

**С.Е. Рожкова, П.П. Рожков**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ  
З ДИСЦИПЛІНИ “ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНІ РОЗРАХУНКИ  
НА ЕОМ”**

Харків – 2011

# Тема 1. РОЗРАХУНОК НЕЛІНІЙНИХ МАГНІТНИХ ЛАНЦЮГІВ

## Лекція 1. Феромагнітні речовини і крива намагнічування

Серед парамагнітних речовин особливу групу становлять феромагнітні речовини. Від інших вони відрізняються тим, що їхня магнітна проникність значно більша одиниці і може сягати значень декількох тисяч; вона не постійна і залежить від температури і магнітного стану речовини. Вони здатні сильно намагнічуватися і зберігати магнетизм при відсутності магнітного поля. У зв'язку із цим магнітна індукція біля феромагнітних тіл значно збільшується. До ферромагнетиків належать залізо, сталь, чавун, нікель, кобальт і ряд сплавів. Властивості їх пояснюють особливостями будови.

Атоми феромагнетиків, узяті ізольовано один від одного, мають власний магнітний момент, але не проявляють феромагнітних властивостей і поведуть себе як атоми усякого парамагнетика. Таким чином, феромагнітні властивості - властивості речовини, а не окремих ізольованих атомів.

У феромагнетиках цілі групи атомів утворюють області, у границях яких магнітні моменти спрямовані в одну сторону, тому ці області намагнічені до насичення і називаються областями довільного (спонтанного) намагнічування, або доменами. Об'єм доменів лежить у границях  $10^{-6}$ - $10^{-9}$  см<sup>3</sup>, включає в середніх  $10^{12}$  атомів.

Доменні розташовані так, що їхні магнітні моменти взаємно компенсують один одного і при відсутності магнітного поля феромагнетик не намагнічений. Виникають доменні під час кристалізації речовини.

Якщо внести феромагнетик у магнітне поле, він орієнтуюче діє на електронні токи, у зв'язку із чим збільшуються розміри і кількість доменів, магнітні моменти яких збігаються з напрямком зовнішнього поля. У результаті цього магнітні моменти доменів уже не компенсують один одного, і феромагнетик починає здобувати власного магнітного моменту, тобто намагнічується.

Магнітне поле елементарних струмів зручно характеризувати за

допомогою так званого магнітного моменту. Щоб краще зрозуміти суть цієї величини, уявимо собі дуже маленький контур, що обтікає струм  $I$  (рис.1). Застосовуючи правило буравчика, визначимо напрямок поля цього контуру, що збігається з напрямком нормалі до його площини. Якщо цей контур умістити в магнітне поле так, що він установиться в положення, що напрямки полів (контур і зовнішнього) збігаються. Таким чином, контур зі струмом у магнітному полі поводить себе подібно магнітній стрілці або магнітній системі.

Обертальний момент створюється електромагнітними силами  $F$ , які діють по обидва боки контуру. Ці сили створюють пари із плечем  $h$  (сили, що діють на дві інші сторони, урівноважують одна одну). Величина обертального моменту залежить не тільки від положення контуру, а й від сили струму  $I$  і площі  $S$ , що обтікає цей струм. Останнє пояснюється тим, що від площі залежить висота або ширина контуру, а це значить, що від неї залежить або довжина активних сторін контуру або величина плеча  $h$ , або те і інше одночасно (рис.1).

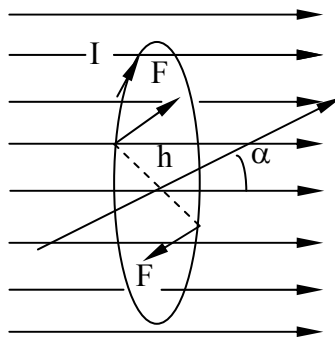


Рис. 1 - Обертальний момент, що діє на контур з струмом

Поміщаючи в ту саму точку поля різні контури (у тому самому положенні відносно поля), можна впевнитися, що взаємодія між контуром і полем пропорційна добутку  $I \cdot S$ . Чим більше цей добуток, тим контур поводить себе як більше сильна магнітна схема. У зв'язку із цим, добуток  $I \cdot S$ , що характеризує магнетизм контуру зі струмом, назвали магнітним моментом цього контуру  $M_m$ :

$$M_M = I_S S .$$

Намагнічування ферромагнетика характеризують магнітним моментом одиниці об'єму. Цю величину називають намагніченістю середовища і позначають  $J$ . Вона не може зростати безмежно. Якщо напрямки полів всіх доменів будуть збігатися з напрямком зовнішнього поля, то намагніченість середовища досягне свого граничного значення, що називається намагніченістю насичення  $J_{\text{нас}}$ :

$$J = \frac{M_M}{V} = \frac{IS}{V} ;$$

одиницею виміру є

$$J = \frac{1\text{А} \cdot 1\text{м}^2}{1\text{м}^3} = 1\text{А/м} .$$

Таким чином, намагніченість середовища виміряється в амперах на метр і являє собою напруженість результуючого поля, створеного елементарними струмами

$$B_J = \mu_0 J.$$

Магнітну індукцію поля усередині ферромагнетика можна записати як

$$B = B_0 + B_J,$$

де  $B_0$  – магнітна індукція зовнішнього поля (поля, створеного яким або джерелом у вакуумі);

$\mu_0$  – постійна, що характеризує магнітної властивості вакууму (у системі СИ  $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$  Гн/м).

$$B = H \mu_0 + \mu_0 J;$$

$$B = \mu_0 (H + J).$$

З іншої сторони,

$$B = \mu \mu_0 H;$$

$$\mu \mu_0 H = \mu_0 H \left( 1 + \frac{J}{H} \right).$$

Звідси магнітна проникність ферромагнетика

$$\mu = \left( 1 + \frac{J}{H} \right).$$

Графік, що показує, як відбувається процес намагнічування ферромагнетика зі збільшенням напруженості поля, що намагнічує, називають кривою намагнічування цього ферромагнетика.

Щоб побудувати криву намагнічування, умістимо ферромагнітний стрижень углиб котушки (рис. 2). Установивши движок реостата в крайнє ліве положення, пропустимо по колу невеликий струм. У середині котушки виходить слабке магнітне поле струму з маленькою напруженістю  $H_1$ . Магнітна індукція цього поля  $B_{01}$ .

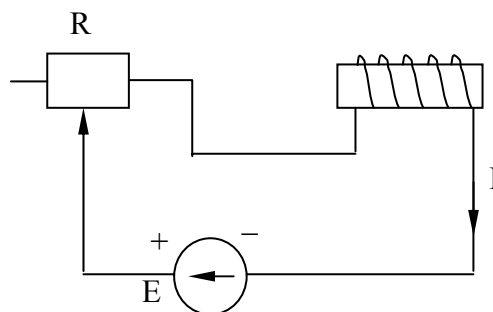


Рис. 2 - Схема підключення котушки з ферромагнітним стрижнем

У міру пересування движка реостату вправо і збільшення струму магнітна індукція цього поля  $B_0$  зростає прямолінійно (рис. 3), тому що вона пов'язана з напруженістю поля пропорціональною залежністю, цей процес показаний прямою  $OB_0$ . Під впливом цього поля відбувається орієнтація магнітних моментів доменів тим більше, чим більша напруженість зовнішнього поля, тобто намагнічується сердечник.

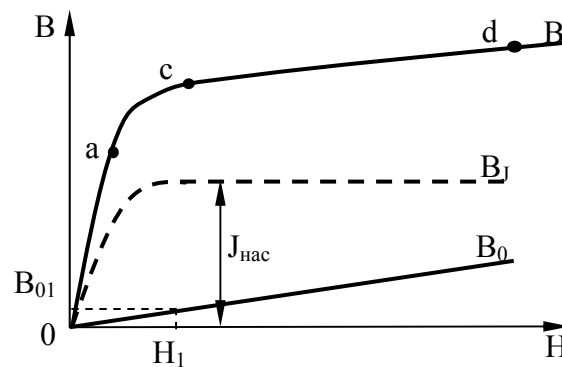


Рис. 3 - Графік процесу намагнічування ферромагнетика

Намагніченість сердечника  $J$  і магнітна індукція поля намагніченості  $B_j$  у міру посилення струму спочатку швидко зростають, майже пропорційно напруженості зовнішнього поля, а потім внаслідок явища насиченості їхній ріст сповільнюється, якщо намагніченість сердечника сягає граничного значення  $J_{нас}$ .

## Лекція 2. Особливості розрахунку нелінійних магнітних кіл

Процес одержання кривій намагнічування ферромагнетика має на увазі одержання таблиці, у якій із заданою дискретністю записують значення напруженості магнітного поля і відповідні їм значення магнітної індукції. Крива намагнічування будується відповідно даним, наведеним у таблиці.

Розглянемо приклад розрахунку магнітного кола постійного струму.

Геометричні розміри магнітного кола зображені на рис. 4. Крива намагнічування представлена у вигляді сукупності експериментальних точок, наведених у табл. 1, і зображена на рис. 5. Знайти, який струм повинен протікати по обмотці із числом витків  $W=500$ , щоб магнітна індукція в повітряному зазорі шириною  $\delta=0,1$  мм дорівнювала 1Тл.

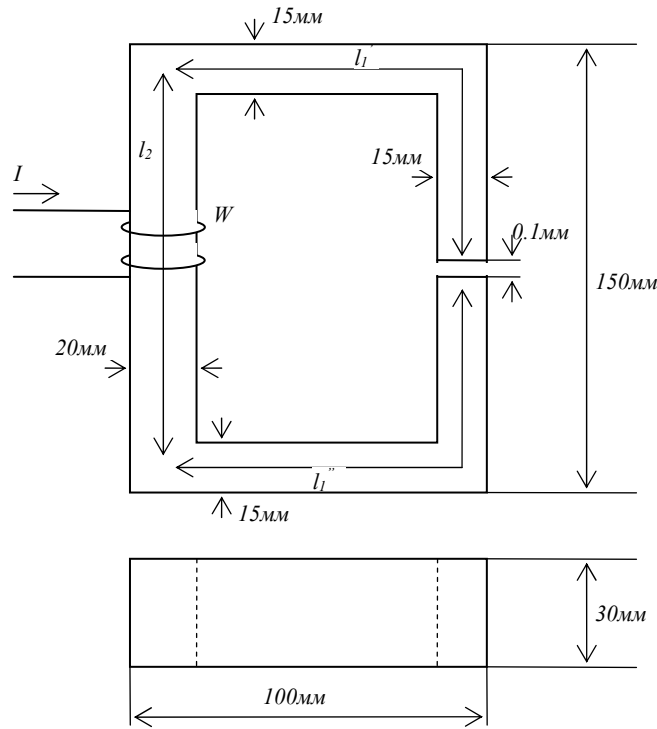


Рис. 4 - Геометричні розміри магнітного кола

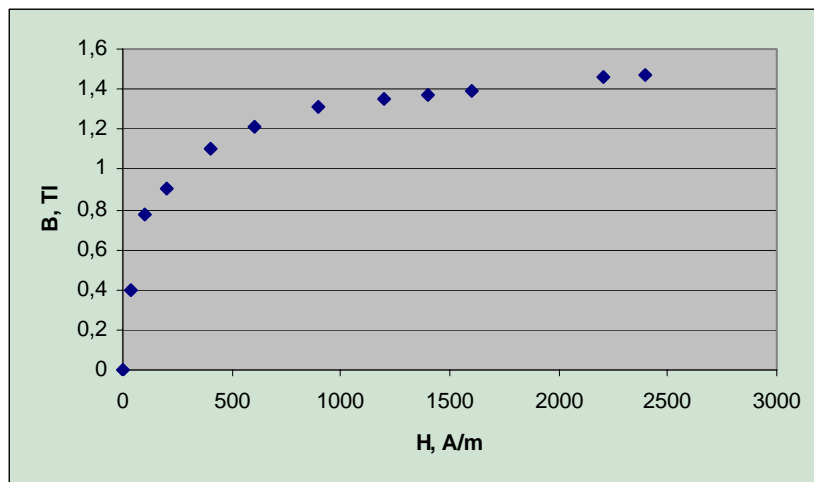


Рис. 5 - Крива намагнічування

Таблиця 1 Експериментальні крапки кривій намагнічування

№	H, А/м	B, Тл
1	0	0
2	40	0,4
3	100	0,78
4	200	0,9
5	400	1,1
6	600	1,21
7	900	1,31
8	1200	1,35
9	1400	1,37
10	1600	1,39
11	2200	1,46
12	2400	1,47

Розв'язання.

Магнітний ланцюг розбиваємо на три ділянки

$$l_1 = l'_1 + l''_1 = 30 \text{ см}; S_1 = 4,5 \text{ см}^2;$$

$$l_2 = 13,5 \text{ см}; S_2 = 6 \text{ см}^2;$$

Повітряний зазор

$$\delta = 0,1 \text{ см}; S_1 = S_\delta = 4,5 \text{ см}^2.$$

Індукція

$$B_1 = B_\delta = 1 \text{ Тл.}$$

Індукцію на ділянці  $l_2$  знайдемо, поділивши потік  $\Phi = B_\delta S_\delta$  на перетин  $S_2$  другої ділянки

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{B_\delta S_\delta}{S_2} = \frac{1 \cdot 4,5}{6} = 0,75 \text{ Тл.}$$

Напруженості поля на ділянках  $l_1$  і  $l_2$  будемо шукати в табл. 1 за відомими значеннями  $B_1$  і  $B_2$ . Точність визначення  $H_1$  і  $H_2$  істотно залежить від



величини кроку зміни напруженості магнітного поля при проведенні експерименту. У даному випадку значення  $H_1$  і  $H_2$  при  $B_1=1$  Тл і  $B_2=0,75$  Тл у табл. 1 відсутні, тому приймаємо ці значення приблизно по кривій намагнічування (рис.2), подумки інтерполюючи криву між експериментальними точками.

Таким чином, одержимо значення

$$H_1=300 \text{ А/м}$$

та

$$H_2=115 \text{ А/м.}$$

Напруженість поля в повітряному зазорі

$$H_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1 = 0,8 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

Підрахуємо падіння магнітної напруги уздовж всього магнітного кола

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 H_k \ell_k &= H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_\delta \ell_\delta = \\ &= 300 \cdot 0,3 + 115 \cdot 0,135 + 0,8 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} = 185,6 \text{ А/м} \end{aligned}$$

Струм в обмотці

$$I = \frac{\sum_{k=1}^3 H_k \ell_k}{W} = \frac{185,6}{500} = 0,371 \text{ А.}$$

Аналіз отриманого рішення показує, що його точність істотно залежить від визначення величини напруженості магнітного поля за значеннями магнітної індукції.

Графо-аналитический метод не може забезпечити необхідний рівень точності рішення завдання. Актуальним є подання графічної залежності  $H=f(B)$  у вигляді аналітичної залежності. У цьому випадку, рішення завдань, пов'язаних з розрахунком нелінійних магнітних ланцюгів, можна повністю виконувати за допомогою ПК. Для отримання аналітичної залежності, що описує залежність експериментальних даних, розглянемо процес інтерполяції експериментальних даних.

## Лекція 3. Кубічна сплайн-інтерполяція експериментальних даних.

### Побудова системи рівнянь

Найпростішим видом інтерполяції є лінійна інтерполяція, коли дві сусідні опорні точки з'єднують одну з одною прямою лінією (рис.6, 1).

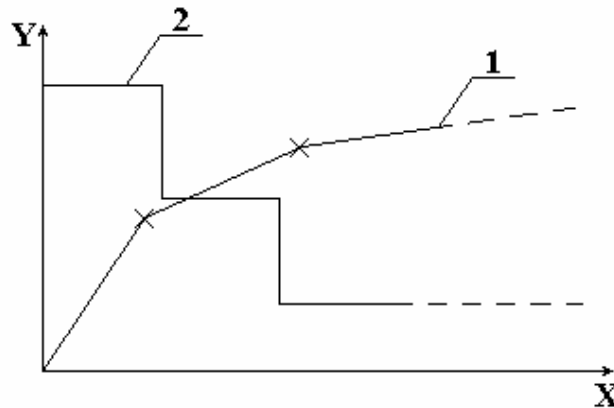


Рис. 6 - Графік лінійної інтерполяції

Лінійна інтерполяція для нелінійної кривої має сенс, якщо опорні точки розташовуються досить близько одна від одної.

Однак лінійна інтерполяція в ряді випадків не доцільна, оскільки часто потрібно, щоб функція, що відображає криву, була на всьому інтервалі безперервна і диференцуєма (крива намагнічування металу). Для лінійної інтерполяції подібна вимога не виконується: вже перша похідна має східчастий характер (рис. 6, 2).

Для нелінійної інтерполяції доцільно використати поліноми з невисокими ступенями, наприклад, поліном третього ступеня

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (1)$$

Однак за допомогою полінома третього ступеня можна описати не всі криві між як завгодно великою кількістю точок. Тому частіше інтерполюють

криві в інтервалах між двома сусідніми опорними точками. Така інтерполяція називається кусковою (рис. 7).

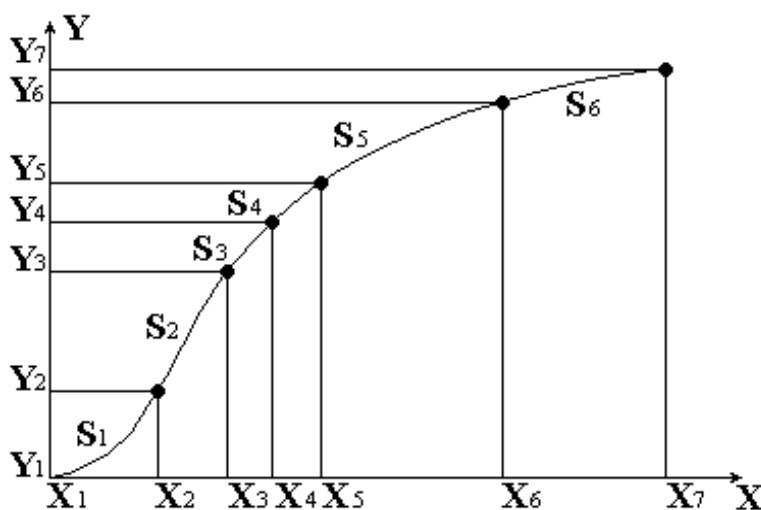


Рис. 7 - Кускова інтерполяція в  $n=6$  інтервалах

Спеціальним видом кускової інтерполяції є інтерполяція за допомогою сплайн-функцій. В процесі такої інтерполяції криві утворюють кусково-кубічний поліном. Розглянемо, як здійснюється сплайн-інтерполяція за допомогою кубічних поліномів.

Перед початком обчислень вводять  $n+1$  однорідну точку, тобто запам'ятовується  $n+1$  пари значень  $x_j, y_j$  ( $j=1, \dots, n+1$ ). Опорні точки можуть бути не еквідистантні, тобто інтервали між ними не обов'язково рівні. Для  $n+1$  опорної точки існує  $n$  інтервалів. В  $j$ -ом інтервалі  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ .

На кожному інтервалі для сплайн-інтерполяції складається рівняння

$$S_j = a_j(x-x_j)^3 + b_j(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j \quad (2)$$

Для  $n$  інтервалів необхідно знайти  $4n$  невідомих, оскільки для кожного сплайна  $S_j$ , що інтерполює обчислюють значення коефіцієнтів  $a_j, b_j, c_j, d_j$ .

Любий сплайн повинен задовольняти таким умовам.

1. У кожній нижній границі інтервалу ( $x = x_j$ ) сплайн проходить через опорну точку

$$S_j(x_j) = y_j, \quad \text{де } j=1,2,\dots,n \dots \quad (3)$$

2. У кожній верхній границі інтервалу ( $x = x_j + h_j$ ) сплайн проходить через опорну точку

$$S_j(x_j + h_j) = y_{j+1}, \quad \text{де } j=1,2,\dots,n \dots \quad (4)$$

Ширина інтервалу

$$h_j = x_{j+1} - x_j \quad (5)$$

3. Для кожної граничної точки інтервалу сплайн має однакову *крутість* в обох граничних інтервалах

$$S'_{j-1}(x_{j-1} + h_{j-1}) = S'_j(x_j), \quad \text{де } j=1,2,\dots,n \quad (6)$$

4. Для кожної граничної точки інтервалу сплайн має однакову *кривизну* в обох інтервалах, що граничать

$$S''_j(x_j + h_j) = S''_{j+1}(x_{j+1}), \quad \text{де } j=1,2,\dots,n-1 \quad (7)$$

Якщо кожен сплайн повинен задовольняти 4 умовам, то для “ $n$ ” що інтерполюють сплайнів потрібно  $(4n-2)$  умови. У той же час обчислення  $4n$  коефіцієнтів здійснюється за допомогою  $4n$  умов. Відсутні умови називаються граничними:

5. Через обидві граничні точки крива повинна проходити з *нульовою кривизною*, «перетворюючись» у пряму. Це означає, що друга похідна будь-якого сплайна, що інтерполює, на границях області дорівнює нулю

$$S_1''(x_1) = 0 \quad (8a)$$

$$S_n''(x_{n+1}) = S_n''(x_n + h_n) = 0 \quad (8b)$$

6. *Крутість* будь-якого сплайна, що інтерполює, в обох граничних крапках фіксована, тобто

$$S_1'(x_1) = m_a \quad (9a)$$

$$S_n'(x_{n+1}) = S_n'(x_n + h_n) = m_e \quad (9b)$$

Константи  $m_a$  і  $m_e$  – це додаткові вихідні дані, поряд з парами значень  $(x_j, y_j)$ . Вони мають певні значення для кожного конкретного завдання. Наприклад, для кривій намагнічування металів до області насичення задаються початкова проникність  $\mu_a = m_a$  і магнітна постійна  $\mu_0 = m_e$ .

Лекція 4. Кубічна сплайн-інтерполяція експериментальних даних.

Розв'язання системи рівнянь

Обчислимо “ $4n$ ” коефіцієнтів за допомогою заданих опорних точок.

Спочатку визначаємо коефіцієнти  $d_j$  з першої умови. Підставляючи рівняння (2) і  $x = x_j$  в рівняння (3), одержимо

$$d_j = y_j, \quad \text{де } j=1,2,\dots,n \quad (10)$$

Для обчислення значень коефіцієнтів із *другої умови* підставляємо рівняння (4) і  $x = x_j + h_j$  в (2). З урахуванням рівняння (10) одержуємо

$$a_j h_j^3 + b_j h_j^2 + c_j h_j + d_j = d_{j+1}, \text{ де } j=1,2,\dots,n \quad (11)$$

Відповідно до *третьої умови* необхідно взяти першу похідну сплайна, що інтерполює

$$S_j' = \frac{d(S_j)}{dx} = 3a_j(x - x_j)^2 + 2b_j(x - x_j) + c_j \quad (12)$$

Підставляючи у вираження (12) рівняння (6), маємо

$$3a_{j-1}h_{j-1}^2 + 2b_{j-1}h_{j-1} + c_{j-1} = c_j, \text{ де } j=2,\dots,n \quad (13)$$

(т. к. ліворуч  $x = x_{j-1} + h_{j-1}$ , а праворуч  $x = x_j$ , а  $x_j = x_{j-1} + h_{j-1}$ )

Для задоволення *четвертої умови* обчислимо другу похідну сплайна, що інтерполює

$$S_j'' = \frac{d^2(S_j)}{dx^2} = 6a_j(x - x_j) + 2b_j. \quad (14)$$

Підставляючи в це вираження рівняння (7), одержимо

$$6a_j h_j + 2b_j = 2b_{j+1}, \quad \text{де } j=1,2,\dots,n-1 \quad (15)$$

Підставимо виключення сплайн-коефіцієнтів  $a_j$  і  $c_j$  з рівнянь (11), (13) і (15) разом із граничними умовами (8) або (9) одержуємо систему рівнянь для всіх  $b_j$  у такий спосіб.

Вирішимо (15) відносно  $a_j$

$$a_j = \frac{2}{6h_j}(b_{j+1} - b_j) = \frac{1}{3h_j}(b_{j+1} - b_j), \text{ де } j=1,2,\dots,n-1 \quad (16)$$

Підставимо це вираження в (11)

$$\frac{h_j^2}{3}(b_{j+1} - b_j) + h_j^2 b_j + h_j c_j = d_{j+1} - d_j \quad (17)$$

Це рівняння у свою чергу вирішимо відносно  $c_j$

$$c_j = \frac{d_{j+1} - d_j}{h_j} - \frac{h_j^2}{3h_j} b_{j+1} + \frac{h_j}{3} b_j - h_j b_j = \frac{d_{j+1} - d_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(b_{j+1} + 2b_j), \quad (18)$$

де  $j=1,2,\dots,n-1$

Позначимо перший член правої частини як

$$e_j = \frac{d_{j+1} - d_j}{h_j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}, \quad (19)$$

де  $j=1,2,\dots,n$

Для сплайна  $S_{j-1}$

$$S'_{j-1} = 3a_{j-1}(x - x_{j-1})^2 + 2b_{j-1}(x_{j-1}) + c_{j-1}$$

Якщо  $x = x_{j-1} + h_{j-1}$ , тоді

$$\begin{aligned}
S'_j &= 3a_{j-1}(x_{j-1} + h_{j-1} - x_{j-1})^2 + 2b_{j-1}(x_{j-1} + h_{j-1} - x_{j-1}) + c_{j-1} = \\
&= 3a_{j-1}h_{j-1}^2 + 2b_{j-1}h_{j-1} = c_{j-1}
\end{aligned}$$

Для сплайна  $S'_j$

$$S'_j = 3a_j(x - x_j)^2 + 2b_j(x - x_j) + c_j$$

Якщо  $x = x_j$ , тоді

$$S'_j = 3a_j(x - x_j)^2 + 2b_j(x - x_j) + c_j = c_j$$

Таким чином, за умовою третьому (6) і (5) ( $x_j = x_{j-1} + h_{j-1}$ ) одержимо

$$3a_{j-1}h_{j-1}^2 + 2b_{j-1}h_{j-1} + c_{j-1} = c_j.$$

Підставимо рівняння (16) і (18) у рівняння (13)

$$3a_{j-1}h_{j-1}^2 + 2b_{j-1}h_{j-1} + c_{j-1} = c_j;$$

$$\frac{3}{3h_{j-1}}(b_j - b_{j-1})h_{j-1}^2 + 2b_{j-1}h_{j-1} + c_{j-1} - \frac{h_{j-1}}{3}(b_j + 2b_{j-1}) = e_j - \frac{h_j}{3}(b_{j+1} - 2b_j);$$

$$h_{j-1}b_j - h_{j-1}b_{j-1} + 2h_{j-1}b_{j-1} - \frac{h_{j-1}}{3}b_j - 2\frac{h_{j-1}}{3}b_{j-1} + \frac{h_j}{3}b_{j+1} + 2\frac{h_j}{3}b_j = e_j - e_{j-1}$$

$$b_{j-1}\frac{h_{j-1}}{3} + \frac{2h_{j-1}}{3}b_j + \frac{2h_j}{3}b_j + \frac{h_j}{3}b_{j+1} = e_j - e_{j-1};$$



$$h_{j-1}b_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)b_j + h_jb_{j+1} = 3(e_j - e_{j-1}), \quad (20)$$

де  $j=2,3,\dots,n-1$

Таким чином, з 4-х умов ми одержали систему, що складається з  $(4n-2)$  рівнянь. Два рівняння, що залишилися одержимо за допомогою граничних умов (8).

Подставляя рівняння (8а) при  $j=1$  і  $x = x_j$  у рівняння (14), одержуємо

$$6a_j(x - x_j) + 2b_j = 0; \quad b_1=0 \quad (21)$$

Припустимо, що за опорною точкою  $x_{n+1}$  існує ще один що інтерполіює сплайн. Тоді відповідно до четвертої умови (7)

$$S_n''(x_n + h_n) = S_{n+1}''(x_{n+1}).$$

Підставляючи це вираження при  $j=n+1$  і  $x=x_{n+1}$  у рівняння (14), одержуємо

$$b_{n+1} = 0. \quad (22)$$

Тоді можна записати рівняння (20) для  $j=n$

$$h_{n-1}b_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n)b_n + h_nb_{n+1} = 3(e_n - e_{n-1}) \quad (23)$$

Рівняння (20) і (23) являють собою систему лінійних рівнянь, за допомогою якої обчислюються  $n-1$  коефіцієнтів  $b_2 \dots b_n$ . Коефіцієнт  $b_1=0$ .

У матричному виді система рівнянь виглядає в такий спосіб.

	2	3	4	...	n				
$b_1=0$	$2(h_1+h_2)$	$h_2$	$0$	...	$0$	$0$	$j=2$	$b_2$	$3(e_2-e_1)$
	$h_2$	$2(h_2+h_3)$	$h_3$	...	$0$	$0$	$j=3$	$b_3$	$3(e_3-e_2)$
$\Pi_0(20)$				...			$x$		
$\Pi_0(23)$	$0$	$0$	$0$	...	$h_{n-1}$	$2(h_{n-1}+h_n)$	$j=n$	$b_n$	$3(e_n-e_{n-1})$
	$(n-1)*(n-1)$							$1*(n-1)$	$1*(n-1)$

Вирішивши систему рівнянь, ми одержимо значення коефіцієнтів  $b_j$ .

Далі по формулі (16) визначаємо всі “ $n$ ” коефіцієнтів  $a_j$ , а по формулі (18) – коефіцієнти  $c_j$ .

Таким чином, ми знайшли коефіцієнти кубічних поліномів, що інтерполюють, а виходить, описали аналітично вихідну функцію.

При розрахунку нелінійних ланцюгів вихідна функція може бути задана двома способами:

1. Як сукупність опорних точок, заданих у вигляді таблиці
2. У вигляді кривої залежності  $y=f(x)$ . Зокрема  $H=f(V)$

У другому випадку таблицю опорних точок необхідно визначити. Для цього задана крива розбивається на інтервали і складається таблиця.

На ділянках, де функція змінюється досить повільно, відстань між крапками може бути більше, на крутих ділянках кривий крок береться маленьким. Крім того, обов'язково потрібно визначити точки перегинів функції.

## Тема 2. МАТРИЧНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

### Лекція 5. Топологічні поняття схеми електричного кола

Аналіз властивостей складних кіл, якими в загальному випадку є підлягаючі синтезу кола, за умови дослідження значного числа варіантів, є процесом трудомістким. Тому використання ПК для рішення задач аналізу і синтезу лінійних і нелінійних електричних кіл є дуже актуальним. При цьому

виникає потреба в розвитку методів, що дозволяють найбільше повно використовувати специфічні особливості ПК.

Щоб зробити більш наочним зображення взаємних з'єднань елементів схеми, використовують топологічне представлення схеми електричного кола, що відбиває лише структуру зв'язків між елементами, не відображаючи типу елементів. Такі схеми називають *графами* електричних схем. Наприклад, для електричної схеми, зображеної на рис. 1, граф має вид (рис. 8).

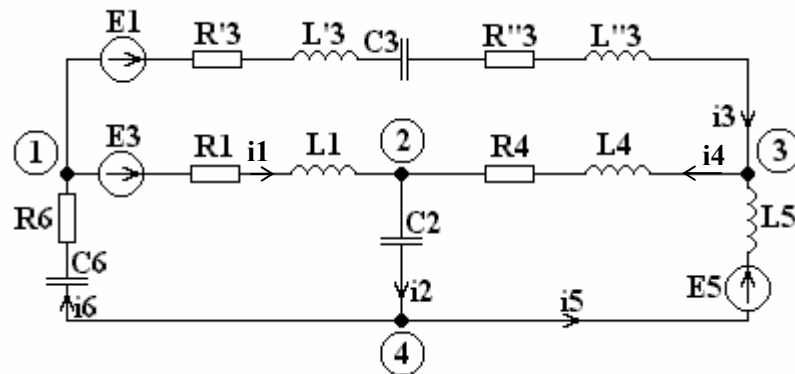


Рис. 8 - Схема електричного кола

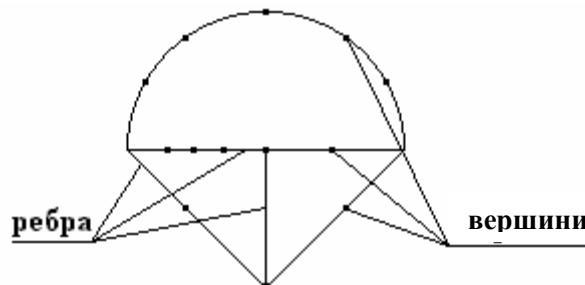


Рис.9 - Граф електричної схеми

На графі будь-який елемент-двополюсник відображають відрізком лінії, який називається *ребром*. Затиски елемента позначають точками, які називаються *вершинами графа*. Таким чином, граф являє собою сукупність вершин, що з'єднані між собою ребрами (рис. 9).

Якщо вершина і ребро стикаються один з одним, то їх називають *інцидентними* («інцидент» - «зіткнення»).

Якщо вершина графа інцидентна трьом і більш ребрам, то її називають *вузлом графа*, що відповідає вузлу кола.

Якщо вершина інцидентна лише двом ребрам, то ці ребра називають *поєдновано з'єднаними*, що відповідає послідовному з'єднанню двох елементів кола. Вершину, інцидентну лише двом ребрам, називають *усувною*. При усуненні такої вершини інцидентні їй ребра поєднуються в одну лінію.

Усунувши усувні вершини, одержимо граф вихідної схеми у виді, як на рис. 10.

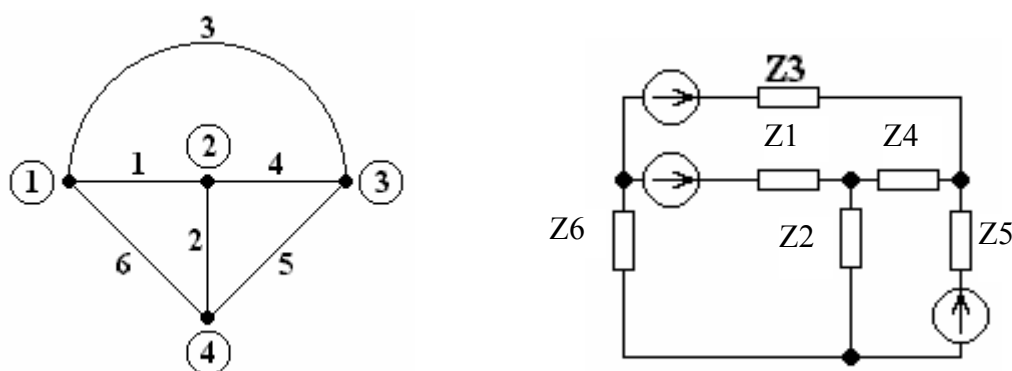


Рис.10 - Еквівалентна схема і відповідний їй граф

Окреме ребро, яке інцидентне двом вузлам, чи сукупність послідовно з'єднаних ребер називається *гілкою* графа, що відповідає гілці кола.

Гілкам графа можна приписувати напрямки за аналогією з вибором позитивного напрямку струмів і напруг. Отримані гілки називаються *орієнтованими*, а граф – орієтованим графом.

Сукупність ребер і гілок, по яких можна переміститися з однієї вершини до іншої, не проходячи двічі через яку-небудь вершину, гілку або ребро, називають *шляхом* графа.

Вершини (чи вузли), з'єднані шляхом графа, називають *кінцевими* вершинами цього шляху. Якщо обидві кінцеві вершини збігаються, зливаючись одна з одною, то утвориться замкнутий шлях, називаний *контуром* графа. Контур графа відповідає контуру кола.

Важливим топологічним поняттям графа схеми є *дерево графа* – це будь-яка сукупність гілок графа, що з'єднує усі вузли графа без утворення контуру. Той самий граф може мати різні дерева (на рис. 11 зображені жирними лініями).

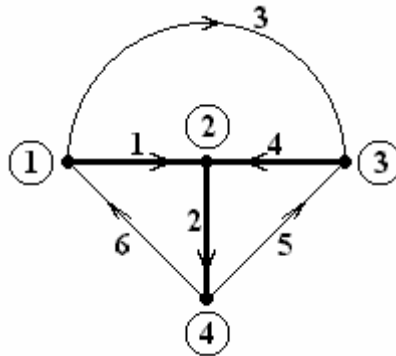


Рис. 11 - Дерево графа

При цьому гілки, виділені жирними лініями, називаються *гілками дерева*, а вилучені гілки – *хордами* графа (зображують тонкими лініями). Хорди доповнюють дерево до повного графа.

## Лекція 6. Топологічні матриці

За допомогою топологічних матриць можна описувати не тільки структуру кола, але і основні закони струмопроходження, пов'язані з топологічними властивостями кіл. Наприклад, закони Кирхгофа пов'язані з такими топологічними поняттями, як вузли, гілки і контури графів.

*Матриці-стовпці.* Для опису цих законів у топологічній формі варто ввести поняття *матриць-стовпців* струмів і напруг, а також нульової матриці-стовпця.

$$(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_N \end{pmatrix} = (i_1, i_2, \dots, i_N)^T;$$

$$(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T;$$

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0)^T,$$

де  $i_k$  — струми гілок;

$u_k$  — напруги гілок;

$N = n_b$  - кількість гілок.

Нульова матриця має  $N$  рядків.

Наприклад, для схеми (рис.1), що має орієнтований граф (рис. 4), матриці (1) мають вид:

$$(i) = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)^T;$$

$$(u) = (u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)^T;$$

$$(0) = (000000)^T.$$

*Матриця інцидентій.* Структура графа схеми може бути описана в алгебраїчній формі у виді матриці інцидентій. Для цього вводять поняття коефіцієнтів інцидентій, що приймають значення:

+1 для гілок, спрямованих від інцидентного вузла;

-1 для гілок, спрямованих у бік ініцидентного вузла;

0, якщо елементи графа не є ініцидентними.

Для приведенного графа (рис. 11) матриця інцидентій має вид

		<i>Номери ребер (гілок)</i>						
		1	2	3	4	5	6	
$(A_u) =$	1	1	0	1	0	0	-1	1
	2	-1	1	0	-1	0	0	2
	3	0	0	-1	1	-1	0	3
	4	0	-1	0	0	1	1	4

*Номери вершин*

Таким чином, матриця інциденцій містить «р» стовпців і «q» рядків, тобто розмірність матриці інциденцій (q x p) (у даному прикладі (4 x 6)).

Матриця інциденцій використовується, наприклад, для складання системи рівнянь за першим законом Кирхгофа в топологічній формі.

Розглянемо добуток матриці інциденцій на матрицю струмів

$$(A_u)(i) = \begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ q \times p \end{matrix} \begin{matrix} (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6)^T \\ 1 \times p \end{matrix}$$

Добуток матриць дає наступну матрицю-стовпець

$$(A_u)(i) = \begin{matrix} \begin{vmatrix} i_1 + i_3 - i_6 \\ -i_1 + i_2 - i_4 \\ -i_3 + i_4 - i_5 \\ -i_2 + i_5 + i_6 \end{vmatrix} \\ q \times 1 \end{matrix}$$

З графа видно, що кожен рядок матриці являє собою алгебраїчну суму струмів, що сходяться в кожному вузлі графа. З іншого боку, за першим законом Кирхгофа кожна з цих сум дорівнює нулю

$$i_1 + i_3 - i_6 = 0,$$

$$-i_1 + i_2 - i_4 = 0,$$

$$-i_3 + i_4 - i_5 = 0,$$

$$-i_2 + i_5 + i_6 = 0.$$

С урахуванням цих рівнянь матричний добуток можна дорівняти до нульової матриці

$$(A_u)(i) = (0).$$

Таким чином, матричне рівняння ідентично попередній системі рівнянь), що описує в матричній формі систему рівнянь, складених за першим законом Кирхгофа для усіх вузлів електричної схеми. матричне рівняння справедливо для будь-якого кола при відповідних значеннях матриці струмів гілок і інцидентній матриці.

*Вузлова матриця.* Незавжди бачити, що з чотирьох рівнянь незалежними є тільки три. У випадку довільного кола, що містить «q» вузлів, незалежними є (q-1) рівнянь, складених за першим законом Кирхгофа. Такій системі рівнянь відповідає *вузлова* матриця. Вузлова матриця виходить з матриці інцидентій шляхом викреслювання з останнього будь-якого рядка.

Наприклад, при викреслюванні останнього рядка в матриці виходить вузлова матриця виду

$$(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (q-1)$$

*p*

Тоді не надлишкова система рівнянь за першим законом Кирхгофа має вид

$$(A_y)(i) = (0).$$

*Матриця контурів.* Для проходження струмів у гілках кола недостатньо скласти рівняння за першим законом Кирхгофа. Відсутні рівняння можна скласти для напруг контурів за другим законом Кирхгофа. Для цього складається матриця головних контурів.

*Головним (незалежним)* називають контур, складений з гілок дерева і однієї (і лише однієї) хорди.



Вибір головних контурів нескладно здійснити, якщо скористатися властивостями дерева графа, що являє собою таку сукупність гілок, що не утворює контурів. З визначення головних контурів випливає, що їх кількість визначається числом хорд графа (рис.11).

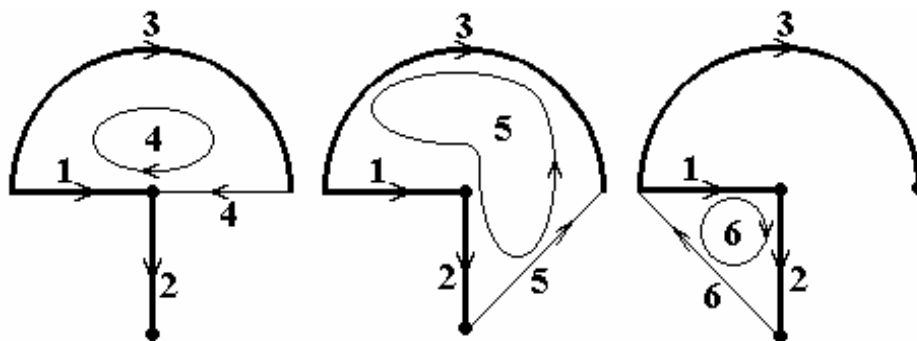


Рис. 12 - Визначення головних контурів графа

Рівняння за другим законом Кирхгофа можна записати в матричній формі, увівши поняття матриці головних контурів (матриці контурів), кожен рядок якої описує склад того чи іншого головного контуру. Для складання такої матриці кожен головний контур обходиться в напрямку вхідної в нього хорди.

При цьому гілки, що входять у контур, вважаються позитивними при збігу їхньої орієнтації з напрямком обходу і негативними - у протилежному випадку. Позитивним гілкам приписують коефіцієнт +1, негативним - коефіцієнт -1, а гілкам кола не вхідним у головний контур - 0. З цих коефіцієнтів, розташованих у порядку нумерації гілок кола, утвориться рядок матриці головного контуру. Ці рядки, розташовані в порядку нумерації головних контурів, утворять шукану матрицю.

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 (A_{ГК}) = & \left| \begin{array}{cccccc}
 -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right| & \begin{array}{l}
 4 \\
 5 \\
 6
 \end{array}
 \end{array}$$

Якщо матрицю головних контурів помножити на матрицю-стовпець напруг, то одержимо матричне рівняння, що описує другий закон Кирхгофа в топологічній формі

$$(A_{\text{ГК}})(u) = (A_{\text{ГК}})(e).$$

Це співвідношення еквівалентне трьом рівнянням, складеним по другому закону Кирхгофа для розглянутої електричної схеми.

$$(A_{\text{ГК}})(\Gamma) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -u_1 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 - u_3 + u_5 \\ u_1 + u_2 + u_6 \end{vmatrix};$$

$$(A_{\text{ГК}})(e) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e_1 + e_3 \\ e_1 - e_3 + e_5 \\ e_1 \end{vmatrix}.$$

$$-u_1 + u_3 + u_4 = -e_1 + e_3,$$

$$u_1 + u_2 - u_3 + u_5 = e_1 - e_3 + e_5,$$

$$u_1 + u_2 + u_6 = e_1.$$

Таким чином, використовуючи матричне подання електричних схем, можна розрахувати електричне коло будь-якої складності різними методами, використовуючи ресурси сучасних ПК.

## Лекція 7 Матричні операції. Матричний метод контурних струмів

Розглянемо деякі матричні операції.

*Додавання матриць.* Сумою  $A + B$  матриць однакового розміру  $A = |a_{ik}|$  і  $B = |b_{ik}|$  є матриця  $C = |c_{ik}|$  того ж розміру з елементами  $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$  при всіх  $i$  та  $k$ . Таким чином, додавання матриць однакового розміру відбувається поелементно.

*Множення матриці на дійсне число.* Добуток матриці  $A = |a_{ik}|$  на дійсне число  $\lambda$  є матриця  $\lambda A = |\lambda a_{ik}|$ , тобто множення матриці на дійсне число відбувається поелементно.

*Множення зчеплених матриць.* Матриці  $A = |a_{ik}|$  розміру  $m \times n$  і  $B = |b_{ik}|$  розміру  $n \times s$  називається *зчепленими*, якщо  $n=s$ , т.е. число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці. При цьому матриці  $B$  і  $A$  можуть виявитися не зчепленими, якщо  $s \neq m$ . Добуток  $AB$  двох зчеплених матриць  $A$  і  $B$  є матриця  $C = |c_{ik}|$  розміром  $m \times s$ , де  $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ , тобто елемент, що знаходиться в  $i$ -і рядку та  $k$ -м стовпці матриці добутку, представляється у виді скалярного добутку  $i$ -і вектора-рядка матриці  $A$  на  $k$ -і вектор – стовпець матриці  $B$ .

Приклад.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix};$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = 1 \times 1 + (-2)(-6) + (2)(-3) = 7; \quad C_{12} = (1)(4) + (-2)(5) + (2)(6) = 6 \text{ і т.д.}$$

*Транспонування матриці.* Якщо елементи рядків матриці  $A = |a_{ik}|$  розставлені в стовпці (при цьому одночасно елементи стовпців розставляються в рядки), то отримана матриця називається транспонованою до  $A$  і позначається

$$A^T = |a^T_{ki}|, \quad \text{якщо } a^T_{ik} = a_{ki}.$$

Приклад

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \\ 14 & 24 & 34 \end{bmatrix}.$$

*Обернення матриць.* Матрицею, оберненою квадратній матриці  $A$ , називається квадратна матриця  $A^{-1}$ , що задовольняє рівності

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де  $E$  – одинична матриця виду.

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

З визначення випливає, що обернена матриця може існувати тільки для квадратної матриці і що обидві матриці мають ту саму розмірність.

У матричному виді система рівнянь щодо контурних струмів має вид

$$(Z_{kl}) = (I^k) = (E),$$

де  $(Z_{kl})$  - матриця контурних опорів, яка дорівнює

$$(Z_{kl}) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

$(I^k) = (I_1 \ I_2 \ \dots \ I_n)^T$  - матриця-стовпець контурних струмів ;

$(E) = (E_1 \ E_2 \ \dots \ E_n)^T$  - матриця-стовпець контурних е.р.с.

Матриця контурних опорів може бути визначена через матрицю головних контурів. При цьому справедлива формула

$$(Z_{kl}) = (A_{гк})(Z^B)(A_{гк})^T,$$

де  $(Z^B) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_N \end{pmatrix}$  – діагональна матриця опорів гілок;

$z_1, z_2, \dots, z_N$  – опори гілок, пронумеровані по номерах стовпців матриці головних контурів, тобто по номерах гілок;  $N=p$  – кількість гілок у колі.

Матриці контурних е.р.с. також визначаються через матрицю головних контурів

$$(E) = (A_{гк})(E^B)_N,$$

де  $(E)^B = (E_1, E_2, \dots, E_N)^T$  - матриця-стовпець е.р.с. гілок, пронумерованих по номерах гілок, причому е.р.с.  $E_k$  вважається позитивною, якщо вона орієнтована однаково з k-і гілкою.

Тоді рішення для контурних струмів у матричній формі записується в наступному вигляді

$$(I^K) = (Z_{kl})^{-1} (E),$$

де  $(Z_{kl})^{-1}$  – обернена матриця контурних опорів.

Струми в галузях можна визначити в результаті наступної матричної операції

$$(I^B) = (A_{гк})^T (I^K).$$

Потужність, вироблювана джерелами е.р.с., дорівнює

$$P_B = (E_1, E_2, \dots, E_N)(I^B).$$

Потужність, споживана приймачами, знаходиться як сума елементів вектора-стовпця потужностей

$$P_p = \sum (P^p),$$

де  $(P^p) = (Z^B)(I^B)^2$ .

### Тема 3. ДИСКРЕТНИЙ ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ

Лекція 8. Визначення показників якості електричної енергії за допомогою дискретного перетворення Фур'є

Досвід експлуатації електричних мереж дозволяє зробити висновок, що крім напруги основної частоти 50 Гц фазна напруга містить високочастотні

гармонічні складові. Наявність таких складових обумовлена особливостями роботи обладнання електроспоживачів. Високочастотні складові погано впливають на роботу електрообладнання, крім того індукційні лічильники електричної енергії неспроможні враховувати енергію, яка припадає на високочастотні гармонічні складові, тому є підстава говорити про недооблік електричної енергії. Оцінити величину недообліку можливо, якщо відомі діючі значення напруги і струму високочастотних гармонічних складових.

Визначити ці величини можливо за допомогою гармонійного аналізу фазної напруги та струму, яку в цьому випадку слід розглядати у якості інформативного сигналу.

Одним зі способів проведення гармонійного аналізу сигналу є перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є дозволяє здійснювати перенос сигналу з однієї форми подання в іншу.

Якщо припустити, що реалізація  $x(t)$  – періодична з періодом  $T_p$  і фундаментальною частотою  $f_1 = 1/T_p$ , то її можна представити рядом Фур'є

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} (a_q \cos 2\pi q f_1 t + b_q \sin 2\pi q f_1 t) ,$$

$$\text{де } a_q = \frac{2}{T_0} \int_0^T x(t) \cos 2\pi q f_1 t dt , \quad q=0, 1, 2, \dots ;$$

$$b_q = \frac{2}{T_0} \int_0^T x(t) \sin 2\pi q f_1 t dt , \quad q=0, 1, 2, \dots .$$

Нехай реалізація  $x(t)$  має кінцеву довжину  $T_r = T_p$ , рівну фундаментальному періоду. Припустимо також, що вона складається з парного числа  $N$  еквідистантних спостережень із інтервалом дискретності  $\Delta t$ , що обраний таким чином, що частота Найквіста  $f_c = \frac{1}{2\Delta t}$  досить висока. Будемо вважати, що початковий момент реалізації дорівнює нулю, і позначимо перетворену послідовність у такий спосіб:

$$x_n = x(n\Delta t), \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Обчислимо тепер по всім  $N$  значенням реалізації кінцевий ряд Фур'є. Для будь-якої точки  $t$ , яка належить інтервалу  $(0, T_p)$ , цей ряд має вигляд

$$x(t) = A_0 + \sum_{q=1}^{N/2} A_q \cos \frac{2\pi q t}{T_p} + \sum_{q=1}^{(N/2)-1} B_q \sin \frac{2\pi q t}{T_p}.$$

У точках  $t = n\Delta t$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), де  $T_p = N\Delta t$ , одержимо

$$x_n = x(n\Delta t) = A_0 + \sum_{q=1}^{N/2} A_q \cos \frac{2\pi q n \Delta t}{T_p} + \sum_{q=1}^{(N/2)-1} B_q \sin \frac{2\pi q n \Delta t}{T_p}.$$

Коефіцієнти  $A_q$  і  $B_q$  визначаються за формулами

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n = \bar{x};$$

$$A_q = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cos \frac{2\pi q n}{N}, \quad q=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1,$$

$$A_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cos n\pi,$$

$$B_q = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x_n \sin \frac{2\pi q n}{N}, \quad q=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1.$$



При гармонійному аналізі поточних значень напруги і струму розрахунок діючих значення гармонічних складових фазної напруги та струму та їх фаз виконується за формулами

$$U_q = \sqrt{A_q^2 + B_q^2}, \quad I_q = \sqrt{A_q^2 + B_q^2},$$
$$\psi_{qU} = \arctg \frac{A_q}{B_q}, \quad \psi_{qI} = \arctg \frac{A_q}{B_q}, \quad \varphi_q = \psi_{qU} - \psi_{qI}.$$

Визначення значення коефіцієнтів q-ї гармонійної складової напруги та струму для одного спостереження виконується за формулами

$$K_{Uq} = \frac{U_q}{U_1} \cdot 100\%, \quad q=2, \dots, 10,$$

$$K_{Iq} = \frac{I_q}{I_1} \cdot 100\%, \quad q=2, \dots, 10.$$

Визначення значення коефіцієнта спотворення синусоїдності напруги та струму для одного спостереження виконується за формулою

$$K_u = \frac{\sqrt{\sum_{q=2}^{10} U_q^2}}{U_1} \cdot 100\%$$

$$K_I = \frac{\sqrt{\sum_{q=2}^{10} I_q^2}}{I_1} \cdot 100\%.$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Александров Є.Є., Козлов Е.П., Кузнєцов Б.І. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами: Підручник у 3-х томах. Т. 1. Теорія автоматичного керування / За заг. ред. Александрова Є.Є. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2002.- 490 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники : В трех частях – М.: “Высшая школа”, 1964. – 751 с.
4. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. - М.: Энергия, 1980. – 423 с.
5. Костенко Ю.Т., Любчик Л.М. Системы управления с динамическими моделями. – Харьков: Основа, 1996. – 211с.
6. Краснобаев В.А., Фурман И. А. Практикум по теории информации. Методическое пособие. Харьков. ХГТУСХ, 2001. – 73 с.
7. Остапенко Ю.Ю. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування. – К., 1999.-420 с.

## ЗМІСТ

- Лекція 1. Феромагнітні речовини і крива намагнічування
  - Лекція 2. Особливості розрахунку нелінійних магнітних ланцюгів
  - Лекція 3. Кубічна сплайн-інтерполяція експериментальних даних. Побудова системи рівнянь
  - Лекція 4. Кубічна сплайн-інтерполяція експериментальних даних. Розв'язання системи рівнянь
  - Лекція 5. Топологічні поняття схеми електричного кола
  - Лекція 6. Топологічні матриці
  - Лекція 7. Матричні операції. Матричний метод контурних струмів
  - Лекція 8. Визначення показників якості електричної енергії за допомогою дискретного перетворення Фур'є
- Список літератури