

## ЛЕКЦИЯ 3

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Электрические цепи, в которых значение и направление ЭДС, напряжения и тока изменяются во времени по синусоидальному закону, называются цепями синусоидального тока.

Целесообразность применения энергии переменного тока вместо постоянного тока обусловлена многими причинами:

1. Источники энергии переменного тока – синхронные генераторы – дешевле, надежнее и могут быть выполнены на значительно большие мощности и более высокие напряжения, чем генераторы постоянного тока.

2. Энергия переменного тока одного напряжения легко преобразуется в энергию переменного тока другого (высшего или низшего) напряжения с помощью относительно простого, дешевого и надежного аппарата – трансформатора, что очень важно при передаче энергии на большие расстояния.

3. Двигатели переменного тока дешевле и надежнее двигателей постоянного тока.

Генераторы электрических станций переменного тока устроены так, что возникающая в их обмотках ЭДС изменяется по синусоидальному закону. Эта синусоидальная ЭДС возбуждает в потребителях ток, также изменяющийся по синусоидальному закону. Возникающие при этом напряжение на резистивном элементе, ЭДС самоиндукции в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах также изменяются по синусоидальному закону.

Рассмотрим основные соотношения, характерные для синусоидальной ЭДС.

Мгновенное значение синусоидальных ЭДС, токов и напряжений в любой момент времени  $t$  выражается формулами

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

где  $E_m, I_m, U_m$  - амплитудные значения величин;

$(\omega t + \psi_e), (\omega t + \psi_i), (\omega t + \psi_u)$  - фазы;

$\psi_e, \psi_i, \psi_u$  - начальные фазы.

Фаза определяет значение ЭДС в текущий момент времени  $t$ , начальная фаза – в момент времени  $t = 0$ .

Время одного цикла изменения синусоидальной величины называется периодом  $T$ , а число периодов в секунду – частотой  $f$

$$f = \frac{1}{T} [C^{-1}] = [Гц].$$

Величина  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  в электротехнике называется угловой частотой и измеряется в рад/с.

Электрическая энергия вырабатывается синхронными генераторами электрических станций в виде энергии синусоидального тока с частотой 50Гц. Однако в технике широко используются синусоидальные токи и других частот. Например, в электроакустических установках частота синусоидального тока может составлять несколько Герц, частота тока электрических печей для выплавки тугоплавких и особо чистых металлов составляет 500Гц – 50кГц, в радиотехнике используются частоты до  $10^{10}$ Гц.

Формы представления электрических величин.

Синусоидальная величина считается определенной, если известны ее амплитуда и начальная фаза.

При расчете цепей переменного тока для сравнения двух синусоидальных величин необходимо знать разность их начальных фаз.

Для упрощения расчета таких цепей применяются несколько форм представления синусоидальных величин.

1. В виде тригонометрических функций (аналитическое представление)

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Производить расчет электрических цепей при такой форме представления является делом весьма трудоемким, поскольку приходится производить операции над тригонометрическими функциями.

2. В виде графиков изменения функций во времени.

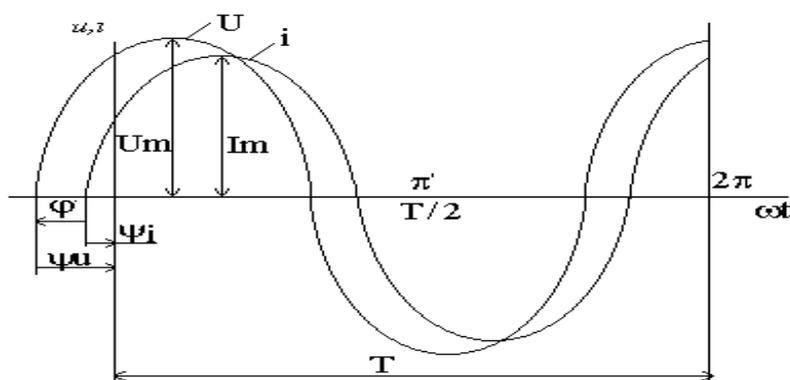


Рис.1

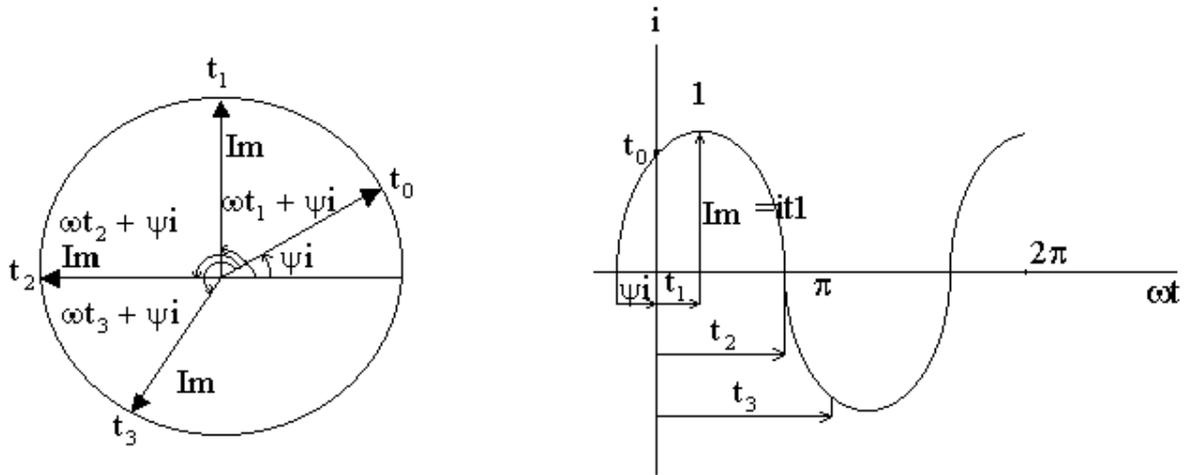
На рисунке представлены графики синусоидального тока и синусоидального напряжения, которые сдвинуты друг относительно друга на угол  $\varphi$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i,$$

где  $\varphi$  - сдвиг фаз между напряжением и током.

3. Векторное изображение синусоидальных величин.

Синусоидальную функцию времени можно изобразить радиус-вектором, равным амплитудному значению данной функции, равномерно вращающимся с угловой скоростью  $\omega$ . При этом начальное положение радиус-вектора определяется (для  $t = 0$ ) его начальной фазой  $\psi$ .



Если вращать вектор против часовой стрелки, то в любой момент времени он составит с горизонтальной осью угол, равный  $\omega t + \psi$ . Проекция вращающегося вектора на ось ординат равна мгновенному значению синусоидальной величины.

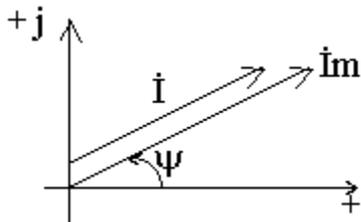
#### 4. Представление синусоидальных величин комплексными числами.

Комплексное представление синусоидальных величин позволяет законы, которые используются при расчете цепей постоянного тока, применять и для расчета цепей переменного тока. Это закон Ома, законы Кирхгофа.

Чтобы представить заданную в тригонометрической форме синусоидальную величину

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

с начальной фазой  $\psi$  комплексным числом, изобразим ее на комплексной плоскости.



$j$ -это искусственно введенная величина  $j = \sqrt{-1}$ .

Из начала координат под углом  $\psi$  к оси действительных величин построим вектор, длина которого в масштабе численно равна значению  $I_m$ .

Конец этого вектора находится в точке, которой соответствует комплексное число, равное комплексной амплитуде синусоидального тока

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}.$$

В электрике чаще пользуются не амплитудным, а действующим значением электрических величин.

Действующим значением называется такой неизменный во времени ток, при котором выделяется на активном сопротивлении за период то же количество энергии, что и при действительном изменяющемся синусоидальном токе.

Амплитудное и действующее значения связаны соотношением

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Тогда получим для действующего значения синусоидального тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\psi}.$$

При расчетах применяется три формы записи комплексного значения синусоидальной величины:

1) показательная форма

$$I = I e^{j\psi}$$

2) тригонометрическая форма

$$I = I \cos \psi + jI \sin \psi$$

3) алгебраическая форма

$$I = I' + jI''$$

где  $I' = I \cos \psi$  - действительная составляющая;

$I'' = I \sin \psi$  - мнимая составляющая комплексного значения синусоидального тока;

$I = \sqrt{(I')^2 + (I'')^2}$  - модуль комплексного числа;

$\psi = \arctg \frac{I''}{I'}$  - аргумент комплексного числа.

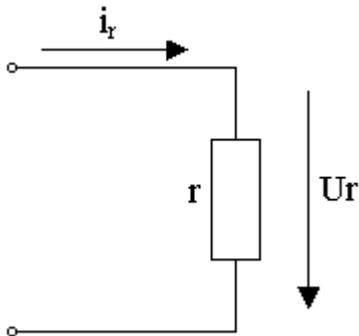
Переход от показательной формы к тригонометрической выполняется при помощи формулы Эйлера:

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi.$$

Цепи синусоидального тока включают резистивные, индуктивные и емкостные элементы.

Рассмотрим закон Ома для этих элементов цепи.

1) Резистивный элемент.



Если через резистивный элемент синусоидальный ток

$$i_r = I_{rm} \sin(\omega t + \psi_i)$$

тогда по закону Ома для мгновенных значений напряжения и тока справедливо соотношение

$$u_r = r i_r \quad \text{и} \quad u_r = r I_{rm} \sin(\omega t + \psi_i) = U_{rm} \sin(\omega t + \psi_u),$$

где амплитуды связаны соотношением  $U_{rm} = r I_{rm}$ ,

а их начальные фазы одинаковы  $\psi_u = \psi_i$ .

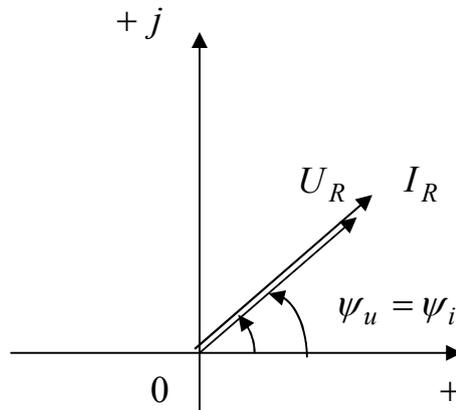
То есть на активном сопротивлении ток и напряжение совпадает по фазе.

В комплексной форме ток и напряжение имеют вид:

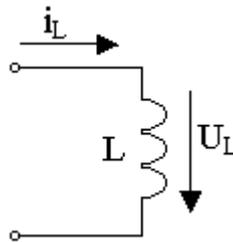
$$\dot{I}_r = I_r e^{j\psi_i} \quad \text{и} \quad \dot{U}_r = U_r e^{j\psi_u}.$$

Тогда закон Ома в комплексной форме  $\dot{U}_r = r\dot{I}_r$ .

Векторная диаграмма имеет вид



2) Индуктивный элемент.



Синусоидальный ток в индуктивном элементе

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i).$$

По закону электромагнитной индукции при протекании тока появится напряжение

$$u_L = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_u).$$

Амплитуды напряжения тока связаны соотношением

$$U_{Lm} = \omega L I_{Lm} = x_L I_{Lm}.$$

Величина  $X_L = \omega L$  называется индуктивным сопротивлением.

Начальные фазы связаны соотношением  $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$ .

Вектор напряжения опережает вектор тока на угол  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (сдвиг фаз).

В комплексном виде ток и напряжение соответственно равны

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_i} \quad u \quad \dot{U}_L = U_L e^{j\psi_u}.$$

Закон Ома в комплексном виде

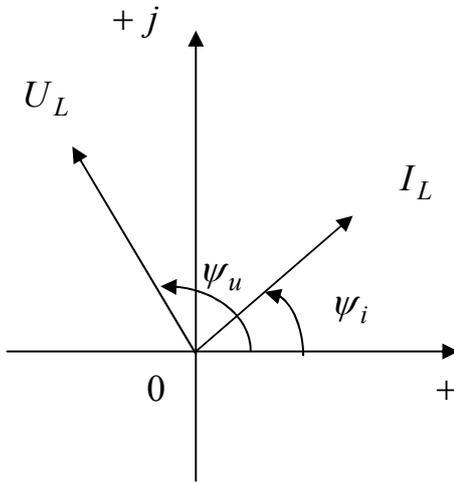
$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jX_L \dot{I}_L,$$

где  $jX_L = j\omega L$  – комплексное сопротивление индуктивного элемента.

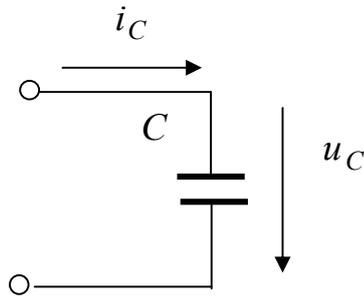
В показательной форме

$$\dot{U}_L = X_L I_L e^{j\psi_u} = \omega L I_L e^{j(\psi_i + \pi/2)}.$$

Векторная диаграмма в этом случае имеет вид



3) Емкостный элемент.



Если напряжение между выводами емкостного элемента

$$u_c = U_{cm} \sin(\omega t + \psi_u),$$

то синусоидальный ток