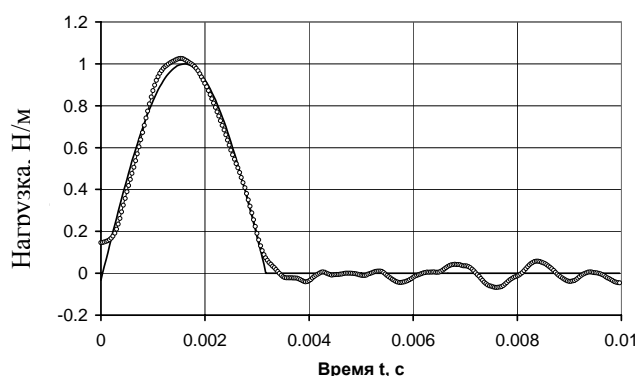


Рис. 5.37. Результаты идентификации

Сплошной линией показано принимаемое значение закона изменения нагрузки во времени при решении прямой задачи с целью получения исходных данных для задачи идентификации, а линией, состоящей из точек, показан закон изменения нагрузки во времени, полученный при решении обратной задачи. Представленные результаты свидетельствуют о высокой эффективности процедуры идентификации.



# ГЛАВА 6. ЗАДАЧА О НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

## 6.1. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим исследуемый объект (полупространство), отнесенное к декартовой системе координат. В упругом полупространстве будем условно выделять полубесконечный по координате  $z$  параллелепипед с размерами  $x_0$  и  $y_0$  соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$  (рис. 6.1). Такое выделение необходимо для того, чтобы построить решение задачи о начальном этапе кинематического нагружения трехмерного упругого полупространства.

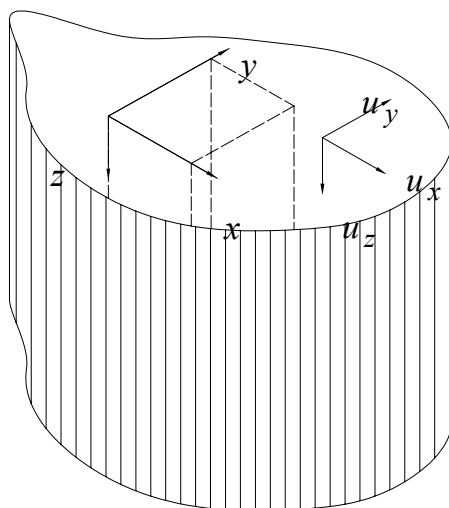


Рис. 6.1. Фрагмент упругого полупространства

Движение точки упругой изотропной среды в декартовой системе координат при отсутствии объемных сил можно описать с помощью уравнения Ляме в векторной форме [19]

$$(\lambda + \mu) \cdot \text{grad div } \vec{u} + \mu \cdot \Delta \vec{u} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (6.1)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot rot}(\vec{e}_z \cdot \psi_1) + \text{rot}(\vec{e}_z \cdot \psi_2), \quad (6.2)$$

здесь  $\vec{e}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ ,

$\phi=\phi(x,y,z,t)$ ,  $\psi_1=\psi_1(x,y,z,t)$ ,  $\psi_2=\psi_2(x,y,z,t)$  – скалярные потенциалы, которые должны удовлетворять следующим волновым уравнениям:

$$\Delta\phi-c_1^{-2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0; \Delta\psi_1-c_2^{-2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=0; \Delta\psi_2-c_2^{-2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}=0, \quad (6.3)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения продольных и поперечных волн деформаций в упругом полупространстве.

Значения этих скоростей играют существенную роль для определения пространственно-временной области, в которой справедливо будет получаемое решение.

Приведем более подробную запись составляющих уравнения (6.2), относящуюся к декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \text{grad}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z, \\ \text{rot}(\vec{e}_z \cdot \psi_2) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \psi_2 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial\psi_2}{\partial x}, \\ \text{rotrot}(\vec{e}_z \cdot \psi_1) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_x \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y\partial z} + \vec{e}_z \left( \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Подставляя соотношения (6.4) в уравнение (6.2), а затем, раскладывая вектор перемещения на компоненты, получим

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \\
u_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Запишем решения скалярных волновых уравнений (6.3) в виде разложений в двойные ряды Фурье [19]

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{nm}(z, t) u_m(x) v_n(y); \\
\psi_1(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{nm}(z, t) u_m(x) v_n(y); \\
\psi_2(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{nm}(z, t) \frac{1}{\mu_m} \frac{du_m(x)}{dx} \frac{1}{\lambda_n} \frac{dv_n(y)}{dy},
\end{aligned} \tag{6.6}$$

где  $X_{nm}(z, t)$ ,  $Y_{nm}(z, t)$ ,  $Z_{nm}(z, t)$  – неизвестные функции переменных  $z$  и  $t$ .

Для удовлетворения граничных условий

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0, u_x = 0 \text{ при } x = 0, x_0; \\
\sigma_{xy} = 0, \sigma_{yz} = 0, u_y = 0 \text{ при } y = 0, y_0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

в формулах (6.6) можно принять функции  $u_m(x)$  и  $v_n(y)$  в виде

$$u_m(x) = \cos(\mu_m x), \quad v_n(y) = \cos(\lambda_n y) \left( \mu_m = \frac{m\pi}{x_0}, \lambda_n = \frac{n\pi}{y_0} \right). \tag{6.8}$$

Форма принимаемых функций  $u_m(x)$  и  $v_n(y)$  может быть взята и другой [19], лишь бы можно было произвести эффективное разделение переменных в уравнениях (6.3)

Подставив принятые разложения функций потенциалов (6.6) в соотношения (6.5), получим

$$u_x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X_{nm}(z, t) u'_m(x) v_n(y) + Y'_{nm}(z, t) u'_m(x) v_n(y) + \dots) \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
& + Z_{nm}(z,t) \frac{1}{\mu_m \lambda_n} u'_m(x) v''_n(y) \Big); \\
u_y = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_{nm}(z,t) u_m(x) v'_n(y) + Y'_{nm}(z,t) u_m(x) v'_n(y) - \right. \\
& \left. - Z_{nm}(z,t) \frac{1}{\mu_m \lambda_n} u''_m(x) v'_n(y) \right); \\
u_z = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X'_{nm}(z,t) u_m(x) v_n(y) - Y'_{nm}(z,t) u''_m(x) v_n(y) - \right. \\
& \left. - Y_{nm}(z,t) \frac{1}{\mu_m \lambda_n} u_m(x) v''_n(y) \right).
\end{aligned}$$

В выражениях (6.9) штрихом обозначается производная по пространственной переменной соответствующей функции.

В пространстве изображений уравнения (6.3) после подстановки в них разложения (6.6) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X_{mn}^L(z,s)}{\partial z^2} - \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) X_{mn}^L(z,s) &= 0; \\
\frac{\partial^2 Y_{mn}^L(z,s)}{\partial z^2} - \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right) Y_{mn}^L(z,s) &= 0; \\
\frac{\partial^2 Z_{mn}^L(z,s)}{\partial z^2} - \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right) Z_{mn}^L(z,s) &= 0.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Их решение можно записать так:

$$\begin{aligned}
X_{mn}^L(z,s) = A_{mn}^L(s) \frac{e^{-\frac{z}{c_1} \sqrt{a_{nm}^2 + s^2}}}{\sqrt{a_{nm}^2 + s^2}}; \quad Y_{mn}^L(z,s) = B_{mn}^L(s) \frac{e^{-\frac{z}{c_2} \sqrt{b_{nm}^2 + s^2}}}{\sqrt{b_{nm}^2 + s^2}}; \\
Z_{mn}^L(z,s) = C_{mn}^L(s) \frac{e^{-\frac{z}{c_2} \sqrt{b_{nm}^2 + s^2}}}{\sqrt{b_{nm}^2 + s^2}},
\end{aligned} \tag{6.11}$$

где  $A_{mn}^L(s)$ ,  $B_{mn}^L(s)$ ,  $C_{mn}^L(s)$  – произвольные функции параметра  $s$ ;  
 $a_{nm}^2 = c_1^2(\mu_m^2 + \lambda_n^2)$ ,  $b_{nm}^2 = c_2^2(\mu_m^2 + \lambda_n^2)$ .

Формулы (6.11) были специально приняты в таком виде, чтобы в дальнейшем получить решение в форме «бегущей волны» по переменным  $z$  и  $t$ .

Следует отметить, что при выполнении обратного преобразования Лапласа использовалась следующая взаимосвязь:

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{\beta^2+s^2}}}{\sqrt{\beta^2+s^2}} \rightarrow H(t-\alpha)J_0\left(\beta\sqrt{t^2-\alpha^2}\right). \quad (6.12)$$

Используя формулу (6.12), можно записать выражения для функций  $X_{nm}(z,s)$ ,  $Y_{nm}(z,s)$ ,  $Z_{nm}(z,s)$  в пространстве оригиналов

$$\begin{aligned} X_{nm}(z,t) &= H\left(t-\frac{z}{c_1}\right) \int_0^{t-\frac{z}{c_1}} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{nm}\sqrt{(t-\tau)^2-\left(\frac{z}{c_1}\right)^2}\right) d\tau, \\ Y_{nm}(z,t) &= H\left(t-\frac{z}{c_2}\right) \int_0^{t-\frac{z}{c_2}} B_{mn}(\tau) J_0\left(b_{nm}\sqrt{(t-\tau)^2-\left(\frac{z}{c_2}\right)^2}\right) d\tau, \\ Z_{nm}(z,t) &= H\left(t-\frac{z}{c_2}\right) \int_0^{t-\frac{z}{c_2}} C_{mn}(\tau) J_0\left(b_{nm}\sqrt{(t-\tau)^2-\left(\frac{z}{c_2}\right)^2}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Пусть на границе упругого полупространства реализуются граничные условия, отвечающие заданию нестационарных перемещений в форме

$$\begin{aligned} u_x(x,y,0,t) &= f_1(x,y,t); \\ u_y(x,y,0,t) &= f_2(x,y,t); \\ u_z(x,y,0,t) &= f_3(x,y,t), \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $f_1(x,y,t)$ ,  $f_2(x,y,t)$ ,  $f_3(x,y,t)$  – известные функции.

Если предположить, что на боковых гранях условно выделяемого параллелепипеда полубесконечной высоты выполняются граничные условия (6.7), то выражения для компонент вектора перемещения можно записать в виде следующих двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z, t) &= \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu_m X_{nm}(z, t) - \mu_m Y'_{nm}(z, t) + \lambda_n Z_{nm}(z, t)) \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y); \\
 u_y(x, y, z, t) &= \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n X_{nm}(z, t) - \lambda_n Y'_{nm}(z, t) - \mu_m Z_{nm}(z, t)) \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y); \quad (6.15) \\
 u_z(x, y, z, t) &= \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X'_{nm}(z, t) + \mu_m^2 Y_{nm}(z, t) + \lambda_n^2 Y_{nm}(z, t)) \cos(\mu_m x) \cos(\lambda_n y).
 \end{aligned}$$

Согласно выражениям (6.15), следует производить также разложения граничных функций перемещений согласно следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{nm}^1 \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y); \\
 f_2(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}^2 \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y); \\
 f_3(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{nm}^3 \cos(\mu_m x) \cos(\lambda_n y).
 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Записывая уравнения (6.15) при  $z=0$  и подставляя в них заданные граничные условия (6.14), получим систему интегральных уравнений для нахождения неизвестных функций  $A_{mn}(\tau)$ ,  $B_{mn}(\tau)$ ,  $C_{mn}(\tau)$

$$\begin{aligned}
& -\mu_m X_{nm}(z,t) - \mu_m Y'_{nm}(z,t) + \lambda_n Z_{nm} = f_{nm}^1(t); \\
& -\lambda_n X_{nm}(z,t) - \lambda_n Y'_{nm}(z,t) - \mu_m Z_{nm}(z,t) = f_{nm}^2(t); \\
& X'_{nm}(z,t) + \mu_m^2 Y_{nm}(z,t) + \lambda_n^2 Y_{nm}(z,t) = f_{nm}^3(t).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Для получения развернутой формы выражений (6.17) подставим в него вытекающие из (6.13) соотношения для  $X_{nm}(z,t)$ ,  $Y'_{nm}(z,t)$ ,  $Z_{nm}(z,t)$ ,  $X'_{nm}(z,t)$ . Отметим, что штрихом далее обозначается производная по координате  $z$ . Запишем теперь формулы для производных  $X'_{nm}(z,t)$ ,  $Y'_{nm}(z,t)$  и приведем развернутую форму системы (6.17)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial X_{nm}(z,t)}{\partial z} = H\left(t - \frac{z}{c_1}\right) \times \\
& \times \left( A_{nm}\left(t - \frac{z}{c_1}\right) + \int_0^{t - \frac{z}{c_1}} A_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(a_{nm}\sqrt{(t-\tau)^2 - (z/c_1)^2}\right) z a_{nm}}{c_1^2 \sqrt{(t-\tau)^2 - (z/c_1)^2}} d\tau \right); \\
& \frac{\partial Y_{nm}(z,t)}{\partial z} = H\left(t - \frac{z}{c_2}\right) \times \\
& \times \left( B_{nm}\left(t - \frac{z}{c_2}\right) + \int_0^{t - \frac{z}{c_2}} B_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(b_{nm}\sqrt{(t-\tau)^2 - (z/c_2)^2}\right) z b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{(t-\tau)^2 - (z/c_2)^2}} d\tau \right); \\
& -\mu_m \int_0^t A_{mn}(\tau) J_0(a_{mn}(t-\tau)) d\tau - \mu_m B_{nm}(t) + \lambda_n \int_0^t C_{mn}(\tau) J_0(b_{mn}(t-\tau)) d\tau = f_{nm}^1(t); \\
& -\lambda_n \int_0^t A_{mn}(\tau) J_0(a_{mn}(t-\tau)) d\tau - \lambda_n (B_{nm}(t)) - \\
& -\mu_m \int_0^t C_{mn}(\tau) J_0(b_{mn}(t-\tau)) d\tau = f_{nm}^2(t); \\
& A_{nm}(t) + (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \int_0^t B_{mn}(\tau) J_0(b_{mn}(t-\tau)) d\tau = f_{nm}^3(t).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Выражения (6.19) представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерра функций  $A_{mn}(t)$ ,  $B_{mn}(t)$ ,  $C_{mn}(t)$  в предположении, что правые части этих уравнений заданы, т.е. функции  $f_{nm}^1(t)$ ,  $f_{nm}^2(t)$ ,  $f_{nm}^3(t)$  известны. В этом случае имеет место решение прямой задачи теории упругости при заданных на границе перемещениях, которые были разложены по собственным функциям, обеспечивающим удовлетворение принимаемых граничных условий на «боковых гранях» введенного параллелепипеда.

Будем решать систему интегральных уравнений с использованием численного метода, состоящего в аппроксимации интегралов, входящих в (6.19) конечными суммами. Если условно разделить временной интервал исследуемого процесса  $0...T$  на  $M$  шагов по времени, то можно переписать систему (6.19) с использованием дискретных величин

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu_m \sum_{i=1}^{m_t} A_{mn}^i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} J_0(a_{mn}(m_t\Delta t-\tau))d\tau - \mu_m B_{nm}^{m_t} + \\ + \lambda_n \sum_{j=1}^{m_t} C_{mn}^j \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} J_0(b_{mn}(m_t\Delta t-\tau))d\tau = f_{nm}^1(m_t\Delta t); \\ -\lambda_n \sum_{i=1}^{m_t} A_{mn}^i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} J_0(a_{mn}(m_t\Delta t-\tau))d\tau - \lambda_n B_{nm}^{m_t} - \\ - \mu_m \sum_{k=1}^{m_t} C_{mn}^k \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} J_0(b_{mn}(m_t\Delta t-\tau))d\tau = f_{nm}^2(m_t\Delta t); \\ A_{nm}^{m_t} + (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \sum_{j=1}^{m_t} B_{mn}^j \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} J_0(b_{mn}(m_t\Delta t-\tau))d\tau = f_{nm}^3(m_t\Delta t). \end{array} \right. \quad (6.20)$$

Представим соотношения (6.20) в матричном виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{K}_{nm}^{1,1} \mathbf{A}_{mn} - \mathbf{K}_{nm}^{1,2} \mathbf{B}_{nm} + \mathbf{K}_{nm}^{1,3} \mathbf{C}_{nm} = \mathbf{f}_{nm}^1; \\ -\mathbf{K}_{nm}^{2,1} \mathbf{A}_{mn} - \mathbf{K}_{nm}^{2,2} \mathbf{B}_{nm} - \mathbf{K}_{nm}^{2,3} \mathbf{C}_{nm} = \mathbf{f}_{nm}^2; \\ \mathbf{E} \mathbf{A}_{mn} + \mathbf{K}_{nm}^{3,2} \mathbf{B}_{nm} = \mathbf{f}_{nm}^3. \end{array} \right. \quad (6.21)$$



В (6.21) под введенными величинами понимаются уже матрицы и векторы, отвечающие изменению рассматриваемых функций во времени.

Запишем решение этой системы уравнений с помощью метода Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\mathbf{K}_{nm}^{1,1} & -\mathbf{K}_{nm}^{1,2} & \mathbf{K}_{nm}^{1,3} \\ -\mathbf{K}_{nm}^{2,1} & -\mathbf{K}_{nm}^{2,2} & -\mathbf{K}_{nm}^{2,3} \\ \mathbf{E} & \mathbf{K}_{nm}^{3,2} & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_{nm}^1 & -\mathbf{K}_{nm}^{1,2} & \mathbf{K}_{nm}^{1,3} \\ \mathbf{f}_{nm}^2 & -\mathbf{K}_{nm}^{2,2} & -\mathbf{K}_{nm}^{2,3} \\ \mathbf{f}_{nm}^3 & \mathbf{K}_{nm}^{3,2} & 0 \end{vmatrix},$$

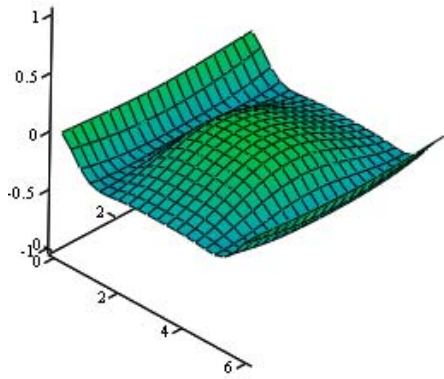
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\mathbf{K}_{nm}^{1,1} & \mathbf{f}_{nm}^1 & \mathbf{K}_{nm}^{1,3} \\ -\mathbf{K}_{nm}^{2,1} & \mathbf{f}_{nm}^2 & -\mathbf{K}_{nm}^{2,3} \\ \mathbf{E} & \mathbf{f}_{nm}^3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -\mathbf{K}_{nm}^{1,1} & -\mathbf{K}_{nm}^{1,2} & \mathbf{f}_{nm}^1 \\ -\mathbf{K}_{nm}^{2,1} & -\mathbf{K}_{nm}^{2,2} & \mathbf{f}_{nm}^2 \\ \mathbf{E} & \mathbf{K}_{nm}^{3,2} & \mathbf{f}_{nm}^3 \end{vmatrix}, \quad (6.22)$$

$$\mathbf{A}_{nm} = \Delta_1 \Delta^{-1}, \quad \mathbf{B}_{nm} = \Delta_2 \Delta^{-1}, \quad \mathbf{C}_{nm} = \Delta_3 \Delta^{-1}.$$

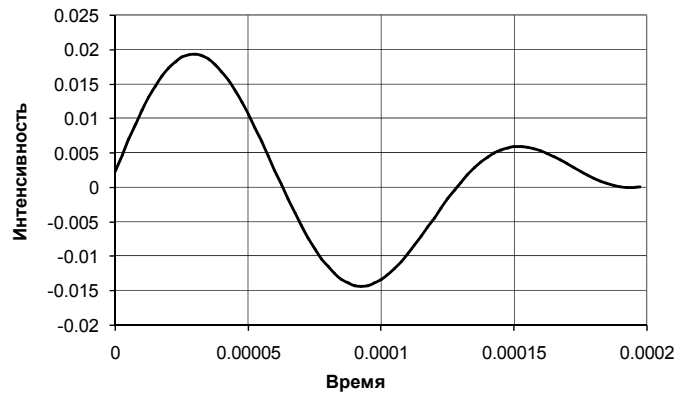
Отметим, что пара индексов  $n, m$  определяет номер коэффициента в соответствующих двойных рядах Фурье. Решение системы (6.21) получается в виде набора временных зависимостей  $A_{nm}(t)$ ,  $B_{nm}(t)$ ,  $C_{nm}(t)$  с учетом дискретного изменения времени. Подставив найденные коэффициенты в формулы (6.15) можно рассчитать перемещения на любой глубине полупространства.

## 6.2. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ

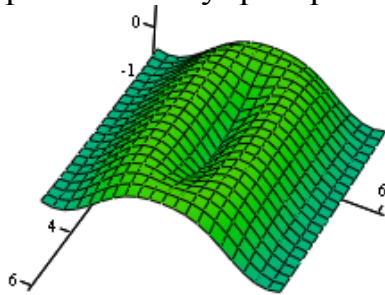
Выполним расчет перемещений упругого полупространства на основании полученных в первом подразделе зависимостей. Пусть заданы функции распределения перемещений по поверхности полупространства (граничные условия). Их изменения во времени и по пространственным координатам показаны на рис. 6.2.



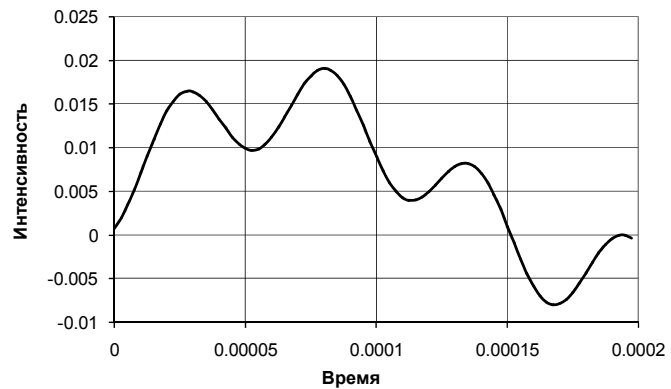
а) распределение  $u_x$  по поверхности полупространства



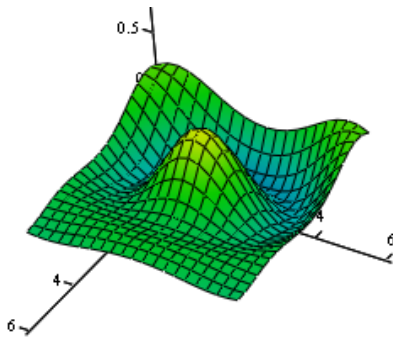
б) изменение перемещений вдоль оси  $x$  во времени



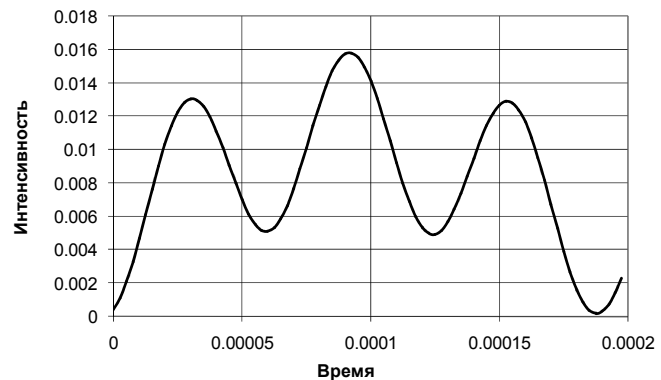
в) распределение  $u_y$  по поверхности полупространства



г) изменение перемещений вдоль оси  $y$  во времени



д) распределение  $u_z$  по поверхности полупространства



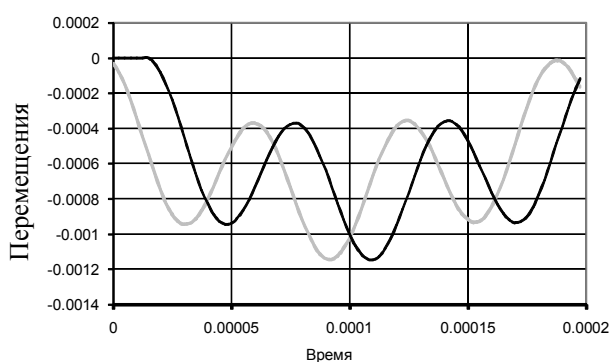
е) изменение перемещений вдоль оси  $z$  во времени

Рис. 6.2. Исходные данные для прямой задачи

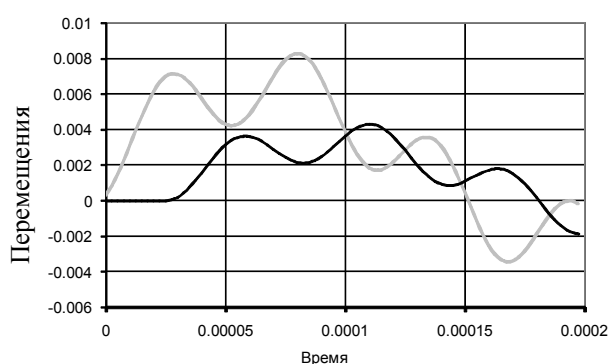
Модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала полупространства  $E=2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=7850$  кг/м<sup>3</sup> соответственно. Рассчитаем изменение перемещений по переменным  $x, y, t$  на глубине полупространства  $z=0.2$  м.

При численных расчетах учитывались первые десять членов в каждом из направлений в соответствующих двойных рядах Фурье. Интервал моделирования  $T=0.0002$  с, разбивался на 80 шагов по времени. Результаты решения прямой задачи показаны в виде трехмерных эпюр, иллюстрирующих перемещения вдоль каждой из осей.

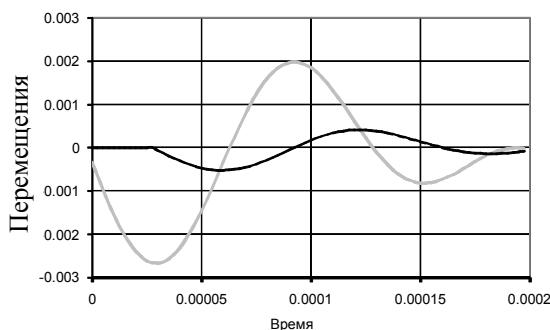
На рис. 6.3 тонкой черной кривой показано перемещения на глубине упругого полупространства в точке с координатами (3.9; 4.5), а серой линией для сопоставления – перемещение точки на поверхности упругого полупространства, имеющей те же абсциссу и ординату.



а) перемещение вдоль оси  $z$



б) перемещение вдоль оси  $y$



в) перемещение вдоль оси  $x$

Рис. 6.3. Зависимости перемещений в точке от времени

На рис. 6.4 *а,б* и *в* отображены эпюры  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  (*а, б, в* соответственно), соответствующие моменту времени  $6.25 \cdot 10^{-5}$  с, *г,д,е* – моменту времени  $8.75 \cdot 10^{-5}$  с, *ж,з,и* –  $1.125 \cdot 10^{-4}$  с, а *к,л,м* –  $1.5 \cdot 10^{-4}$  с. Показаны также изменения перемещений в точке на глубине упругого полупространства во времени (принимается точка в центре рассматриваемой области, составляющей  $0.3 \times 0.3$  м)

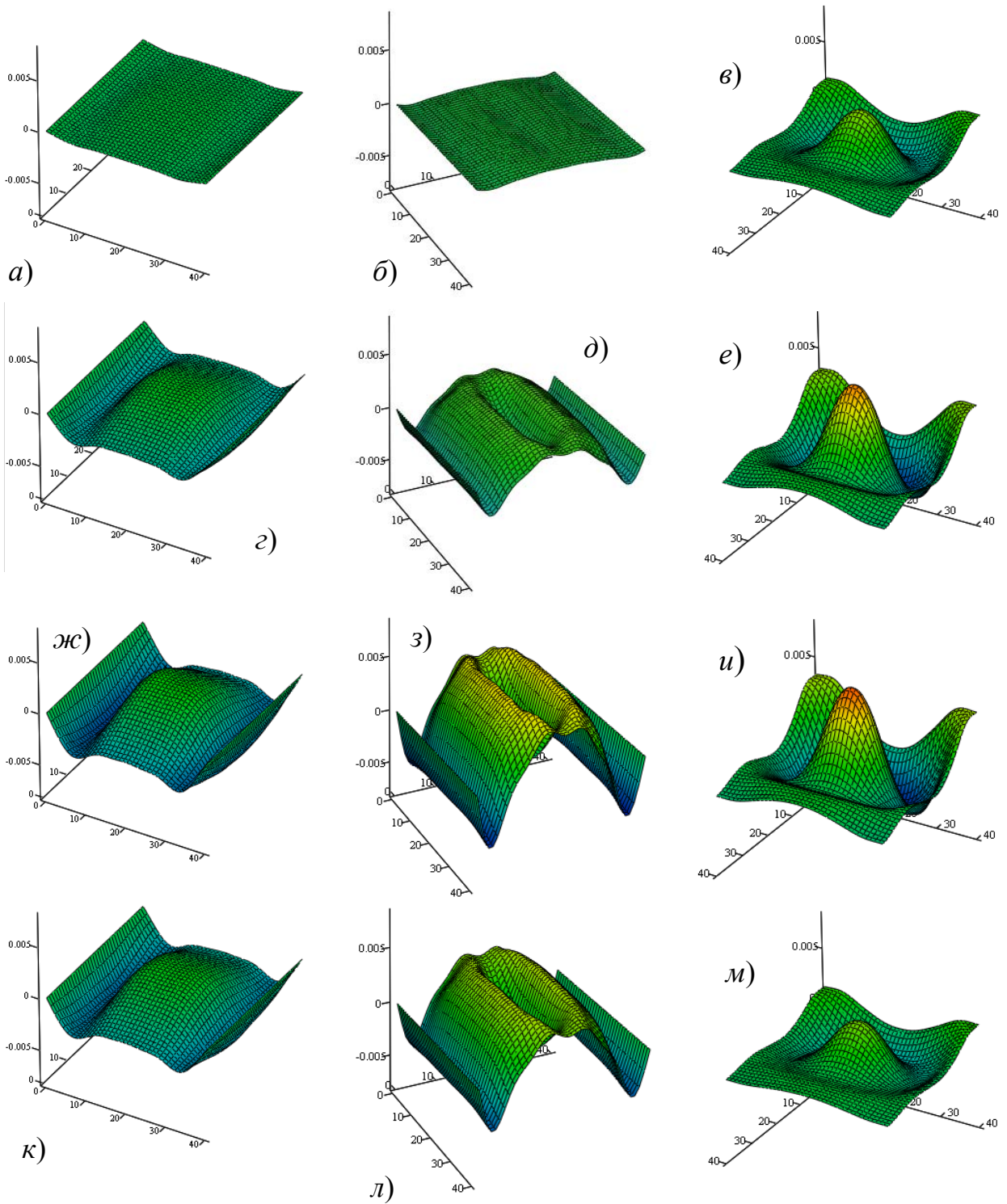


Рис. 6.4. Результаты решения прямой задачи

Представленные результаты демонстрируют решение трехмерной нестационарной задачи теории упругости, которое является верным лишь для начального этапа деформирования полупространства.

### 6.3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Приведенную в предыдущем подразделе методику можно также использовать для решения обратной задачи, когда перемещения задаются на некоторой глубине упругого полупространства вдоль некоторой плоскости  $z \neq 0$ . При этом необходимо идентифицировать граничные перемещения или же перемещения на плоскости с иной координатой  $z$ . Процедура решения этой задачи является по существу точной.

Имея выражения (6.15) и подставив в них выражения заданных перемещений на некоторой плоскости  $z \neq 0$  в виде (6.16), а также функции  $X_{nm}(z, t)$ ,  $Y_{nm}(z, t)$ ,  $Z_{nm}(z, t)$  в виде (6.13), получим в результате систему интегральных уравнений относительно неизвестных  $A_{nm}(t)$ ,  $B_{nm}(t)$ ,  $C_{nm}(t)$

$$\begin{aligned}
 & -\mu_m H\left(t - \frac{z_0}{c_1}\right) \int_0^{t - \frac{z_0}{c_1}} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_1}\right)^2}\right) d\tau - \\
 & -\mu_m H\left(t - \frac{z_0}{c_2}\right) \left[ B_{nm}\left(t - \frac{z_0}{c_2}\right) + \int_0^{t - \frac{z_0}{c_2}} B_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(b_{nm} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) z_0 b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}} d\tau \right] + \quad (6.23) \\
 & + \lambda_n H\left(t - \frac{z_0}{c_2}\right) \int_0^{t - \frac{z_0}{c_2}} C_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) d\tau = f_{nm}^1(t); \\
 & -\lambda_n H\left(t - \frac{z_0}{c_1}\right) \int_0^{t - \frac{z_0}{c_1}} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_1}\right)^2}\right) d\tau - \\
 & -\lambda_n H\left(t - \frac{z_0}{c_2}\right) \left[ B_{nm}\left(t - \frac{z_0}{c_2}\right) + \int_0^{t - \frac{z_0}{c_2}} B_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(b_{nm} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) z_0 b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}} d\tau \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_m H\left(t - \frac{z_0}{c_2}\right) \int_0^{t - \frac{z_0}{c_2}} C_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) d\tau = f_{nm}^2(t); \\
& H\left(t - \frac{z_0}{c_1}\right) \left( A_{nm}\left(t - \frac{z_0}{c_1}\right) + \int_0^{t - \frac{z_0}{c_1}} A_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(a_{nm} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_1}\right)^2}\right) z_0 a_{nm}}{c_1^2 \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_1}\right)^2}} d\tau \right) + \\
& + (\mu_m^2 + \lambda_n^2) H\left(t - \frac{z_0}{c_2}\right) \int_0^{t - \frac{z_0}{c_2}} B_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) d\tau = f_{nm}^3(t).
\end{aligned}$$

Выполним замену переменных в формулах (6.23), подставив  $t_1 = t - z_0/c_1$ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
& -\mu_m \int_0^{t_1} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{mn} \sqrt{\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_1}\right)^2}\right) d\tau - \\
& -\mu_m H\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}\right) \left( B_{nm}\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}\right) + \int_0^{t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}} B_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(b_{nm} \sqrt{\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) z_0 b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}} d\tau \right) + \\
& + \lambda_n H\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}\right) \int_0^{t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}} C_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) d\tau = f_{nm}^1\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1}\right); \\
& -\lambda_n \int_0^{t_1} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{mn} \sqrt{\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_1}\right)^2}\right) d\tau - \\
& -\lambda_n H\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}\right) \left( B_{nm}\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}\right) + \int_0^{t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}} B_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(b_{nm} \sqrt{\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) z_0 b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}} d\tau \right) - \\
& -\mu_m H\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}\right) \int_0^{t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}} C_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) d\tau = f_{nm}^2\left(t_1 + \frac{z_0}{c_1}\right);
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
& A_{nm}(t_1) + \int_0^{t_1} A_{nm}(\tau) \frac{J_1 \left( a_{nm} \sqrt{(t_1 + z_0/c_1 - \tau)^2 - (z_0/c_1)^2} \right) z_0 a_{nm}}{c_1^2 \sqrt{(t_1 + z_0/c_1 - \tau)^2 - (z_0/c_1)^2}} d\tau + \\
& + \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 \right) H \left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2} \right) \int_0^{t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \frac{z_0}{c_2}} B_{mn}(\tau) J_0 \left( b_{mn} \sqrt{\left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau \right)^2 - \left( \frac{z_0}{c_2} \right)^2} \right) d\tau = \\
& = f_{nm}^3 \left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} \right).
\end{aligned}$$

Анализируя уравнения (6.24), можно заметить, что на интервале времени  $0 < t_1 < \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1} = z_c$ , (вследствие того, что  $c_2 < c_1$ ) они упрощаются, и систему (6.24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& -\mu_m \int_0^{t_1} A_{mn}(\tau) J_0 \left( a_{mn} \sqrt{\left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau \right)^2 - \left( \frac{z_0}{c_1} \right)^2} \right) d\tau = f_{nm}^1 \left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} \right); \\
& -\lambda_n \int_0^{t_1} A_{mn}(\tau) J_0 \left( a_{mn} \sqrt{\left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau \right)^2 - \left( \frac{z_0}{c_1} \right)^2} \right) d\tau = f_{nm}^2 \left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} \right); \\
& A_{nm}(t_1) + \int_0^{t_1} A_{nm}(\tau) \frac{J_1 \left( a_{nm} \sqrt{\left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau \right)^2 - \left( \frac{z_0}{c_1} \right)^2} \right) z_0 a_{nm}}{c_1^2 \sqrt{\left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} - \tau \right)^2 - \left( \frac{z_0}{c_1} \right)^2}} d\tau = f_{nm}^3 \left( t_1 + \frac{z_0}{c_1} \right).
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Так как в начале процесса исследования на интервале времени  $0 < t_1 < \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1}$  перемещения  $u_x$  и  $u_y$  на глубине еще отсутствуют, то первые два уравнения из системы (6.25) выпадают и остается лишь уравнение для перемещений  $u_z$ , из которого и можно найти  $A_{nm}(t)$ . Перепишем это уравнение в матричном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{nm} \mathbf{E} + \mathbf{A}_{nm} \cdot \mathbf{K}_{nm}^{3,1} &= \mathbf{f}_{nm}^3; \\ \mathbf{A}_{nm} &= \mathbf{f}_{nm}^3 \cdot \left( \mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{3,1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Найденные на основе соотношений (6.26) значения  $A_{nm}(t)$  описывают поведение этой функции только на интервале  $0 < t_1 < z_c$ . Для того чтобы определить их на всем временном интервале, необходимо решить систему (6.24). Перепишем уравнения (6.24) таким образом, чтобы была возможность вычислить входящие в них коэффициенты  $A_{nm}(t)$ ,  $B_{nm}(t)$ ,  $C_{nm}(t)$  последовательно для возрастающих времен.

Значения  $A_{nm}(t)$  на интервале  $0 < t_1 < z_c$  были рассчитаны ранее. Поэтому значения интегралов, содержащих данные функции и имеющих пределы интегрирования от 0 до  $z_c$ , уже известны, и их можно перенести в правую часть соотношений, обозначив при этом:

$$\begin{aligned} \mu_m \int_0^{z_c} A_{mn}(\tau) J_0 \left( a_{mn} \sqrt{(t_1 + z_0/c_1 - \tau)^2 - (z_0/c_1)^2} \right) d\tau &= \mu_m A_1^{z_c}; \\ \lambda_n \int_0^{z_c} A_{mn}(\tau) J_0 \left( a_{mn} \sqrt{(t_1 + z_0/c_1 - \tau)^2 - (z_0/c_1)^2} \right) d\tau &= \lambda_n A_1^{z_c}; \\ \int_0^{z_c} A_{nm}(\tau) \frac{J_1 \left( a_{nm} \sqrt{(t_1 + z_0/c_1 - \tau)^2 - (z_0/c_1)^2} \right) z_0 a_{nm}}{c_1^2 \sqrt{(t_1 + z_0/c_1 - \tau)^2 - (z_0/c_1)^2}} d\tau &= A_2^{z_c}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

В матричном виде систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} -\mathbf{A}_{mn} \mathbf{K}_{nm}^{1,1} - \mathbf{B}_{nm} \left( \mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{1,2} \right) + \mathbf{C}_{nm} \mathbf{K}_{nm}^{1,3} = \mathbf{f}_{nm}^1 + \mu_m \mathbf{A}_1^{z_c}; \\ -\mathbf{A}_{mn} \mathbf{K}_{nm}^{2,1} - \mathbf{B}_{nm} \left( \mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{2,2} \right) - \mathbf{C}_{nm} \mathbf{K}_{nm}^{2,3} = \mathbf{f}_{nm}^2 + \lambda_n \mathbf{A}_1^{z_c}; \\ \mathbf{A}_{mn} \left( \mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{3,1} \right) + \mathbf{B}_{nm} \mathbf{K}_{nm}^{3,2} = \mathbf{f}_{nm}^3 - \mathbf{A}_2^{z_c}. \end{cases} \quad (6.28)$$



Решение системы будем находить методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\mathbf{K}_{nm}^{1,1} & -(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{1,2}) & \mathbf{K}_{nm}^{1,3} \\ -\mathbf{K}_{nm}^{2,1} & -(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{2,2}) & -\mathbf{K}_{nm}^{2,3} \\ (\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{3,1}) & \mathbf{K}_{nm}^{3,2} & 0 \end{vmatrix}, \quad (6.29)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{f}_{nm}^1 + \mu_m \mathbf{A}_1^{z_c} & -(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{1,2}) & \mathbf{K}_{nm}^{1,3} \\ \mathbf{f}_{nm}^2 + \lambda_n \mathbf{A}_1^{z_c} & -(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{2,2}) & -\mathbf{K}_{nm}^{2,3} \\ \mathbf{f}_{nm}^3 - \mathbf{A}_2^{z_c} & \mathbf{K}_{nm}^{3,2} & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}_{nm} = \Delta_1 \Delta^{-1}.$$

Для определения функций  $B_{nm}(t)$ ,  $C_{nm}(t)$  выполним вторую замену переменной по времени в выражении (6.23), а именно  $t_2 = t - z_0/c_2$ .

$$-\mu_m H\left(t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1}\right) \int_0^{t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1}} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{mn} \sqrt{\left(t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_1}\right)^2}\right) d\tau -$$

$$-\mu_m \left( B_{nm}(t_2) + \int_0^{t_2} B_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(b_{nm} \sqrt{\left(t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) z_0 b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{\left(t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}} d\tau \right) +$$

$$+\lambda_n \int_0^{t_2} C_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{\left(t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_2}\right)^2}\right) d\tau = f_{nm}^1\left(t_2 + \frac{z_0}{c_2}\right);$$

$$-\lambda_n H\left(t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1}\right) \int_0^{t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1}} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{mn} \sqrt{\left(t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \tau\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c_1}\right)^2}\right) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_n \left( B_{nm}(t_2) + \int_0^{t_2} B_{nm}(\tau) \frac{J_1 \left( b_{nm} \sqrt{(t_2 + z_0/c_2 - \tau)^2 - (z_0/c_2)^2} \right) z_0 b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{(t_2 + z_0/c_2 - \tau)^2 - (z_0/c_2)^2}} d\tau \right) \\
& - \mu_m \int_0^{t_2} C_{mn}(\tau) J_0 \left( b_{mn} \sqrt{(t_2 + z_0/c_2 - \tau)^2 - (z_0/c_2)^2} \right) d\tau = f_{nm}^2(t_2 + z_0/c_2); \\
& H \left( t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1} \right) \left( A_{nm} \left( t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1} \right) + \int_0^{t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \frac{z_0}{c_1}} A_{nm}(\tau) \frac{J_1 \left( a_{nm} \sqrt{\left( t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \tau \right)^2 - \left( \frac{z_0}{c_1} \right)^2} \right) z_0 a_{nm}}{c_1^2 \sqrt{\left( t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \tau \right)^2 - \left( \frac{z_0}{c_1} \right)^2}} d\tau \right) + \\
& + (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \int_0^{t_2} B_{mn}(\tau) J_0 \left( b_{mn} \sqrt{\left( t_2 + \frac{z_0}{c_2} - \tau \right)^2 - \left( \frac{z_0}{c_2} \right)^2} \right) d\tau = f_{nm}^3 \left( t_2 + \frac{z_0}{c_2} \right).
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, разбиваем интегралы, содержащие  $A_{nm}(t)$ , на два подинтервала и переносим интеграл с пределами от 0 до  $z_c$  в правую часть уравнений. В результате получим систему, которая в операторном виде аналогична (6.28). Вид этой системы следующий:

$$\begin{cases}
-\mathbf{A}_{mn} \mathbf{K}_{nm}^{1,1} - \mathbf{B}_{nm} (\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{1,2}) + \mathbf{C}_{nm} \mathbf{K}_{nm}^{1,3} = \mathbf{f}_{nm}^1 + \mu_m \mathbf{A}_1^{z_c}; \\
-\mathbf{A}_{mn} \mathbf{K}_{nm}^{2,1} - \mathbf{B}_{nm} (\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{2,2}) - \mathbf{C}_{nm} \mathbf{K}_{nm}^{2,3} = \mathbf{f}_{nm}^2 + \lambda_n \mathbf{A}_1^{z_c}; \\
\mathbf{A}_{mn} (\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{3,1}) + \mathbf{B}_{nm} \mathbf{K}_{nm}^{3,2} = \mathbf{f}_{nm}^3 - \mathbf{A}_2^{z_c}.
\end{cases} \quad (6.31)$$

Ее решение находится аналогично только что указанному, а именно

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\mathbf{K}_{nm}^{1,1} & -(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{1,2}) & \mathbf{K}_{nm}^{1,3} \\ -\mathbf{K}_{nm}^{2,1} & -(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{2,2}) & -\mathbf{K}_{nm}^{2,3} \\ (\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{3,1}) & \mathbf{K}_{nm}^{3,2} & 0 \end{vmatrix}, \quad (6.32)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\mathbf{K}_{nm}^{1,1} & \mathbf{f}_{nm}^1 + \mu_m \mathbf{A}_1^{z_c} & \mathbf{K}_{nm}^{1,3} \\ -\mathbf{K}_{nm}^{2,1} & \mathbf{B}_{nm}^2 + \lambda_n \mathbf{A}_1^{z_c} & -\mathbf{K}_{nm}^{2,3} \\ (\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{3,1}) & \mathbf{f}_{nm}^3 - \mathbf{A}_2^{z_c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -\mathbf{K}_{nm}^{1,1} & -(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{1,2}) & \mathbf{f}_{nm}^1 + \mu_m \mathbf{A}_1^{z_c} \\ -\mathbf{K}_{nm}^{2,1} & -(\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{2,2}) & \mathbf{f}_{nm}^2 + \lambda_n \mathbf{A}_1^{z_c} \\ (\mathbf{E} + \mathbf{K}_{nm}^{3,1}) & \mathbf{K}_{nm}^{3,2} & \mathbf{f}_{nm}^3 - \mathbf{A}_2^{z_c} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{nm} = \Delta_2 \Delta^{-1}, \quad \mathbf{C}_{nm} = \Delta_3 \Delta^{-1}.$$

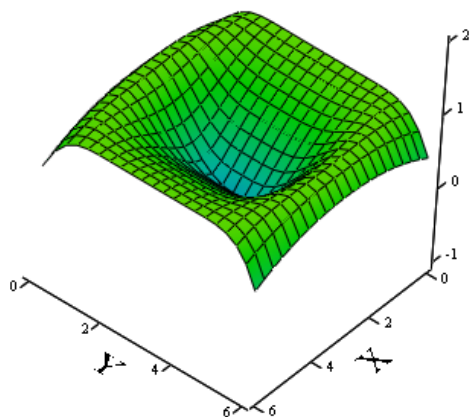
Таким образом, отыскав значения функций  $A_{nm}(t)$ ,  $B_{nm}(t)$ ,  $C_{nm}(t)$ , можно рассчитывать перемещения упругого полупространства на любой глубине, в частности, можно рассчитать и граничные перемещения, т.е. выполнить процедуру идентификации граничных кинематических воздействий в предположении, что являются известными перемещения вдоль некоторой плоскости, которая не совпадает с граничной.

#### 6.4. ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ГРАНИЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

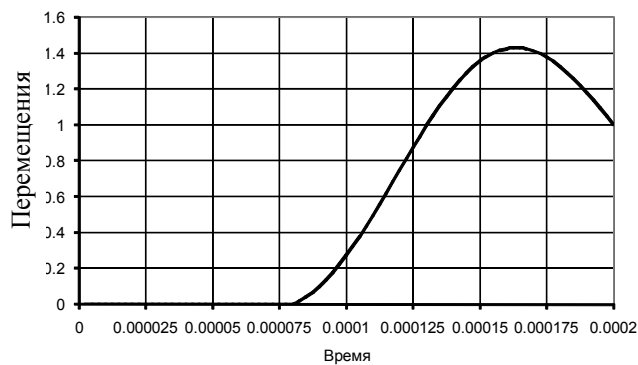
Выполним расчет граничных перемещений по известным законам изменения перемещений упругого полупространства на глубине  $z = 0.3$  м. Их распределение по плоскости не совпадающей с поверхностью упругого полупространства, а также законы изменения перемещений во времени приведены на рис. 6.5.

Результатом решения обратной задачи является набор эпюр, описывающий поведение граничных перемещений (рис. 6.6). На рис. 6.6 *а, б* и *в* отображены эпюры  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  (*а, б, в* соответственно) отвечающие моменту времени  $5 \cdot 10^{-6}$  с; *г, д, ж* – моменту времени  $2.5 \cdot 10^{-5}$  с; *з, з, и* –  $1.5 \cdot 10^{-4}$  с; *а, к, л, м* –  $2.5 \cdot 10^{-4}$  с.

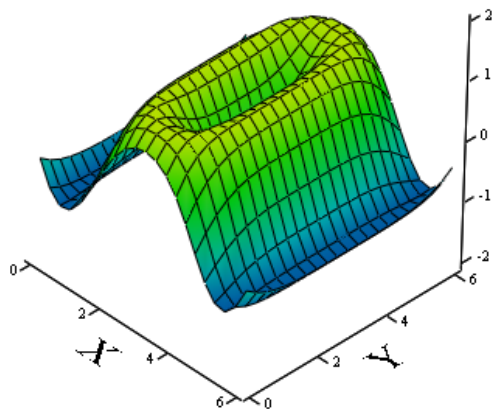
На основе изложенного подхода можно рассмотреть и другие задачи (прямые и обратные) в декартовой системе координат.



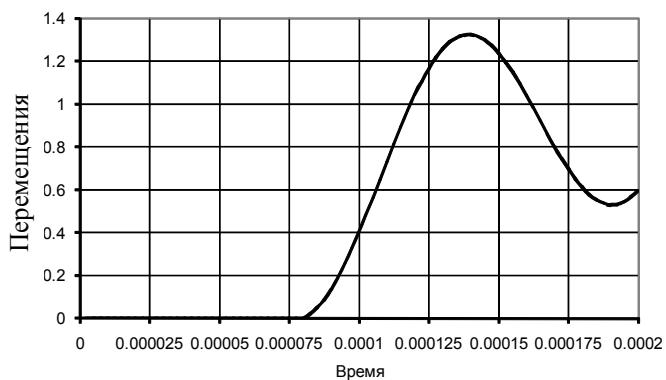
а) распределение перемещений  $u_x$  при  $z = 0.3$  м



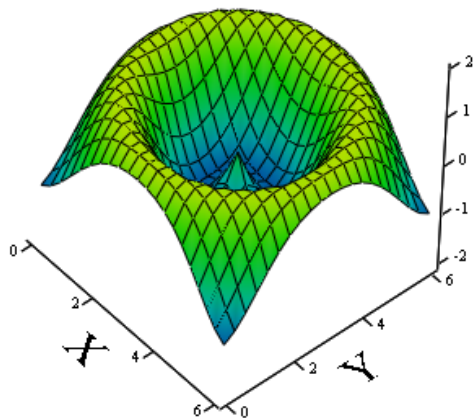
б) изменение перемещений вдоль оси  $x$  во времени



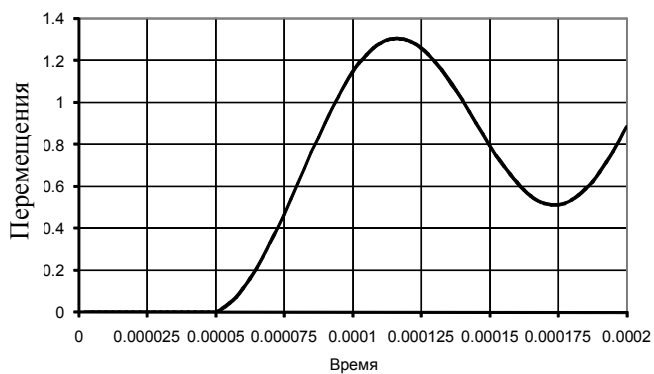
в) распределение перемещений  $u_y$  при  $z = 0.3$  м



г) изменение перемещений вдоль оси  $y$  во времени



д) распределение перемещений  $u_z$  при  $z = 0.3$  м



е) изменение перемещений вдоль оси  $z$  во времени

Рис. 6.5. Исходные данные для обратной задачи

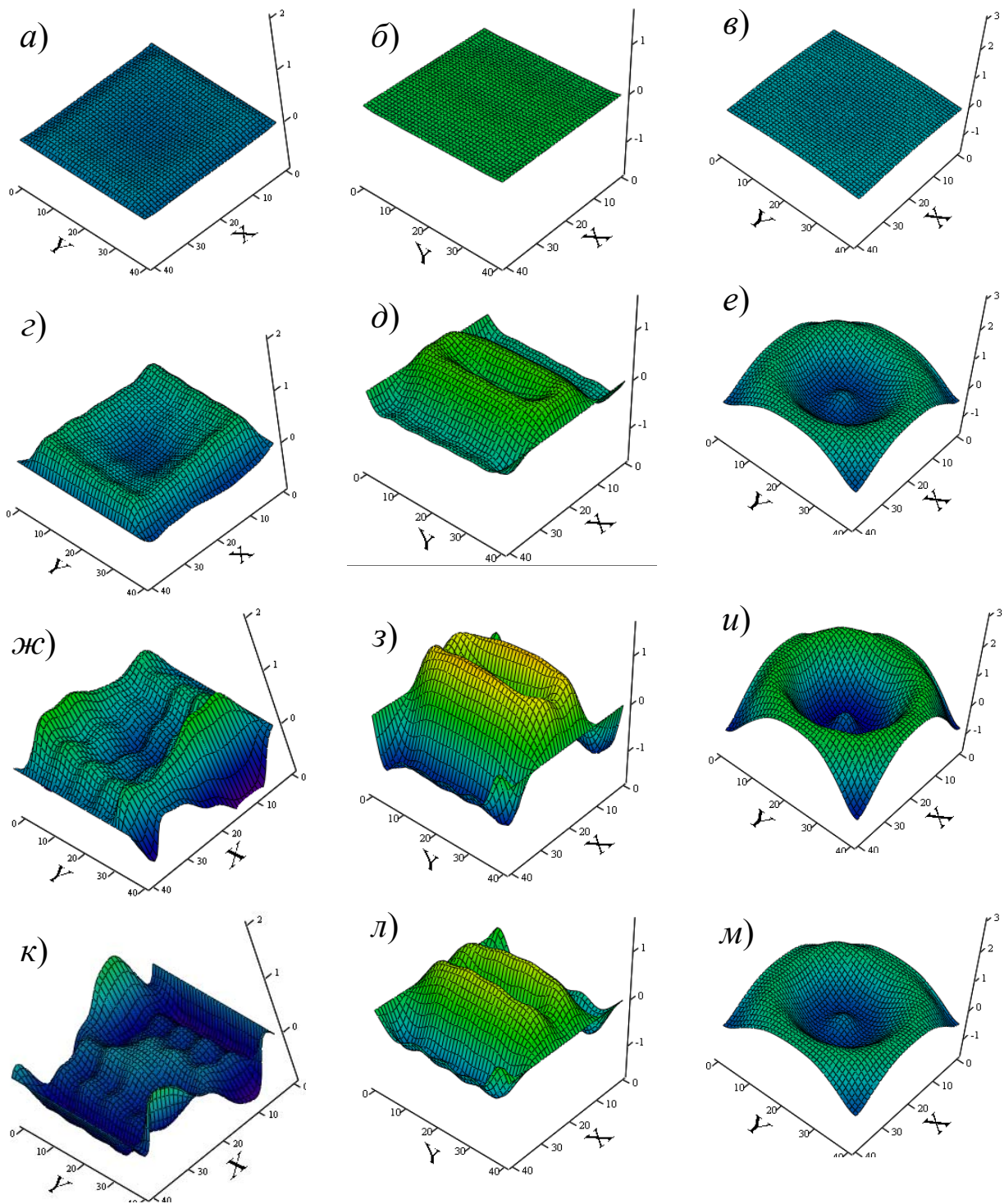


Рис. 6.6. Результат идентификации граничных перемещений

## ЛИТЕРАТУРА

1. Апарцин А.С. О численном решении систем интегральных уравнений Вольтерра I-го рода методом квадратур // Методы оптимизации и исследование операций. – 1976. – Вып. 4. – С. 79 – 88.
2. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльцгольц Л.Э. Функции комплексного переменного, операционное исчисление, теория устойчивости. – М.: Наука, 1965. – 391 с.
3. Василенко Н.В. Теория колебаний: Уч. пособие. – К.: Вища школа, 1992. – 430 с.
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
5. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 492 с.
6. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания механических систем. – К.: Наук. думка, 1977. – 340 с.
7. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
8. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. - 272 с.
9. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с.
10. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
11. Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 11. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
12. Колодяжный А.В., Севрюков В.И., Ударные и импульсные воздействия на конструкции и материалы. – К.: Наук. думка, 1986. – 168 с.
13. Мироненко М.І. Інтегральні перетворення в теорії пружності: Навч. посіб. – Харків: Вид-во ХДТУБА, 2003. – 440 с.
14. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. - М.: Наука, 1960. – 186 с.

15. Снедон И. Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – 667 с.
16. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1967. – 444 с.
17. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 288 с.
18. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
19. Фридман Л.И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // Прикл. мех. – 1987. – **23**, №12. – С. 102 – 108.
20. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/Nastran for Windows – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с.
21. Янютін Є.Г., Гнатенко Г.О., Гришакін В.Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // машинознавство. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
22. Янютин Е.Г., Янчевский И.В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ, 2001. – 184 с.
23. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. - Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2004. – 392 с.

# СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....   | 3  |
| ГЛАВА 1. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ<br>МЕМБРАНЫ-ПОЛОСЫ И ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ   |    |
| 1.1. Идентификация сосредоточенного нестационарного<br>воздействия на мембрану-полосу .....                    | 5  |
| 1.2. Идентификация сосредоточенного нестационарного<br>воздействия на пластину-полосу .....                    | 18 |
| ГЛАВА 2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ<br>ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК И СИСТЕМ БАЛОК                                |    |
| 2.1. Решение прямой задачи о воздействии на балку<br>импульсных сосредоточенных нагрузок .....                 | 28 |
| 2.2. Идентификация внешней нестационарной нагрузки .....   | 37 |
| 2.3. Сопоставление результатов идентификации<br>с результатами исследований других авторов .....               | 45 |
| 2.4. Прямая задача о вынужденных колебаниях<br>двух скрепленных балок .....                                    | 49 |
| 2.5. Идентификация внешних нестационарных нагрузок,<br>воздействующих на систему балок (обратная задача) ..... | 62 |
| 2.6. Управление нестационарными колебаниями системы балок....  | 68 |
| ГЛАВА 3. ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ<br>НА ОДНОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ С МАССАМИ<br>И МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ     |    |
| 3.1. Деформирование балок с сосредоточенными массами.....  | 73 |
| 3.2. Идентификация нестационарных нагрузок, воздействующих<br>на балки с сосредоточенными массами.....         | 78 |
| 3.3. Колебания многопролетных балок при действии<br>подвижной силы .....                                       | 83 |
| 3.4. Идентификация нестационарных нагрузок,<br>воздействующих на многопролетные балки.....                     | 89 |



## ГЛАВА 4. ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГО-ВЯЗКИЕ БАЛКИ И ПЛАСТИНЫ

|   |     |
|---|-----|
| 4.1. Колебания вязкоупругих балок теории Кирхгофа-Лява при действии подвижной силы .....                                      | 96  |
| 4.2. Идентификация действующей на вязкоупругую балку типа Кирхгофа-Лява подвижной силы .....                                  | 99  |
| 4.3. Решение прямой задачи о колебании вязкоупругой балки модели Тимошенко при действии подвижной силы .....                  | 100 |
| 4.4. Идентификация действующей на вязкоупругую балку типа Тимошенко нестационарной подвижной силы .....                       | 105 |
| 4.5. Решение прямой задачи о колебании пластины при действии подвижной силы с учетом вязкоупругого поведения материала .....  | 106 |
| 4.6. Численные результаты, полученные при решении прямой задачи о колебаниях вязкоупругой пластины теории Кирхгофа-Лява ..... | 109 |
| 4.7. Идентификация действующей на вязко-упругую пластину типа Кирхгофа-Лява нестационарной подвижной силы .....               | 111 |

## ГЛАВА 5. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

|   |     |
|---|-----|
| 5.1. Решение задачи о вынужденных колебаниях плиты на упругом однослойном основании .....                             | 112 |
| 5.2. Задачи о вынужденных колебаниях плиты на упругом основании для случая подвижной нагрузки .....                   | 118 |
| 5.3. Задача управления колебаниями прямоугольной плиты на инерционном основании .....                                 | 122 |
| 5.4. Решение прямых и обратных задач об импульсном деформировании круглой плиты .....                                 | 127 |
| 5.5. Обратная задача по идентификации внешнего динамического воздействия в виде сосредоточенной нагрузки .....        | 133 |
| 5.6. Идентификация пространственно-временного распределения нагрузки, действующей на круглую плиту .....              | 135 |
| 5.7. Прямые и обратные задачи при осесимметричных колебаниях бесконечной плиты на упругом инерционном основании ..... | 144 |

## ГЛАВА 6. ЗАДАЧА О НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

|  |     |
|--|-----|
| 6.1. Решение прямой задачи .....   | 153 |
| 6.2. Описание численного эксперимента в прямой задаче .....  | 161 |
| 6.3. Решение обратной задачи по восстановлению<br>граничных перемещений .....                                    | 165 |
| 6.4. Пример численного расчета граничных перемещений<br>на начальном этапе деформирования полупространства ..... | 171 |
| ЛИТЕРАТУРА .....   | 174 |

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

Наукове видання

ЯНЮТИН Євген Григорович  
БОГДАН Дмитро Іванович  
ВОРОПАЙ Наталя Ігорівна  
ГНАТЕНКО Григорій Олександрович  
ГРИШАКІН Віталій Тарасович

ІДЕНТИФІКАЦІЯ НАВАНТАЖЕНЬ  
ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ДЕФОРМУВАННІ ТІЛ

Монографія  
(російською мовою)

Частина I

Відповідальний за випуск *В. А. Перегон*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка *І. В. Янчевський*

Дизайн обкладинки *Д. І. Богдан*

Підписано до друку . .2010 р. Формат 60×84 1/16.  
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Віддруковано на ризографі.  
Умовн. друк. арк. 10,5. Обл.-вид. арк. 11,8.  
Замовлення № /10. Тираж 300 прим. Ціна договірна.

**ВИДАВНИЦТВО**

**Харківського національного автомобільно-дорожнього університету**

**Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Петровського, 25.  
Тел./факс: (057)700-38-64, 707-37-03, e-mail: [rio@khadi.kharkov.ua](mailto:rio@khadi.kharkov.ua)**

*Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення  
та радіомовлення України про внесення суб'єкту видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції, серія ДК № 897 від 17.04.2002 р.*