

ЛЕКЦИЯ 3

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Электрические цепи, в которых значение и направление ЭДС, напряжения и тока изменяются во времени по синусоидальному закону, называются цепями синусоидального тока.

Целесообразность применения энергии переменного тока вместо постоянного тока обусловлена многими причинами:

1. Источники энергии переменного тока – синхронные генераторы – дешевле, надежнее и могут быть выполнены на значительно большие мощности и более высокие напряжения, чем генераторы постоянного тока.

2. Энергия переменного тока одного напряжения легко преобразуется в энергию переменного тока другого (высшего или низшего) напряжения с помощью относительно простого, дешевого и надежного аппарата – трансформатора, что очень важно при передаче энергии на большие расстояния.

3. Двигатели переменного тока дешевле и надежнее двигателей постоянного тока.

Генераторы электрических станций переменного тока устроены так, что возникающая в их обмотках ЭДС изменяется по синусоидальному закону. Эта синусоидальная ЭДС возбуждает в потребителях ток, также изменяющийся по синусоидальному закону. Возникающие при этом напряжение на резистивном элементе, ЭДС самоиндукции в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах также изменяются по синусоидальному закону.

Рассмотрим основные соотношения, характерные для синусоидальной ЭДС.

Мгновенное значение синусоидальных ЭДС, токов и напряжений в любой момент времени t выражается формулами

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

где E_m, I_m, U_m - амплитудные значения величин;

$(\omega t + \psi_e), (\omega t + \psi_i), (\omega t + \psi_u)$ - фазы;

ψ_e, ψ_i, ψ_u - начальные фазы.

Фаза определяет значение ЭДС в текущий момент времени t , начальная фаза – в момент времени $t = 0$.

Время одного цикла изменения синусоидальной величины называется периодом T , а число периодов в секунду – частотой f

$$f = \frac{1}{T} [C^{-1}] = [Гц].$$

Величина $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ в электротехнике называется угловой частотой и измеряется в рад/с.

Электрическая энергия вырабатывается синхронными генераторами электрических станций в виде энергии синусоидального тока с частотой 50Гц. Однако в технике широко используются синусоидальные токи и других частот. Например, в электроакустических установках частота синусоидального тока может составлять несколько Герц, частота тока электрических печей для выплавки тугоплавких и особо чистых металлов составляет 500Гц – 50кГц, в радиотехнике используются частоты до 10^{10} Гц.

Формы представления электрических величин.

Синусоидальная величина считается определенной, если известны ее амплитуда и начальная фаза.

При расчете цепей переменного тока для сравнения двух синусоидальных величин необходимо знать разность их начальных фаз.

Для упрощения расчета таких цепей применяются несколько форм представления синусоидальных величин.

1. В виде тригонометрических функций (аналитическое представление)

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Производить расчет электрических цепей при такой форме представления является делом весьма трудоемким, поскольку приходится производить операции над тригонометрическими функциями.

2. В виде графиков изменения функций во времени.

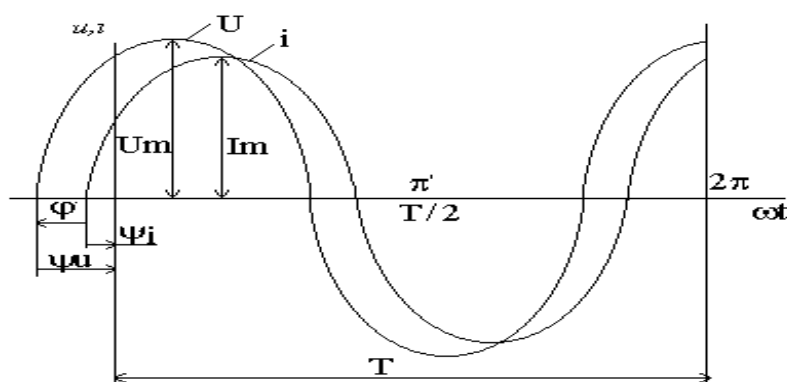


Рис.1

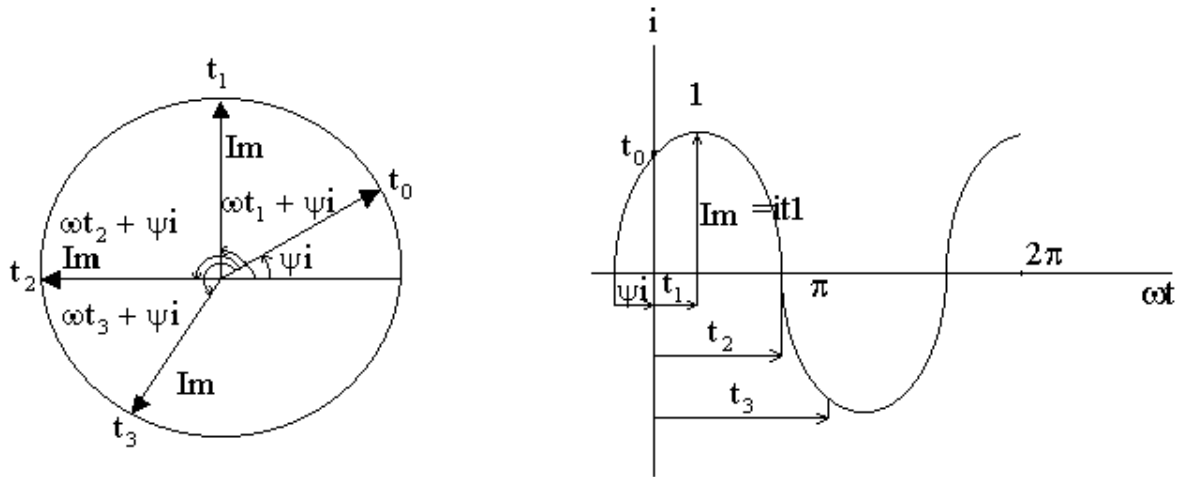
На рисунке представлены графики синусоидального тока и синусоидального напряжения, которые сдвинуты друг относительно друга на угол φ

$$\varphi = \psi_u - \psi_i,$$

где φ - сдвиг фаз между напряжением и током.

3. Векторное изображение синусоидальных величин.

Синусоидальную функцию времени можно изобразить радиус-вектором, равным амплитудному значению данной функции, равномерно вращающимся с угловой скоростью ω . При этом начальное положение радиус-вектора определяется (для $t = 0$) его начальной фазой ψ .



Если вращать вектор против часовой стрелки, то в любой момент времени он составит с горизонтальной осью угол, равный $\omega t + \psi$. Проекция вращающегося вектора на ось ординат равна мгновенному значению синусоидальной величины.

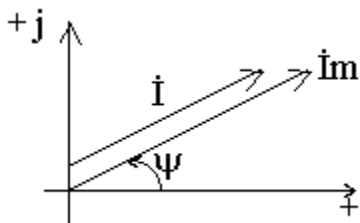
4. Представление синусоидальных величин комплексными числами.

Комплексное представление синусоидальных величин позволяет законы, которые используются при расчете цепей постоянного тока, применять и для расчета цепей переменного тока. Это закон Ома, законы Кирхгофа.

Чтобы представить заданную в тригонометрической форме синусоидальную величину

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

с начальной фазой ψ комплексным числом, изобразим ее на комплексной плоскости.



j -это искусственно введенная величина $j = \sqrt{-1}$.

Из начала координат под углом ψ к оси действительных величин построим вектор, длина которого в масштабе численно равна значению I_m .

Конец этого вектора находится в точке, которой соответствует комплексное число, равное комплексной амплитуде синусоидального тока

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}.$$

В электрике чаще пользуются не амплитудным, а действующим значением электрических величин.

Действующим значением называется такой неизменный во времени ток, при котором выделяется на активном сопротивлении за период то же количество энергии, что и при действительном изменяющемся синусоидальном токе.

Амплитудное и действующее значения связаны соотношением

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Тогда получим для действующего значения синусоидального тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\psi}.$$

При расчетах применяется три формы записи комплексного значения синусоидальной величины:

1) показательная форма

$$I = I e^{j\psi}$$

2) тригонометрическая форма

$$I = I \cos \psi + jI \sin \psi$$

3) алгебраическая форма

$$I = I' + jI''$$

где $I' = I \cos \psi$ - действительная составляющая;

$I'' = I \sin \psi$ - мнимая составляющая комплексного значения синусоидального тока;

$I = \sqrt{(I')^2 + (I'')^2}$ - модуль комплексного числа;

$\psi = \operatorname{arctg} \frac{I''}{I'}$ - аргумент комплексного числа.

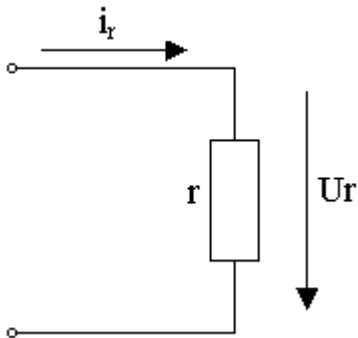
Переход от показательной формы к тригонометрической выполняется при помощи формулы Эйлера:

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi.$$

Цепи синусоидального тока включают резистивные, индуктивные и емкостные элементы.

Рассмотрим закон Ома для этих элементов цепи.

1) Резистивный элемент.



Если через резистивный элемент синусоидальный ток

$$i_r = I_{rm} \operatorname{Sin}(\omega t + \psi_i)$$

тогда по закону Ома для мгновенных значений напряжения и тока справедливо соотношение

$$u_r = r i_r \quad \text{и} \quad u_r = r I_{rm} \operatorname{Sin}(\omega t + \psi_i) = U_{rm} \operatorname{Sin}(\omega t + \psi_u),$$

где амплитуды связаны соотношением $U_{rm} = r I_{rm}$,

а их начальные фазы одинаковы $\psi_u = \psi_i$.

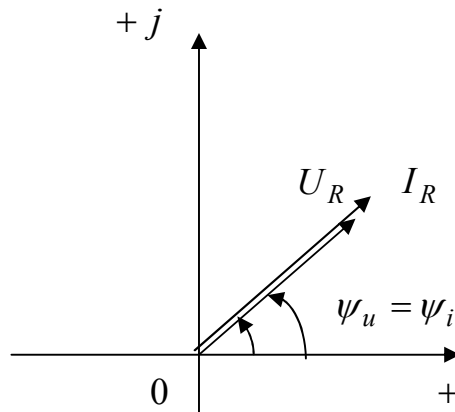
То есть на активном сопротивлении ток и напряжение совпадает по фазе.

В комплексной форме ток и напряжение имеют вид:

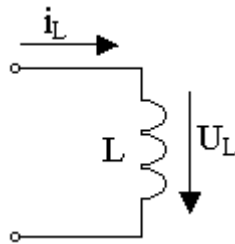
$$\dot{I}_r = I_r e^{j\psi_i} \quad \text{и} \quad \dot{U}_r = U_r e^{j\psi_u}.$$

Тогда закон Ома в комплексной форме $\dot{U}_r = r\dot{I}_r$.

Векторная диаграмма имеет вид



2) Индуктивный элемент.



Синусоидальный ток в индуктивном элементе

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i).$$

По закону электромагнитной индукции при протекании тока появится напряжение

$$u_L = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_u).$$

Амплитуды напряжения тока связаны соотношением

$$U_{Lm} = \omega L I_{Lm} = x_L I_{Lm}.$$

Величина $X_L = \omega L$ называется индуктивным сопротивлением.

Начальные фазы связаны соотношением $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$.

Вектор напряжения опережает вектор тока на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (сдвиг фаз).

В комплексном виде ток и напряжение соответственно равны

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_i} \quad u \quad \dot{U}_L = U_L e^{j\psi_u}.$$

Закон Ома в комплексном виде

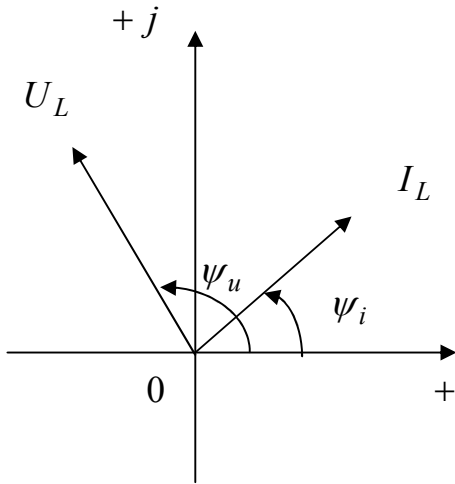
$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jX_L \dot{I}_L,$$

где $jX_L = j\omega L$ – комплексное сопротивление индуктивного элемента.

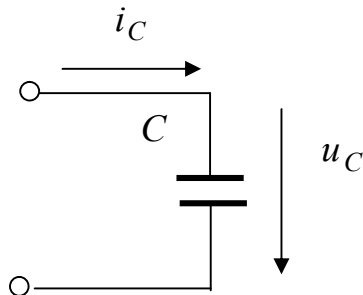
В показательной форме

$$\dot{U}_L = X_L I_L e^{j\psi_u} = \omega L I_L e^{j(\psi_i + \pi/2)}.$$

Векторная диаграмма в этом случае имеет вид



3) Емкостный элемент.



Если напряжение между выводами емкостного элемента

$$u_c = U_{cm} \sin(\omega t + \psi_u),$$

то синусоидальный ток