ЛЕКЦИЯ №2
РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Общей задачей расчета является определение токов во всех участках цепи при заданных параметрах элементов цепи и известной конфигурации цепи.

Методы расчета электрических цепей:

- эквивалентных преобразований;
- законов Кирхгофа;
- двух узлов;
- контурных токов;
- наложения (суперпозиции);
- эквивалентного генератора (активного двухполюсника) и др.

1. Метод эквивалентных преобразований

Многие электрические цепи имеют лишь один источник энергии и то или иное число пассивных (резистивных) элементов, соединенных между собой последовательно или параллельно. Расчет таких цепей осуществляется путем замены отдельных участков, а затем всей цепи одним элементом с эквивалентным сопротивлением и последующего перехода в процессе расчета к заданной цепи.

Последовательное соединение резистивных элементов

Свойства последовательной цепи:

1. Сила тока на всех участках последовательной цепи одна и та же.

$$I = U \Big/ \sum_{k=1}^{n} R_k = U / R_э ,$$

2. Падения напряжения на отдельных участках цепи пропорциональны сопротивлениям этих участков

$$U_1 = I \cdot R_1; \qquad U_2 = I \cdot R_2; \qquad U_3 = I \cdot R_3$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R_2} = \frac{R_1}{R_2}; \qquad \frac{U_1}{U_3} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R_3} = \frac{R_1}{R_3}; \qquad \frac{U_2}{U_3} = \frac{I \cdot R_2}{I \cdot R_3} = \frac{R_2}{R_3}$$

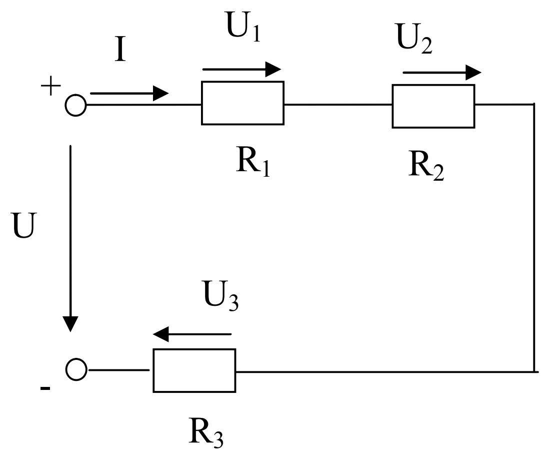


Рисунок 8

3. Напряжение на зажимах последовательной цепи равняется сумме напряжений на отдельных ее участках, то есть

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

4. Эквивалентное сопротивление последовательной цепи равняется сумме сопротивлений отдельных ее участков, то есть

$$R_э = \sum_{k=1}^{n} R_k,$$

$$I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = I \cdot R$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3.$$

5. Мощности определяются следующими соотношениями

$$U_k = IR_k, \quad P_k = IU_k = I^2 R_k,$$

где k=1,2,…, n – номер элемента.

Приемники электрической энергии последовательно, как правило, не соединяются, так как при этом требуется согласование номинальных данных приемников, исключается возможность независимого их отключения, а при выходе из строя одного из приемников отключаются также остальные приемники.

Параллельное соединение резистивных элементов.

Параллельным называется такое соединение элементов, при котором соединяются между собой как условные начала всех элементов, так и их условные концы (рис. 9).

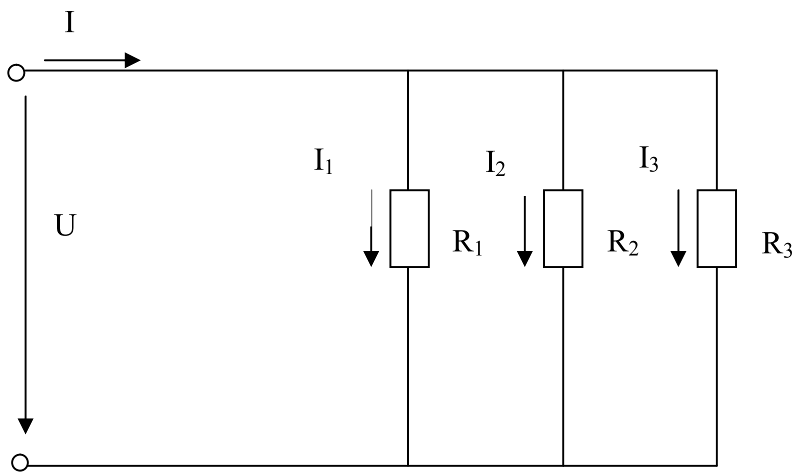


Рисунок 9

Свойства параллельной цепи:

– напряжение на параллельно соединенных участках одно и то же

$$U_1 = U_2 = U_3 = U\,;$$

– сумма токов отдельных веток равняется току до разветвления

$$I = I_1 + I_2 + I_3\ ;$$

– токи в параллельных ветвях обратно пропорциональны величинам сопротивлений этих ветвей

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; \qquad I_2 = \frac{U}{R_2}; \qquad I_3 = \frac{U}{R_3};$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{UR_2}{UR_1}; \qquad \frac{I_2}{I_3} = \frac{UR_3}{UR_2}; \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}; \qquad \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2};$$

– эквивалентная проводимость параллельной цепи равняется сумме проводимостей отдельных параллельных ветвей.

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3};$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3};$$

$$g = g_1 + g_2 + g_3.$$

Если параллельно соединить два сопротивления, то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2};$$

Тогда

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}.$$

При увеличении числа параллельно соединенных ветвей эквивалентная проводимость электрической цепи возрастает, а эквивалентное сопротивление соответственно уменьшается. Это приводит к увеличению тока *I*. Если напряжение остается постоянным, то увеличивается также общая мощность, а токи и мощности ранее включенных ветвей не изменяются.

Смешанное соединение резистивных элементов.

При наличии в цепи только одного источника ЭДС внешнюю по отношению к источнику часть электрической цепи можно в большинстве случаев рассматривать как смешанное (последовательно-параллельное) соединение резистивных элементов. В схеме на рис. 10 приведен пример смешанного соединения резистивных элементов, в этом случае эквивалентное сопротивление равно

$$R_{э_{ав}} = R_2 + R_3 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5};$$

$$R_э = R_1 + R_{э_{ав}}$$

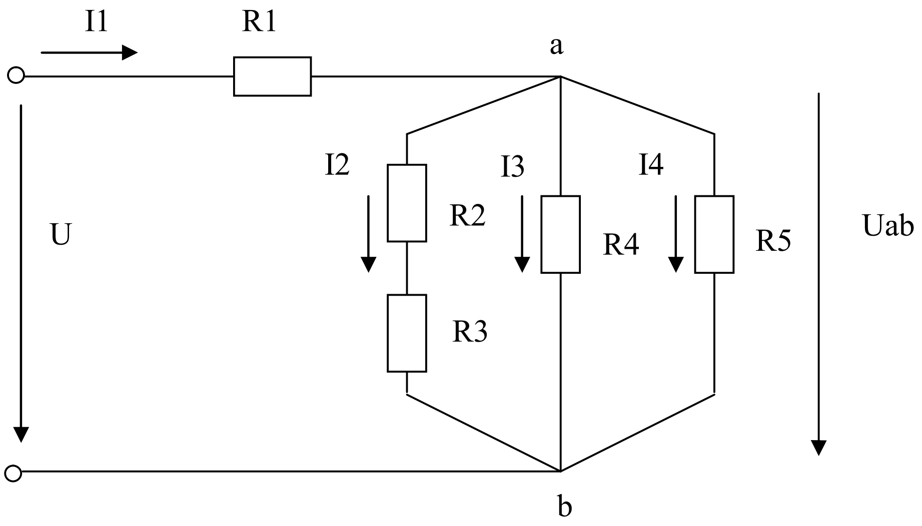


Рисунок 10

Ток в неразветвленной части цепи равен

$$I_1 = \frac{U}{R_э}.$$

Чтобы вычислить токи в ветвях цепи, нужно определить $U_{ав}$

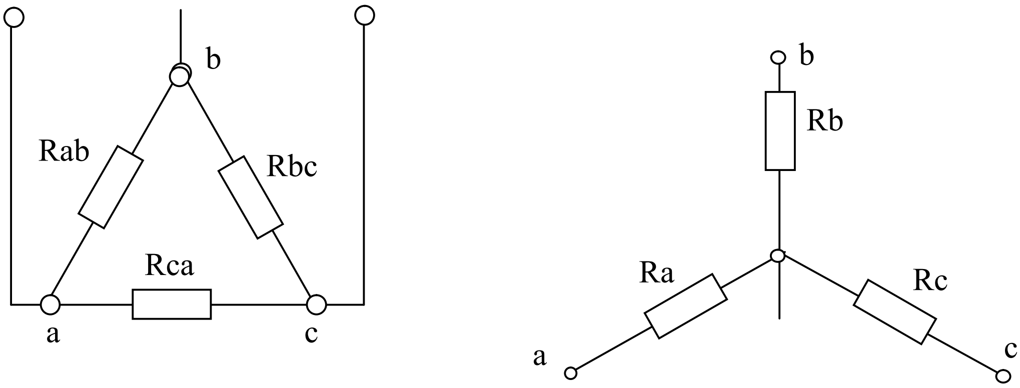
$$U_{ав} = I_1 R_{э_{ав}}$$

Затем по закону Ома вычислим токи в ветвях

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2 + R_3}; \qquad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_4}; \qquad I_4 = \frac{U_{ab}}{R_5}.$$

Соединение резистивных элементов треугольником.

Под соединением ***треугольником*** понимается соединение, приведенное на рис. 11, а.



а) б)

Рисунок 11

Для упрощения расчета и анализа некоторых электрических цепей, в которых резистивные элементы соединены треугольником, целесообразно заменить их резистивными элементами, соединенными звездой (рис. 11, б).

Замена треугольника резистивных элементов эквивалентной звездой должна производиться таким образом, чтобы после замены токи в остальной части цепи, а также напряжения между точками ab, bc, ca остались без изменения.

С помощью законов Кирхгофа можно получить следующие формулы для определения сопротивлений эквивалентной звезды

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}; \qquad R_b = \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}; \qquad R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}.$$

Иногда оказывается целесообразным заменить резистивные элементы, соединенные звездой, эквивалентным треугольником. Формулы можно найти в учебниках.

Мостовое соединение. Примером электрической цепи, в которой резистивные элементы соединены треугольником, являются мостовые цепи (рис. 12, а). Как видно, в мостовой цепи резистивные элементы образуют два смежных треугольника, и нет ни одного элемента, который был бы соединен с другим последовательно или параллельно.

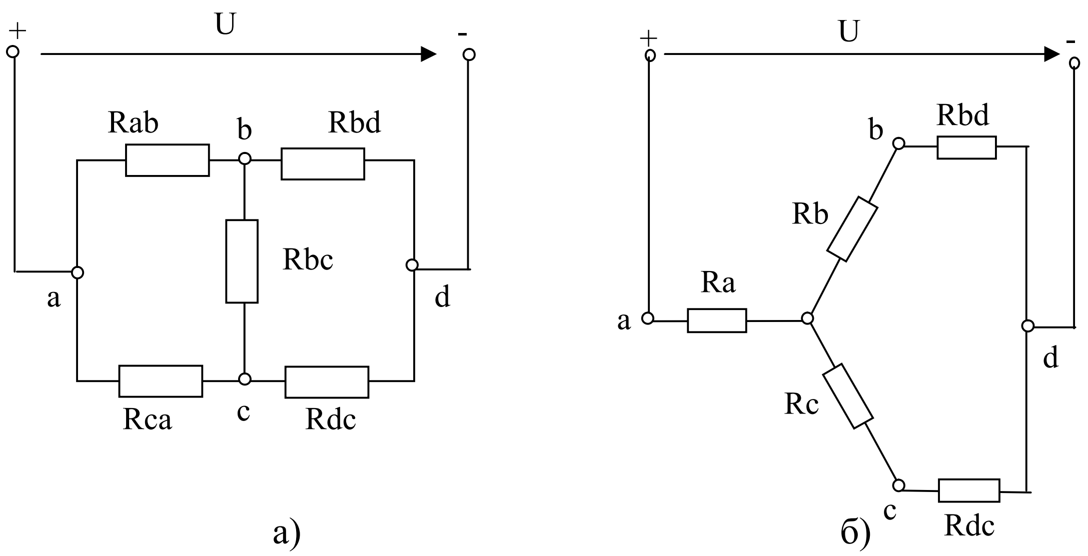


Рисунок 12

Однако если заменить, например, резистивные элементы R_{ab}, R_{bc}, R_{ca}, соединенные треугольником, эквивалентными элементами R_a, R_b, R_c, соединенными звездой (рис. 12, б), то получим цепь со смешанным соединением резистивных элементов, методика расчета которой была рассмотрена выше.

2. Метод законов Кирхгофа

Рассмотрим пример расчета схемы по методу законов Кирхгофа. Исходными данными для решения задачи являются параметры элементов цепи и ее конфигурация.

Для нахождения токи во всех ветвях цепи составим систему уравнений, пользуясь первым и вторым законами Кирхгофа.

По первому закону Кирхгофа составляется число независимых уравнений на 1 меньше общего числа узлов. В данном случае составляется 3 уравнения.

Недостающие уравнения составляем по второму закону Кирхгофа. При составлении уравнений на основании второго закона Кирхгофа следует выбирать независимые контуры, т.е. такие, которые содержат хотя бы одну ветвь, не вошедшую в контуры, для которых уже составлены уравнения.

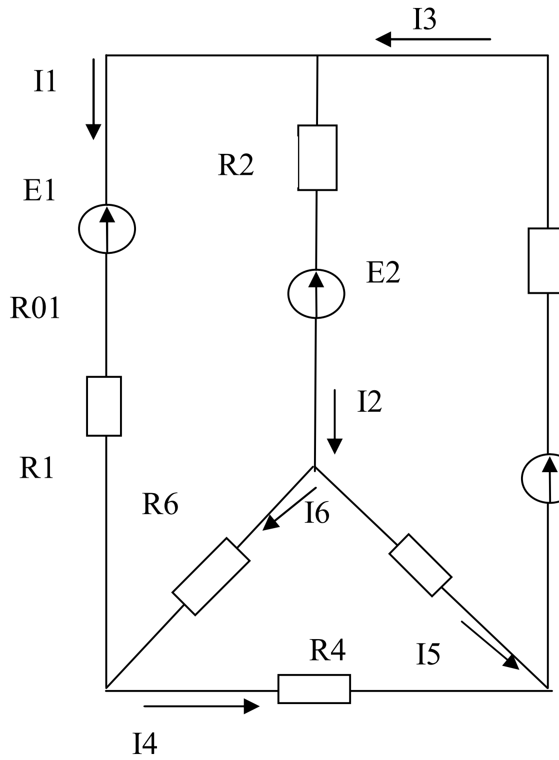


Рисунок 13

Таким образом, составим систему из 6 уравнений с 6 неизвестными.

Для узла ‘a’: $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$

Для узла ‘b’: $I_2 - I_5 - I_6 = 0$

Для узла ‘c’: $I_1 - I_4 + I_6 = 0$

Контур ‘abca’: $E_1 - E_2 = -I_1(R_0 + R_1) + I_2(R_{02} + R_2) + I_6R_6$

Контур ‘adba’: $E_2 - E_3 = -I_2(R_{02} + R_2) + I_3R_3 - I_5R_5$

Контур ‘bdcb’: $0 = -I_4R_4 + I_5R_5 + I_6R_6$

Решив эту систему уравнений, можно найти токи I_1-I_6. Но решение систем уравнений требует значительных затрат времени.

3.Метод контурных токов.

Этот метод может быть применен для расчета любой линейной цепи. Его применение позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений по сравнению с числом уравнений, составляемых по законам Кирхгофа.

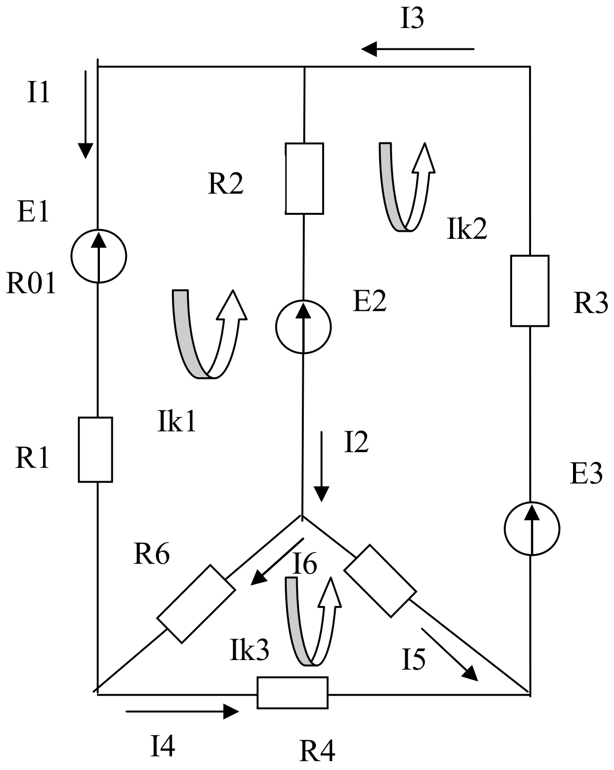


Рисунок 14

Рассмотрим метод контурных токов на конкретном числовом примере.

Дано: E1=10 В; E2=6 В; E3=24 В; R01=0,8 Ом; R02=0,3 Ом

R1=3,5 Ом; R2=5 Ом; R3=6 Ом; R4=6 Ом; R5=3 Ом; R6=1 Ом

Найти: 1) Токи в ветвях цепи. 2) Составить баланс мощности.

Составляем систему уравнений относительно контурных токов Iк1, Iк2, Iк3 по второму закону Кирхгофа. Контурный ток – один и тот же ток во всех ветвях соответствующего контура.

Принимаем условно направление контурных токов по часовой стрелке.

$$E_1 - E_2 = I_{k1}(R_1 + R_{01} + R_2 + R_{02} + R_6) - I_{k2}(R_2 + R_{02}) - I_{k3}R_6$$

$$E_2 - E_3 = -I_{k1}(R_2 + R_{02}) + I_{k2}(R_2 + R_{02} + R_3 + R_5) - I_{k3}R_5$$

$$0 = -I_{k1}R_6 - I_{k2}R_5 + I_{k3}(R_4 + R_5 + R_6)$$

Подставляем в уравнения известные значения ЭДС и сопротивлений.

$$4 = 10{,}6I_{k1} - 5{,}3I_{k2} - 1I_{k3}$$

-18= -5,3Ik1+14,3Ik2-3Ik3

0=-1Ik1-3Ik2+10Ik3

Решим эту систему методом определителей. Представим эту систему в общем виде

$$b_1 = a_{11}I_{k1} + a_{12}I_{k2} + a_{13}I_{k3}$$

$$b_2 = a_{21}I_{k1} + a_{22}I_{k2} + a_{23}I_{k3}$$

$$b_3 = a_{31}I_{k1} + a_{23}I_{k2} + a_{33}I_{k3}.$$

Тогда главный определитель вычисляется следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a11\ a12\ a13 \\ a21a22a23 \\ a31a32a33 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\sum_j a1_j \bullet \Delta 1_j = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Здесь i-номер строки, j-номер столбца.

Следует заметить, что все члены матрицы записываются с учетом знаков.

Для решаемого примера получим главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10,6 & -5,3 & -1 \\ -5,3 & 14,3 & -3 \\ -1 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 10,6[14,3\cdot 10-(-3)]-(-5,3)[(-5,3)\cdot 10-(-1)\cdot(-3)]+(-1)[(-5,3)\cdot 10-$$

$$-(-1)(-3)]=1093,4$$

Первый определитель

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} b1\ a12\ a13 \\ b2\ a22\ a23 \\ b3\ a32\ a33 \end{vmatrix}$$

Для примера

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 4 & -5,3 & -1 \\ -18 & 14,3 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -472$$

Второй определитель

$$\Delta 2=\begin{vmatrix} a11 & b1 & a13 \\ a21 & b2 & a23 \\ a31 & b3 & a33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10,6 & 4 & -1 \\ -5,3 & -18 & -3 \\ -1 & 0 & 10 \end{vmatrix} =-1666$$

Третий определитель

$$\Delta 3=\begin{vmatrix} a11 & a12 & b1 \\ a21 & a22 & b2 \\ a31 & a32 & b3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10,6 & -5,3 & 4 \\ -5,3 & 14,3 & -18 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} =-547$$

Зная определители, можно вычислить значения контурных токов

$$I_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{472}{1093,4} = -0,4317A$$

$$I_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1666}{1093,4} = -1,5237A$$

$$I_{k3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{547}{1093,4} = -0,5003A$$

Знак ’-‘ перед значением тока означает, что ток в контуре имеет противоположное направление. Поставим истинные направления контурных токов.

Теперь определяем значения токов в ветвях цепи. Ток I1 равен току Iк1 и направлен в том же направлении. Аналогично – для токов во всех внешних цепях.

$$I_1 = I_{k1} = 0,4317A$$

$$I_3 = I_{k2} = 1,5237A$$

$$I_4 = I_{k3} = 0,5003A$$

Токи в смежных ветвях определяются как разность значений контурных токов, протекающих в этих ветвях. При этом направление тока в этой ветви совпадает с направлением большего по величине контурного тока.

Итак,

$I_2 = I_{k2} - I_{k1} = 1{,}5237 - 0{,}4317 = 1{,}092A$

$I_5 = I_{k2} - I_{k3} = 1{,}5237 - 0{,}5003 = 1{,}0234A$

$I_6 = I_{k3} - I_{k1} = 0{,}5003 - 0{,}4317 = 0{,}0686A$

Теперь мы можем проставить истинные направления токов в ветвях цепи. Для проверки правильности расчета электрической цепи составляется баланс мощностей. Мощность, генерируемая источниками ЭДС, должна равняться мощности, потребляемой потребителями цепи плюс потери мощности на внутреннем сопротивлении источников ЭДС. Следует учитывать, что если ток в ветви совпадает с направлением ЭДС в источнике, то мощность вырабатывается источником. Если не совпадает – источник потребляет мощность. С учетом этого запишем

$P_u = E_3 I_3 = 24 \cdot 1{,}5237 = 36{,}5685Bm$

$P_n = E_1 I_1 + E_2 I_2 + I_1^2(R_1 + R_{01}) + I_2^2(R_2 + R_{02}) + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 36{,}5685Bm$

Баланс мощностей сошелся P_u=$P_п$. Это означает, что цепь рассчитана верно.