

**ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-
ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине
ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

Ч.1 ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**для студентов
направления подготовки 6.051001 «Метрология и
информационно-измерительные технологии»**

Харьков - 2012

Кафедра автомобильной электроники

УТВЕРЖДЕНО

Декан механического
факультета
д.т.н. проф. И.Г. Кириченко

Заведующий кафедры АЭ
д.т.н, проф.
О.В. Бажинов

« ___ » « _____ » 2012 __р.

« ___ » « _____ » 2012 __р.

Рецензент:

к.т.н., доцент

О.П.Смирнов

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине
ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

Ч.1 ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**для студентов
направления подготовки 6.051001 «Метрология и
информационно-измерительные технологии»**

Разработано:

к.т.н., доцент
кафедры АЭ

Е.А.Серикова

Рассмотрено на заседании кафедры
автомобильной электроники

Протокол № от 2012г.

Харьков - 2012

Конспект лекций по нормативной дисциплине цикла естественно-научной подготовки «Общая электротехника» направления 6.051001 «Метрология и информационно-измерительные технологии», профессиональная направленность «Метрология и измерительная техника» /Сост.: Е.А.Серикова – Харьков: ХНАДУ, 2012. – 49с.

Представлен лекционный материал первой части курса «Общая электротехника» – «Цепи постоянного тока». Приведен список литературы и методических пособий.

Пособие предназначено для студентов групп ММ11 в целях изучения первой части курса «Общая электротехника» и подготовки к зачёту и может быть использовано студентами других специальностей, изучающих курс электротехнических дисциплин.

Введение

Электротехника - техническая дисциплина, которая занимается анализом и практическим использованием для нужд промышленного производства и быта всех физических явлений, связанных с электрическими и магнитными полями. Область практического применения электротехники имеет четыре связанные друг с другом направления :

1. Получение электрической энергии.
2. Передача энергии на расстояние.
3. Преобразование электромагнитной энергии.
4. Использование электроэнергии.

Научно-технический прогресс происходит при все более широком использовании электрической энергии во всех отраслях отечественной промышленности. Поэтому электротехническая подготовка инженеров не электротехнических специальностей должна предусматривать достаточно подробное изучение вопросов теории и практики использования различных электроустановок. Инженер любой специальности должен знать устройство, принцип действия, характеристики и эксплуатационные возможности электрических цепей, электрических машин, различных аппаратов и другого электрооборудования, способы регулирования и управления ими.

История развития электротехники как науки связана с важнейшими исследованиями и открытиями. Это исследования атмосферного электричества, появление источников непрерывного электрического тока – гальванических элементов (1799 г.), открытие электрической дуги (1802 г.) и возможность ее использования для плавки металлов и освещения, открытие закона о направлении индуцированного тока (1832 г.) и принципа обратимости электрических машин, в 1834 г. впервые осуществлен электропривод судна, открытие закона теплового действия тока - закона Джоуля - Ленца (1844 г.), в 1876 г. положено начало практическому применению электрического освещения с изобретением электрической свечи, в 1889-1891 гг. созданы трехфазный трансформатор и асинхронный двигатель.

В современных производственных машинах с помощью электротехнической и электронной аппаратуры осуществляется управление ее механизмами, автоматизация их работы, контроль за ведением производственного процесса, обеспечивается безопасность обслуживания и т. д. Все шире используется в технологических установках электрическая энергия, например, для нагрева изделий, плавления металлов, сварки.

Основной задачей данного курса является получение основных сведений и формирование знаний, умений и навыков по электротехнике.

В состав курса входят следующие разделы:

1. Электрические цепи постоянного тока.
2. Электрические цепи переменного тока.
3. Трансформаторы.
4. Электрические машины.

Лекция 1.

Основные понятия электротехники. Приёмники электрической энергии. Их вольтамперная характеристика и мощность.

Предметом курса «Общая электротехника» является ознакомление с положениями такой фундаментальной дисциплины, как электротехника, которая является теоретической базой для всех специальных электротехнических дисциплин и изучает электромагнитные процессы и явления, происходящие в различных электротехнических устройствах.

1.1. Основными понятиями электротехники являются следующие.

Электрический ток i – это упорядоченное движение носителей электрического заряда. Он равен скорости прохождения заряда через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$i = \frac{dq}{dt} .$$

Единицей тока является ампер (А). Ток характеризуется величиной и направлением. За положительное направление тока принимается направление переноса положительных зарядов. Если ток с течением времени не меняет своего направления, он называется выпрямленным, если при этом он не изменяется по величине – постоянным.

Потенциал φ некоторой точки равен энергии по перемещению единичного положительного заряда (1 Кл) из точки с нулевым потенциалом в рассматриваемую точку. Разность потенциалов точек a и b называется *напряжением* между этими точками:

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

Потенциал и напряжение измеряются в *Вольтах* (В). Разность потенциалов, связанная с источником электрической энергии, называется *электродвижущей силой* (ЭДС). Условно положительным направлением напряжения называется направление от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. При перемещении электрического заряда q источник с ЭДС e совершает *работу* $W = e \cdot q$, Дж.

Мощность есть производная по времени от энергии:

$$p = \frac{dW}{dt} = e \frac{dq}{dt} = e \cdot i, \text{ Ватт} = \text{Дж/с}.$$

Примечание. Строчные буквы i , q , u используются для представления величин, являющихся в общем случае функциями времени. Прописные буквы I , Q , U представляют собой величины, не изменяющиеся во времени.

Электрической цепью называют совокупность электротехнических устройств, образующих путь для прохождения электрического тока и предназначенных для передачи, распределения и взаимного преобразования электрической и других видов энергии.

Электромагнитные процессы, протекающие в устройствах электрической цепи, могут быть описаны при помощи понятий об электродвижущей силе (ЭДС.), токе и напряжении.

Электрические цепи, в которых получение электрической энергии, её передача и преобразование происходят при неизменных во времени токах и напряжениях, называют цепями постоянного тока. В таких цепях электрические и магнитные поля не изменяются во времени. Так как токи и напряжения постоянны, то изменения этих величин во времени равны нулю:

$$\frac{di}{dt} = 0 ; \quad \frac{du}{dt} = 0.$$

В цепях постоянного тока чаще всего используют два основных элемента: источник энергии (генератор) с электродвижущей силой (ЭДС) E и внутренним сопротивлением R_0 и резистивный элемент (нагрузку) с сопротивлением R [Ом]. Помимо сопротивления R в электротехнике может использоваться величина, обратная сопротивлению, которая называется проводимость G и измеряется в сименсах, $1 \text{ См} = 1/\text{Ом}$:

$$G = \frac{1}{R}.$$

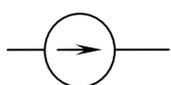


Рис. 1.1

В источниках электрической энергии (электромагнитные генераторы, гальванические элементы, термопреобразователи и др.) происходит преобразование того или иного вида энергии (энергия сжигаемого топлива, падающей воды, атомная или химическая энергия и т.д.) в электрическую. Источник ЭДС изображают в виде окружности диаметром 10мм со стрелкой внутри (рис.1.1), которая указывает положительное направление ЭДС (или направление увеличения потенциала).

В приёмниках электрической энергии (электродвигатели, электротермические устройства, лампы накаливания, резисторы и др.), наоборот, электрическая энергия преобразуется в тепловую, световую, механическую, химическую и др.

С помощью преобразовательных устройств электрическая энергия одного вида преобразуется в электроэнергию другого вида

(например, энергия переменного тока в постоянный ток, энергия переменного тока одной частоты в энергию переменного тока других частот и т.д.)

Кроме основных элементов, цепи содержат большое число вспомогательных элементов, выполняющих разнообразные функции. К ним относятся, например, выключатели, электроизмерительные приборы, резисторы для регулирования тока и напряжения, защитные устройства.

Все элементы электрической энергии соединяются между собой проводниками.

Графическое изображение реальной электрической цепи с помощью условных символов и знаков называется электрической схемой.

Такая схема представляет собой идеализированную цепь, которая служит расчетной моделью реальной цепи и иногда называется эквивалентной схемой замещения. Эта схема по возможности должна отражать реальные процессы, происходящие в действительности.

При проведении расчетов каждый реальный элемент цепи заменяется элементами схемы.

Для проведения анализа электрической цепи важно выделить такие понятия, как ветвь, узел и контур.

Ветвь – участок электрической цепи, образованный последовательно соединёнными элементами и характеризующийся собственным значением тока в данный момент времени.

Узел – это точка соединения трёх и более ветвей (если на электрической схеме в месте пересечения двух линий стоит точка, то в этом месте есть электрическое соединение 2 линий, в противном случае его нет).

Контур – замкнутая часть цепи, состоящая из нескольких ветвей и узлов.

На рис. 1.2 приведена схема электрической цепи, содержащей 4 геометрических узла (a,b,c,d), 3 потенциальных узла (с и d считаются одним узлом) и 5 ветвей.

Заземление любой точки схемы означает, что потенциал этой точки принят равным нулю.

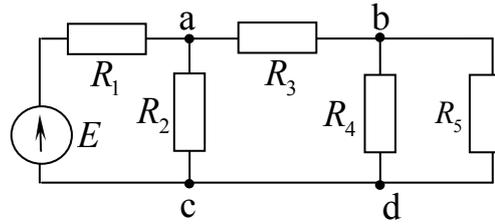


Рис.1.2. Схема электрической цепи

Токораспределение в такой схеме не изменяется, так как никаких новых ветвей, по которым могли бы протекать токи, не образуется. Если же заземлить 2 точки схемы и более, то в этом случае в схеме токораспределение изменится.

Электрические цепи постоянного тока бывают весьма разнообразны: *элементарные* (содержат один источник и один приёмник электроэнергии) *простые* (один источник и последовательно-параллельно соединённые приёмники – рис. 1.3а), *сложные* (несколько источников или при одном источнике приёмники соединены так, что их соединение нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному (разветвлённые (рис.1.2, 1.3б,г), с одним источником (рис.1.2, 1.3а), с несколькими источниками (рис. 1.3б, в), линейными и нелинейными).

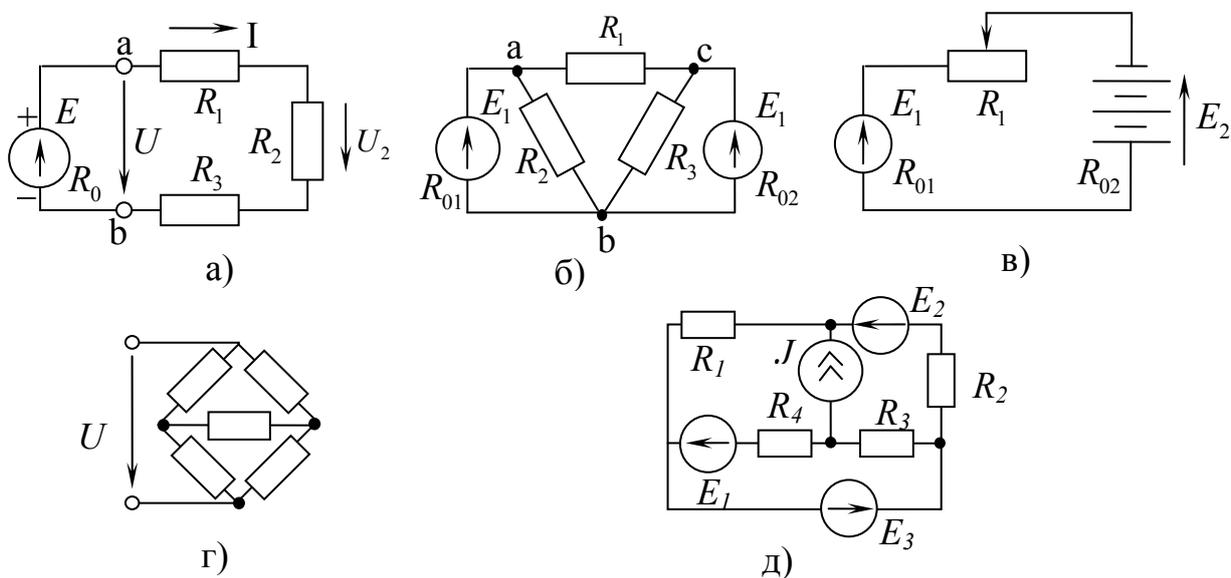


Рис. 1.3. Примеры схем электрических цепей

Линейной называется электрическая цепь, параметры которой (например, сопротивление) не зависят от напряжений и токов в

цепи. Если параметр хотя бы одного из элементов не остаётся постоянным при изменении напряжений или токов в цепи, то данный элемент и вся цепь называются нелинейными. Такими элементами является лампа накаливания, диод и др.

На схемах необходимо указывать положительное направление ЭДС и токов. Это нужно для того, чтобы при проведении расчетов по тем или иным методам было возможным составить необходимые уравнения.

В цепях постоянного тока с одним источником электрической энергии эти направления легко определить при заданной полярности источника (ток на нагрузке течет от плюса к минусу).

Часть электрической цепи, имеющая два вывода, с помощью которых она соединена с другой частью цепи, называется двухполюсником. Если эта часть содержит только пассивные элементы, то она называется пассивным двухполюсником.

Если выделенная часть цепи содержит источник ЭДС или тока, то соответствующий эквивалентный элемент будет называться активным двухполюсником.

Например, на рис. 1.3а справа от точек *a* и *b* расположена схема пассивного двухполюсника, соединенного с активным двухполюсником, схема которого дана слева от указанных точек.

1.2. Приёмники электрической энергии

1.2.1. Приёмники электроэнергии

Электротехническое устройство, обладающее сопротивлением и применяемое для ограничения тока, называется резистором.

Идеализированные модели резисторов называются резистивными элементами (при идеализации пренебрегают токами через изолирующие покрытия резисторов, каркасы проволочных резисторов и т. п.).

Резистивный элемент принято изображать в виде прямоугольника размером 10*4 мм. Условные обозначения разных типов резисторов приведены на рис. 1.4:

а) линейный; б) нелинейный.

Резистивный элемент учитывает преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а в конечном итоге –

в тепло. Его сопротивление обусловлено чисто механическими причинами – столкновением движущихся зарядов с молекулами вещества. При этом электрическая энергия переходит в тепло, не накапливаясь в элементе.



Рис. 1.4

1.2.2. Вольтамперная характеристика резистора

Резистор характеризуется вольтамперной характеристикой (ВАХ) $i = f(u)$. На рис.1.5 представлены ВАХ: 1 – линейного резистора; 2 и 3 – нелинейных резисторов).

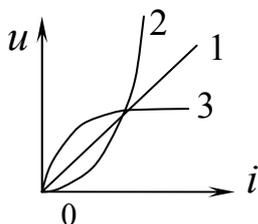


Рис. 1.5

Основной величиной, характеризующей резистор, является его сопротивление R , которое определяется из соотношения: $U = R \cdot I$, называемого законом Ома.

Сопротивление измеряется в Омах:

$$[R] = [U/I] = \text{В/А} = \text{Ом.}$$

То есть сопротивлением в 1 Ом обладает проводник, в котором устанавливается ток в 1 А при напряжении 1 В.

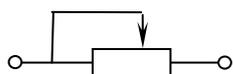


Рис. 1.6

При относительно небольших мощностях напряжение и ток регулируются при помощи переменных резисторов – реостатов. На схемах реостаты изображают так, как показано на рис. 1.6.

Принцип действия реостата состоит в следующем: при перемещении скользящего контакта по проволочной обмотке сопротивление реостата изменятся достаточно плавно.

При проведении расчетов электрических цепей в электротехнике пользуются некоторыми упрощенными моделями:

1. Резистор рассматривается как линейный элемент с сопротивлением R , величина которого остаётся постоянной. Однако в действительности при прохождении тока через резистор

происходит выделение тепла, что приводит к нагреванию самого резистора и, следовательно, к изменению его сопротивления.

2. Сопротивлением соединительных проводов часто пренебрегают (если их длина невелика $< 10\text{м}$), а если учитывают, то считают сосредоточенным в одном месте.

1. 2.3. Мощность приёмников

Мощность электрического тока, выделенного на потребителе, рассчитывается по формуле:

$$P = UI .$$

Единицей измерения мощности является 1Вт. Один Ватт есть мощность электрического тока силой 1А при напряжении 1В. Мощность в 1Вт – очень небольшая единица, поэтому мощность часто измеряется в киловаттах (кВт).

Задача. Через электроплиту, подключенную к сети в 120В, проходит ток 5А. Какова мощность этой плиты?

$$P = UI = 120 \cdot 5 = 600 \text{ Вт} = 0,6 \text{ кВт} .$$

Формуле мощности можно придать другой вид:

$$P = UI = IR \cdot I = I^2 R \quad \text{или} \quad P = UI = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} .$$

Значение мощности всегда положительно, что означает: приёмники только потребляют мощность (энергию).

Лекция 2

Источники электрической энергии. Их мощность и режимы работы. Баланс мощностей.

2.1. Источники ЭДС и тока

Чтобы в цепи поддерживался ток, нужно, чтобы источник электрической энергии создавал разность потенциалов на зажимах электрической цепи.

Источник электрической энергии подразделяются на источники постоянного и переменного тока.

В качестве источников постоянного тока используются гальванические элементы, аккумуляторы и электрогенераторы. Электрические свойства источника характеризуются его внутренним сопротивлением R_0 .

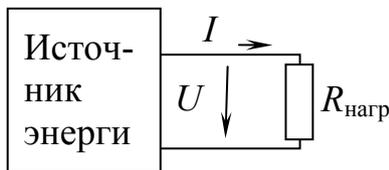


Рис. 2.1

Учет внутреннего сопротивления генератора необходим при расчете цепей. В то же время внутреннее сопротивление генератора часто оказывается во много раз меньше сопротивления внешней цепи. В этих случаях его можно считать равным

нулю, что позволит считать напряжение на зажимах цепи равным ЭДС генератора.

В линейных электрических цепях в качестве источников энергии различают источники ЭДС и источники тока. Генератор с внутренним сопротивлением, стремящимся к нулю $R_0 \rightarrow 0$, называется источником напряжения.

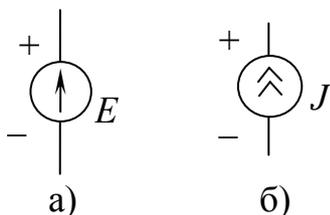


Рис. 2.2

Когда внутреннее сопротивление генератора очень велико $R_0 \rightarrow \infty$, ток во внешней цепи практически не зависит от сопротивления самой цепи. В этих случаях генератор характеризуется не ЭДС, а бесконечным внутренним сопротивлением и бесконечным значением ЭДС, при этом выполняется равенство: $\frac{E}{R_0} = I$, где E и R_0

стремятся к бесконечности. Такой источник называется источником тока, а создаваемый им ток – задающим.

Обозначения источники ЭДС и источники тока представлены на рис.2.2а и 2.2б соответственно.

Применительно к источникам связь между током и напряжением $U(I)$ называется *внешней характеристикой* и имеет вид, представленный на рис. 2.3. По рис. 2.3 видно, что по мере нарастания тока в цепи напряжение на нагрузке убывает, и, следовательно, уменьшается напряжение на выходных зажимах источника.

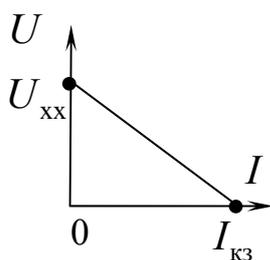


Рис. 2.3

Любой источник энергии можно охарактеризовать величиной мощности, им вырабатываемой: $P_{\text{ист}} = E \cdot I$.

Важным показателем рациональной работы источника электрической энергии является коэффициент полезного действия (КПД) η . Он определяется отношением мощности на нагрузке $P_{\text{нагр}}$ к полной мощности $P_{\text{ист}}$, вырабатываемой генератором:

$$\eta = \frac{P_{\text{нагр}}}{P_{\text{ист}}} = \frac{P_{\text{ист}} - \Delta P}{P_{\text{ист}}} = 1 - \frac{\Delta P}{P_{\text{ист}}},$$

где ΔP – мощность потерь при передаче электроэнергии от источника к потребителю, Вт.

КПД может быть выражен через параметры цепи:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{\text{нагр}}}{P_{\text{ист}}} = \frac{R_{\text{нагр}} I^2}{EI} = \frac{R_{\text{нагр}} I^2}{(U + IR_0)I} = \frac{R_{\text{нагр}} I^2}{(IR_{\text{нагр}} + IR_0)I} = \frac{R_{\text{нагр}} I^2}{(R_{\text{нагр}} + R_0)I^2} = \\ &= \frac{R_{\text{нагр}}}{R_{\text{нагр}} + R_0}. \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что КПД тем выше, чем меньше внутреннее сопротивление источника энергии.

2.2. Баланс мощностей

Так как электрическая цепь не может длительно накапливать энергию, то сумма мощностей всех источников электроэнергии равна сумме мощностей всех приёмников и вспомогательных элементов:

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{нагр}}.$$

При определении $\sum P_{\text{ист}}$ могут иметь место различные варианты (рис.2.4).

Мощность источника ЭДС $P_E = \pm E \cdot I$, где «+» – если направления E и I совпадают. Мощность источника тока $P_J = U_J J$, где U_J направлено так, как показано на рисунке. Напряжение U_J обычно находится по второму закону Кирхгофа.

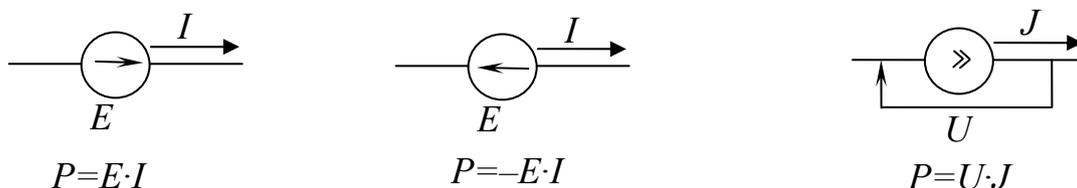


Рис.2.4

Знак «-» у мощности источника означает, что источник не выдаёт, а потребляет энергию.

Причем в последнем случае U_J – это напряжение между той точкой, к которой ток J притекает, и той, из которой он вытекает.

Задача. Падение напряжения внутри источника напряжения $U_0 = 2\text{ В}$, $E = 12\text{ В}$, сопротивление внешней цепи 5 Ом. Определить напряжение на зажимах цепи, ток в цепи, внутреннее сопротивление источника. Составить уравнение баланса мощностей.

Решение: $E = U + IR_0$; $U = E - U_0 = 12 - 2 = 10\text{ В}$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10}{5} = 2\text{ А}; \quad R_0 = \frac{E - U}{I} = 1\text{ Ом}$$

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{нагр}} + \Delta P; \quad EI = 12 \cdot 2 = 24 \text{ Вт}$$

$$P_{\text{нагр}} = (R + R_0)I^2 = 24 \text{ Вт}$$

Задача*. Мощность потерь энергии на внутреннем сопротивлении источника $\Delta P = 25 \text{ Вт}$, $R_0 = 0,4 \text{ Ом}$. Определить E и напряжение источника, если сопротивление внешней цепи 12 Ом .

Решение.

$$\Delta P = I^2 R_0; \quad I = \sqrt{\frac{\Delta P}{R_0}} \approx 7,9 \text{ А}; \quad U = RI = 12 \cdot \sqrt{\frac{25}{0,4}} \approx 94,87$$

$$E = I(R_0 + R) = 7,9 \cdot (12 + 0,4) \approx 97,96$$

2.3. Режимы работы источника ЭДС

На практике при исследовании источников ЭДС различают четыре режима работы:

1. Номинальный режим – режим, при котором ток и напряжение соответствуют значениям, установленным заводом-изготовителем. В этом режиме генератор может длительно работать при максимально допустимой нагрузке, не выходя из строя (то же относится и к приёмнику электроэнергии).

2. Режим холостого хода – характеризуется отсутствием тока в цепи вследствие того, что $R_{\text{нагр}} = \infty$. Напряжение на зажимах источника наибольшее и равно ЭДС.

3. Режим короткого замыкания – режим, при котором напряжение на выводах источника равно нулю, что возможно при $R_{\text{нагр}} = 0$. В этом случае ток в цепи будет ограничен только внутренним сопротивлением источника:

$$I_{\text{кз}} = \frac{E}{R_0}; \quad P_{\text{ист}} = E \cdot I_{\text{кз}}; \quad P_{\text{нагр}} = 0.$$

Для источников с малым внутренним сопротивлением (аккумуляторы, электромагнитные генераторы) режим короткого замыкания опасен и является аварийным.

В отличие от **режима** короткого замыкания на практике часто используют **опыт** короткого замыкания, например, для определения параметров трансформаторов, четырёхполюсника и так далее.

4. Согласованный режим – это режим, при котором сопротивление внешней нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника $R_{\text{нагр}} = R_{\text{ист}}$. При таком режиме работы в приёмнике выделяется наибольшая мощность, равная половине мощности источника $P_{\text{нагр}} = 0,5P_{\text{ист}}$. В этом случае $\eta = 0,5$. Такой режим используется в измерительных цепях, устройствах средств связи.

Задача. В каких пределах и как будет изменяться мощность источника ЭДС при изменении внешнего сопротивления от режима короткого замыкания до режима холостого хода при $E = 50$ В и его внутреннем сопротивлении $R_0 = 0,1$ Ом?

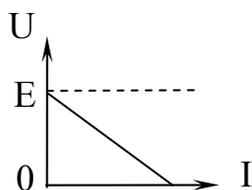
Решение. Для режима холостого хода: $P_{\text{ист}} = EI_{\text{хх}} = E \cdot 0 = 0$.

Для режима короткого замыкания:

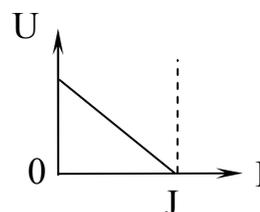
$$P = EI_{\text{кз}} = E \cdot \frac{E}{R_0} = \frac{E^2}{R_0} = 25 \text{ кВт.}$$

2.4. Идеальные и реальные источники энергии

а) идеальный источник ЭДС б) идеальный источник тока



$$\begin{aligned} R_0 &= 0; \\ U &= U_{\text{хх}} = E = \text{const}; \\ I &= \text{var} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R_0 &= \infty; \\ I &= I_{\text{кз}} = J = \text{const}; \\ U &= \text{var} \end{aligned}$$

Рис. 2.5

Эти два разнородных источника электрической энергии являются эквивалентными, поскольку при замене одного источника другим токи и напряжения во внешней электрической цепи остаются неизменными.

При отсоединении эквивалентных источников ЭДС и тока от внешней нагрузки напряжение на внешних зажимах обоих источников равно ЭДС E . Именно это обеспечивает их эквивалентность при любом режиме работы.

На рис.2.5а,б представлены внешние характеристики идеальных источника ЭДС и источника тока.

Реальный источник электрической энергии представляется одной из двух схем замещения (как в виде источника ЭДС, так и в виде источника тока), представленных на рис. 2.6.



Рис. 2.6

От одной схемы можно перейти к другой по соотношениям:

$$G_0 = (R_0)^{-1}; E = R_0 \cdot J \text{ или } J = G_0 \cdot E.$$

Источник ЭДС и источник тока – идеализированные источники, физически осуществить которые, строго говоря, невозможно.

Лекция 3

Основные законы электрических цепей. Эквивалентные преобразования электрических цепей.

Законы Ома и законы Кирхгофа являются основными законами, на базе которых можно проводить исследование цепей постоянного тока.

3.1. Закон Ома.

Георг Симон Ом (1789–1854) – знаменитый немецкий физик. Наиболее известные работы Ома касались вопросов о прохождении электрического тока и привели к знаменитому «закону Ома», связывающему сопротивление цепи электрического тока, напряжение и силу тока. В первой его учёной работе (1825) Ом опытно исследует эти явления, но, по несовершенству приборов, приходит к ошибочному результату. В последующей работе (1826) Ом формулирует свой знаменитый закон. Несмотря на важность этих работ они прошли незамеченными и были встречены даже враждебно, и лишь когда Пулье во Франции снова пришёл (1831–37), опытным путём, к тем же результатам, закон Ома был принят учёным миром.

Дальнейшие работы Ома по электричеству касались вопросов униполярной проводимости (1830) и нагревания проводов током (1829). В 1839 г. последовал ряд работ по акустике, приведших к формулировке закона (тоже называемого «законом Ома»), о том, что человеческое ухо познаёт лишь простые гармонические колебания, и что всякий сложный тон разлагается ухом на составные (по закону Фурье) и познается лишь как сумма их. И этот закон не был принят современниками Ома, и лишь Гельмгольц, через восемь лет после смерти Ома, доказал его полную справедливость.

Закон Ома для участка цепи, не содержащего источника ЭДС, устанавливает связь между током и напряжением на некотором

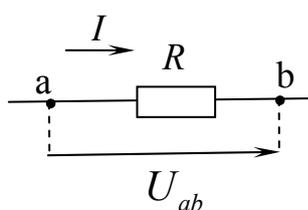


Рис.3.1

участке цепи: $I = \frac{U_{ab}}{R}$. Этот закон

показывает, что ток на участке цепи прямо пропорционален напряжению на этом участке и обратно пропорционален сопротивлению того же участка.

Согласно закону Ома, напряжение на

участке $a-b$ равно $U_{ab} = IR$, где $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ – разность потенциалов на концах сопротивления (всегда обозначается от большего потенциала к меньшему).

Разность потенциалов на концах сопротивления принято называть напряжением на сопротивлении либо падением напряжения. Положительное падение напряжения совпадает с положительным направлением тока.

Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, позволяет найти ток этого участка по известной разности потенциалов на концах участка цепи и имеющегося на этом участке источника ЭДС.

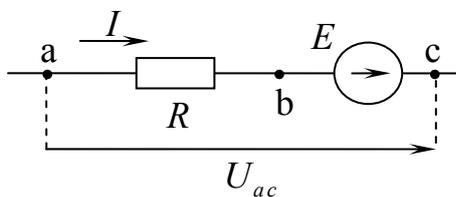


Рис.3.2

Если $\varphi_a > \varphi_c$, то ток и напряжение будут направлены от точки a к точке c .

В этом случае:

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) + E}{R} = \frac{U_{ac} + E}{R}.$$

Здесь напряжение и ЭДС берутся с положительным знаком, поскольку направление U_{ac} и тока I совпадает с направлением E .

Если направление E не совпадает с направлением напряжения и тока, тогда:

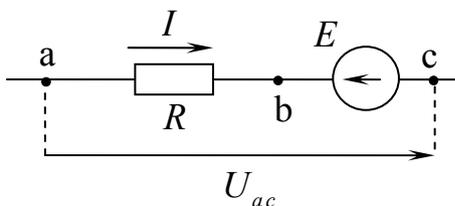


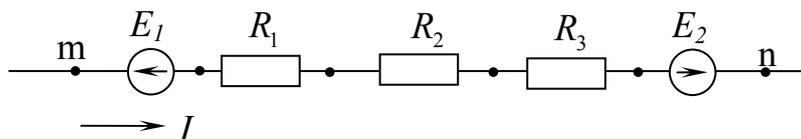
Рис.3.3

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) - E}{R} = \frac{U_{ac} - E}{R}$$

В общем случае:

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) \pm E}{R} = \frac{U_{ac} \pm E}{R}$$

Пример. Составить выражение для тока данной цепи по закону Ома:



$$\text{Ответ: } I = \frac{(\varphi_m - \varphi_n) - E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Закон Ома для полной цепи:

Ток в электрической цепи прямо пропорционален ЭДС источника энергии и обратно пропорционален сумме сопротивлений внешней цепи и самого источника

$$I = \frac{E}{R + R_0}.$$

Откуда можно определить ЭДС

$$E = U + IR_0 = U + \Delta U ,$$

т.е. ЭДС источника энергии равна сумме падений напряжения во внешней цепи и в самом источнике.

3.2. Законы Кирхгофа

Густав Роберт Кирхгоф (1824–1887) – немецкий физик, иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1862).

Занимался вопросами о распределении электричества в проводниках, о разряде конденсаторов, о течении электричества по подводным кабелям и т.д.; особенно важна работа об индукции токов (1849), содержащая описание способа определения электрического сопротивления проводников в абсолютной мере, и два больших мемуара об индуктированном магнетизме (1853 и 1876).

Одновременно Кирхгоф обнаружил ряд замечательных работ по механике, относящихся, главным образом, к теории деформации, равновесия и движения упругих тел.

Совместно с Р.В. Бунзеном заложил основы спектрального анализа (1859), с помощью которого открыл цезий (1860) и рубидий (1861). Ввел понятие абсолютно черного тела и открыл закон излучения, названный его именем.

Законы Кирхгофа являются универсальными: они справедливы относительно мгновенных значений токов и напряжений для всех цепей в любых режимах работы в любой момент времени.

Первый закон Кирхгофа (закон Кирхгофа для токов):

Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

При этом токи, втекающие в узел, считаются положительными и берутся со знаком плюс, а вытекающие – считаются отрицательными и берутся со знаком минус.

Иначе: сумма втекающих в любой узел токов равна сумме вытекающих из узла токов:

Например, для узла на рис. 3.4:

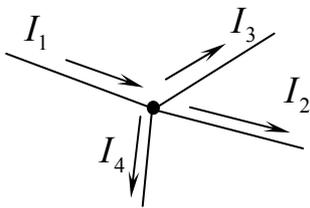


Рис. 3.4

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

или

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4.$$

Этот закон является следствием того, что в узлах цепи заряды не могут накапливаться. В противном случае изменялись бы потенциалы узлов и токи в ветвях.

Второй закон Кирхгофа (закон Кирхгофа для напряжений):

Алгебраическая сумма ЭДС, действующих в любом замкнутом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжения на всех участках этого контура:

$$\sum_{p=1}^m E_p = \sum_{k=1}^n U_k,$$

где n – число пассивных элементов; m – число источников ЭДС.

Например, для цепи, содержащей один источник: $E = U + IR_0$, где U – напряжение на зажимах цепи, R_0 – внутреннее сопротивление источника ЭДС.

Иначе: алгебраическая сумма напряжений участков (не падений напряжений) любого замкнутого контура равна нулю $\sum U_k = 0$.

Например,

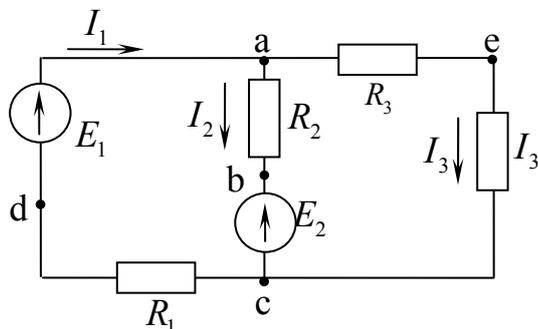


Рис.3.5

$$U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + U_{da} = 0 \text{ или } U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + E_1 = 0,$$

$$U_{da} + U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = 0 \text{ или } E_1 + U_{ab} - E_2 + U_{cd} = 0.$$

При составлении уравнений слагаемые берут со знаком плюс, если действующие на участках напряжения и ЭДС совпадают с направлением обхода, и со знаком минус, если их направления противоположны направлению обхода.

Задача. К источнику постоянного тока с ЭДС $E=15$ В и внутренним сопротивлением $R_0=2,5$ Ом подключен резистор сопротивлением $R=10$ Ом. Определить ток в цепи и падение напряжения на источнике.

Решение.

$$I = E / (R + R_0) = 15 / (10 + 2,5) = 1,2 \text{ А}$$

$$U = R \cdot I = 10 \cdot 1,2 = 12 \text{ В}$$

Или системой уравнений. Исходя из второго закона Кирхгофа и закона Ома для участка цепи, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} E = U + IR_0 \\ U = I \cdot R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,5 = U + 2,5I \\ U = 10I \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $I=1,2$ А, $U=12$ В.

3.3. Эквивалентные преобразования электрических цепей

Само по себе преобразование электрических цепей не является методом расчёта. Но оно способствует упрощению расчёта цепи. Естественно, что любое преобразование должно быть эквивалентным, то есть если заменяется какой-то участок цепи, то это не должно сказаться на токах и напряжениях на других участках.

3.3.1 Эквивалентная замена последовательного, параллельного и смешанного соединения резисторов

При рассмотрении электрических цепей совокупность сопротивлений резисторов, соединённых произвольным образом, целесообразно представить в виде одного резистора, обладающего эквивалентным сопротивлением $R_{\text{ЭКВ}}$.

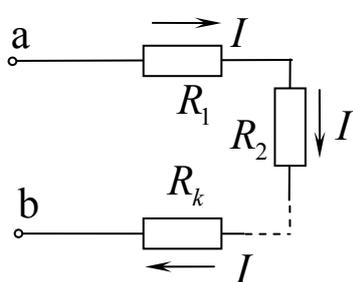
Рассмотрим эквивалентную замену последовательного и параллельного соединения резисторов.

Последовательным соединением элементов цепи называется такое соединение, когда условный конец первого элемента соединён с условным началом второго элемента, условный конец второго – с условным началом третьего и т.д.

При этом через все элементы протекает один и тот же ток

$$I_1 = I_2 = \dots = I_k = I.$$

Схема на рис. 3.6 содержит k сопротивлений, соединённых последовательно. Пусть ток I направлен по часовой стрелке. В соответствии со вторым законом Кирхгофа:



$$\begin{aligned} E &= IR_1 + IR_2 + \dots + IR_k = \\ &= (R_1 + R_2 + \dots + R_k)I = R_{\text{ЭКВ}} I \end{aligned}$$

Рис. 3.6

Таким образом, сопротивление, эквивалентное последовательному соединению резисторов для приведенного примера, $R_{\text{ЭКВ}} = \sum R_k$.

Следовательно, при последовательном соединении сопротивления складываются. Общее сопротивление больше наибольшего из включенных сопротивлений. Если сопротивления одинаковы

$$R_1 = R_2 = \dots = R_k = R, \text{ то } R_{\text{экв}} = kR.$$

По второму закону Кирхгофа общее напряжение цепи равно сумме напряжений на каждом элементе: $U = U_1 + U_2 + \dots + U_k$.

Мощность всей цепи равна сумме мощностей, выделяемых на каждом элементе: $P = \sum_{k=1}^n P_k = I^2 R_{\text{экв}} = I^2 \sum_{k=1}^n R_k$

Последовательное соединение нашло широкое применение на практике. Например, последовательно с приёмником R часто включается резистор r_p для регулирования напряжения, тока или мощности приёмника (рис. 3.7,а). Для расширения пределов измерения вольтметров последовательно с ними включают добавочные резисторы r_d (рис.3.7,б). С помощью реостата, включаемого в различные ветви цепи двигателя постоянного тока, производят изменение его пускового тока или частоты вращения.

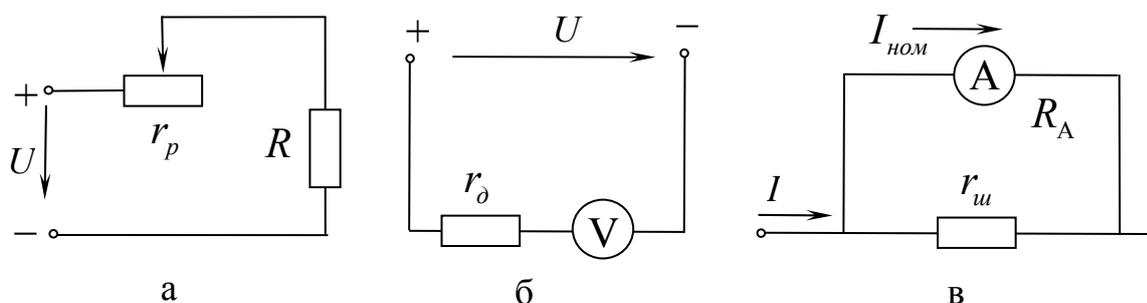


Рис.3.7. Схемы электрических цепей с последовательным соединением резистивных элементов

Параллельным соединением элементов цепи называется такое соединение, при котором все элементы присоединены к одной паре узлов. Характерным для параллельного соединения является одно и то же напряжение U на выводах всех элементов: $U_1 = U_2 = \dots = U_k = U$.

Параллельно соединяются обычно различные элементы цепей, рассчитанные на одно и то же напряжение. При этом виде соединения не требуется согласовывать номинальные данные приёмников, возможно включать и отключать любые приёмники независимо от остальных, а при выходе из строя какого-либо приёмника остальным остаются включенными.

Параллельное включение применяется часто для расширения пределов измерения амперметров (рис. 3.7,в): если ток I в электрической цепи превышает номинальный ток $I_{ном}$ амперметра, параллельно с ним включают шунтирующий резистор $r_{ш}$.

Нередко параллельное соединение используют для уменьшения эквивалентного сопротивления какого-либо участка электрической цепи.

В случае параллельного соединения k сопротивлений (рис. 3.8), по закону Ома ток I_k в некотором сопротивлении R_k равен

$$I_k = \frac{E}{R_k}.$$

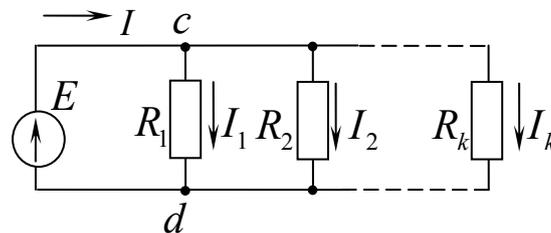


Рис.3.8

В соответствии с первым законом Кирхгофа

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_k = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \dots + \frac{E}{R_k} = E \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_k} \right) = E \cdot \frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}}$$

$$\text{Отсюда } R_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_k}.$$

Мощность всей цепи равна сумме мощностей, выделяемых на каждом элементе: $P = \sum_{k=1}^n P_k = I^2 R_{\text{ЭКВ}}$.

В случае параллельного соединения двух сопротивлений:

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

При включении k одинаковых сопротивлений R общее сопротивление уменьшится в k раз:

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R}{k}.$$

***Имея в виду, что величина $1/R$ является проводимостью G , можно сказать, что эквивалентная проводимость участка с параллельным соединением сопротивлений равна сумме проводимостей этих сопротивлений:

$$G_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_k} = G_1 + G_2 + \dots + G_k.$$

В случае равных сопротивлений $G_{\text{ЭКВ}} = kG$.

При расчёте резистивных участков полезно использовать *правило разброса*: ток одной из двух параллельно соединённых ветвей, не содержащих источники, равен произведению общего тока на сопротивление другой ветви, поделённому на сумму сопротивлений ветвей.

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Вывод основан на законе Ома.

Смешанным соединением участков цепи называется сочетание последовательного и параллельного соединений. Расчет цепи со смешанным соединением сводится к расчету параллельных и последовательных соединений, а сама смешанная цепь приводится к эквивалентной последовательной.

Задачи (для устного рассмотрения):

Записать выражения эквивалентного сопротивления для цепей, представленных на рис. 3.9.

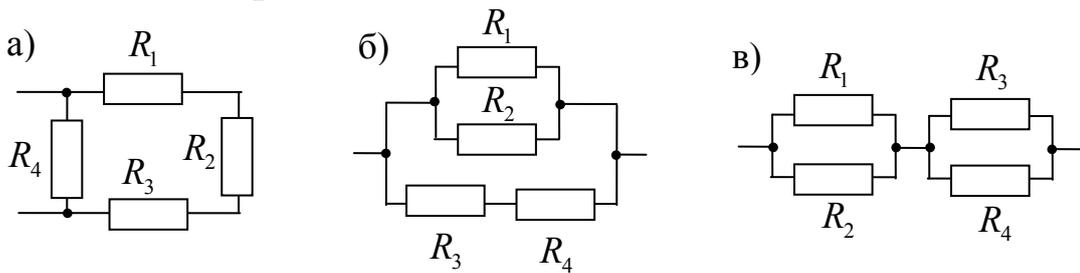


Рис. 3.9

Задача. Рассчитать цепь, представленную на рис. 3.10

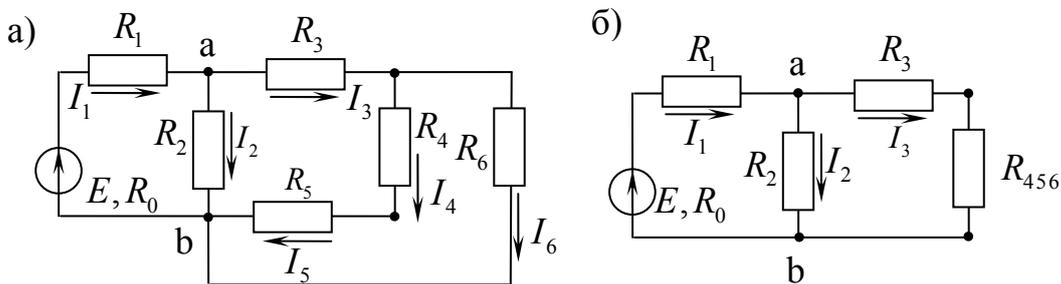


Рис. 3.10

Решение. Резисторы R_4 и R_5 соединены последовательно, а резистор R_6 – с ними параллельно. Поэтому их эквивалентное сопротивление

$$R_{456} = \frac{R_{45}R_6}{R_{45} + R_6}, \quad \text{где } R_{45} = R_4 + R_5.$$

После проведенных преобразований схема принимает вид, показанный на рис.3.10б, а эквивалентное сопротивление всей цепи, включая внутреннее сопротивление источника, равно

$$R_{\text{экв}} = R_0 + R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_{456})}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

Ток I_1 в неразветвленной части цепи определяется по закону

Ома: $I_1 = \frac{E}{R_{\text{экв}}}.$

Согласно второму закону Кирхгофа, $U_{ab} = E - (R_0 + R_1)I_1$, тогда $I_2 = U_{ab}/R_2$, $I_3 = U_{ab}/(R_3 + R_{456})$.

Переходя к рис. 3.10а, с помощью правила разброса определим токи I_4 , I_5 , I_6 :

$$I_4 = I_5 = I_3 \frac{R_6}{R_4 + R_5 + R_6}; \quad I_6 = I_3 \frac{R_4 + R_5}{R_4 + R_5 + R_6}.$$

Для проверки решения можно воспользоваться первым законом Кирхгофа и уравнением баланса мощностей, которые для схемы, изображенной на рис. 3.10а, примут вид:

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad I_3 = I_4 + I_6;$$

$$EI_1 = (R_0 + R_1)I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 + (R_4 + R_5)I_4^2 + R_6I_6^2.$$

Задача. Какое сопротивление нужно включить параллельно сопротивлению 10 Ом, чтобы получить общее сопротивление 3 Ом?

Решение.

Составим уравнение:

$$3 = \frac{10R}{10 + R}, \quad 30 + 3R = 10R,$$

откуда $7R = 30 \quad R \approx 4,29 \text{ Ом}.$

Заметим, что общее сопротивление получилось меньше наименьшего сопротивления.

Задания для самостоятельного решения

1. Цепь состоит из двух параллельных ветвей, включенных под напряжением 60В. Ток до разветвления 1,5А. Сопротивление одной параллельной ветви в 2 раза больше, чем сопротивление другой. Определить токи и сопротивления ветвей.

(Ответ: $R_1 = 60 \text{ Ом}$; $I_1 = 1 \text{ А}$; $R_2 = 120 \text{ Ом}$; $I_2 = 0,5 \text{ А}$)

2. Все сопротивления цепи (рис.3.11) по 20 Ом, ток $I_4 = 1\text{А}$. Определить напряжение на зажимах всей цепи (Ответ: 110 В)

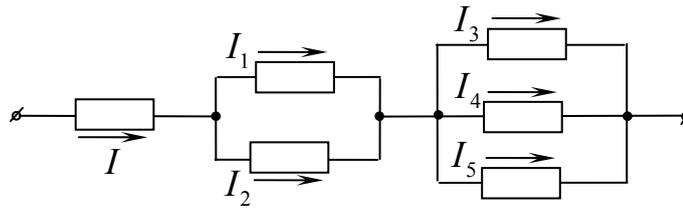


Рис.3.11

3. Все сопротивления цепи (рис.3.12) по 13 Ом, напряжение на зажимах цепи 36 В. Определить I_1 на участке с сопротивлением R_1 . (Ответ: 1 А)

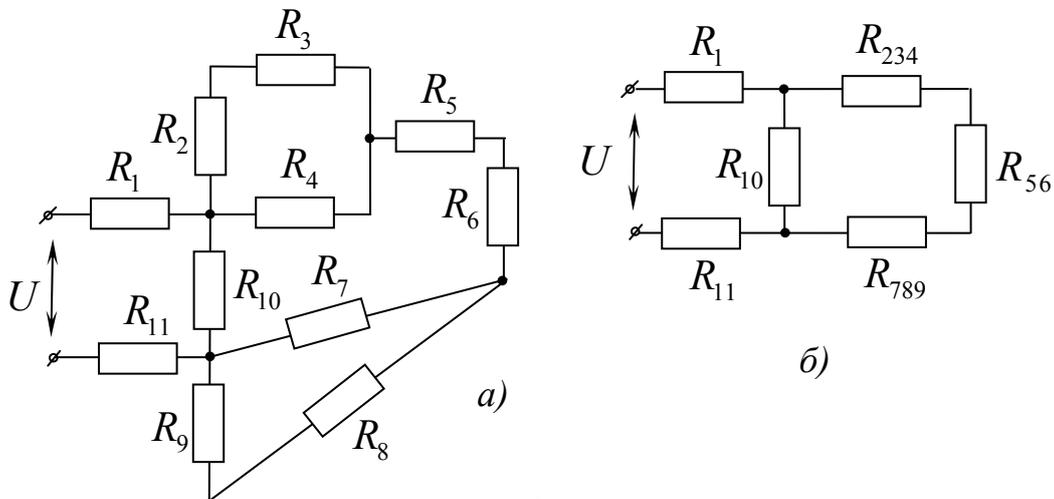


Рис. 3.12

3.3.2 Соединение элементов по схемам «треугольник» и «звезда»

Существуют цепи, которые не поддаются расчету методом эквивалентных сопротивлений, так как в них нет сопротивлений, включенных между собой последовательно или параллельно. Примером такой цепи является цепь, которая содержит замкнутые

контуры из трёх сопротивлений – трехполюсники. Трёхполюсник считается пассивным, если не содержит источников электрической энергии. Среди пассивных трёхполюсников наиболее часто встречаются «звезда» и «треугольник» сопротивлений. Это основные схемы соединения элементов трёхфазных цепей.

Соединение в «звезду» – это соединение трёх сопротивлений, при котором они имеют общую точку и образуют три расходящихся луча. Обозначается Y .

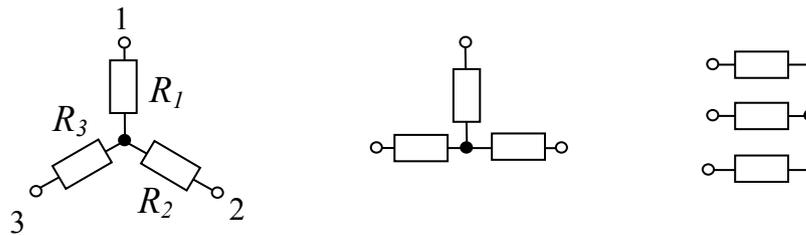


Рис.3.12

Соединением в «треугольник» называют соединение, при котором элементы образуют геометрический треугольник. Обозначается Δ .

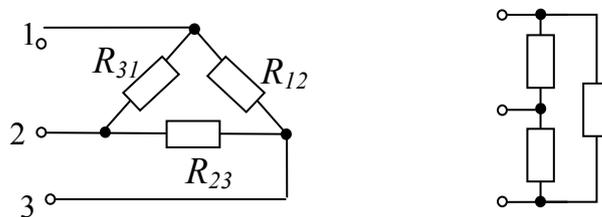


Рис.3.13

Часто при решении задач используется способ расчета, который состоит в замене треугольника сопротивлений (R_{ab} , R_{bc} , R_{ac}) эквивалентной трёхлучевой звездой сопротивлений (R_a , R_b , R_c), как показано на рис. 3.13 пунктиром.

Замена треугольника сопротивлений эквивалентной звездой, и наоборот, осуществляется при условии, что такая замена не изменяет потенциалов узловых точек a , b , c являющихся вершинами треугольника и эквивалентной звезды.

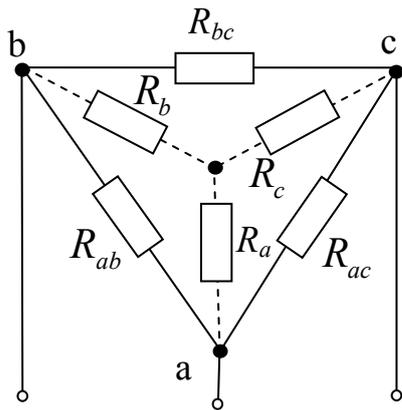


Рис.3.14

Одновременно предполагается, что в остальной части схемы, незатронутой преобразованием, режим работы не изменяется (не изменяются токи, напряжения, мощности).

Сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений сторон треугольника, прилегающих к лучу, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника.

Формулы, преобразования треугольника в звезду имеют вид:

$$\Delta \rightarrow Y: \quad R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}};$$

$$R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}};$$

$$R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}.$$

Обратное преобразование звезды в эквивалентный треугольник, осуществляется по формулам:

$$Y \rightarrow \Delta: \quad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a};$$

$$R_{ac} = R_a + R_c + \frac{R_a \cdot R_c}{R_b};$$

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}$$

Здесь сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений двух лучей звезды, опирающихся на это сопротивление, плюс произведение сопротивлений указанных лучей, деленное на сопротивление третьего луча звезды.

В случае равенства сопротивлений звезды $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$ сопротивление стороны треугольника равно $R_{\Delta} = 3R_Y$.

В случае равенства сторон треугольника $R_{12} = R_{13} = R_{23} = R_{\Delta}$, сопротивление луча звезды: $R_Y = R_{\Delta} / 3$

Примером применения такого преобразования являются мостовые цепи (рис.3.15)

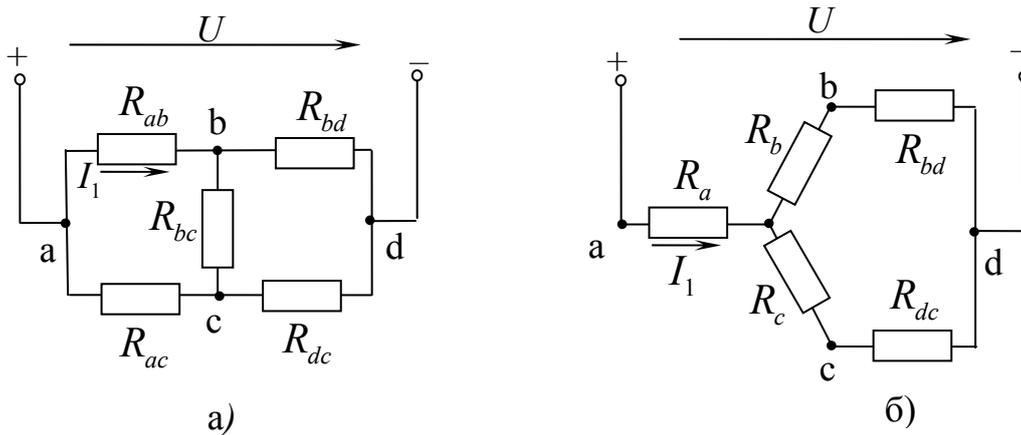


Рис. 3.15 Схема мостовой цепи (а) и соответствующая ей схема после замены одного из треугольников звездой (б)

3.3. Последовательное и параллельное соединение источников энергии

Последовательное включение применяется и для источников энергии. На рис. 3.16,а представлено *согласное* включение источников. При этом ЭДС источников складывается, и общая ЭДС равна сумме всех ЭДС. Таким образом, например, соединены элементы аккумуляторных батарей.

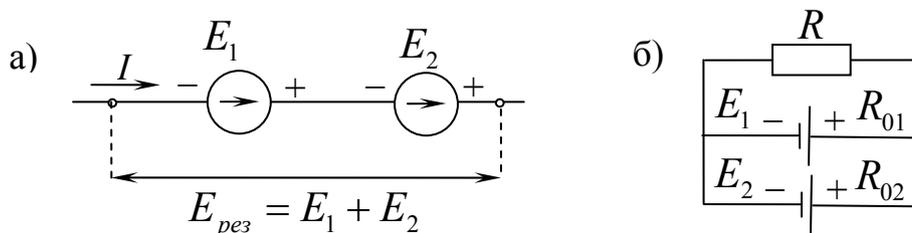


Рис. 3.16

В случае *встречного* соединения источников результирующая ЭДС $E_{рез}$ равна разности соответствующих ЭДС. Ток в такой цепи направлен по направлению большей ЭДС.

Источники тока также могут соединяться параллельно (рис. 3.15,б). В этом случае ЭДС источников включены согласно по отношению к нагрузке, а по отношению друг к другу – встречно. Если ЭДС первого источника больше ЭДС второго источника, то из первого во второй пойдёт уравнительный ток $I_{ур} = \frac{E_1 - E_2}{R_{0_1} + R_{0_2}}$. Этот

ток к потребителю не попадает, потери и нагрев источников увеличиваются. При равенстве ЭДС источников уравнительный ток не возникает: $I_{ур} = 0$.

Например. Определить падение напряжения на участке цепи, приведенном на рис. 3.17.

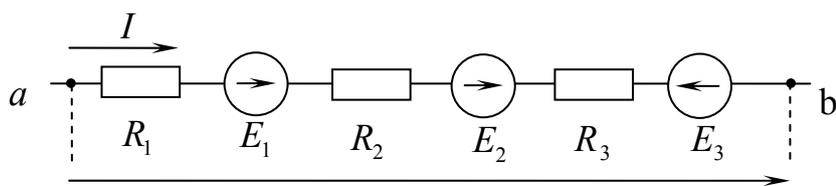


Рис. 3.17

Решение. $U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a = IR_1 + E_1 + IR_2 + E_2 + IR_3 - E_3$

Задача. Определить ток в цепи, изображенной на рис. 3.18, напряжения на зажимах источников тока и падения напряжения на сопротивлениях, если $E_1 = 100\text{В}$, $R_{0_1} = 0,1\text{Ом}$, $E_2 = 75\text{В}$, $R_{0_2} = 0,3\text{Ом}$, $E_3 = 50\text{В}$, $R_{0_3} = 0,1\text{Ом}$, $R_1 = 50\text{Ом}$, $R_2 = 20\text{Ом}$.

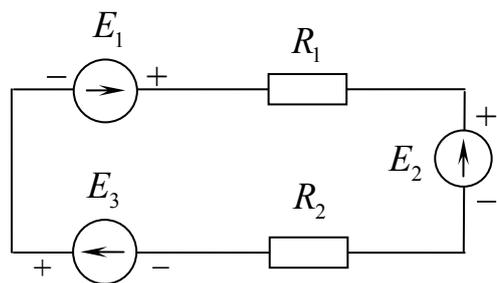


Рис. 3.18

Решение.

Результирующая ЭДС:

$$E_{рез} = E_1 - E_2 + E_3 = 100 - 75 + 50 = 75\text{В}$$

Эквивалентное сопротивление:

$$R_{эКВ} = R_1 + R_2 + R_3 + R_{0_1} + R_{0_2} + R_{0_3} = 7,5\text{Ом}$$

Ток в цепи $I = \frac{E_{\text{рез}}}{R_{\text{экв}}} = \frac{75}{7,5} = 10 \text{ А}.$

Внутренние падения напряжений:

$$\Delta U_{01} = 10 \cdot 0,1 = 1 \text{ В},$$

$$\Delta U_{02} = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ В},$$

$$\Delta U_{03} = 10 \cdot 0,1 = 1 \text{ В}.$$

Напряжение источников тока:

$$U_1 = E_1 - \Delta U_{01} = 100 - 1 = 99 \text{ В},$$

$$U_2 = E_2 - \Delta U_{02} = 75 - 3 = 72 \text{ В},$$

$$U_3 = E_3 - \Delta U_{03} = 50 - 1 = 49 \text{ В}.$$

Падение напряжения на сопротивлениях:

$$\Delta U_1 = IR_1 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ В},$$

$$\Delta U_2 = IR_2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ В}.$$

Проверка:

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \Delta U_{01} + \Delta U_{02} + \Delta U_{03} = 50 + 20 + 1 + 3 + 1 = 75 \text{ В} = E_{\text{рез}}$$

Задача.

Два источника постоянного тока, соединенные параллельно, имеют $E_1 = 11,5 \text{ В}$, $R_{01} = 2,5 \text{ Ом}$, $E_2 = 16,5 \text{ В}$, $R_{02} = 6 \text{ Ом}$ и

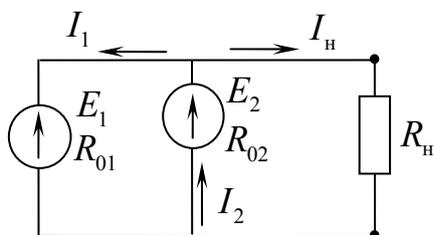


Рис. 3.19

нагрузочный резистор сопротивлением $R_{\text{н}} = 30 \text{ Ом}$. Определить значения и направления токов через источники и нагрузку.

Составить баланс мощностей. Указать режим работы каждого источника и определить падение напряжения на зажимах источников.

Решение. На рис. 3.19 представлена схема соединения указанных элементов. Выбранное направление токов показано стрелками.

В соответствии с первым законом Кирхгофа, $I_2 = I_1 + I_H$. Для двух независимых контуров составим два уравнения по второму закону Кирхгофа.

Для контура, включающего в себя два источника E_1 и E_2 , выбираем направление обхода против часовой стрелки и записываем:

$$E_2 - E_1 = I_1 R_{01} + I_2 R_{02}.$$

Для контура с источником E_2 и сопротивлением нагрузки R_H при обходе по часовой стрелке

$$E_2 = I_H R_H + I_2 R_{02}.$$

Имеем систему 3 уравнений с тремя неизвестными: I_1, I_2, I_H . Подставив в них значения ЭДС и сопротивлений и решив эту систему, находим:

$$I_1 = 0,3\text{А}, I_2 = 0,71\text{А}, I_H = 0,41\text{А}.$$

Источник E_1 работает в режиме потребителя, а E_2 – генератора. Поэтому при составлении баланса мощностей необходимо помнить, что мощность ЭДС E_1 отрицательна:

$$E_2 I_2 - E_1 I_1 = I_1^2 R_{01} + I_2^2 R_{02} + I_H^2 R_H.$$

$$16,5 \cdot 0,71 - 11,5 \cdot 0,3 = 0,3^2 \cdot 2,5 + 0,71^2 \cdot 6 + 0,41^2 \cdot 30 \\ 11,7\text{Вт} \approx 11,72\text{Вт}.$$

Падения напряжения на зажимах источника можно определить двумя способами:

а) $U = I_H R_H = 0,41 \cdot 30 = 12,3\text{В};$

б) $U = E_2 - I_2 R_{02} = 16,5 - 0,71 \cdot 6 = 12,24\text{В}.$

Лекция 4

Методы расчета разветвленных электрических цепей с несколькими источниками

Для расчета цепей с несколькими источниками используются различные методы. В том случае, когда в разветвленной цепи содержится группа активных или пассивных элементов, соединённых последовательно или параллельно, следует для упрощения расчета заменить их одним эквивалентным активным или пассивным элементом. Также целесообразно использовать преобразование треугольника пассивных элементов в звезду.

4.1. Метод законов (уравнений) Кирхгофа

Этот метод основан на применении первого и второго законов Кирхгофа, не требует преобразования схемы и пригоден для расчета любой цепи. В этом его преимущество.

Порядок решения задач этим методом следующий:

1. Произвольно выбираются положительные направления токов во всех ветвях. Если принятое направление тока не совпадает с действительным, то при расчете такие токи получаются со знаком минус.

2. По первому закону Кирхгофа для узлов составляются $(n-1)$ уравнение, где n – количество узлов.

3. По второму закону Кирхгофа составляют **уравнения для ветвей** в количестве $m-(n-1)$, где m – число ветвей. При этом обход контура можно производить как по часовой стрелке, так и против нее. За положительные ЭДС и токи принимаются такие, направление которых совпадает с направлением обхода контура. Направление действующей ЭДС внутри источника всегда принимают от минуса к плюсу.

4. В общей сложности должно быть составлено столько уравнений, сколько неизвестных токов. Все уравнения должны быть независимы.

Задача. Для цепи на рис. 4.1. дано: $E_1 = 60 \text{ В}$, $E_2 = 48 \text{ В}$,

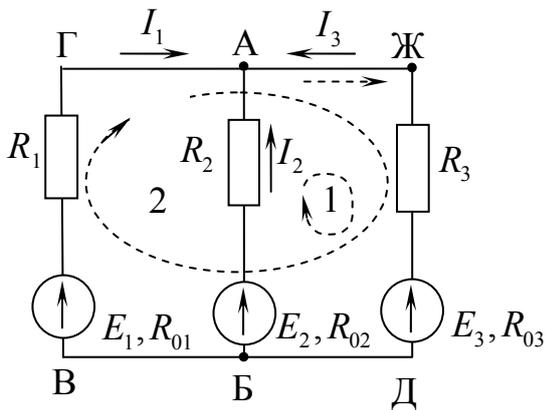


Рис. 4.1

$E_3 = 6 \text{ В}$, $R_1 = 200 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$,
 $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_{01} = R_{02} = R_{03} = 0 \text{ Ом}$.

Найти I_1, I_2, I_3

Решение.

Число токов равно числу ветвей схемы. Поэтому всего нужно составить 3 уравнения.

Предварительно произвольно выберем направления токов, которые будем считать положительными.

Поскольку узлов в схеме 2, то составим одно уравнение по I закону Кирхгофа, например, для узла А:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

Остальные 2 уравнения составим по второму закону Кирхгофа, выбрав для этого, например, контуры БАЖДБ и ВГЖДБ. Чтобы уравнения были независимы, в каждый новый контур должна входить одна новая ветвь, не входившая в предыдущие.

Принимая направление обхода контуров по часовой стрелке, и учитывая направления ЭДС источников, составим уравнения:

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_2 - E_3 \quad (2)$$

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1 - E_3 \quad (3)$$

Подставим в уравнения (2) и (3) значения сопротивлений и ЭДС:

$$100 I_2 - 10 I_3 = 42 \quad (4)$$

$$200 I_1 - 10 I_3 = 54 \quad (5)$$

Итак, решение задачи сводится к решению системы из трех уравнений с тремя неизвестными. Выразим ток I_2 из (1) и подставим его в (4):

$$\begin{aligned} -100(I_1 + I_3) - 10I_3 &= 42 \\ -100I_1 - 110I_3 &= 42 \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) получим уравнение:

$$-10I_3 - 220I_3 = 138, \text{ откуда } I_3 = -138 / 230 = -0,6 \text{ А.}$$

Подставив I_3 в (6), получим: $I_1 = 0,24 \text{ А}$. Из (1) получим ток $I_2 = 0,36 \text{ А}$

Токи I_1, I_2 имеют положительное значение, значит, выбранные направления совпадают с действительными. Значение тока I_3 отрицательно, значит, его направление противоположно выбранному.

Действительное направление тока I_3 показано пунктирной стрелкой на рис. 6.1. При этом сумма притекающих к узлу А токов $I_1 + I_2 = 0,24 + 0,36 = 0,6 \text{ А}$ равна оттекающему току $I_3 = 0,6 \text{ А}$.

Задача (для самостоятельного решения). Дана схема на рис.4.2. Известны значения ЭДС (для простоты их внутренними сопротивлениями пренебрегаем) и сопротивления $R_1 \dots R_5$.

Определить значения токов в ветвях.

Решение.

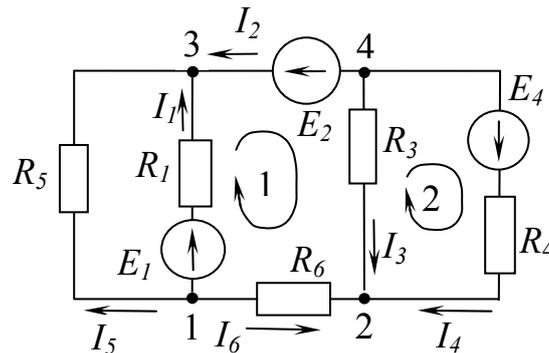


Рис. 4.2

В данной схеме 4 узла и 6 ветвей.

Составляем систему уравнений, имея в виду то, что из узла 1 токи вытекают, а к узлам 2 и 3 притекают:

$$\begin{cases} -I_1 - I_6 - I_5 = 0 & \text{для узла 1} \\ I_3 + I_4 + I_6 = 0 & \text{для узла 2} \\ I_1 + I_2 + I_5 = 0 & \text{для узла 3} \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_6 I_6 = E_1 - E_2 & \text{для конт. 1} \\ R_4 I_4 - R_3 I_3 = E_4 & \text{для конт. 2} \end{cases}$$

Далее решают полученную систему уравнений. Правильность решения проверяют составлением баланса мощностей цепи или расчётом токов иным методом.

Решение полученной системы из 5 уравнений довольно трудоёмко. Поэтому для расчета цепей с несколькими источниками целесообразно применять другие методы. Однако все они базируются на использовании законов Ома и Кирхгофа.

4.2. Метод контурных токов

В методе контурных токов в качестве промежуточных переменных выбирают токи, протекающие в каждом отдельном контуре и называемые контурными. В этом случае число уравнений, которые нужно решать совместно, уменьшается до числа независимых контуров. Контуром называется замкнутый участок цепи, в котором отсутствуют ветви. Например, для задачи, схема которой дана на рис. 4.3, число контуров 3.

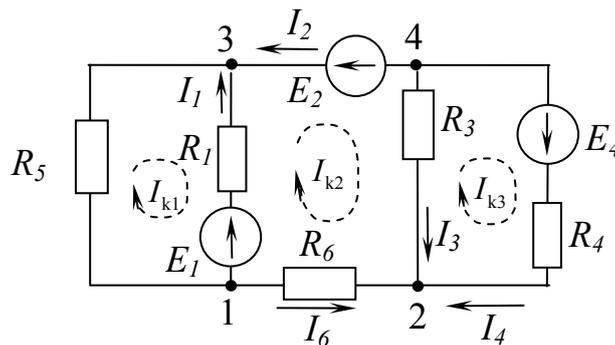


Рис. 4.3

При расчете цепи методом контурных токов применяется только второй закон Кирхгофа.

Расчет методом контурных токов предполагает следующие шаги.

1. Задать направления контурных токов. Удобнее всего задавать одно направление, например, по часовой стрелке. Действительные направления токов определяются после расчета цепи.

2. По второму закону Кирхгофа для каждого контура составить уравнение.

$$\begin{cases} -E_1 = (R_5 + R_1)I_{k1} - R_1I_{k2} & \text{I контур} \\ E_1 - E_2 = (R_1 + R_3 + R_6)I_{k2} - R_1I_{k1} - R_3I_{k3} & \text{II контур} \\ E_4 = (R_4 + R_3)I_{k3} - R_3I_{k2} & \text{III контур} \end{cases}$$

Если какие-то элементы цепи (R_1 и R_3) входят в два контура одновременно, это также учитывается при составлении уравнений. Причём если направления контурных токов, проходящих через элемент, совпадают, то они берутся со знаком плюс, а если противоположны – то с противоположными знаками.

3. Решая совместно систему уравнений, определить контурные токи. Если полученное в результате расчетов значение контурного тока имеет отрицательный знак, то его действительное направление противоположно выбранному.

4. Токи во внутренних ветвях схемы определяются как сумма или разность соответствующих контурных токов. В том случае, когда направления контурных токов в ветвях совпадают, берут их сумму, а когда направлены навстречу – разность.

5. Токи во внешних ветвях схемы по значению равны соответствующим контурным токам.

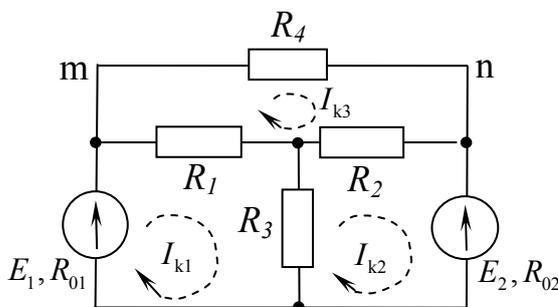


Рис. 4.4

Задача. Дано: $E_1 = 100B$,
 $E_2 = 120B$, $R_{01} = R_{02} = 0,5 \text{ Ом}$,
 $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$,
 $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 10 \text{ Ом}$. Найти токи в ветвях цепи, схема которой изображена на рис. 4.4.

Решение. Составим для каждого контура уравнение по второму закону Кирхгофа.

$$\text{Первый контур: } E_1 = (R_{01} + R_1 + R_3)I_{k1} - R_3I_{k2} - R_1I_{k3}; \quad (7)$$

$$\text{Второй контур: } -E_2 = (R_{02} + R_2 + R_3)I_{k2} - R_2I_{k3} - R_3I_{k1}; \quad (8)$$

$$\text{Третий контур: } 0 = (R_1 + R_2 + R_4)I_{k3} - R_1I_{k1} - R_2I_{k2}. \quad (9)$$

Подставив данные задачи в уравнения (7–8), получим:

$$\begin{cases} 100 = 7,5I_{k1} - 2I_{k2} - 5I_{k3} \\ -120 = -2I_{k1} + 12,5I_{k2} - 10I_{k3} \\ 0 = -5I_{k1} - 10I_{k2} + 25I_{k3}. \end{cases}$$

Выразив I_{k3} через I_{k1} и I_{k2} :

$$I_{k3} = \frac{5}{25}I_{k1} + \frac{10}{25}I_{k2},$$

и произведя соответствующие подстановки, получим:

$$\begin{cases} 100 = 6,5I_{k1} - 4I_{k2} \\ -120 = -4I_{k1} + 8,5I_{k2}. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим: $I_{k1} = -5,2 \text{ А}$, $I_{k2} = -33,5 \text{ А}$, $I_{k3} = -14,4 \text{ А}$. Поскольку все значения контурных токов отрицательны, то в реальности они имеют противоположные направления. Обозначим их направления на рис.4.5.

Значения этих токов:

$$\begin{aligned} I_{k1} &= 5,2 \text{ А}, \\ I_{k2} &= 33,5 \text{ А}, \end{aligned}$$

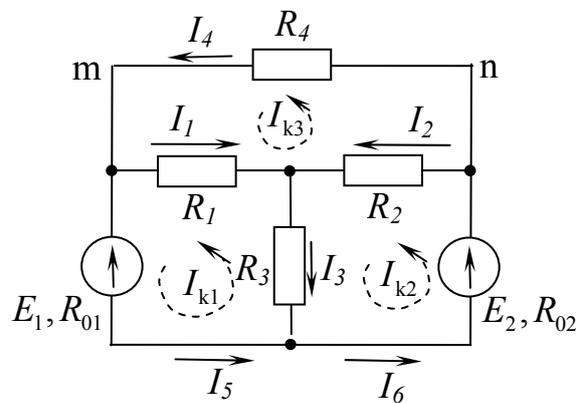


Рис. 4.5

$$I_{k3} = 14,4 \text{ А}.$$

Далее определим токи в ветвях и их направления:

$$I_1 = I_{k3} - I_{k1} = 14,4 - 5,2 = 9,2 \text{ А}.$$

I_1 принимает положительное значение. Значит, направление тока I_1 совпадает с направлением тока I_{k3} .

$$I_2 = I_{k2} - I_{k3} = 33,5 - 14,4 = 19,1 \text{ А},$$

и направление тока I_2 совпадает с направлением тока I_{k2} .

$$I_3 = I_{k2} - I_{k1} = 33,5 - 5,2 = 28,3 \text{ А}$$

и направление тока I_3 совпадает с направлением тока I_{k2} .

$$I_4 = I_{k3} = 14,4 \text{ А}; \quad I_5 = I_{k1} = 5,2 \text{ А}; \quad I_6 = I_{k2} = 33,5 \text{ А}.$$

4.3. Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов эффективен в тех случаях, когда анализируемая схема содержит значительное число ветвей, включённых между небольшим количеством узлов. Этот метод удобен для определения напряжения в электрических цепях.

При решении методом каждому узлу приписывается определенный потенциал. При этом один из узлов считается заземлённым, т.е. его потенциал считается равным нулю. Это не приведет к изменению токов. Незвестных потенциалов станет на единицу меньше.

После этого формируется система независимых уравнений по первому закону Кирхгофа, в которых все токи схемы выражены через разности потенциалов пар узлов, деленных на соответствующие сопротивления: $I_n = \frac{\Delta\varphi}{R_m}$.

Рассмотрим применение этого метода для цепи с тремя узлами (рис. 4.6).

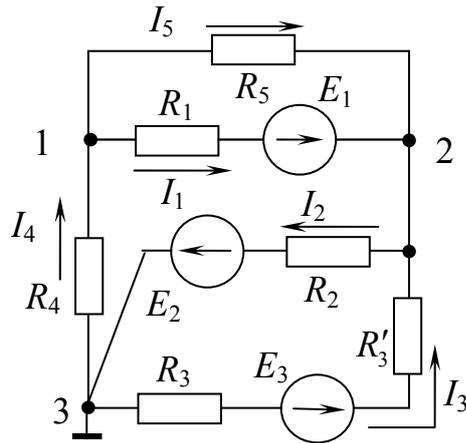


Рис. 4.6

Предположим, что $\varphi_3 = 0$ (заземлен). Тогда для каждой ветви можно записать выражения, определяющие разность потенциалов на зажимах ветви. В дальнейшем из этих выражений можно выразить токи ветвей. При этом можно пользоваться правилами составления выражений, приведенные в пункте 4.2.

Будем считать, что потенциал узла 2 больше потенциала узла 1. Произвольно выберем направления токов.

Для двух ветвей участка 1–2:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -R_5 I_5, \text{ откуда } I_5 = (\varphi_1 - \varphi_2) / R_5 = (\varphi_1 - \varphi_2) g_5;$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = E_1 - R_1 I_1, \text{ откуда } I_1 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_1) / R_1 = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_1) g_1.$$

Для участка двух ветвей участка 2–3: $\varphi_2 - \varphi_3 = R_2 I_2 - E_2$,

$$\text{откуда } I_2 = (\varphi_2 - \varphi_3 + E_2) / R_2 = (\varphi_2 + E_2) / R_2 = (\varphi_2 + E_2) g_2;$$

$$\text{и } \varphi_2 - \varphi_3 = E_3 - (R_3 + R'_3) I_3,$$

$$I_3 = (E_3 - \varphi_2 + \varphi_3) / (R_3 + R'_3) = (E_3 - \varphi_2) / (R_3 + R'_3) = (E_3 - \varphi_2) g_3.$$

Для участка 1–3: $\varphi_1 - \varphi_3 = -R_4 I_4$; $I_4 = -\varphi_1 / R_4 = -\varphi_1 g_4$

В полученных выражениях $g_k=1/R_k$ – проводимость ветви, содержащей резистор R_k .

Таким образом, выражения для токов всех ветвей цепи выражены через проводимость ветви и потенциалы двух узлов.

Далее на основании I закона Кирхгофа записываются уравнения для узлов 1 и 2, причём входящие в узел токи записываются с плюсом, а выходящие из узла – с минусом:

$$I_4 - I_5 - I_1 = 0; \quad \text{для узла 1}$$

$$I_5 + I_3 + I_1 - I_2 = 0 \quad \text{для узла 2}$$

Подставляя выше приведенные выражения токов в соотношения закона Кирхгофа, после приведения подобных слагаемых, содержащих φ_1 и φ_2 , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(g_1+g_4+g_5) - \varphi_2(g_1+g_2) = -E_1g_1 - J; \\ \varphi_2(g_1+g_3+g_2+g_5) - \varphi_1(g_1+g_5) = E_1g_1 - E_2g_2 + E_3g_3. \end{cases}$$

Решив полученную систему, получаем φ_1 и φ_2 , а через них можно определить все токи.

Проверку правильности расчета токов можно произвести с помощью I закона Кирхгофа.

4.4. Метод наложения

В любой электрической сети токи являются результатом действия источников. Если в сети несколько источников, ток в любой ветви линейной цепи может быть представлен как алгебраическая сумма токов, вызываемых в этой ветви действием каждого источника в отдельности.

Принцип наложения применим только к линейным цепям. Этот принцип основан на принципе независимости действия ЭДС различных источников и на том, что ток в линейном резисторе прямо пропорционален напряжению. На базе принципа наложения разработан *метод наложения*.

Наложение возможно в любой системе (электрической, механической и т.п.), в которой причинно-следственная связь $y = f(x)$ записывается как

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$

Процессы в линейных цепях (токи и напряжения) описываются уравнениями первой степени. Соответственно, если в цепи имеется хотя бы одна переменная величина со степенью выше первой, то метод наложения принципиально использован быть не может. Например, метод наложения можно рассчитывать токи в линейных цепях, но нельзя рассчитывать мощности в этих цепях, так как мощность связана с напряжением или током квадратичной, а не линейной, зависимостью.

На базе принципа наложения разработан метод наложения. Он прост, но громоздок, так как предполагает многократный расчёт цепи (с каждым источником в отдельности). К основным не относится. Иногда нужен, чтобы посмотреть, как влияет на некоторый ток какой-нибудь источник.

Порядок расчёта:

1. Принимают положительные направления токов в ветвях.
2. Полагают, что в схеме действует только один источник, например, E_1 , остальные источники заменяются их внутренними сопротивлениями. Получается упрощенная схема, расчет которой выполняется с помощью метода эквивалентных преобразований.
3. Аналогично рассчитывают цепь при действии 2-го, 3-го источника и т.д.
4. Полные токи записывают как сумму частичных токов в виде: $I_n = I_n' + I_n'' + I_n''' + \dots$, где n – номер ветви.

Лекция 5

Нелинейные цепи постоянного тока

Если сопротивление элемента цепи не зависит от напряжения, такой элемент называется линейным. Это значит, что между напряжением на зажимах элемента цепи и током в этом элементе существует прямо пропорциональная или линейная зависимость, т.е. если напряжение, например, увеличить в 2,5 раза, то и ток увеличится во столько же раз. Поэтому вольтамперная характеристика элемента цепи изображается прямой, проходящей через начало координат, т.к. при отсутствии напряжения отсутствует и ток.

Линейной называется цепь, состоящая исключительно из линейных элементов.

Нелинейными считаются электрические цепи, содержащие нелинейные элементы. К нелинейным элементам относятся разнообразные электронные, полупроводниковые и ионные приборы, лампы накаливания, электрическая дуга и др. Цепи с такими элементами обладают рядом свойств, отсутствующих у линейных цепей. Эти свойства позволяют решать многие технические задачи: преобразовывать переменный ток в постоянный, усиливать электрические сигналы, генерировать электрические сигналы различной формы, стабилизировать ток и напряжение.

Строго говоря, все цепи являются нелинейными, однако во многих случаях нелинейностью их параметров можно пренебречь.

5.1. Статическое и дифференциальное сопротивления нелинейных элементов

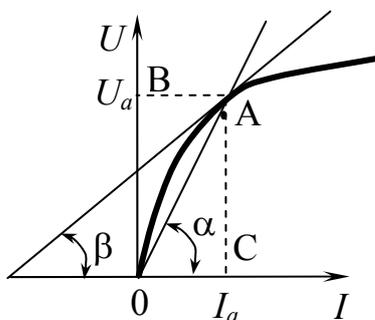


Рис. 5.1

Для характеристики нелинейных резисторов используются нелинейные вольтамперные характеристики. У нелинейных резисторов различают статические и дифференциальные сопротивления.

На рис. 5.1 приведена характеристика нелинейного элемента. Статическим сопротивлением в данной точке А характеристики называют отношение соответствующего этой точке напряжения к соответствующему этой точке току:

$$R_{\text{ст}} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \alpha = m_R \operatorname{tg} \alpha,$$

где $m_U, m_I, m_R = \frac{m_U}{m_I}$ – масштабы по соответствующим осям.

Дифференциальное сопротивление в точке А определяется отношением бесконечно малых приращений напряжения и тока:

$$R_{\text{диф}} = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} = m_R \operatorname{tg} \beta,$$

где β – угол между касательной и осью абсцисс.

Статическое сопротивление всегда положительно, в то время как дифференциальное на отдельных участках характеристики может оказаться и отрицательным.

К расчету нелинейных цепей применимы все методы, основанные на законах Кирхгофа, потому что законы Кирхгофа справедливы для мгновенных значений величин. Методы же и принципы, основанные на законе Ома, неприменимы, так как между током и напряжением на элементе отсутствует пропорциональность. Вместо закона Ома необходимо пользоваться имеющимися нелинейными характеристиками. Таким образом, **неприменимыми** являются *принцип наложения, метод контурных токов*. Однако цепь, содержащая нелинейные и линейные элементы, может быть разделена на линейную и нелинейную части, для каждой из которых применимы свои методы и принципы расчета.

5.2. Метод кусочно-линейной аппроксимации

Если вольтамперная характеристика на рабочем участке практически линейна, то её можно заменить эквивалентной схемой, состоящей из источника ЭДС и линейного сопротивления $R_{\text{диф}}$.

Пусть известна ВАХ нелинейного элемента (например, рис. 5.2), а также то, что он предназначен для работы на участке $a-b$ ВАХ. Если этот участок ВАХ заменить прямой (ab) и продолжить её до пересечения с осью ординат, получим точку c . Отрезок bc выражает постоянное напряжение U_0 , а тангенс угла наклона прямой равен приращению напряжения к приращению тока на этом участке, причем если эти приращения бесконечно малы, то отношение является дифференциальным сопротивлением:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta U}{\Delta I} = m_R R_{\text{диф}}.$$

Тогда вольтамперную характеристику нелинейного элемента на участке $a-b$ можно заменить линейным уравнением, которое имеет вид:

$$U = U_0 + m_R \operatorname{tg} \alpha I = E_0 + R_{\text{диф}} I. \quad (1)$$

После замены нелинейных элементов эквивалентными схемами с линейными элементами нелинейную цепь можно рассчитывать методами, применяемыми для расчета линейных цепей. Однако после нахождения токов в цепи нужно убедиться, что нелинейный элемент действительно будет работать на участке $a-b$ ВАХ.

Схема замещения, соответствующая элементу на рис.5.2а в диапазоне изменений тока ΔI на участке $a-b$, представлена на рис.5.2б.

Если элемент используется на различных рабочих диапазонах, тогда для каждого участка выбирают свою рабочую точку и выполняют кусочно-линейную аппроксимацию (заменяют кривые вольтамперной характеристики соответствующими прямыми (рис.5.2в). При этом на различных участках ВАХ для расчетов используются различные уравнения типа (1). Наибольшая точность такой аппроксимации обеспечивается в рабочей точке, и по мере удаления от неё погрешность аппроксимации увеличивается. Поэтому, чем больше заменяемых участков, тем точнее будут

расчеты. Однако увеличение количества заменяемых участков делает метод кусочно-линейной аппроксимации громоздким.

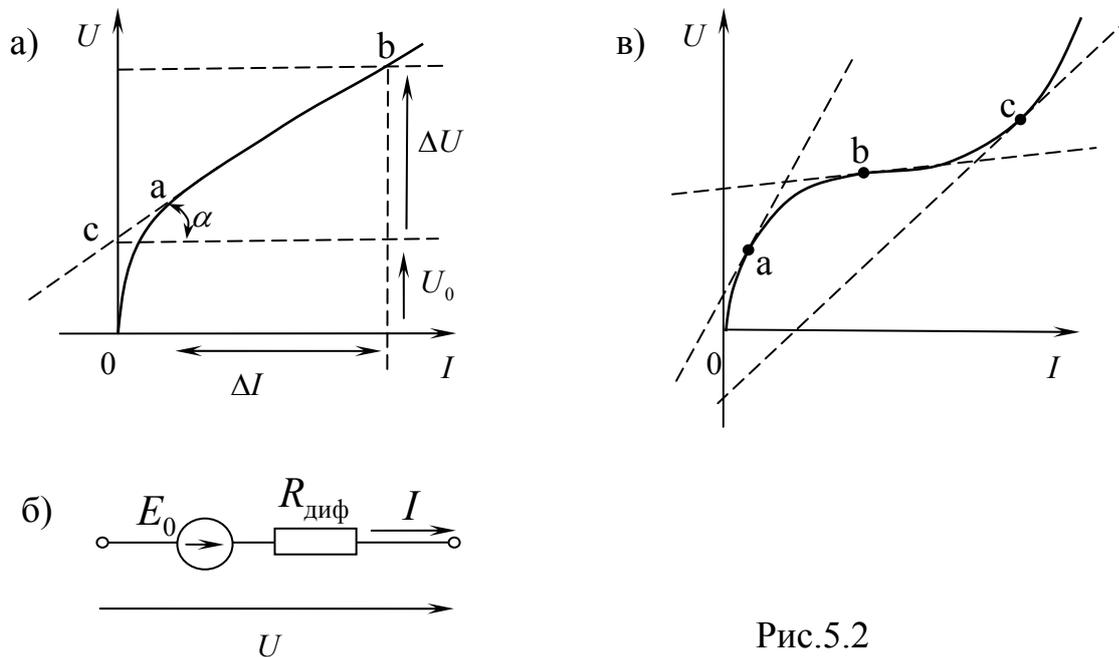


Рис.5.2

5.3. Графический метод

Он применим при любом виде ВАХ, но его точность зависит от точности графических построений, и обычно погрешность составляет до 5%.

При этом методе группа нелинейных элементов в цепи заменяется одним эквивалентным элементом.

В случае последовательного соединения нелинейных элементов (рис.5.3а) через них протекает общий ток, а напряжение $U = U_1 + U_2$. Исходя из этого можно найти вольтамперную характеристику эквивалентного элемента $f = U(I)$ путём графического сложения ординат кривых $f = U(I)_1$ и $f = U(I)_2$, соответствующих различным значениям тока.

Аналогично поступают в случае последовательного соединения линейных и нелинейных элементов.

При параллельном соединении нелинейных элементов, наоборот, напряжение является постоянным, а ток в каждой ветви цепи различен. Для этого случая, в соответствии с первым законом Кирхгофа, складывают токи при различных значениях напряжения,

тем самым определяя вольтамперную характеристику эквивалентного элемента.

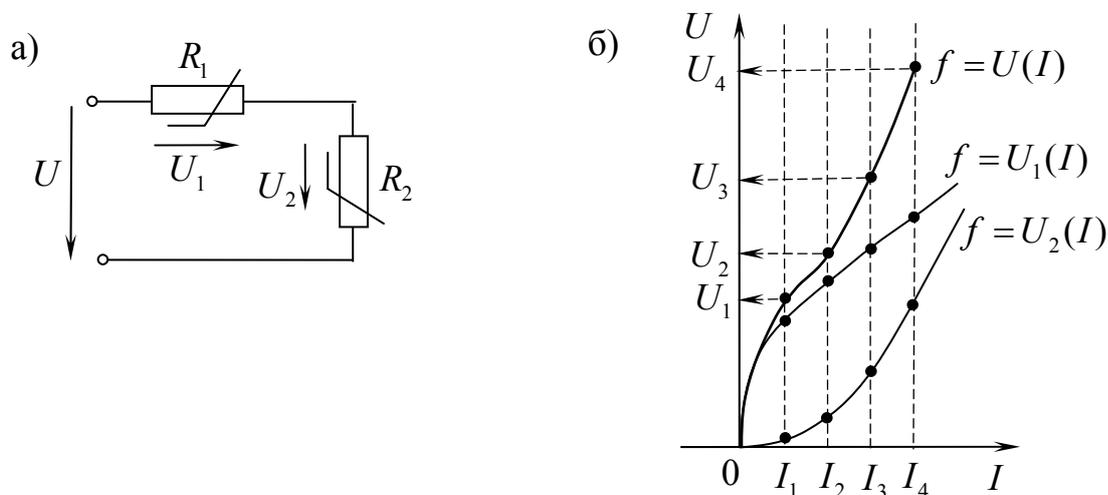


Рис.5.3

В случае смешанного соединения нелинейных элементов характеристику эквивалентного элемента получают при поочередном выполнении рассмотренных построений. При этом изложенный метод распространяется на любое количество последовательно и параллельно включенных линейных и нелинейных элементов.

5.4. Метод пересечения характеристик (метод опрокинутой характеристики)

Метод используется для анализа цепей, которые методами эквивалентных преобразований могут быть сведены к последовательному включению двух элементов. При этом характеристики элементов могут иметь произвольный характер. Это могут быть два линейных элемента, либо два нелинейных, либо линейный и нелинейный элементы.

В основу метода положено предположение о том, что суммарное напряжение на последовательно включенных элементах определяется внешним источником и не зависит от тока, протекающего в цепи. В соответствии со сказанным, для цепи из двух элементов (рис. 5.3а) справедливы выражения

$$\begin{cases} I = I_{R1} = I_{R2} \\ U_1(I) + U_2(I) = U. \end{cases}$$

При известных ВАХ элементов (рис.5.4а) ток, удовлетворяющий данной системе, может быть легко найден графически. Для этого исходную характеристику одного из элементов зеркально отражают относительно оси токов (опрокидывают) и её начало сдвигают по оси напряжения на величину, пропорциональную входному напряжению цепи (рис.5.4б). Точка M пересечения исходной характеристики одного и преобразованной характеристики второго элементов даст искомый ток I' , а проекция точки M на ось абсцисс в точке K делит U на составляющие $U_1(I)$ и $U_2(I)$.

Используя описанный метод, легко исследовать процессы в цепях как при изменении параметров элементов $R_1(I)$ и $R_2(I)$, так и при изменении внешнего напряжения U .

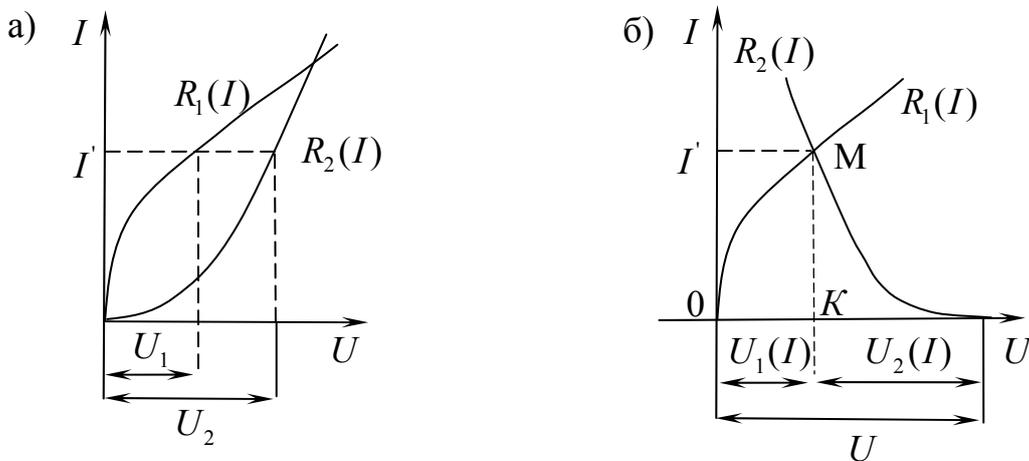


Рис.5.4

Литература

1. Борисов Ю.М. Электротехника: Учебник для вузов / Ю.М. Борисов, Д.Н. Липатов, Ю.Н. Зорин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1985 г. – 552 с.
2. Шихин А.Я., Белоусова Н.М. и др. Электротехника / А.Я. Шихин, Н.М. Белоусова др. – М.: «Высшая школа», 1991 г.–336 с..
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники / Бессонов Л.А. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1996. – 638 с.
4. Касаткин А.С. Электротехника: учеб. пособие для вузов. В 2-х книгах. Кн. 1. / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1995. – 240 с.